UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

ALTAMIRO MARLON RIBEIRO

PRODUTO EDUCACIONAL

CADERNO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE CÁLCULO DE ÁREA COM A CONTRIBUIÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

JOINVILLE

2021

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Docente,

Este Caderno de Atividades é produto de uma Dissertação intitulada *"Cálculo de Área: uma proposta de ensino com aporte da história da matemática"*, realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) sob a orientação da Professora Doutora Ligia Liani Barz e coorientação do Professor Doutor Rogério de Aguiar.

O presente Caderno de Atividades se destina ao professor(a) e contém uma sequência de 5 Aulas, que podem ser adaptadas em planos de aula, voltadas para a resolução de atividades desafiadoras e significativas relacionadas ao ensino-aprendizagem de geometria, em específico, o cálculo de área. O produto educacional é direcionado às Terceiras Séries do Ensino Médio, porém o professor é livre para transpor o conteúdo para outras séries, desde que observados os pré-requisitos básicos para a resolução das atividades propostas.

As atividades foram elaboradas e pensadas para oferecer subsídios que contribuirão com o enriquecimento de seus conhecimentos docentes bem como a sugestão de uma metodologia onde a Aula é programada em torno de problemas envolvendo um único conteúdo, com momentos pré-resolução e pós-resolução, todos bem definidos com relação aos objetivos sugeridos para as atividades e ao tempo de duração dos momentos da Aula.

Dessa forma, Professor(a), quero registrar que é muito bom fazer parte desse momento, em que se busca ampliar o referencial teórico sobre esse tema da Matemática, de modo a melhorar sua prática docente com novas propostas de ensino e propor a seus estudantes práticas metodológicas que transcendem às tradicionais, de modo a trazer avanços para o ensino de Geometria. Espero que esse material contribua de forma efetiva para seu aperfeiçoamento profissional e pessoal, pois de forma direta, seus alunos irão usufruir desse seu aperfeiçoamento na forma com que lhes serão oferecidas as intervenções desse Caderno de Atividades.

As atividades desse caderno usam a História da Matemática como recurso didático, explorando tópicos da história onde o desenvolvimento ou o avanço da forma de calcular área trouxe à humanidade uma nova tecnologia ou uma nova ferramenta intelectual para solucionar algum problema de sua época.

Desejamos que você faça um excelente uso desse material tornando suas aulas mais desafiadoras e junto com seus alunos possa construir o conhecimento matemático escolar necessário para que eles possam exercer a cidadania plena, com liberdade e senso crítico.

Altamiro Marlon Ribeiro

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Cada Aula do Caderno de Atividades traz uma sequência de **Momentos** voltados para desenvolver habilidades e competências necessárias à resolução de problemas não muito convencionais e inspiradas na história da matemática. A história da matemática usada como aporte em cada Aula pode estar exposta na forma direta, pela discussão de um problema histórico ou de forma indireta aplicando alguma técnica de resolução usual em outros tempos.

O objetivo central da Aula é resolver uma atividade que será denominada **Atividade Principal**, o caminho para a sua resolução será dado pelo professor através da resolução feita por ele de uma atividade anterior a essa, denominada **Atividade Motivadora**. A correção da **Atividade Principal** se dará em um momento chamado **Painel de Soluções**, após a correção da atividade principal, o professor fará um breve resumo da aula em um momento denominado **Sistematização**. A Aula é finalizada propondo-se aos estudantes a resolução de uma questão avaliativa, de nível de dificuldade intermediário, para aferir se o objetivo de aprendizagem dessa Aula foi alcançado. Ao final de cada Aula teremos três questões complementares para serem propostas como tarefa ou para serem aplicadas aos estudantes que desenvolverem muito rápido a atividade principal da aula.

As Aulas desse Caderno de Atividades estão divididas em alguns **Momentos Pedagógicos** (etapas), definidos quanto aos objetivos e as ações a serem executadas, conforme descrito a seguir:

a) **Atividade Motivadora:** Trata-se de um texto introdutório sobre o tema, visando a problematização ou instigação sobre o assunto da aula e/ou uma atividade com inspiração na história, simples e rápida que terá a função de retomar um pré-requisito necessário ao assunto, podendo o enunciado desta atividade trazer o texto introdutório. Esse momento deve ser conduzido pelo professor na resolução da atividade ou na interpretação do texto.

b) **Atividade Principal:** A atividade principal da Aula é elaborada trazendo fatos da história relacionados ao tema da Aula e deve ser solucionada preferencialmente em duplas ou trios. Essa atividade tem um grau de dificuldade desafiador, cuja resolução exige demanda cognitiva acentuada.

c) **Painel de Soluções:** Esse momento trata-se da correção da atividade principal. O professor(a) deve convidar os alunos a ir à lousa, pois devem protagonizar esse momento. Eles devem expor para a turma suas estratégias e resultados para que possam ser comparados aos resultados obtidos pelos colegas, procurando perceber as melhores estratégias para a resolução, promovendo uma discussão em torno dessas apresentações.

d) **Sistematização:** A sistematização do assunto é feita através de um texto auxiliar para que o professor traga a forma atual do conteúdo estudado, com o devido rigor conceitual disponível para esse nível de escolaridade, com definições, proposições e se possível, algumas demonstrações.

e) **Atividade Avaliativa:** Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema similar aos propostos anteriormente. O objetivo desse momento é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado. Será aplicada uma questão relacionada ao assunto, que deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula.

f) **Atividades Complementares:** Serão propostas aos estudantes três questões complemetares, uma relacionada a alguma aplicação do tema tratado na aula, uma envolvendo algum tópico de história da matemática e uma terceira retirada de bancos de questões de vestibulares e ENEM relacionada também ao tema. Essas três questões podem ser propostas como tarefa ou como atividade para resolver em sala de aula, pois os estudantes com melhor desempenho em matemática provavelmente solucionarão a atividade principal da aula em menor tempo que os demais, e dessa forma, podem trabalhar com essas atividades complementares ainda em sala de aula.

Professor(a), no último capítulo do Caderno de Atividades estão registradas propostas de soluções para todas as atividades desse material, você deve tomar conhecimento dessas resoluções antes de aplicar as atividades.

2 AULA 1: CÁLCULO DE ÁREA POR DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO

Nessa Aula, trataremos do cálculo de área por decomposição e composição. Para calcular uma área irregular, faremos a decomposição dessa área em figuras planas menores, cuja forma de derminar o valor da area são conhecidas. A área da figura irregular será dada pela soma das áreas menores as quais foi decomposta. Para essa aula, estabelecemos os objetivos a seguir.

Objetivos:

- Determinar áreas de figuras planas irregulares usando técnica de cálculo por decomposição e composição.

- Comparar os diferentes resultados obtidos e discutir sobre as origens dessas diferenças.

- Estabelecer as diferenças entre uma situação idealizada e uma situação real.

- Conhecer as definições que caracterizam a grandeza "Área".

- Conhecer a dedução da fórmula da área do quadrado cujos lados são racionais.

Observações:

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.

- Materiais solicitados: régua, calculadora, Figura 2.3 impressa em folha A4 milimetrada, papel manteiga/vegetal.

- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a truma os objetivos desse da Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.

- Essa Aula é elaborada para ser executada em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula. Se não houver disponibilidade de duas aulas seguidas, pode-se trabalhar até a resolução da atividade principal em uma aula e na aula seguinte, promover o Painel de Soluções, a Sistematização e aplicar a Atividade avaliativa.

2.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada "Atividade Principal". Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

2.1.1 Atividade Motivadora

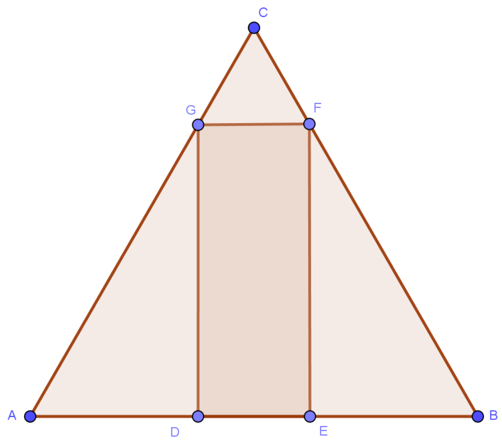
A origem da nossa geometria remonta das civilizações mais antigas do oriente médio e Egito, que desenvolveram sua escrita por volta do quarto milênio a.E.C e, datam dessa época, os primeiros registros de técnicas de cálculo de área. Os babilônios habitavam os vales dos rios Eufrates e Tigre e os egípcios, o norte da África, ao longo do rio Nilo. Os babilônios descobriram regras para cálculos de áreas de figuras geométricas simples e também podiam calcular o volume de vários sólidos. Os egípcios foram estimulados a desenvolver sua geometria por questões de sobrevivência, pois dependiam da agricultura às margens do rio Nilo, que todo ano inundava essas terras, havendo então a necessidade de sua medição e demarcação permanentemente.

É consenso entre os historiadores, tais como Eves (2004) e Roque (2012) que essas civilizações desenvolveram métodos de calcular área por questões práticas, tais como, demarcações de fronteiras, divisões de propriedades, construção civil e militar, demarcação de terras de cultivo, etc.

Todas essas atividades envolvem a necessidade de se calcular área. Os babilônios, os egípcios e posteriormente os gregos desenvolveram as mais diversas técnicas. A técnica mais fundamental seria o cálculo de área por decomposição. A técnica consiste em dividir a área a ser calculada em áreas menores, que por razões práticas são mais fáceis de serem obtidas, por exemplo, decompor em quadrados ou retângulos. A área total é dada pela soma (a composição) das áreas menores obtidas da decomposição.

Problema: O triângulo ABC da Figura 2.1 é equilátero e tem área igual a $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. Usando decomposição, vamos determinar a área do retângulo $DEFG$ da Figura 2.1, sabendo que sua base é $\frac{1}{4}$ do lado de ABC.

Figura 2.1 – Retângulo $DEFG$ inscrito no triângulo ABC.



Fonte: Autoria própria.

Orientações para Professores(as): Essa atividade é uma introdução à Atividade Principal da Aula. O texto deve ser lido em conjunto com a turma e o problema deve ser resolvido por você. Sugerimos a organização da turma em duplas ou trios, a leitura dos objetivos da aula, a leitura do texto introdutório e a resolução da atividade motivadora sejam executados em um tempo de 15 minutos.

Sugestões para Professores(as): O texto introdutório, anterior ao problema da Atividade Motivadora pode ser substituído por um vídeo, uma apresentação em *slides* desse tema ou até mesmo outro texto, porém devem apreciar os aspectos históricos do tema. Você pode fazer essas adaptações conforme as necessidades específicas de suas turmas. Uma outra possibilidade é pedir com antecedência que os estudantes efetuem uma pesquisa sobre o tema da aula, promovendo em sala um pequeno debate sobre essa pesquisa. Apenas tenha o cuidado de que nessa etapa os estudantes trabalhem ideias que os levarão a usar a decomposição e composição de áreas para a resolução da atividade principal.

2.1.2 Atividade Principal

O Sol sempre foi objeto de estudos, observações e até adoração pelos povos antigos, que entendiam sua importância nos processos de vida na Terra e atribuíam-lhe a característica de um Deus.

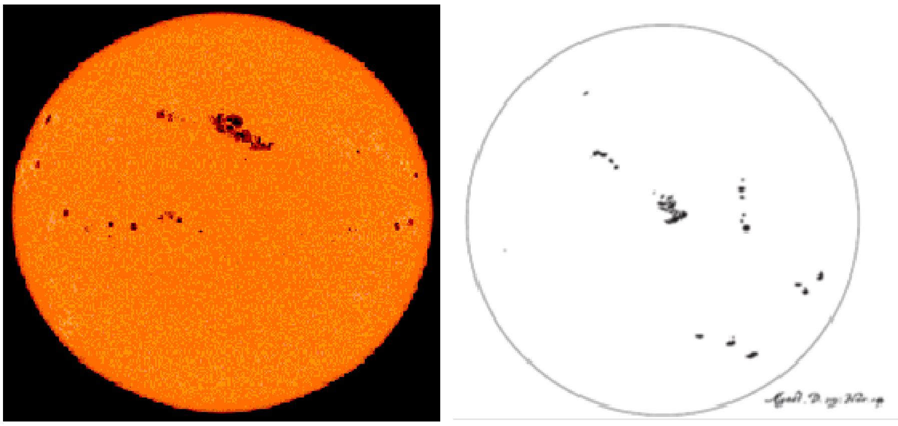
Observações do Sol e registros do número de manchas ocorrem há mais de 1000 anos. Como todo ramo de pesquisa em fase inicial, o registro das primeiras manchas solares causou inúmeras especulações e definições inconsistentes. Esse cenário mudou lentamente a partir da melhoria dos instrumentos de observação e do amadurecimento de ideias e de concepções.

Os chineses já observavam manchas escuras na fotosfera solar a olho nu, desde 1000 a.E.C. (antes da Era Comum). Em torno de 95% do histórico de observações são orientais, em especial da China e da Coréia e, assim, manteve-se até 1150 E.C. (Era Comum) cobrindo um intervalo de tempo muito maior que das observações feitas na era do telescópio.

Observações do Sol a olho nu são possíveis desde que a mancha seja grande e que a atmosfera apresente condições favoráveis, como poeira e nebulosidade que reduza a luminosidade do Sol. Para Lorensie e Pacini (2016), os orientais já usavam filtros artesanais para amenizar a luz solar e facilitar a visualização das manchas.

Quando surgiu o telescópio na Europa, no século XVII, Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro a observar o Sol e o céu com o uso de telescópios, em 1611. Também foi o primeiro a observar manchas solares a olho nu e com o telescópio ao mesmo tempo, em 1612. Essa observação específica foi publicada em 1613, representada na Figura 2.2, à direita, e comparada com uma imagem atual da fotosfera, à esquerda.

Figura 2.2 – À esquerda, a fotosfera visível e à direita, as manchas retratadas por Galileu em 1610.



Fontes: O Sol - INPE. Desenho de Galileu, Lorensie e Pacini, 2016, p.110.

A partir da melhoria dos instrumentos e da colaboração de diversos cientistas, construiu-se o conceito de atividade solar e observou-se que:

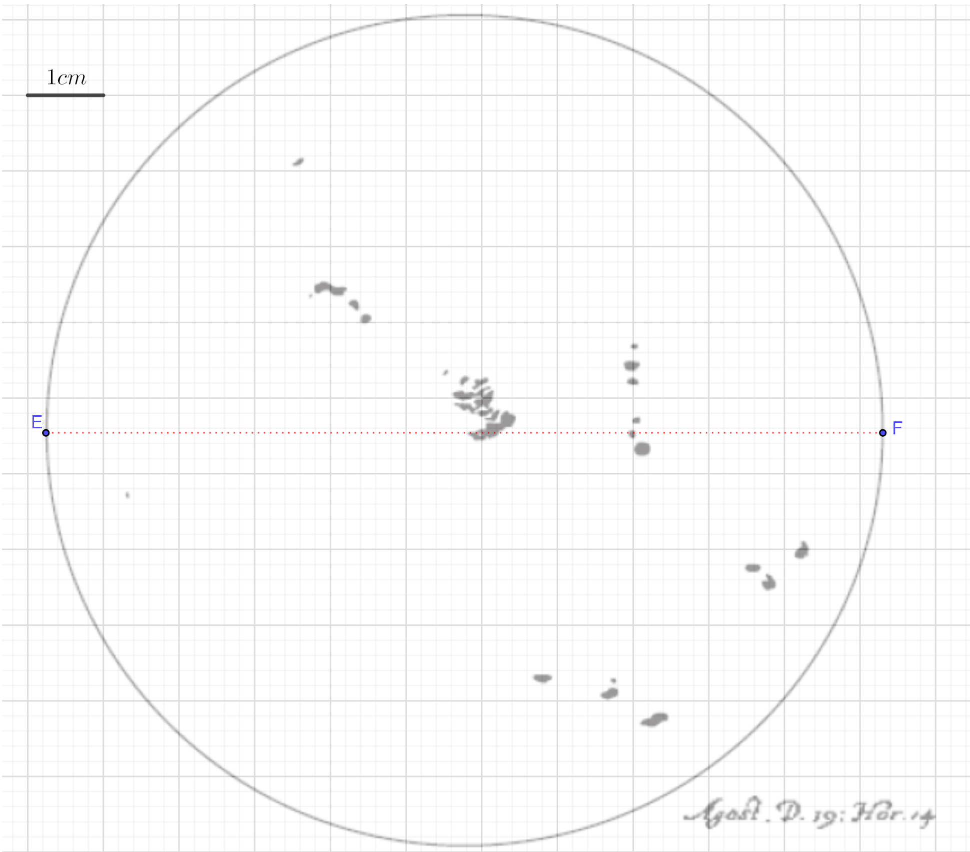
1) As manchas escuras na fotosfera do Sol surgem e desaparecem de maneira cíclica.

2) Uma quantidade maior de manchas indica o máximo solar e um menor número assinala um mínimo solar.

Com a reunião de tantas observações do Sol e com as centenas de registros da quantidade de manchas solares, foi possível compreender que a Terra passou por períodos de variabilidade na atividade solar, ao longo da história. Essas informações seguramente têm relevância científica, uma vez que se sabe que a vida na Terra depende da energia oriunda do Sol e que variações na emissão dessa energia pode nos fornecer explicações para diversos fenômenos climáticos. Atualmente, considera-se que o raio médio do Sol é igual a 695 700 *km*.

Problema: Usando o desenho feito por Galileu, sobre uma malha quadriculada, Figura 2.3, encontre um valor aproximado para a área ocupada pelas manchas solares representadas nesta figura e a seguir responda: "Quais os fatores que tornam nosso problema uma idealização da situação real?"

Figura 2.3 – Desenho de Galileu sobre malha quadriculada.



Fonte: Lorensie e Pacini, 2016, p.110.

Orientações para Professores(as): Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Motivadora em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos 25 minutos para a execução dessa atividade.

Sugestões para Professores(as): Nesta parte pode-se pedir aos alunos que façam uma pesquisa para responder a seguinte pergunta: Atualmente estamos passando por um período de mínimo ou de máximo solar? Qual a relação da tempetura da terra com os máximo e mínimos solares?

2.2 PAINEL DE SOLUÇÕES

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 20 minutos.

2.3 SISTEMATIZAÇÃO

O método usado na resolução dos problemas da aula, denomina-se cálculo de área por decomposição e composição. Esse método era muito empregado pelos matemáticos da antiguidade quando queriam determinar a área de figuras planas que não possuíam ***fórmulas definidas*** para seu cálculo.

(i) Polígonos congruentes tem áreas iguais.

(ii) Se P é um quadrado de lado unitário, então a área de P é igual a 1.

(iii) Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i com $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Note que a técnica de cálculo de área por decomposição é garantida pelo item (iii) pois indica que podemos decompor um polígono P e a área de P é a soma das áreas menores em que foi decomposto.

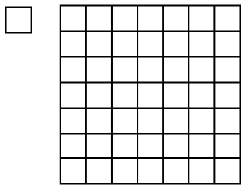
Usando a maneira como decompomos a área de polígonos, é possível demonstrar como se deduz a fórmula da área de um quadrado de lados comensuráveis. A demonstração apresentada a seguir pode ser encontrada em Lima (1991, pp. 11-12).

Proposição 2.1. *A área de um quadrado de lado l é l^2.*

Demonstração. Por definição, o quadrado é o quadrilátero de quatro lados iguais e quatro ângulos internos retos. O quadrado de lado 1 será nossa unidade de medida, denominado quadrado unitário.

Um quadrado Q, de lado medindo n, n inteiro, pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e área 1. Segue-se então, que a área do quadrado Q, é dada por $Q = n^2$. A Figura 2.4 a seguir representa um quadrado de lado 7, composto pela justaposição de 49 quadrados unitários.

Figura 2.4 – Quadrado de lado 7 e área 49.

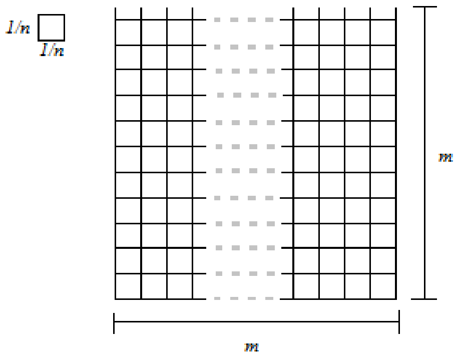


Fonte: Autoria própria.

Caso o quadrado tenha lado menor que 1, $\ell = \frac{1}{n}$, com n inteiro, então o quadrado unitário se decompõe mediante paralelas a seus lados, em n^2, quadrados congruentes a Q, compondo um quadrado de área 1, logo, $n^2 \times A(Q) = 1$. Portanto, $Q = \frac{1}{n^2}$.

Em um caso mais geral, se o lado de Q é racional, ou seja, $\ell = \frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$, m e n inteiros, decompõem-se os lados de Q em m segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$, obtendo m^2 quadrados de lados $\frac{1}{n}$, conforme Figura 2.5.

Figura 2.5 – Quadrado composto por m quadradinhos de lado $\frac{1}{n}$.



Fonte: Autoria própria.

Fazemos essa decomposição através de paralelas aos lados de Q. Dessa forma a área de cada um desses quadradinhos é $\frac{1}{n^2}$ e segue que

$$m^2 \times \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}. \tag{2.1}$$

Podemos então concluir que a área de um quadrado de lado racional $\frac{m}{n}$ é

$$Q = \frac{m^2}{n^2}. \tag{2.2}$$

□

Observação: Embora a demonstração que apresentamos foi para medidas comensuráveis a proposição é válida também para medidas incomensuráveis. Não apresentamos aqui a demonstração para lados incomensuráveis pois ela exige alguns conhecimentos mais avançados sobre limites e a passagem dos números racionais para os números reais que fogem ao escopo deste caderno de atividades. Maiores detalhes podem ser encontrados na dissertação que deu origem a este caderno, em Roque (2012) ou Eves (2004). Sugerimos 15 minutos para a execução dessa atividade.

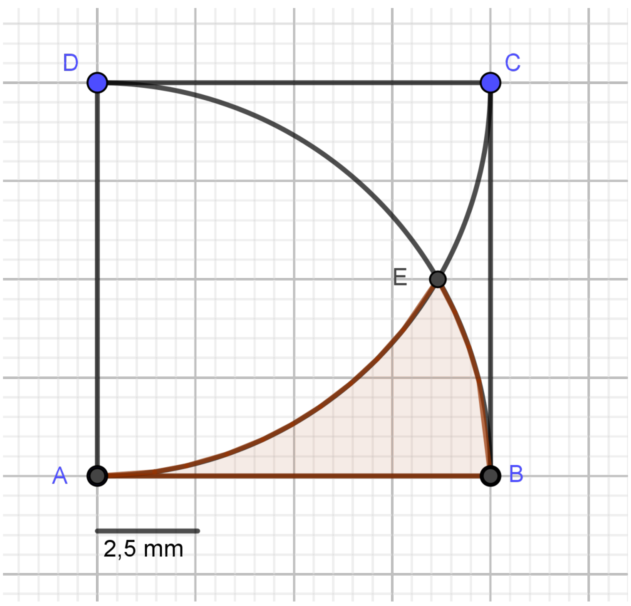
Fechamento da Aula 1: Nessa Aula, exercitamos a habilidade de perceber que podemos decompor e compor áreas, transformando uma área irregular em outra, ou várias outras cujo método de calcular é conhecido. Podemos fazer isso porque a área é uma grandeza aditiva, ou seja, todas as manchas solares de formato irregular da nossa figura podem ser agrupadas em 56 quadrados da malha, e como conhecíamos a área de um quadrado, basta usar uma multiplicação para solucionar o problema.

2.4 ATIVIDADE AVALIATIVA

Avaliação 1. Resolva o seguinte problema:

O polígono $ABCD$ da Figura 2.6 é um quadrado. Determine a área que está compreendida entre o arco AE, o arco EB e o lado AB.

Figura 2.6 – Quadrado decomposto em áreas não poligonais



Fonte: Autoria própria.

Orientações para Professores(as): O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado durante a Aula. Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema com um enunciado mais direto focado apenas no algoritmo relacionado ao cálculo de área da Atividade Principal. Essa questão avaliativa deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso não seja possível, você pode fazer a correção na aula seguinte.

2.5 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Questão 1: A necessidade de determinar área permanece até os dias atuais, alguns exemplos são: fazer um orçamento para ladrilhar um piso, decidir a área que um ambiente deve ter para acomodar certa quantidade de pessoas, construir *softwares* para determinar área de forma remota através de imagens de satélites, determinar áreas de tumores em imagens computadorizadas, etc. A seguir, trazemos uma situação muito comum no cotidiano onde aplicamos conhecimentos sobre cálculo de área.

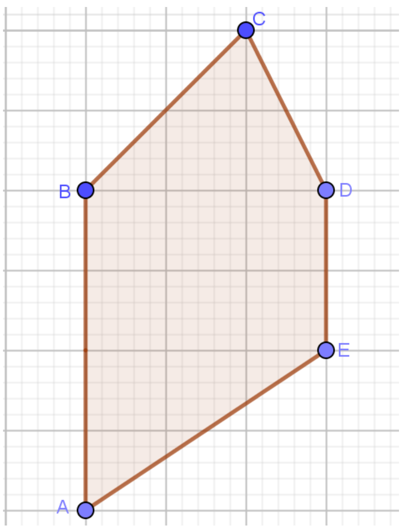
Supondo que a Figura 2.7 represente o piso de um ambiente que se quer ladrilhar, e que o lado de cada quadrado delimitado pela linha mais escura da malha mede 90 centímetros (cm), determine:

a) A área em metro quadrado (m^2) do piso.

b) Quantos ladrilhos quadrados de 90 cm de lado podem ser usados na pavimentação, supondo que não queremos reaproveitar recortes?

c) Foi uma boa decisão não reaproveitar recortes de ladrilhos para esse caso?

Figura 2.7 – Pentágono *ABCDE*



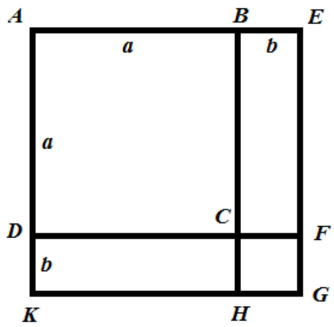
Fonte: Autoria própria.

Questão 2: As civilizações da antiguidade desenvolveram técnicas de calcular raízes de equações quadráticas através da aplicação do conhecimento disponível sobre segmentos e áreas. Em Eves (2004, p. 170), encontramos a Proposição 4, do livro II dos *Elementos* de Euclides, que estabelece a seguinte identidade:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2.3}$$

A identidade acima era comumente associada a um quadrado, conforme ilustra a Figura 2.8.

Figura 2.8 – Quadrado de lado $a+b$.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 2.8, $ABCD$ é um quadrado de área a^2, $BCFE$ e $DCHK$ são dois retângulos congruentes de área ab e $HCFG$ um quadrado de lado b^2. Dessa forma, a equação

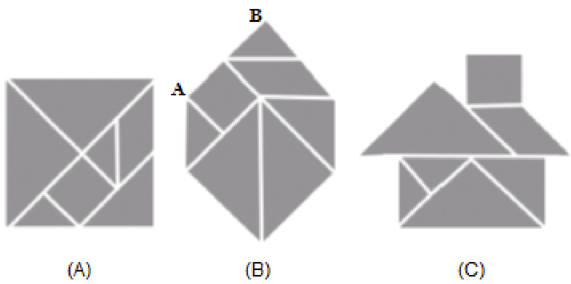
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c$$

indica que o quadrado de lado $a+b$ na Figura 2.8 tem área igual a c. Usando das ideias desse enunciado, resolva a equação quadrática

$$x^2 + 4x - 10 = 11.$$

Questão 3: (ENEM - 2011) O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas, recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da Figura 2.9 (A). Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras 2.9 (B) e (C).

Figura 2.9 – Composições com o Tangran



Fonte: ENEM (2020)

Se o lado AB do hexágono, mostrado na Figura 2.9 (B) mede 2 cm, então a área da Figura 2.9 (C), que representa uma "casinha", é igual a

a) 4 cm^2 **b)** 8 cm^2 **c)** 12 cm^2 **d)** 14 cm^2 **e)** 16 cm^2

Orientações para Professores(as): As Atividades Complemetares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da atividade principal ou da atividade avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

2.6 REFERÊNCIAS DIRECIONADAS

Atividade Motivadora:

- GASPAR, Maria Terezinha. "Explorando a Geometria Através da História da Matemática e da Etnomatematica". 2004. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf>. Acesso em 17 de novembro de 2019.

Atividade Principal:

- Imagem da fotosfera na Figura 2.2. Disponível em <http://www.inpe.br/ciaa2018/arquivos/aulas_ pdfs/o_ sol/OSol.pdf>. Acesso em 30 de novembro de 2019.

- LORENSI, Caren; PACINI, Alesandra Abe. "Observações de manchas solares: Uma história antiga". 2016. Disponível em <https://revista.univap.br/index.php/revistaunivap/article/view/422/0>. Acesso em 2 de dezembro de 2019.

- Raio do Sol: Parâmetros físicos e Astronômicos. Disponível em < http://astro.if.ufrgs.br/dados.htm>. Acesso em 2 de dezembro de 2019.

Sistematização:

- LIMA, et al. **Temas e problemas elementares.** Coleção PROFMAT, 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Atividade Avaliativa:

- LEONARDO, Fábio Martins, organizador. **Conexões com a Matemática.** V. 2. São Paulo: Moderna, 2013.

Atividades Complementares:

- ENEM. Exame nacional do ensino médio. 2020. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.

- EVES, Howard, tradução: Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

3 AULA 2: RAZÕES ENTRE GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS

O tema abordado nessa aula não trata especificamente sobre o cálculo de área. Mas, como a descoberta da incomensurabilidade entre grandezas se constituiu em um problema central da matemática grega a partir do século IV a.E.C. e não é tomado como um tema importante e merecedor de um capítulo ou seção na grande maioria dos livros didáticos brasileiros, propomos essa aula por entender que devemos criar essa demanda pois esse conteúdo pode contribuir de forma significativa para qualquer projeto de ensino voltado para o estudo da geometria.

Dessa forma, é importante que os estudantes conheçam mais a fundo esse tópico da história matemática pois os esforços à época, para contornar esse problema motivaram novos desenvolvimentos teóricos, como por exemplo, a separação entre o tratamento matemático dos números e o tratamento matemático das grandezas, a generalização da teoria das razões, que até então era dependente da noção de proporção e por fim, a consolidação de uma categoria de números que futuramente viriam a ser chamados de "números irracionais" presentes na maioria dos resultados que obtemos nos problemas escolares que envolvem trigonometria.

Objetivos:

- Conhecer a origem do problema da incomensurabilidade em seu contexto dentro da história da Matemática.

- Reconhecer a existência de grandezas incomensuráveis;

- Verificar a comensurabilidade ou incomensurabilidade entre grandezas;

- Determinar o máximo divisor comum (MDC) entre grandezas aplicando um processo chamado antifairese;

Observações:

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.

- Materiais solicitados: régua, compasso e calculadora.

- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.

- Essa Aula é elaborada para ser executada em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula. Se não houver disponibilidade de duas aulas seguidas, pode-se trabalhar até a resolução da atividade principal em uma aula e na aula seguinte, promover o Painel de Soluções, a Sistematização e aplicar a Atividade avaliativa.

3.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada "Atividade Principal". Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

3.1.1 Atividade Motivadora

A geometria ocupa-se essencialmente em estudar grandezas como comprimento, área e volume. Uma grandeza física é por definição, tudo que pode ser medido, ou seja, é algo pertencente ao mundo físico que pode ser associado a um número e uma unidade de medida.

Nessa aula vamos discutir a existência de grandezas que não podem ser medidas de maneira exata, chamadas grandezas incomensuráveis. Acredita-se que o descobrimento desse tipo de grandeza trouxe uma crise na matemática da Grécia Antiga, mas como todo conhecimento científico, há estudiosos que contestam tal crise alegando falta de evidências sobre o fato e afirmando que o problema causou um certo desconforto no início, mas foi contornado e passou a integrar a matemática, fazendo parte dela até os dias atuais.

Quando pensamos em um quadrado de lado medindo 1 metro, sabemos que sua área é 1 m^2. Essa é uma das unidades de área e, no Sistema Internacional de Unidades de Medidas (SI), é a unidade padrão para a medida de área, assim como o metro (m) é a unidade de medida do SI para comprimentos.

Orientações para Professores(as): O propósito desse momento da Aula é apresentar a existência de segmentos incomensuráveis e despertar o interesse dos estudantes pelo tema. Esse momento, deve ser conduzido pelo professor e não se trata de uma atividade, mas um texto onde se conjectura sobre a incomensurabilidade da raiz quadrada de 2. O texto traz uma série de tentativas de se encontrar um número x pertencente ao intervalo real $1 < x < 2$ que elevado ao quadrado é igual a 2. Sugerimos que o tempo para a organização da turma, leitura dos objetivos da Aula e o desenvolvimento desse texto seja de no máximo 15 minutos.

Uma hipótese que é muito difundida sobre a descoberta de segmentos de reta incomensuráveis, é a tentativa de racionalizar (transformar em um número racional) a diagonal de um quadrado de lado 1, que ocorreu por volta do ano 400 a.E.C.

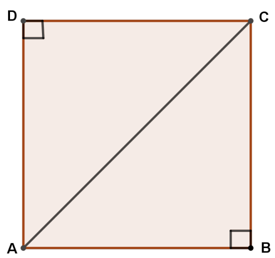
Números racionais, são aqueles que podem se tornar frações, e essa ideia está intimamente ligada ao ato de medir. Por exemplo, se dividirmos um segmento de reta de 1m de comprimento em 5 partes iguais, ao tomarmos um segmento formado por três dessas partes, esse segmento mede três quintos de um metro.

No pensamento da época, comprimento, área e volume eram grandezas físicas que podiam ser medidas, bastava encontrar a unidade de medida adequada para cada caso. Dessa forma, a descoberta de segmentos de retas que não podiam ser comparados com nenhum outro segmento dado como unidade, pode sim ter causado um certo mal-estar entre os matemáticos da época.

Problema: A diagonal de um quadrado de lado 1 tem medida representada por um número racional?

No quadrado unitário $ABCD$, a diagonal AC divide o quadrado em dois triângulos retângulos: o triângulo ABC, retângulo em B, e o triângulo ADC, retângulo em D, ambos congruentes pelo caso "lado, lado, lado" pois AC é lado comum, $AB = CD$ e $BC = AD$. Observe a Figura 3.1

Figura 3.1 – Diagonal AC de comprimento incomensurável.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, a diagonal AC é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= (AB)^2+(BC)^2\\ &= 1^2+1^2\\ &= 1+1\\ &= 2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros de (3.1), temos:

$$\sqrt{(AC)^2}=\sqrt{2} \Longrightarrow AC=\sqrt{2}. \tag{3.2}$$

Portanto, o comprimento da diagonal AC é $\sqrt{2}\, u.c.$

Vamos prestar atenção na igualdade $(AC)^2 = 2$. É possível encontrarmos um número racional que ao ser elevado ao quadrado o resultado é 2?

Faremos algumas tentativas, mas inicalmente, observe que $1^2 = 1 \Longrightarrow \sqrt{1} = 1$ e $2^2 = 4 \Longrightarrow \sqrt{4} = 2$. Dessa forma $\sqrt{2}$ é um valor entre 1 e 2, ou seja, não é um número inteiro. Vamos elevar alguns números entre 1 e 2 ao quadrado e observar o resultado, completando as tabelas a seguir.

Tabela 3.1 – Valores de x e seus respectivos quadrados, onde $1 < x < 2$.

x	x^2
$1,1$	$1,21$
$1,2$	$1,44$
$1,3$	$1,69$
$1,4$	$1,96$
$1,5$	$2,25$

Ao preenchermos a Tabela 3.1, notamos que o 2 está entre $(1,4)^2$ e $(1,5)^2$. Vamos proceder da mesma forma agora usando valores de x entre $1,4$ e $1,5$.

Tabela 3.2 – Valores de x e seus respectivos quadrados, onde $1,4 < x < 1,5$.

x	x^2
$1,41$	$1,9881$
$1,42$	$2,0164$

Na Tabela 3.2, notamos que bastaram 2 linhas para encontrar o intervalo em que se situa o número que elevado ao quadrado é 2. Agora, faremos o mesmo procedimento para valores de x entre $1,41$ e $1,42$.

Tabela 3.3 – Valores de x e seus respectivos quadrados, onde $1,41 < x < 1,42$.

x	x^2
$1,411$	$1,990921$
$1,412$	$1,993744$
$1,413$	$1,996569$
$1,414$	$1,999396$
$1,415$	$2,002225$

Na Tabela 3.3, conseguimos situar $\sqrt{2}$ em um intevalo muito menor que nas tabelas anteriores, conseguimos determinar que o número que elevado ao quadrado é 2 está entre $1,414$ e $1,415$.

Podemos continuar esse raciocínio pois, entre dois números racionais, existem infinitos outros racionais, logo, é possível conjecturar, com um certo grau de segurança que nunca vamos encontrar um número decimal exato que elevado ao quadrado resulte em 2.

Portanto, a diagonal do quadrado da Figura 3.1 não pode ser medida por um número racional, em outras palavras, essa diagonal é uma grandeza incomensurável (formalizaremos essa afirmação em um outro momento da aula).

3.1.2 Atividade Principal

Desde sua descoberta, anterior aos anos 400 a.E.C, as grandezas incomensuráveis foram um grande desafio para os matemáticos gregos. Já comentamos antes que os gregos determinavam áreas por comparação, e se existem grandezas que não podem ser expressas na forma de fração, teríamos problemas sérios ao medí-las, pois medir é comparar com uma unidade tomada como padrão de medida.

O problema foi contornado com a teoria das proporções entre quatro grandezas que apresentaremos, atribuída ao filósofo platônico Eudoxo, nascido em torno de 400 a.E.C. Essa teoria em uma importamte obra da matemática grega, intitulada *Os Elementos de Geometria*, escrita pelo geômetra Euclides de Alexandria em 300 a.E.C.

Leia com atenção *Definição V.5* (lê-se definição 5 do livro 5) do *Elementos*:

Definição 3.1. *(Definição V.5. dos Elementos) Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, se quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e outros quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, são tais que os primeiros equimúltiplos ultrapassam, um a um, os segundos ou são iguais a estes ou são menores, que os últimos equimúltiplos considerados na ordem correspondente aos primeiros.*

Observe que é bem díficil de entender o que diz essa definição, mas podemos interpretá-la da seguinte maneira: as grandezas a, b, c e d estão na mesma razão, observado primeiramente que

$$a : b :: c : d, \tag{3.3}$$

se multiplicarmos a primeira e a terceira por um mesmo número inteiro e da mesma forma, multiplicarmos a segunda e a quarta, por outro número inteiro, chamaremos de m e n esses números, podemos encontrar três possibilidades:

i) $m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d.$

ii) $m \cdot a = n \cdot b \Rightarrow m \cdot c = n \cdot d.$

iii) $m \cdot a < n \cdot b \Rightarrow m \cdot c < n \cdot d.$

Na notação moderna, a asserção 3.3, é expressa por

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c. \tag{3.4}$$

Problema: Para entender a Teoria das Proporções de Eudoxo, considere quatro grandezas quaisquer, de mesma espécie, quatro áreas por exemplo, de medidas $a = 2\ cm^2$, $b = \sqrt{5}\ cm^2$, $c = \frac{2}{3}\ cm^2$ e $d = \frac{\sqrt{5}}{3}\ cm^2$ e os números inteiros $m = 5$ e $n = 3$. Com esses dados, resolva os itens a seguir.

a) Verifique se há proporção entre as áreas a, b, c e d.

b) Para os valores dados, verifique se a desigualdade a seguir é verdadeira.

$$m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d. \tag{3.5}$$

c) Do enunciado, note que $c = \frac{a}{3}$ e $d = \frac{b}{3}$. Verifique se essa proporção se manteve nos resultado numéricos de $m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d$ obtidos no item (b).

d) Busque alguns valores para a, b, c, d (devem estar em proporção) sendo b e d incomensuráveis (irracionais) usando $m = 5$ e $n = 7$, tal que as desigualdades $m \cdot a < n \cdot b$ então $m \cdot c < n \cdot d$ sejam verdadeiras. Verifique também se a proporção se manteve.

e) Em que situação teremos a igualdade (ii), ou seja: $m \cdot a = n \cdot b$ e $m \cdot c = n \cdot d$.

Orientações para Professores(as): Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Motivadora em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos que essa atividade seja trabalhada em um tempo de 25 minutos.

3.2 PAINEL DE SOLUÇÕES

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

3.3 SISTEMATIZAÇÃO

Vamos mostrar que o comprimento da diagonal do quadrado de medida $\sqrt{2}$ discutido no início da aula é incomensurável, ou seja, não pode ser expresso na forma de um número racional.

Proposição 3.1. *O segmento de medida $\sqrt{2}$ não é racional.*

Demonstração. Para provar que $\sqrt{2}$ **não é racional**, vamos supor que seja racional e chegar a uma contradição. Inicialmente, supondo que p e q são números inteiros e positivos, primos entre si, ou seja, não possuem divisores comuns pois $MDC(p,q) = 1$.

Por hipótese, faremos $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, $q \neq 0$, ou seja, $\sqrt{2}$ é racional. Elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ p^2 &= 2q^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como todo número par pode ser escrito da forma $2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$p^2 = 2q^2 \text{ é par e } p^2 = 2k. \tag{3.7}$$

Logo,

$$p^2 \text{ é par } \Rightarrow p \text{ é par } \Rightarrow p = 2m,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} p &= 2m \text{ e elevando ambos os membros ao quadrado,} \\ p^2 &= 4m^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Mas pelo resultado (3.7), temos que $p^2 = 2q^2$, então

$$\begin{aligned} 2q^2 &= 4m^2 \text{ e dividindo ambos os membros por 2, temos} \\ q^2 &= 2m^2 \Longrightarrow q \text{ é par} \end{aligned} \tag{3.10}$$

As conclusões em (3.8) e em (3.10) são contraditórias pois p e q foram supostos primos entre si. Chegamos então a um absurdo e assim, não podemos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional. □

Dessa forma, um segmento que mede $\sqrt{2}$ não pode ser medido a partir de nenhum outro segmento, dado que não encontramos a fração $\frac{p}{q}$ equivalente a ele. Esse tipo de segmento é chamado de incomensurável.

Orientações para Professores(as): Ao demonstrar a argumentação da impossibilidade de racionalizar o número $\sqrt{2}$, enfatize o tipo de demonstração por **"Redução ao Absurdo"** empregado na prova. Sugerimos um tempo de 20 minutos para a realização dessa etapa.

Sugestão para Professores(as): Construir com régua e compasso um retângulo cuja área é uma grandeza incomensurável. Também pode-se pedir uma pesquisa sobre a existência ou não existência de uma crise na matemática grega gerada pela descoberta das grandezas incomensuráveis.

Fechamento da Aula 2: Nessa Aula aprendemos como as grandezas incomensuráveis surgiram na matemática grega, entre os séculos V e VI a.E.C (antes da Era Comum), na tentativa de medir a diagonal de um quadrado de lado 1. Essa diagonal, segundo discutimos e demonstramos durante a aula, tem medida $\sqrt{2} = 1,4142135...$ e não pode ser registrado na forma de fração, isto é, não pode ser racionalizado. Além disso, conhecemos também a forma com que a Teoria das Proporções de Eudoxo contornou o problema da incomensurabilidade, possibilitando, desde então, que os matemáticos trabalhassem com razões entre grandezas incomensuráveis.

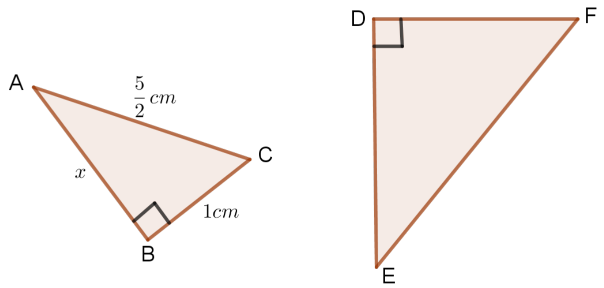
3.4 ATIVIDADE AVALIATIVA

Avaliação 2. Resolva os itens a seguir:

a) Determine a área do triângulo ABC da Figura 3.2 e avalie se o valor encontrado é uma grandeza comensurável ou incomensurável. Justifique sua escolha.

b) Atribua valores para os lados do triângulo DEF para que sua área seja uma grandeza incomensurável e determine o valor dessa área.

Figura 3.2 – Triângulos ABC e DEF.



Fonte: Autoria prória.

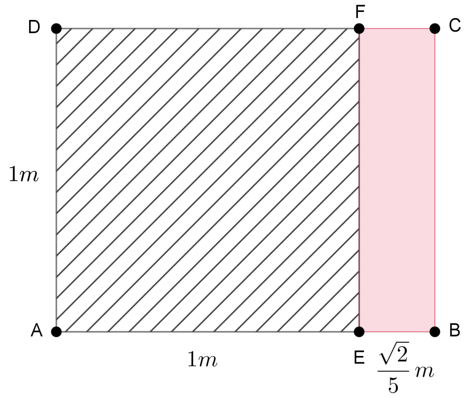
Orientações para Professores(as): O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado durante a Aula. Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema com um enunciado mais direto focado apenas na verificação da prendizagem relacionada ao tema da Aula. Essa questão avaliativa deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso não seja possível, você pode fazer a correção na aula seguinte.

3.5 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Questão 1. A incomensurabilidade pode ser observada quando não conseguimos medir uma grandeza em função de outra. Para entender melhor, acompanhe o raciocínio a seguir.

Imagine o retângulo $ABCD$ de altura $AD = 1\ m$, base $AB = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{5}\right) m$. Ao retirarmos $1\ m^2$ de sua área, temos como resto um retângulo de altura $EF = 1\ m$ e base $EB = \frac{\sqrt{2}}{5}\ m$, conforme mostra a Figura 3.3:

Figura 3.3 – Quadrado $AEFD$ e retângulo $EBCF$.



Fonte: Autoria própria.

As áreas do quadrado $AEFD$ e do retângulo $EBCF$ são respectivamente,

$$\mathcal{S}(AEFD) = 1\ m^2 \ \text{ e } \ \mathcal{S}(EBCF) = \frac{\sqrt{2}}{5}\ m^2,$$

e se quisermos medir a área do retângulo tomando como unidade a área do quadrado, devemos fazer:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{S}(EBCF)}{\mathcal{S}(AEFR)} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{5}}{1} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como já vimos durante a aula, uma grandeza que mede $\sqrt{2}$ é incomensurável, portanto o resultado obtido para a razão em (3.11) indica que a área do retângulo $EBCF$ é incomensurável em relação à área do quadrado $AEFD$.

De acordo com o que foi apresentado nesse enunciado, verifique se há comensurabilidade entre a grandeza p em relação à grandeza q para cada caso a seguir:

a) $p = 6$ e $q = 3$;

b) $p = 5$ e $q = 153$;

c) $p = 7\sqrt{3}$ e $q = 14\sqrt{3}$;

d) $p = 6\sqrt{2}$ e $q = 2\sqrt{2}$;

e) $p = 9$ e $q = 21\sqrt{3}$;

Questão 2. Uma técnica de comparar razões sem a necessidade do conceito de número racional é a *antifairese*, ou *subtrações recíprocas*. Na geometria, usava-se a antifairese no ato de aproximar razões entre segmentos incomensuráveis. Leia com atenção a asserção a seguir:

Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, a que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomesuráveis.

Antifairese é a tradução literal de subtrações recíprocas. Etimologicamente seria uma aproximação de *Antho-hypo-hairesis*, entre duas grandezas. O termo pode ser fragmentado da seguinte forma: *Anto* = recíproco; *Hypo* = sub; *Hairesis* = tração. Na álgebra moderna o procedimento é conhecido como **Algoritmo de Euclides** para o cálculo do máximo divisor comum. A antifairese entre os números A e B é denotada por $\text{Ant}[A,B] = (m,n,p,...)$. Observe dois exemplos:

Exemplo 3.1. *Determine a razão antifairética entre os números* 60 *e* 18.

- 18 *cabe* 3 *vezes em* 60 *e restam* 6*;*
- 6 *cabe* 3 *vezes em* 18 *e resta* 0*.*

Portanto, a razão antifairética entre 18 *e* 60 *é* $\text{Ant}[18,60] = (3,3)$*. O último resto diferente de zero é o máximo divisor comum entre os valores usados, e nesse caso, o m.d.c entre 18 e 60 é 6. Representamos por* $MDC(18,60) = 6$*.*

Exemplo 3.2. *Determine a razão antifairética entre os números* 18 *e* 61.

- 18 *cabe* 3 *vezes em* 61 *e restam* 7*;*
- 7 *cabe* 2 *vezes em* 18 *e restam* 4*;*
- 4 *cabe* 1 *vez em* 7 *e restam* 3*;*
- 3 *cabe* 1 *vez em* 4 *e resta* 1*.*

Portanto, a razão antifairética entre 18 *e* 61 *é* $\text{Ant}[18,61] = (3,2,1,1)$ *e resta* 1*. Observe que o fato de ter restado* 1*, significa que* 18 *e* 61 *são primos entre si ou seja,* $MDC(18,61) = 1$*.*

Usando o método das subtrações recíprocas, ou antifairese, determine o m.d.c entre os valores a seguir:

a) 12 e 4;

b) 75 e 303;

c) 47 e 21;

d) 108 e 60;

e) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$;

Questão 3. (ENEM-2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas da mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a)105 peças. b)120 peças. c)210 peças. d)243 peças. e)420 peças.

Orientações para Professores(as): As Atividades Complemetares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da atividade principal ou da atividade avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

3.6 REFERÊNCIAS DIRECIONADAS

Atividade Motivadora:

- GONÇALVES, C. H.; POSSANI, C."Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga". Disponível em <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47>. Acesso em 5 de dezembro de 2019.
- SING, Simon. O Enigma de Fermat. Rio de Janeiro: Record, 1998.

Atividade principal:

- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

Sistematização:

- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único.** São Paulo: Editora Ática, 2005.
- ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Tópicos da história da matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

Atividades Complementares

- ENEM. Exame nacional do ensino médio. 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

4 AULA 3: LÚNULAS DE HIPÓCRATES, ARBELOS E SALINONS DE ARQUIMEDES

Nessa Aula, trataremos de um tópico muito interessante da História da Matemática, as *lúnulas*, os *arbelos* e os *salinons*. São figuras geométricas de lados curvos que foram descobertas por Hipócrates e Arquimedes nas tentativas de *quadrar o círculo*. Essas figuras são definidas de acordo com algumas propriedades que serão trabalhadas nas atividades dessa Aula.

Objetivos:

- Retomar as fórmulas de cálculo de área e comprimento de círculos.
- Determinar áreas hachuradas ou destacadas dentro de polígonos, círculos entre outras figuras planas.
- Conhecer parte da busca de Hipócrates e Arquimedes pela quadratura do círculo.
- Verificar por inspeção a validade das relações entre elementos da construção dos *Arbelos* e dos *Salinons*.
- Aplicar manipulações algébricas das fórmulas para obter áreas solicitadas.
- Resolver problemas de forma aberta, deixando os resultados indicados em função das variáveis.

Observações:

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua e calculadora.
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a truma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executado em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula.

4.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada "Atividade Principal". Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

4.1.1 Atividade Motivadora

A medição e o cálculo de área, entre as civilizações mais antigas, estavam relacionados a figuras geométricas simples como triângulos, quadriláteros e regiões poligonais. Entre os gregos, dada a importância das construções com a régua não graduada e o compasso, estabeleceu-se o procedimento da quadratura:

Dada uma figura geométrica, fazer a sua quadratura é construir, com o auxílio desses dois instrumentos, a régua e o compasso, um quadrado equivalente a ela, ou seja, com a mesma área da figura dada.

Na grécia antiga, não se usava em estudos teóricos o valor numérico de uma área ou de outra grandeza qualquer como usamos atualmente. Por exemplo, matemáticos da época obtinham suas áreas por comparação, ou seja, quantas vezes a área de uma figura é maior, ou menor que a área de uma outra figura, tomada como unidade padrão. Por ser o quadrado um polígono muito simples, habituaram-se a comparar as áreas de figuras planas com a área de um quadrado tomado como unidade de medida. Acredita-se que dessa forma surgiu a expressão "quadrar áreas" entre os círculos de matemáticos gregos, que é o equivalente atual de "calcular áreas".

Desde os anos 500 a.E.C (antes da Era Comum), surgiu uma pergunta que esteve presente entre os gregos, e só foi completamente respondida no século XIX da nossa era:

Podemos construir, com régua e compasso, um quadrado equivalente a um círculo? Ou seja, como encontrar a quadratura do círculo?

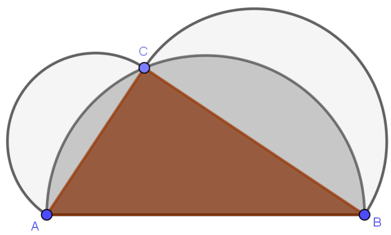
Hoje, sabemos que a quadratura do círculo é impossível. No entanto, a primeira quadratura de uma região não poligonal que conhecemos é devida a Hipócrates de Chios, que viveu no século V a.E.C.

Estima-se que, entre 450 e 430 a.E.C., Hipócrates tenha escrito seu trabalho mais importante, os *Elementos de Geometria*. Embora os originais tenham se perdido, a obra é considerada precursora dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides e nela foram registrados importantes avanços para a Geometria do seu tempo.

Considera-se que o estudo de Hipócrates sobre a quadratura das *lúnulas* foi, provavelmente, uma tentativa para chegar à quadratura do círculo.

A Figura 4.1 mostra uma das lúnulas estudadas por Ibn Al-Haytham, que viveu no início do século X E.C. (965-1040). Reproduzindo os argumentos de Hipócrates, Al-Haytham exibiu a quadratura da reunião de *lúnulas* limitadas por semicircunferências construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

Figura 4.1 – *Lúnulas* de Hipócrates estudadas por Ibn Al-Haytham.



Fonte: Autoria própria.

Problema: Observando a Figura 4.1, resolva os itens a seguir:

(A) Determine a área $\mathcal{S}(D)$ da região entre o semicírculo de diâmetro AB e o triângulo retângulo ABC, dadas as medidas $AC = 3\sqrt{7}\ cm$ e $BC = 9\ cm$ de seus catetos.

(B) A área obtida representa o valor exato da região? Justifique sua resposta.

Orientações para Professores(as): Essa atividade tem o propósito de familiarizar o estudante com a obtenção de uma área hachurada inscrita em um semicírculo, em específico, a imagem de uma das *Lúnulas* de Hipócrates, através da manipulação algébrica das fórmulas das figuras envolvidas. A resolução dessa atividade será conduzida pelo professor. Para a organização da turma em duplas ou trios, leitura dos objetivos da Aula e resolução da Atividade Motivadora sugerimos um tempo de 15 minutos.

Sugestão para Professores(as): Você pode encontrar um vídeo sobre a impossibilidade da quadratura do círculo no portal da OBMEP - Programa de Iniciação Científica - através do link <https://www.youtube.com/watch?v=n9WyUaicIAQ>.

4.1.2 Atividade Principal

Arquimedes, nasceu por volta de 287 a.E.C. na cidade portuária de Siracusa, na Sicília. Naquele período, essa comunidade era uma cidade-estado dos domínios gregos. Atualmente, Siracusa é uma comunidade que pertence à Itália. Arquimedes viveu aproximadamente 75 anos, num período de grande expansão de influência geopolítica do império romano.

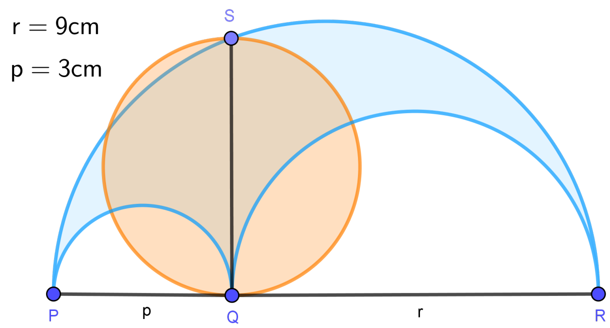
Dentre muitos feitos realizados por este pensador, considerado um dos mais importantes matemáticos da história, destaca-se a incansável busca pela solução do problema da quadratura do círculo. Nessa busca, realizou feitos extraordinários. Conseguiu realizar a quadratura da parábola, usando técnicas e demonstrações geométricas e algébricas que estavam muito além de seu tempo.

A sua obra *"Livro de Lemas"* ou *Liber Assumptorum* é um tratado sobre a natureza dos círculos, onde tem quinze proposições. A cópia mais antiga conhecida do texto está escrita em árabe. Alguns especialistas argumentam que este livro não pode ter sido escrito por Arquimedes (obra apócrifa) na sua forma atual, uma vez que ele cita o próprio Arquimedes em seu texto, o que sugere que foi modificado ou escrito por outro matemático. Acredita-se que talvez o *Lemas* seja baseado em uma obra mais antiga, agora perdida, escrita por Arquimedes.

Este trabalho de Arquimedes, provavelmente preservado por árabes, apresenta diversas proposições geométricas interessantes algumas das quais relacionadas ao cálculo de áreas de figuras incomuns. Duas delas são, o *Arbelos* e o *Salinon*, que serão usadas na atividade a seguir.

O *Arbelos* é a região azul representada na Figura 4.2.

Figura 4.2 – *Arbelos* de Arquimedes



Fonte: Autoria própria.

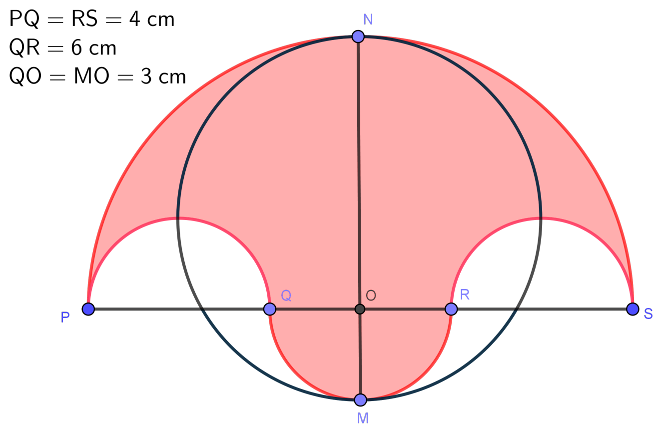
Um *Arbelos* é definido da seguinte maneira:

Definição 4.1. *Sejam P, Q e R três pontos sobre uma linha reta, com Q entre P e R. Semicírculos são construídos sobre um mesmo lado da linha, com diâmetros PQ, QR e PR. Um Arbelos A é a figura delimitada por estes três semicírculos. Traça-se a perpendicular a PR em Q, encontrando o arbelos em S. Tem-se que $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(C)$, onde C é o círculo de diâmetro QS.*

Outra figura plana incomum e com propriedades interessantes que consta no Livro de Lemas de Arquimedes é o *Salinon*, apresentado na Figura 4.3, definido como:

Definição 4.2. *Sejam P, Q, R e S quatro pontos (nesta ordem) sobre uma linha reta, tal que $PQ = RS$. Acima da linha são construídos, com diâmetros PQ, RS e PS, semicírculos, e abaixo da linha um outro semicírculo de diâmetro QR. Um Salinon $\mathcal{S}$ é a figura delimitada por estes quatro semicírculos. O eixo de simetria do Salinon intercepta-o nos pontos M e N. Tem-se que $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$, onde C é o círculo de diâmetro MN.*

Figura 4.3 – *Salinon* de Arquimedes.



Fonte: Autoria própria.

Problema: Verifique se é verdadeira a relação $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(C)$ para o *arbelos* e para o *salinon* usando as medidas indicadas nas Figuras 4.2 e 4.3.

Orientações para Professores(as):

- O propósito dessa atividade é fazer com que os alunos verifiquem a veracidade das definições de *Arbelos* e *Salinon* desenvolvidas por Arquimedes. Nesse momento os estudantes irão construir, aplicar e discutir as estratégias para a resolução da atividade em duplas ou trios, em um tempo sugerido de 25 minutos.
- Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Principal em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida.

4.2 PAINEL DE SOLUÇÕES

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução.

Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

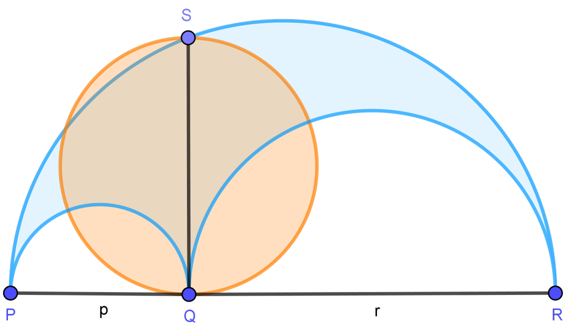
4.3 SISTEMATIZAÇÃO

A habilidade relacionada às atividades desta aula são muito frequentes em questões de vestibular, ENEM e demais exames similares. Além disso, a resolução deste tipo de problema mobiliza uma importante demanda cognitiva diante do grau de dificuldade e do esforço mental em sua resolução.

Como as figuras tem características bem específicas, pois são geradas por definições, é possível fazer o cálculo dessas áreas de forma aberta, ou seja, sem atribuir valor numérico às variáveis, obtendo uma "fórmula fechada" para suas áreas.

De acordo com a Definição 4.1 e observando a Figura 4.4, mostraremos que $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(C)$ em função de p, r e do diâmetro QS do círculo fazendo $QS = h$.

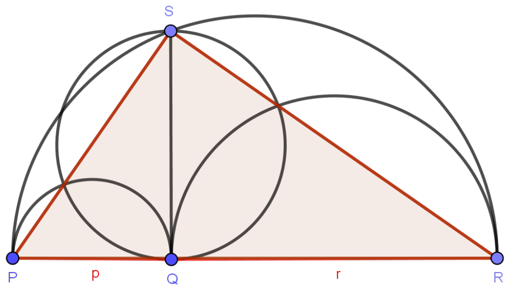
Figura 4.4 – *Arbelos* de diâmetro $p+r$.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração. Inicialmente, determinamos h em função de p e r, traçamos o segmento SP e o segmento SR obtendo o triângulo PSR, que é retângulo por estar inscrito em uma semicircunferência, conforme Figura 4.5.

Figura 4.5 – *Arbelos* de diâmetro $p+r$



Fonte: Autoria própria.

Como QS é a altura relativa à hipotenusa do $\triangle PSR$ e fazendo $QS = h$, das relações métricas do triângulo retângulo, sabemos que o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Para o triângulo retângulo PSR da Figura 4.5 essa relação pode ser expressa por $h^2 = p \cdot r$. Assim, segue que

$$(QS)^2 = h^2 = p \cdot r \Rightarrow QS = h = \sqrt{p \cdot r}. \tag{4.1}$$

Obtemos a área $\mathcal{S}(A)$ do arbelos através da diferença da área do semicírculo de raio $\frac{p+r}{2}$ e as áreas dos semicírculos de raios $\frac{p}{2}$ e $\frac{r}{2}$, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A) &= \frac{1}{2}\left(\frac{p+r}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi = \frac{1}{2}\pi \cdot \left[\frac{p^2+2pr+r^2}{4} - \frac{p^2}{4} - \frac{r^2}{4}\right] \\ &= \frac{1}{2}\pi\left[\frac{p^2+2pr+r^2-p^2-r^2}{4}\right] = \frac{2pr}{8}\pi = \frac{pr}{4}\pi \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por outro lado, a área do círculo de diâmetro QS é

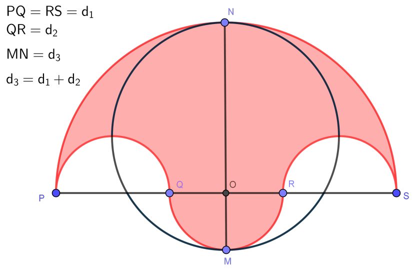
$$\mathcal{S}(C) = \left(\frac{\sqrt{pr}}{2}\right)^2\pi = \frac{pr}{4}\pi \tag{4.3}$$

Portanto, $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(C)$. $\square$

Na sequência, mostraremos que para o *Salinon* vale a relação $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$, onde $\mathcal{S}(S)$ é a área do *Salinon* e $\mathcal{S}(C)$ é a área do círculo de diâmetro MN da Figura 4.6.

De acordo com a Definição 4.2 e conforme podemos observar na Figura 4.6, demonstraremos que $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$.

Figura 4.6 – *Salinon* e círculo de diâmetro d_3.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração. Inicialmente mostraremos que, como consta na Figura 4.6, $d_3 = d_1 + d_2$. Note que $OP = PQ + \frac{QR}{2}$ e $OQ = OM = OR$. Como $ON = OP$ e $OM = OQ = \frac{QR}{2}$ e $MN = NO + OM = d_3$, temos:

$$\begin{aligned} d_3 = MN &= OM + ON = OM + OP \\ &= OM + PQ + \frac{QR}{2} \\ &= \frac{QR}{2} + PQ + \frac{QR}{2} = PQ + \frac{QR}{2} + \frac{QR}{2} \\ &= PQ + QR. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Da Figura 4.6 temos $PQ = d_1$ e $QR = d_2$. Substituindo em (4.4), temos

$$d_3 = d_1 + d_2. \tag{4.5}$$

Podemos observar que a área do *Salinon* é a área do semicírculo de raio $PO = d_1 + \frac{d_2}{2}$ mais a área do semicírculo de diâmetro $QR = d_2$ subtraído da área de dois semicírculos de diâmetro $PQ = RS = d_1$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(S) &= \frac{\left(d_1 + \frac{d_2}{2}\right)^2}{2} \cdot \pi + \frac{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{2} \cdot \pi - 2 \cdot \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{2} \cdot \pi = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + \frac{d_2^2}{4}}{2} \cdot \pi + \frac{\frac{d_2^2}{4}}{2} \cdot \pi - \frac{\frac{2d_1^2}{4}}{2} \cdot \pi \\ &= \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1^2}{2}}{2} \cdot \pi \\ &= \frac{\frac{d_1^2}{2} + d_1 d_2 + \frac{d_2^2}{2}}{2} \cdot \pi = \left(\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2} + \frac{d_2^2}{4}\right) \cdot \pi \\ &= \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{4} \cdot \pi \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por outro lado, a área $\mathcal{S}(C)$ do círculo de diâmetro $MN = d_3 = d_1 + d_2$ é

$$\mathcal{S}(C) = \left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{4} \cdot \pi. \tag{4.7}$$

Portanto, $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$. □

Orientações para Professores(as): O propósito desse momento da Aula é demonstrar algebricamente a veracidade das definições já verificadas pelos estudantes na Atividade Principal bem como apresentar a forma aberta de se desenvolver um cálculo essencialmente algébrico. Essa etapa deve ser desenvolvida pelo professor em um tempo sugerido de 20 minutos.

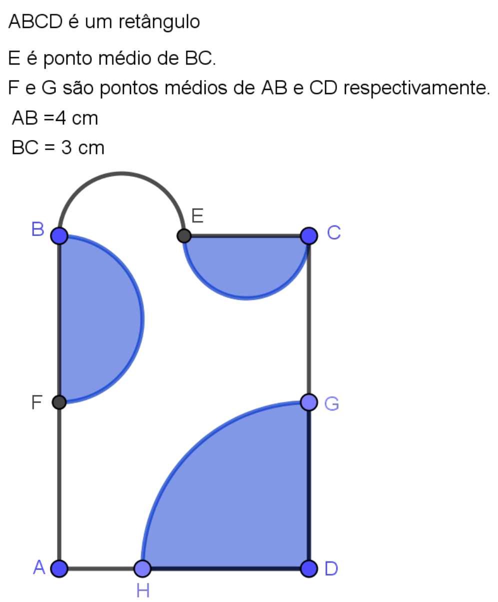
Fechamento da Aula 3: Nesta aula, conhecemos algumas figuras geométricas planas interessantes que foram encontradas nas tentativas de solucionar o problema da quadratura do círculo, a *Lúnula*, o *Arbelos* e o *Salinon*. Verificamos numericamente a validade das definições do *Arbelos* e do *Salinon*, e trabalhamos com métodos de determinar valores de áreas destacadas ou hachuradas dentro figuras planas. Retomamos algumas relações métricas do triângulo retângulo, como o Teorema de Pitágoras, por exemplo, e a fórmula de obtenção da área do círculo e, além disso, acompanhamos as verificações das definições de *Arbelos* e *Salinons*, trabalhando de forma aberta, isto é, sem atribuir valores numéricos para as variáveis.

4.4 ATIVIDADE AVALIATIVA

Avaliação 3. Resolva o seguinte problema:

Na Figura 4.7, $ABCD$ é um retângulo cujas medidas estão indicadas. Determine, em cm^2 a área em branco. Deixe o resultado indicado em função de π.

Figura 4.7 – Área não poligonal $AFBECGH$.



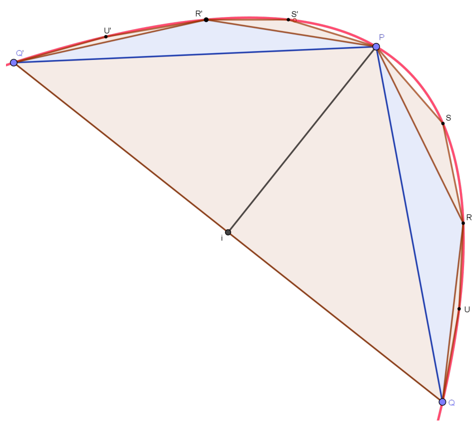
Fonte: Autoria própria.

Orientações para Professores(as): O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado durante a Aula. Nessa etapa, os estudantes devem resolver individualmente um problema similar aos propostos anteriormente, porém com um enunciado mais direto e focado apenas no cálculo de área. Essa questão avaliativa deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso seja necessário, a correção pode ser feita na aula seguinte.

4.5 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Questão 1: Arquimedes foi um dos maiores matemáticos da antiguidade e considerado por muitos estudiosos um dos maiores de todos os tempos. Um de seus trabalhos mais importantes foi a *quadratura da parábola* pelo *método da exaustão*. Através da subdivisão da área de um segmento parabólico em triângulos cada vez menores, conforme Figura 4.8.

Figura 4.8 – Segmento de parábola exaurido em triângulos.



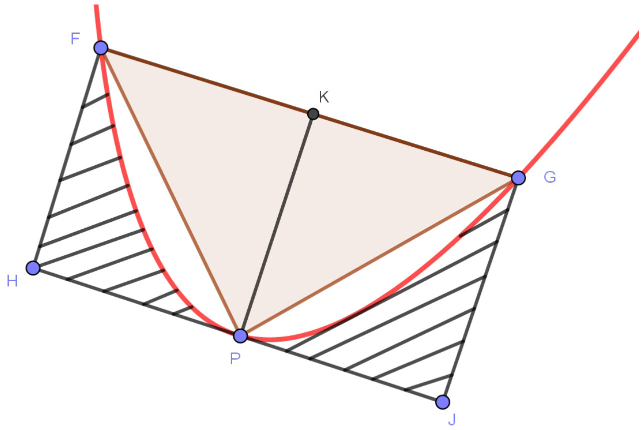
Fonte: Autoria própria.

Aplicando o método da exaustão, Arquimedes provou que:

Proposição 4.1. *Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda QQ' é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele.*

Na Figura 4.9 o segmento parabólico de base FG está inscrito no retângulo $FGJH$, de dimensões $FH = 5\ cm$ e $FG = 9\ cm$.

Figura 4.9 – Segmento parabólico inscrito no retângulo $FGJH$.

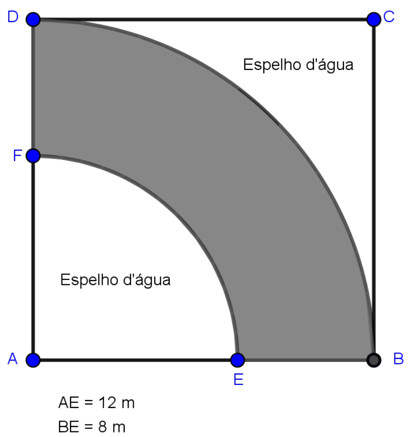


Fonte: Autoria própria.

Utilizando a proposição do enunciado deste problema, determine a área hachurada da Figura 4.9.

Questão 2: Em uma reforma executada em um museu de artes, um arquiteto planejou, na entrada do museu uma passarela $BDFE$ que será revestida em granito, sobre um espelho d'água, conforme mostra a Figura 4.10.

Figura 4.10 – Passarela $BDFE$ sobre um espelho d'água.

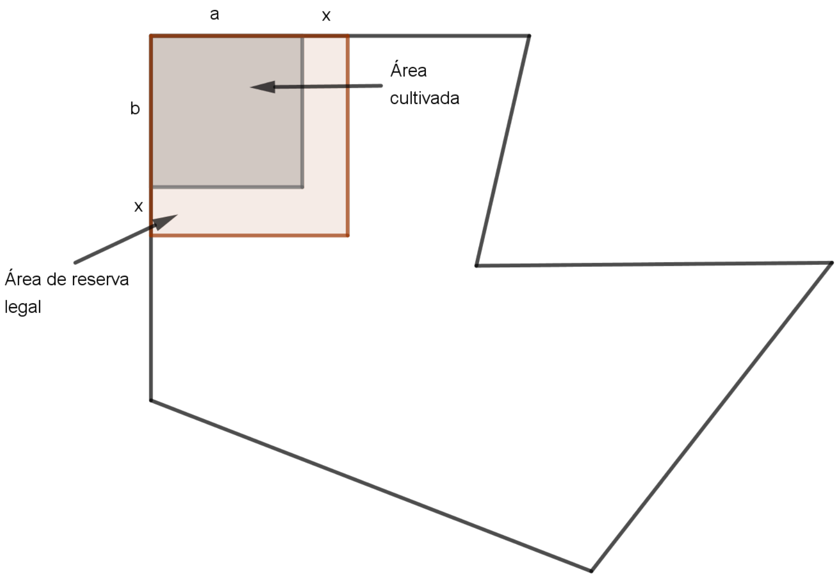


Fonte: Autoria própria.

Usando os dados da Figura 4.10, determine a quantidade de granito, em m^2 que será usada para revestir a referida passarela (use $\pi = 3,14$).

Questão 3: (Enem 2009) Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na Figura 4.11 como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a Figura 4.11.

Figura 4.11 – Área cultivável $a \cdot b$ e faixa x de reserva legal.



Fonte: Adaptado da prova do ENEM - 2009.

De acordo com a Figura 4.11, o novo terreno do filho cumpre a lei após acrescentar uma faixa com largura de x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal. O dobro da largura x da faixa é:

a) $10\%\,(a+b)^2$.

b) $10\%\,(a \cdot b)^2$.

c) $\sqrt{a+b}\ -(a+b)$.

d) $\sqrt{(a+b)^2 a \cdot b}\ +(a+b)$.

e) $\sqrt{(a+b)^2 a \cdot b}\ -(a+b)$.

Orientações para Professores(as): As Atividades Complementares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da Atividade Principal ou da Atividade Avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

4.6 REFERÊNCIAS DIRECIONADAS

Atividade Motivadora:

- GALVÃO, Maria Elisa E. L.; SOUZA, Vera H. G. As Luas de Hipócrates: a longa história de um problema na história da matemática. 2013. Revista do professor de Matemática, n. 82, 2013. Disponível em <https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%2082%20-%20Histrias%20e%20histrias%20-%20As%20luas%20Hipcrates.pdf>. Acesso em 19 de janeiro de 2020.

Atividade Principal:

- ASSIS, André Koch Torre; MAGNAGHI, Ceno Pietro. **O método de Arquimedes: análise e tradução comentada.** Montreal: Roy Keys Inc., 2019.

- DALCIN, Mário. As circunferências gêmeas de Arquimedes. 2005. Revista do Professor de Matemática, 2005. Disponível em <https://www.rpm.org.br/cdrpm/54/5.htm>. Acesso em 22 de janeiro de 2020.

Sistematização:

- DALCIN, Mário. As circunferências gêmeas de Arquimedes. 2005. Revista do Professor de Matemática, 2005. Disponível em <https://www.rpm.org.br/cdrpm/54/5.htm>. Acesso em 22 de janeiro de 2020.

Atividades Complementares:

- ENEM. Exame nacional do ensino médio. 2020. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.

- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

5 AULA 4: O TEOREMA DE PICK

Nessa Aula, trataremos de um teorema muito interessante para ser aplicado ao cálculo de área. Trata-se do Teorema de Pick, esse teorema fornece uma fórmula que possibilita determinar a área de um polígono inscrito em uma malha/rede quadricular fazendo a contagem dos pontos da malha que pertencem ao perímetro e a região interior do polígono.

Objetivos:

- Apresentar a fórmula de Pick para determinar áreas de polígonos inscritos em uma malha quadricular.
- Trabalhar com porcentagens e cálculos de estimativas.
- Conhecer e aplicar formas não convencionais de se obter o valor aproximado de uma área.

Observações:

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua e calculadora.
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executada em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula.

5.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada Atividade Principal. Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

5.1.1 Atividade Motivadora

Existe um jeito muito interessante e curioso de calcular a área de alguns polígonos. Esse método de cálculo de áreas de polígonos é feito através da contagem de pontos em uma malha quadricular em que a figura plana está inscrita.

Estamos falando do **Teorema de Pick**, que possibilita calcular áreas de polígonos sobre malhas ou redes quadriculares, fazendo a contagem de pontos de coordenadas inteiras presentes nos lados e no interior do polígono.

Sobre a vida e a obra de Pick

Georg Alexander Pick (1859 – 1942), estudou matemática e física na Universidade de Viena, onde ingressou em 1875 e graduou-se em 1879 qualificado a ensinar ambas as disciplinas. Seus trabalhos em matemática abordaram variados temas, publicou artigos sobre Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria, no entanto, é amplamente conhecido pelo teorema que leva seu nome, o Teorema de Pick, publicado em 1899 na cidade de Praga, na forma de um artigo científico de oito páginas intitulado *Geometrisches zur Zahlenlehre*. De início, esse seu trabalho não recebeu muita atenção. Mas em 1969, após a ser citado pelo matemático H. Steinhaus, em um de seus livros, o Teotema de Pick atraiu muita atenção e admiração por ser simples, elegante e interessante.

Pick tinha descendência judia e sofreu perseguição nazista, era membro da Academia de Ciências e Artes da República Tcheca, porém foi excluído dessa academia e mandado para um campo de concentração onde faleceu aos oitenta e dois anos de idade.

A Fórmula de Pick

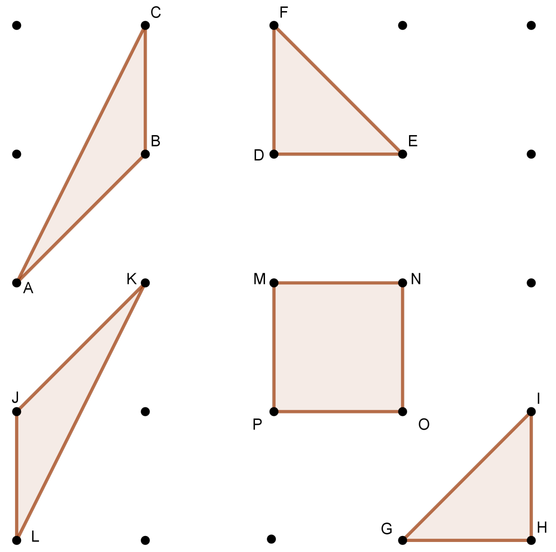
O Teorema de Pick fornece uma fórmula que possibilita obter a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma malha quadricular ou rede quadricular. Essa rede quadricular é análoga ao primeiro quadrante do plano cartesiano. Os pontos que pertencem a essa rede são apenas os pontos do primeiro quadrante que possuem coordenadas inteiras. A área $\mathcal{S}(P)$ de um polígono sobre a malha quadricular, segundo o Teorema de Pick, é dada pela expressão

$$\mathcal{S}(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \tag{5.1}$$

onde B é o número de pontos da malha situados sobre o perímetro do polígono e I é o número de pontos da malha existentes no interior do polígono. Nos exemplos a seguir, determinaremos a área de alguns polígonos construídos sobre uma malha quadriculada.

Na Figura 5.1 temos um quadrado e quatro triângulos, todos com vértices sobre pontos da rede quadricular. Note que esses polígonos não possuem pontos da rede em seu interior.

Figura 5.1 – Quadrado de lado 1 e alguns triângulos fundamentais.



Fonte: Autoria própria.

É trivial assimilar que os triângulos DEF e GHI tenham área igual a $\frac{1}{2}$, percebemos visualmente que equivalem à metade da área do quadrado $MNOP$ de lado 1, conforme Figura 5.1. Esses triângulos são denominados "triângulos fundamentais". Nessa figura, os triângulos ABC e JKL também possuem área $\frac{1}{2}$ e seus vértices são os únicos pontos pertencentes à rede quadricular, então, também são triângulos fundamentais. Note que tanto o quadrado como os triângulos da Figura 5.1 não possuem pontos da rede em seus interiores.

Usando a Fórmula de Pick, vamos determinar as áreas dos triângulos fundamentais ABC e JKL. Observe que para o triângulos ABC e JLK temos a seguinte contagem de pontos da rede: $B = 3$ e $I = 0$, logo,

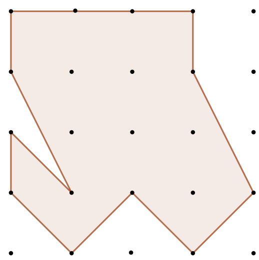
$$\mathcal{S}(ABC) = \mathcal{S}(FGH) = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2} \tag{5.2}$$

Dessa forma, verificamos para alguns triângulos fundamentais da rede quadricular a área igual a $\frac{1}{2}$.

Orientações para Profesores(as): Após apresentar a forma de aplicar o Teorema de Picka para os triângulos da Figura 5.1, exponha o **Problema Resolvido** a seguir na lousa para que os estudantes se familiarizem com o uso do Teorema de Pick, ou até, convide um estudante para ir à lousa resolvê-lo. Sugerimos que o tempo para a organização da turma, a leitura dos objetivos da aula e o desenvolvimento da Atividade Motivadora seja de no máximo 15 minutos.

Problema Resolvido: Determine pela fórmula de Pick a área do polígono P apresentado na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Polígono P sobre a rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

Resolução:

Contando os pontos interiores e os pontos sobre o perímetro do polígono, temos: $B = 13$ e $I = 6$. Substituindo na fórmula de Pick, segue que:

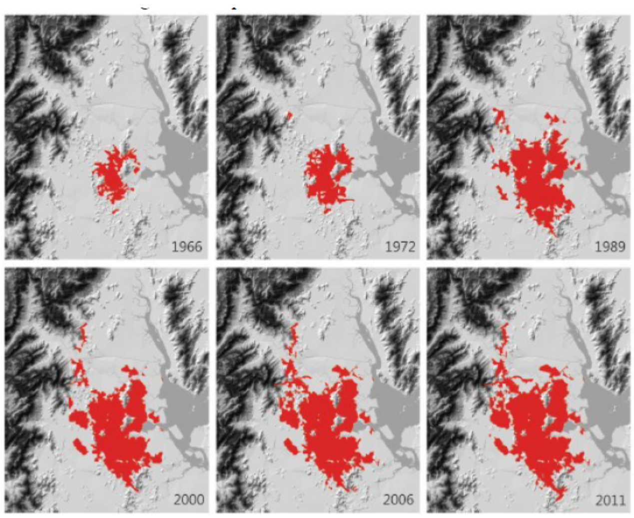
$$\begin{aligned} \mathcal{S}(P) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{13}{2} + 6 - 1 \\ &= 6,5 + 5 \\ &= 11,5 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Portanto, o polígono P possui $11,5$ de unidades de área.

5.1.2 Atividade Principal

A Figura 5.3 mostra uma sequência de imagens que retratam o crescimento da região urbana (área em vermelho) do município de Joinville entre os anos 1966 e 2011.

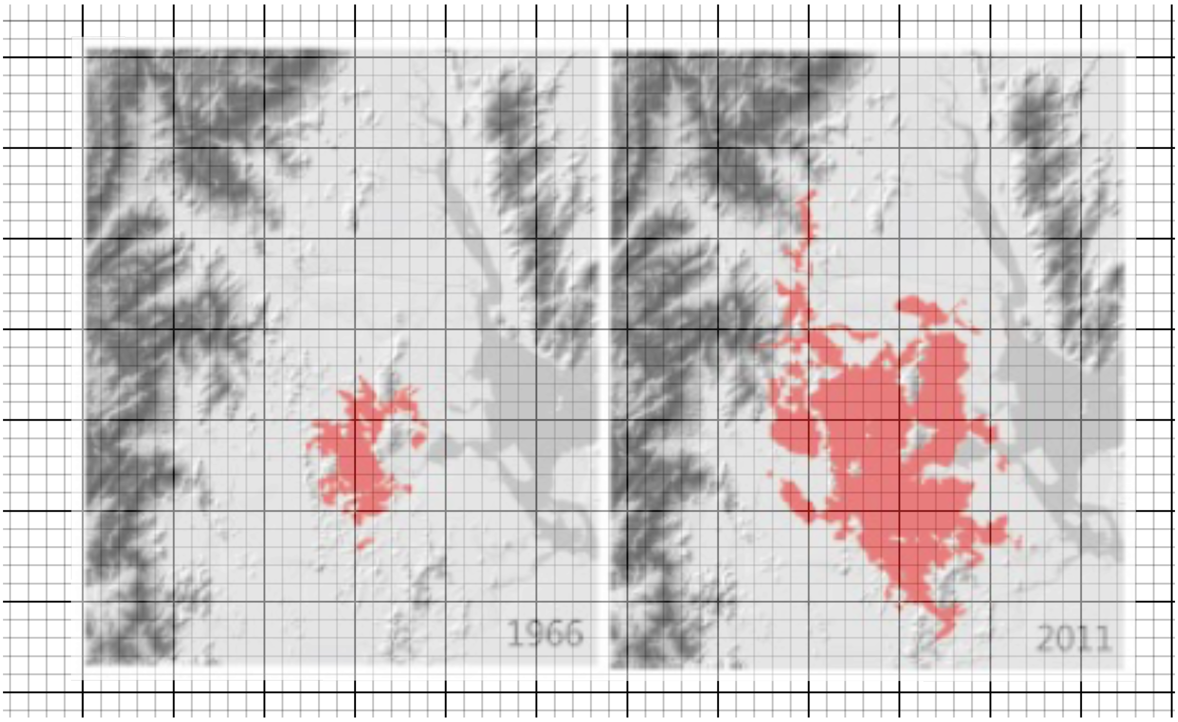
Figura 5.3 – Crescimento da região urbana do município de Joinville /SC entre 1966 e 2011.



Fonte: Joinville bairro a bairro, 2015.

Problema: Usando a rede quadricular da Figura 5.4, encontre uma estimativa para o crescimento percentual da área urbana do município entre 1966 e 2011.

Figura 5.4 – Território urbano do município de Joinville /SC em 1966 e em 2011.



Fonte: Joinville bairro a bairro, 2015.

Orientações para Professores(as): O propósito dessa atividade é desenvolver a resolução de um problema onde a área de um centro urbano será comparada em dois momentos, pretendendo estabelecer uma aproximação para o percentual de crescimento entre os anos considerados. Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Principal em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos que essa atividade seja trabalhada em um tempo de 25 minutos.

5.2 PAINEL DE SOLUÇÕES

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

5.3 SISTEMATIZAÇÃO

O Teorema de Pick é interessante pois permite calcular a área de um polígono simples a partir da contagem de pontos da malha quadricular formada no plano cartesiano. É de fato surpreendente que seja possível substituir o processo habitual de cálculo de área, que envolve medições de grandezas contínuas por uma simples contagem de quantidades discretas. É claro que esse caso deve respeitar algumas condições, no Teorema de Pick, por exemplo, o polígono deve estar sobre uma rede quadricular.

Na demonstração a seguir usaremos um **caso particular**, onde o polígono em questão é formado por lados cujos pontos da malha sobre eles são exclusivamente os vértices.

Proposição 5.1. *A área $\mathcal{S}(P)$ de um polígono inscrito em uma rede quadricular cujos únicos pontos do perímetro pertencentes a essa rede quadricular são seus vértices é*

$$\mathcal{S}(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \tag{5.4}$$

onde B é o número de pontos da rede sobre o perímetro do polígono e I o número de pontos da rede interiores ao polígono.

Demonstração. A Figura 5.5 representa um polígono $ABCDE$, cujos únicos pontos do perímetro pertencentes à malha quadricular são seus vértices.

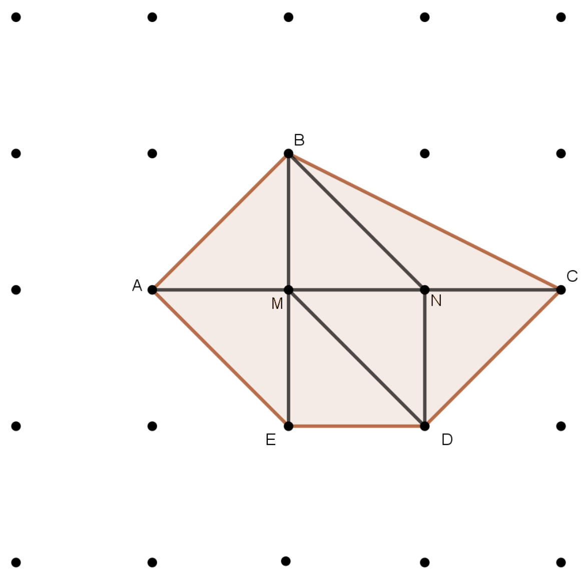
O caso considerado é um **caso particular** onde o número de pontos da malha sobre o perímetro, $B = 5$, é igual ao número de vértices que é igual ao número de lados do referido polígono.

Note que há diferença entre as letras $\mathcal{S}$ e S, a primeira é usada em nosso texto para denotar a área de uma região plana e a segunda, com índice i, isto é, S_i representará a soma dos ângulos internos de um polígono, com $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, n,\ \cdots$.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo, em graus, é dada por $S_i = 180° \cdot (n-2)$, onde n é o número de lados desse polígono. Para nosso **caso particular**, onde $n = B$, temos:

$$S_i = 180° \cdot (B-2). \tag{5.5}$$

Figura 5.5 – Polígono *ABCDE* sobre uma malha quadricular.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 5.5 observamos que o polígono *ABCDE* está dividido nos seguintes triângulos fundamentais: $\triangle ABM$, $\triangle BMN$, $\triangle BNC$, $\triangle CDN$, $\triangle DNM$, $\triangle DME$ e $\triangle EMA$. O número de triângulos fundamentais será representado por T e cada um deles tem área igual a $\frac{1}{2}$.

No entorno dos pontos M e N existem ângulos de 360° em cada um desses pontos. Representaremos por I a quantidade desses ângulos. Note que essa quantidade corresponde ao número de pontos da malha internos ao polígono. Dessa forma a soma dos ângulos ao redor de M e N, é

$$360^\circ \cdot I \tag{5.6}$$

Por outro lado, a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais é $180^o \cdot T$. Dessa forma,

$$180^\circ \cdot T = 360^\circ I + 180^\circ \cdot (B-2) \tag{5.7}$$

Dividindo ambos os membros da Equação (5.7) por 180°, temos:

$$T = 2I + B - 2. \tag{5.8}$$

Levando em conta que cada triângulo fundamental tem área igual a $\frac{1}{2}$ e que o polígono em questão é decomposto em T triângulos fundamentais podemos dizer que a área do polígono é

$$\mathcal{S}(P) = \frac{1}{2} \cdot T. \tag{5.9}$$

Substituindo a Equação (5.8) na Equação (5.9), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(P) &= \frac{1}{2}\cdot T \\ \mathcal{S}(P) &= \frac{1}{2}\cdot(2I+B-2) \\ \mathcal{S}(P) &= I+\frac{B}{2}-1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Portanto, para esse **caso particular**, a área do polígono P é

$$\mathcal{S}(P)=\frac{B}{2}+I-1, \tag{5.11}$$

onde B é o número de pontos da rede quadricular sobre os lados de P e I número de pontos da rede quadricular internos a P. □

Embora a Equação (5.11) tenha sido demonstrada para um caso particular, ela serve para o caso geral, ou seja, podemos usá-la para obter a área de qualquer polígono inscrito em uma rede quadricular. Uma prova completa para o caso geral do Teorema de Pick pode ser encontrada de forma detalhada em Lima (1991, pp. 103-113), ou em ANDRÉ (2018, pp.90-96), nesse último, há uma interessante prova usando convexidade.

Orientações para Professores(as): O propósito desse momento da Aula é mostrar a dedução do Teorema de Pick para um caso especial, onde o polígono em questão tem somente os vértices do perímetro pertencentes a rede quadricular. Essa demonstração deve ser desenvolvida na lousa pelo professor. Para esse momento, sugerimos um tempo de 20 minutos.

Fechamento da Aula 4: Nessa aula, conhecemos o Teorema de Pick e o aplicamos no cálculo de área. O teorema é associado a uma fórmula que possibilita determinar a área de um polígono inscrito em uma rede quadricular plana. É interessante percebermos que a área é uma grandeza contínua, porém o Teorema de Pick possibilita determinar uma área através da contagem de uma quantidade discreta de pontos da rede quadricular a qual o polígono está inscrito. Em nossa atividade, percebemos que esse teorema tem uma excelente aplicação na cartografia, em casos onde queremos determinar valores relativos sobre mapas, mesmo desconhecendo a escala em que o mapa foi desenhado.

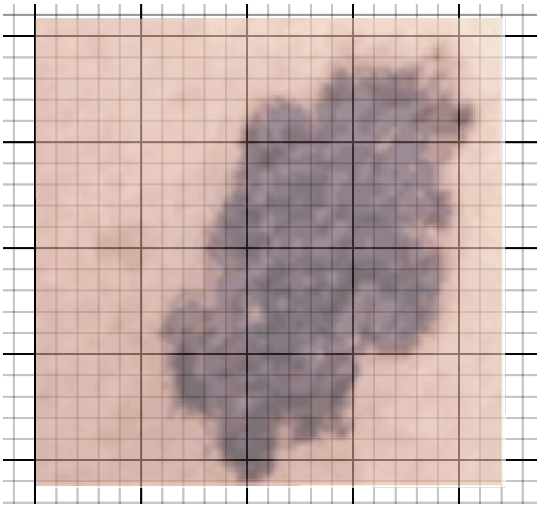
5.4 ATIVIDADE AVALIATIVA

Avaliação 4. Resolva o seguinte problema:

Segundo o Instituto Nacional do Câncer (INCA), o câncer de pele responde por 33% de todos os diagnósticos desta doença no Brasil, registrando, a cada ano, cerca de 180 mil novos casos desse tipo de tumor. A doença é provocada pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele. Essas células se dispõem formando camadas e, de acordo com as que forem afetadas, são definidos os diferentes tipos de câncer. Os mais comuns são os carcinomas e o melanomas, esse último, o melanoma é o tipo mais agressivo de câncer de pele.

Na Figura 5.6 temos a imagem de um melanoma (a mancha escura sobre a pele) em uma malha quadriculada com quadrados de lado $0,4\ mm$. Determine em mm^2 a área desse tumor.

Figura 5.6 – Melanoma: tipo maligno de câncer de pele.



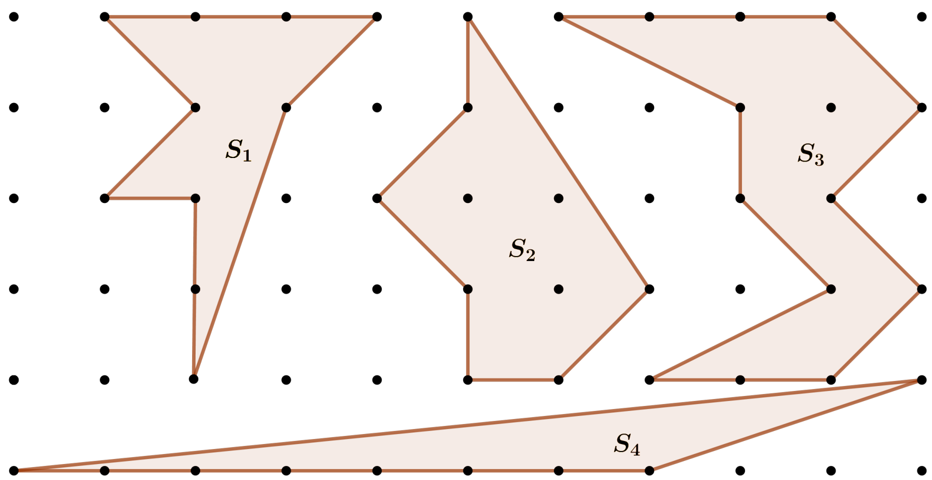
Fonte: https://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/doencas-e-problemas/cancer-da-pele/64/

Orientações para Professores(as): O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado nas atividades da Aula. Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema similar aos propostos anteriormente, aplicando o Teorema de Pick na resolução. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso julgue necessário dar mais tempo, faça a correção da Atividade Avaliativa na aula seguinte.

5.5 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Questão 1: Aplique o Teorema de Pick para determinar as áreas $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ e $\mathcal{S}_4$ dos polígonos representadas na Figura 5.7.

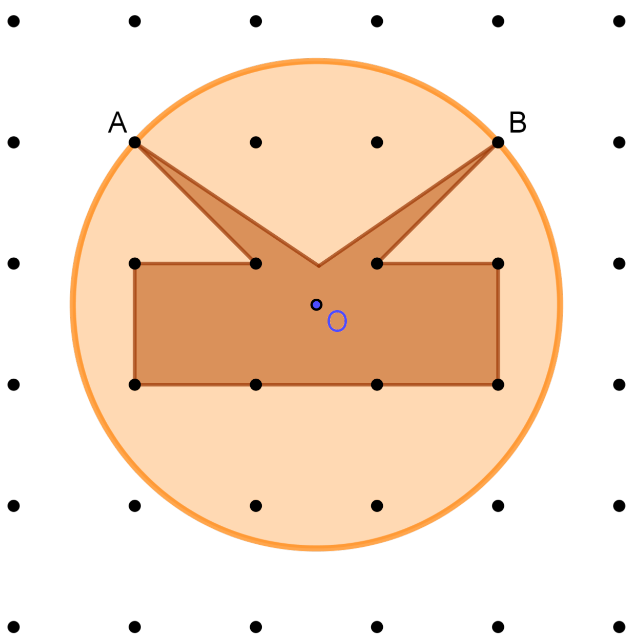
Figura 5.7 – Polígonos sobre uma rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

Questão 2: A empresa de eletrônicos e telecomunicações ***L.b&R.a*** *Corporation* encomendou ao seu departamento de *marketing* um logotipo para inserir na sua nova linha de *smart TV*, de tal forma que indicasse que esse aparelho se conecta com a rede *world wide web (www)* e é possivel usufruir de todos os serviços oferecidos na *web* através dessa televisão. A Figura 5.8 representa a proposta de logotipo apresentada para a *CEO (Chief Executive Officer)* da empresa.

Figura 5.8 – Logotipo da empresa fictícia ***L.b&R.a*** *Corporation.*



Fonte: Autoria própria.

Os *designers* explicaram à diretoria que o círculo laranja de centro O de raio igual a $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm representa a região do espaço onde orbitam os satélites. Os pontos A e B representam as posições desses satélites, que estão transmitindo o sinal que chega na *smart TV*, representada pela parte retangular do polígono marrom. Considerando que a distância entre dois pontos consecutivos da malha, tanto verticais quanto horizontais é 1 cm, determine em cm^2 a área marrom e a laranja desse logotipo.

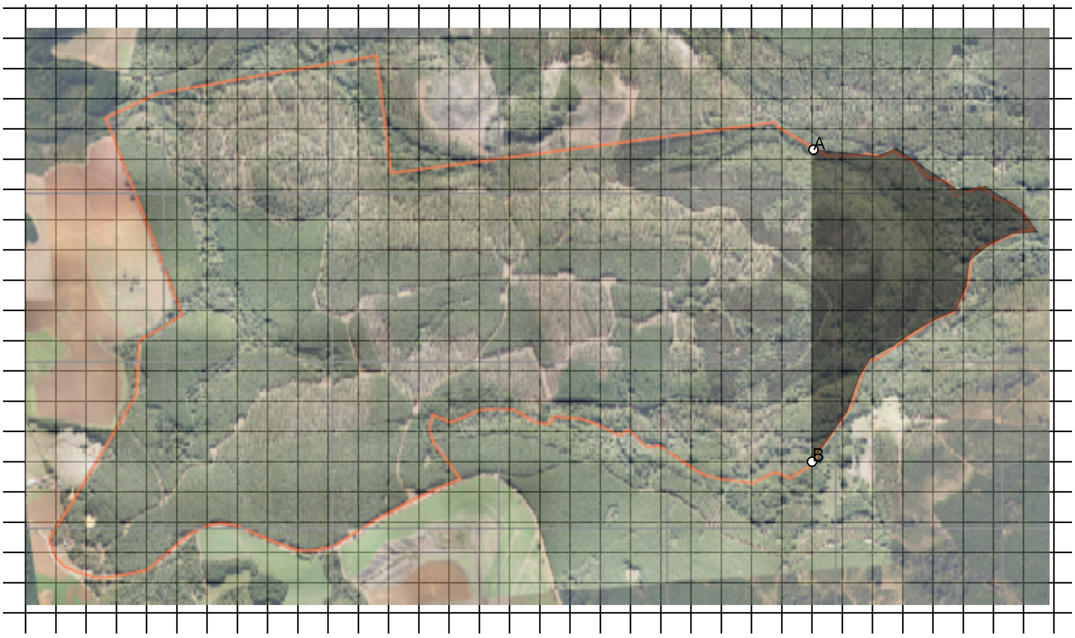
Questão 3: O geoprocessamento é um procedimento para estudo da superfície terrestre que usa imagens de satélite e fotografias aéreas para a produção cartográfica, para a agrimensura e várias outras aplicações onde a necessidade de informações detalhadas sobre uma superfície se fazem necessárias.

Essa técnica de estudos de superfície e cálculo de área é produto de inovações científicas e tecnológicas relacionadas a satélites, aviação civil e militar, drones ou VANT's (veículo aéreo não tripulado), matemática e computação científica, que permitem a obtenção de imagens, o processamento de dados e obtenção de resultados sem a necessidade de executar medições *in loco*, logo, proporciona uma melhor precisão das representações gráficas de superfícies terrestres bem como de medidas das grandezas físicas envolvidas.

Os *softwares* utilizados no processamento dos dados são capazes de detectar características que não podem ser vistas na frequência de onda da luz visível, são capazes de produzir imagens no espectro infravermelho, por exemplo. Dessa forma, é possível obter dados muito refinados sobre o relevo, a hidrografia, a altitude, a ocupação urbana, a vegetação, dentre outros.

A imagem da Figura 5.9 obtida por geoprocessamento, fotografada por VANT, destaca o perímetro de uma fazenda na região centro-oeste do estado de Santa Catarina, no município de Fraiburgo. O proprietário deseja reflorestar essa área com *pinus elliottii* para corte, que fornece celulose de fibra longa, matéria prima para os mais variados tipos de papel de alta qualidade. Porém, a legislação ambiental brasileira prevê para esse bioma (campos gerais) que uma propriedade rural deve dispor de 20% de sua área como Reserva Legal, conforme disposto na Lei 12651, de 25 de maio de 2012.

Figura 5.9 – Fotografia aérea de uma fazenda em Fraiburgo, SC.



Fonte: Imagem de propriedade do autor.

Conversando com o engenheiro florestal responsável pelo trabalho, o proprietário indicou na imagem que desejaria que a área mais escura, à direita do segmento AB fosse utilizada para a Reserva Legal dessa propriedade. A região indicada pelo fazendeiro corresponde a 20% da propriedade, conforme recomendado na Lei?

Orientações para Professores(as): As Atividades Complementares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da atividade principal ou da atividade avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

5.6 REFERÊNCIAS DIRECIONADAS

Atividade Motivadora:

- HERMES, J.D.V. O Teorema de Pick. 2015. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p.203–213. Disponível em <http://oaji.net/articles/2017/1602-1486644173.pdf>. Acesso em 12 de maio de 2020.

Atividade principal:

- Joinville Bairro a Bairro. 2020. Prefeitura Municipal de Joinville. Disponível em <https://www.joinville.sc.gov.br/publicacoes/joinville-bairro-a-bairro/>. Acesso em 7 de outubro de 2020.

Sistematização:

- LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.** Rio de Janeiro: GRAFITEX Comunicação visual, 1991.

Atividade Avaliativa

- Sociedade Brasileira de Dermatologia. O que é câncer de pele? 2017. Disponível em <https://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/doencas-e-problemas/cancer-da-pele/64/> Acesso em 23 de outubro de 2020.

Atividades Complementares

- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE. Tutotial de Geoprocessamento. Disponível em <http://www.dpi.inpe.br/spring/portugues/tutorial/introducao_geo.html> Acesso em 14 de novembro de 2020.

- Lei n. 12.651 de 25 de maio de 2012. Código Florestal Brasileiro. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12651.htm>. Acesso em: 14 de novembro de 2020.

6 AULA 5: CÁLCULO DE ÁREA PELA SOMA DE RIEMANN

O tema que trataremos nessa aula, atualmente não faz parte do currículo da Educação Básica e dessa forma, acreditamos que o desenvolvimento de cada momento será desafiador e envolvente. Nessa Aula, trataremos do cálculo de área através da Soma de Riemann. Essa técnica de calcular área permite obter com exatidão a área sob o gráfico de uma função. A motivação inicial dessa técnica consiste em particionar a área que se deseja calcular em finissímos retângulos, e efetuar a soma das áreas de todos os retângulos obtidos, que corresponderá ao valor da área desejada. Para essa aula, estabelecemos como sugestão os objetivos a seguir.
Objetivos:

- Conhecer o "Princípio dos Indivisíveis" de Bonaventura Cavalieri.
- Estabelecer o primeiro contato com o estudo dos limites.
- Determinar áreas de figuras planas utilizando a Soma de Riemann.
- Propor uma noção de integral através da Soma de Riemann.
- Aplicar expressões algébricas de somas de potências de naturais para obter as áreas procuradas.

Observações:

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua e calculadora;
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executado em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula.

6.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada Atividade Principal. Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

6.1.1 Atividade Motivadora

Um do maiores desafios em cada uma das épocas da história da matemática, era encontrar uma técnica eficaz para se calcular áreas de figuras planas curvas. Essas práticas remontam desde o Princípio da Exaustão, usado pelos gregos, e utilizado por Arquimedes para demonstrar sua famosa quadratura da parábola, cerca de 300 anos antes de Cristo.

Entre os séculos XVI e XVII da nossa era, o problema ainda estava em aberto, pois o médodo da exaustão não fornecia um caminho direto para obter área. Mas a partir do trabalho de Bonaventura Cavalieri (1598 -1647), ao estudar métodos de obtenção de áreas e volumes de figuras curvas, usando o "Princípio dos Indivisíveis", começou-se a obter êxito nesse tipo de cálculo. Esse princípio se fundamentava em duas ideias básicas:

i) Uma região plana pode ser considerada como um conjunto infinito de segmentos de reta paralelos, postos lado a lado.

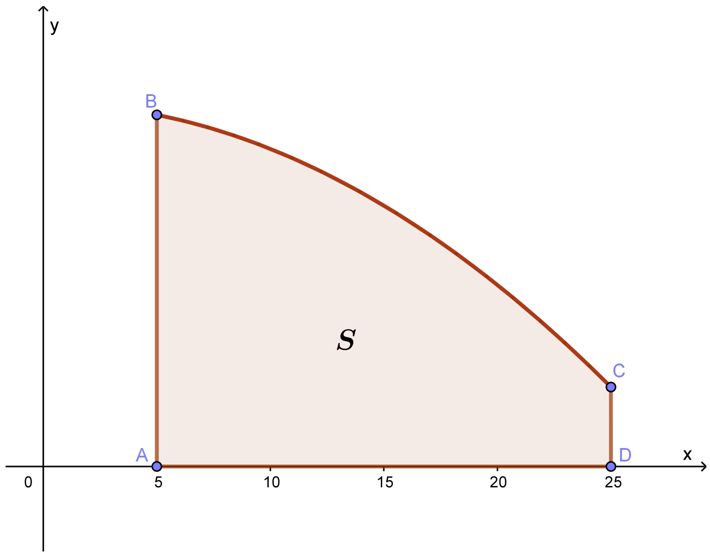
ii) Um sólido pode ser considerado um conjunto infinito de regiões planas paralelas, postos um sobre outro.

Como exemplo, podemos pensar em uma esteira de praia, feita com finíssimas tiras de bambu, cada tira representa um segmento de reta e o conjunto todo, a esteira, é o plano obtido. No caso de um sólido, podemos pensar em um baralho, cada carta é um plano, e quando organizamos umas sobre as outras temos um prisma retangular ou paralelepípedo.

Usando esse raciocínio, Cavalieri podia calcular áreas e volumes que seus antecessores tiveram muita dificuldade em calcular. Trabalhos semelhantes ao de Cavalieri foram feitos por Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662), além de muitos outros matemáticos europeus, mas nessa época (entre os séculos XVI e XVII), ainda não existia um método geral para a obtenção de áreas e volumes.

Como exemplo, observe a Figura 6.1, onde existe uma região **S**, cuja área será denotada como $\mathcal{S}$, e o arco BC representa um segmento da função $f(x) = -\frac{x^2}{50} + 16$ tal que $5 \leq x \leq 25$. Perceba que há diferença entre os símbolos **S** e $\mathcal{S}$.

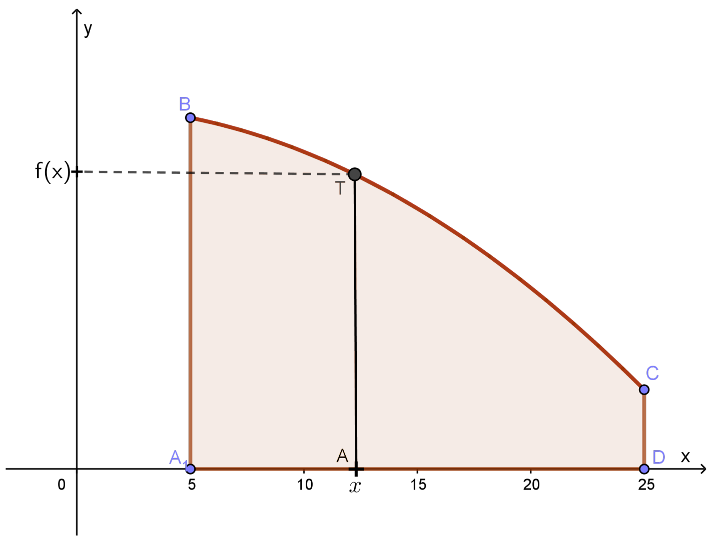
Figura 6.1 – Região **S** sob o gráfico de uma função.



Fonte: Autoria própria.

Uma estratégia para calcular o valor dessa área, é através da justaposição dos infinitos segmentos de reta de comprimentos iguais aos valores numéricos da função, medidos perpendicularmente a partir do eixo Ox para cada um dos infinitos valores de x do intervalo $5 \leq x \leq 25$ (observe a Figura 6.2).

Figura 6.2 – Comprimento do segmento AT da origem até $f(x)$.



Fonte: Autoria própria.

Pensar nos infinitos segmentos de reta que lado a lado formam a área $\mathcal{S}$ é relativamente fácil, lembre-se do exemplo da esteira de praia, mas temos aí um grande desafio quando queremos traduzir matematicamente essa ideia. *"É possível listarmos os infinitos valores de x do intervalo* $5 \leq x \leq 25$ *e aplicá-los um a um na função?"*

A resposta para a pergunta é **NÃO**. Também não podemos somar as larguras desses segmentos, pois um segmento de reta não tem o atributo da largura e por se tratar de um ente geométrico unidimensional, tem apenas comprimento.

Contorna-se o problema usando retângulos para particionar a região **S**, tão finos quanto desejarmos e esses, já sabemos, possuem altura e largura.

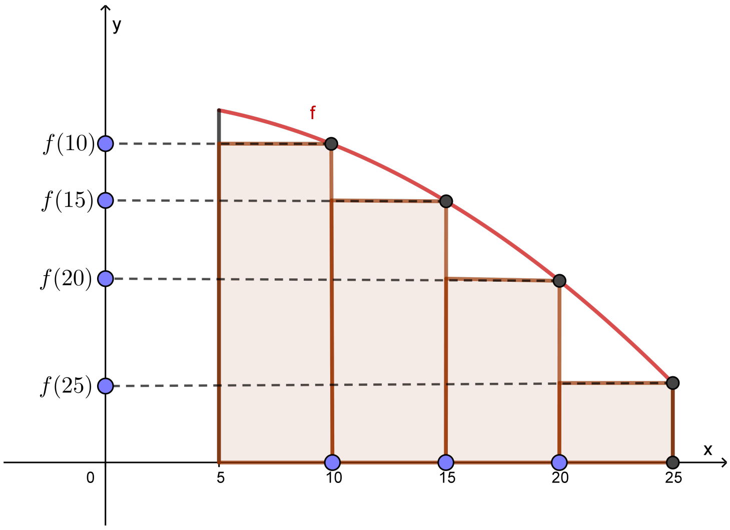
Orientações para Professores(as): O propósito do problema a seguir é apresentar na lousa a obtenção de um valor aproximado para uma área sob o gráfico de uma função, através da Soma de Riemann Inferior, usando partição de 5 retângulos. A organização da turma, a leitura dos objetivos e a resolução dessa atividade pelo professor deve ser realizada em um tempo sugerido de 15 minutos.

Problema: Iniciaremos construindo um modelo bem simples para começar a entender um pouco sobre a técnica mais avançada para calcular área nesse tipo de figura. Pretendemos inclusive, que até o final dessa aula o estudante, conheça e aplique em um exercício essa técnica.

Mesmo em sua forma mais singela, a técnica consiste no método geral para calcular área entre o gráfico da função e o eixo Ox, delimitadas lateralmente por retas paralelas ao eixo Oy, que provavelmente tirou muitas noites de sono dos matemáticos europeus dos séculos XV e XVI, anteriores a Cavalieri, Pascal e Fermat.

Particionaremos a região **S** em retângulos de 5 *cm* de base, conforme a Figura 6.3, pois para qualquer número finito de retângulos o procedimento apresentado será o mesmo. Observamos na própria Figura 6.3 que obteremos uma aproximação do valor real da área e note que quanto maior o número de retângulos que particionarmos a região **S**, melhor será a aproximação obtida.

Figura 6.3 – Região **S** dividida em retângulos de base 5 *cm*.



Fonte: Autoria própria.

Podemos observar pela Figura 6.3, que nossa divisão em 4 retângulos de base igual a 5 *cm* fornece uma aproximação não muito razoável da área.

O valor dessa aproximação é dada pela soma das áreas dos 4 retângulos que particionam a Figura 6.3. Da esquerda para a direita, vamos calcular a área de cada um e somar os valores encontrados, acompanhe:

- Retângulo R_1 de base 5 e altura $f(10)$, sua área é dada por:

$$\begin{aligned} R_1 &= 5 \cdot f(10) \\ &= 5 \cdot \left(-\frac{10^2}{50} + 16\right) \\ &= 5 \cdot \left(-\frac{100}{50} + 16\right) \\ &= 5 \cdot (-2 + 16) \\ &= 5 \cdot 14 \\ &= 70\ cm^2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

- Retângulo R_2 de base 5 e altura $f(15)$, sua área é dada por:

$$\begin{aligned} R_2 &= 5\cdot f(15) \\ &= 5\cdot\left(-\frac{15^2}{50}+16\right) \\ &= 5\cdot\left(-\frac{225}{50}+16\right) \\ &= 5\cdot(-4,5+16) \\ &= 5\cdot 11,5 \\ &= 57,5\ cm^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

- Retângulo R_3 de base 5 cm e altura $f(20)$, sua área é dada por:

$$\begin{aligned} R_3 &= 5\cdot f(20) \\ &= 5\cdot\left(-\frac{20^2}{50}+16\right) \\ &= 5\cdot\left(-\frac{400}{50}+16\right) \\ &= 5\cdot(-8+16) \\ &= 5\cdot 8 \\ &= 40\ cm^2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

- Retângulo R_4 de base 5 cm e altura $f(25)$, sua área é dada por:

$$\begin{aligned} R_4 &= 5\cdot f(25) \\ &= 5\cdot\left(-\frac{25^2}{50}+16\right) \\ &= 5\cdot\left(-\frac{625}{50}+16\right) \\ &= 5\cdot(-12,5+16) \\ &= 5\cdot 3,5 \\ &= 17,5\ cm^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Somando os valores das áreas dos retângulos,

$$\begin{aligned} R_1+R_2+R_3+R_4 &= 70+57,5+40+17,5 \\ &= 185\ cm^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

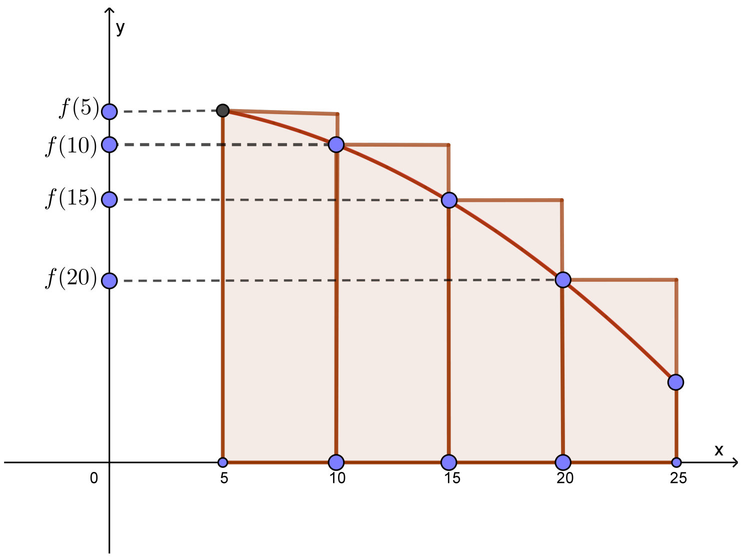
O valor aproximado da área da região **S** da Figura 6.1 é 185 cm^2, mas não sabemos o quão aproximado é esse valor. Na atividade a seguir, veremos como encontrar uma aproximação melhor para o valor dessa área. Atualmente essa partição em retângulos e posterior soma das suas áreas é chamado de *Soma de Riemann* pois foi desenvolvida pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

6.1.2 Atividade Principal

Orientações para Professores(as): Peçam que os alunos leiam o enunciado da Atividade Principal em silêncio e pensem por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, liberem para discutirem as idéias com seus companheiros de equipe e terminarem a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos que esse momento seja realizado em 25 minutos.

Para melhorar nossa noção sobre o valor da área da região **S** da Figura 6.1, observe a Figura 6.4, onde os retângulos de base 5 cm circunscrevem a região **S**. Note que no caso anterior, na Figura 6.3 os retângulos eram inscritos em **S**.

Figura 6.4 – Região **S** dividida em retângulos de base 5 cm.

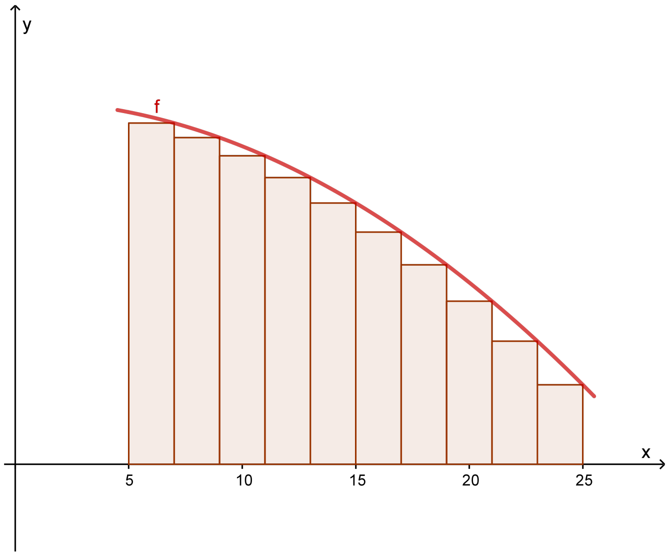


Fonte: Autoria própria.

Problema 1: Nessas condições, determine a soma das áreas dos retângulos da Figura 6.4 e complete a frase a seguir: A área **S** da Figura 6.4 é um valor entre 185 cm^2 e .... cm^2.

Problema 2: Agora que já conhecemos um intevalo onde se situa o valor da área da figura, procure uma melhor aproximação para esse valor, conforme as divisões apresentadas na Figura 6.5 e na Figura 6.6.

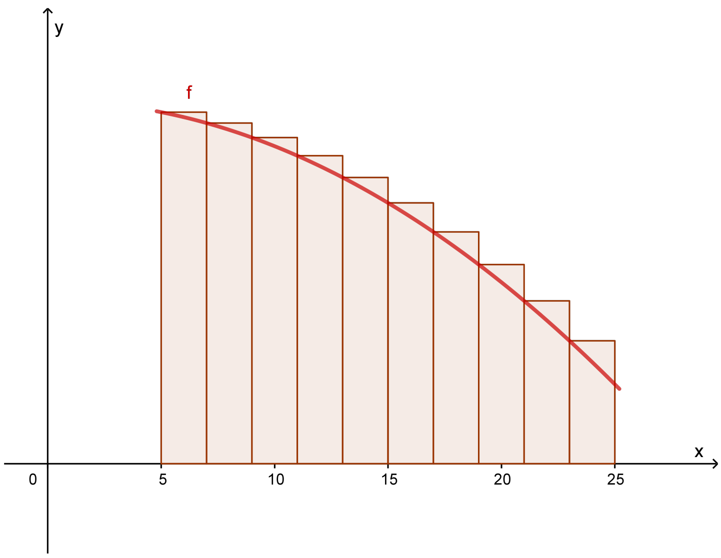
Figura 6.5 – Soma de Riemann Inferior para a área da região **S**.



Fonte: Autoria própria.

Observe que na Figura 6.5, os retângulos estão no interior da região que queremos obter a área, chamamos a soma das áreas desses retângulos de *Soma de Riemann Inferior*. Já a Figura 6.6, mostra os retângulos circunscritos na região **S** e para esse caso obteremos a *Soma de Riemann Superior*.

Figura 6.6 – Soma de Riemann Superior para a área da região **S**.



Fonte: Autoria própria.

Após determimar as duas somas, compare a diferença entre os valores e responda:

a) Em qual intervalo se situa a área procurada?

b) Observando os gráficos das Figuras 6.5 e 6.6, o que diferencia a soma inferior da soma superior?

c) Qual será o comportamento dessa diferença quando aumentarmos o número de retângulos?

d) Quantos retângulos devemos usar para que a diferença entre os valores obtidos na soma superior e na soma inferior seja igual a zero? E nesse caso, ainda encontraremos apenas um valor aproximado para a área? Justifique.

Orientações para Professores(as): O propósito dessa atividade é fazer a Soma de Riemann superior, para a mesma área resolvida na atividade motivadora. A seguir, fazer a Soma de Riemann superior e inferior, ainda para a mesma área, porém usando partições de dez retângulos. E por fim os estudantes devem comparar as diferenças dos valores entre as somas com 5 retângulos e entre as somas com 10 retângulos. Nesse momento os estudantes irão construir, aplicar e discutir as estratégias para a resolução da atividade em duplas ou trios, em um tempo sugerido de 25 minutos.

6.2 PAINEL DE SOLUÇÕES

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

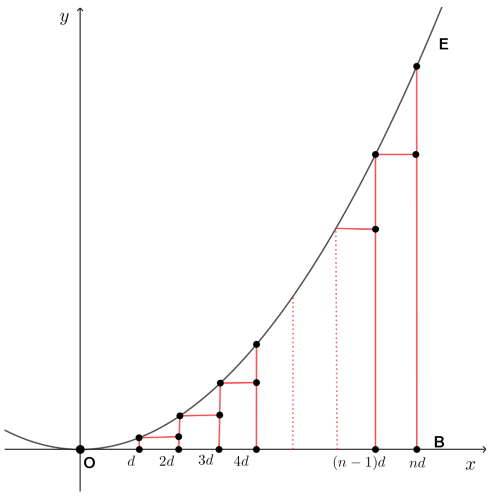
6.3 SISTEMATIZAÇÃO

O processo que usamos para determinar a área da região **S** da Figura 6.1, atualmente é denominado *Soma de Riemann*, e fizemos seu uso de forma bem singela, mas trata-se de um dos temas de estudo mais avançados da matemática. Nesse momento da aula, apresentaremos um exemplo atribuído a Pierre de Fermat para obtenção da área sob o gráfico da função $f(x) = kx^2$. Pretende-se que os professores(as) executem esse momento em 20 minutos.

Muito antes de Riemann, Cavalieri, sucedido por Blaise Pascal e Pierre de Fermat foram os precursores dessa técnica de obtenção do valor numérico de uma área pela decomposição em finíssimos retângulos. Mostraremos como aplicar essa técnica particionando a área em questão em n retângulos, para um número n tão grande quanto se queira, proposto por Fermat, em meados do século XVII.

Exemplo 6.1. *Dada a parábola $y = kx^2$ da Figura 6.7, exaurindo-a em retângulos de lados paralelos ao eixo Oy e bases no eixo Ox tal que o vértice da parábola esteja na origem do sistema de coordenadas e seu eixo de simetria seja o próprio eixo Oy, encontre a área do setor parabólico entre o eixo Ox, a parábola e a reta vertical que passa por E e corta Ox no ponto B.*

Figura 6.7 – Retângulos decompondo a área sob uma curva.



Fonte: Adaptado de Eves, 2011, p. 435

Resolução.

No segmento OB marcamos n pontos eqüidistantes e seja d o comprimento dos subintervalos da partição, isto é, $d = \frac{OB}{n}$. Construindo retângulos como mostrado na Figura 6.7, suas bases tem o comprimento fixo d e suas alturas, aplicando os valores $n \cdot d$ das bases na equação da parábola serão, respectivamente,

$$d^2, 4d^2, 9d^2, \ldots (n-1)^2 d^2, n^2 d^2. \tag{6.6}$$

Pelo "Princípio dos Indivisíveis" de Cavalieri a área de uma figura seria a soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelas, ao tornarmos esses retângulos tão finos quanto possíveis, poderíamos obter a área do setor parabólico em questão fazendo a soma da área desse número indefinido de finíssimos retângulos aos quais o setor foi decomposto.

Como as bases de todos esses retângulos medem d, multiplicando por d cada uma das alturas da sequência (6.6) *temos as áreas dos n retângulos e somando todas essas áreas, temos:*

$$\mathbf{S} = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \ldots + n^2 d^3 = d^3 \left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right). \tag{6.7}$$

Fermat e Pascal já haviam trabalhado na soma das m-ésimas potências dos n primeiros números naturais, logo, a soma dos termos entre parênteses do segundo membro da Equação (6.7) *já era fato conhecido, sendo*

$$1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}, \tag{6.8}$$

mas $d=\frac{OB}{n}$, *logo,*

$$d^3\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=OB^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right). \tag{6.9}$$

Note que quanto maior for o número de retângulos usados na soma, em (6.9) os termos $\frac{1}{2n}$ *e* $\frac{1}{6n^2}$ *podem ser desprezados, e a soma do setor parabólico OBE da Figura 6.7 será*

$$\mathcal{S}=\frac{OB^3}{3}. \tag{6.10}$$

Vimos pelo exemplo anterior que a Soma de Riemann permite obter um valor ou até uma expressão analítica para essa área sob o gráfico de uma função. Mas se nos perguntarmos o seguinte: "O Exemplo 6.1 nos deu uma expressão que permite obter o valor de uma área à direita da origem do eixo Ox. E se quisermos que a área sob a função esteja limitada à esquerda por uma reta vertical de abscissa negativa?"

Sabemos desde sempre, que a área é uma grandeza positiva, dessa forma, a fundamentação do conceito de Integral precisou se distanciar dessa aplicação na obtenção de área. E esse foi um dos motivos que fez Riemann definir a Integral como o limite da soma de uma série, como por exemplo a soma (6.7).

Por maior que queiramos tornar o valor de n, a soma das áreas desses n retângulos nunca vai ser maior que o valor real da área em questão. Em outras palavras essa soma se aproxima de um valor limite a medida que n cresce acima de qualquer número dado.

A esse limite, chamamos de *integral da função f no intervalo* $[a,b]$, onde a e b são as abscissas à esquerda e à direita, respectivamente, das retas verticais que delimitam a área e representamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.11}$$

Por fim, devemos interpretar a Integral como o Limite da Soma de Riemamm quando n tende ao infinito.

Fechamento da Aula 5: Nessa aula os estudantes tiveram contato com as primeiras noções de integral através das Somas de Riemann. A Soma de Riemann consiste em um procedimento que possibilita calcular a área sob o gráfico de uma função, através da partição dessa área em n

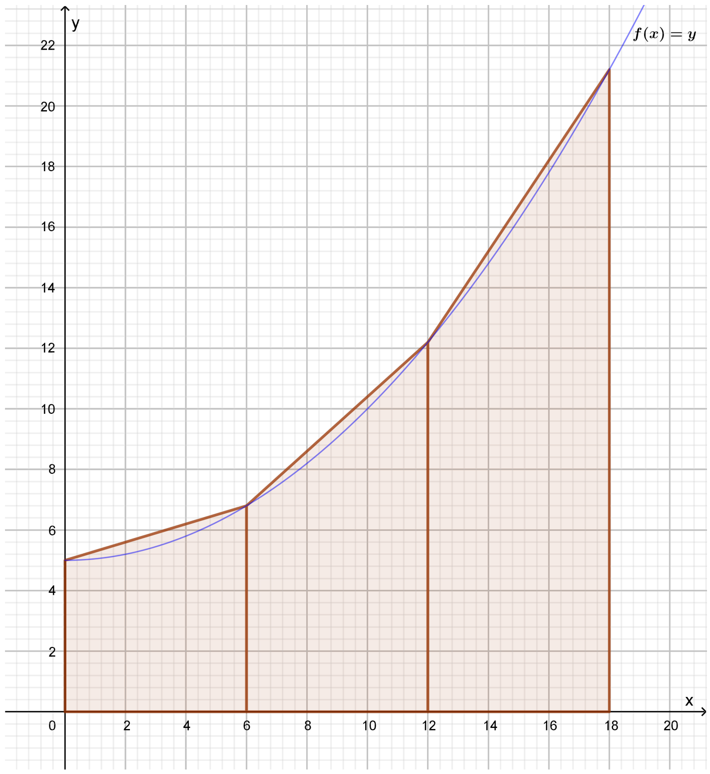
retângulos, tão finos quanto se queira. O limite da soma das áreas desses n retângulos, para um n maior que qualquer outro valor dado, é a medida da área procurada.

6.4 ATIVIDADE AVALIATIVA

Avaliação 5. Resolva o seguinte problema:

Determine uma aproximação para a área decomposta em trapézios, sob o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{20} + 5$, delimitada pela função, pelo eixo do x e pelas retas $x = 0$ e $x = 18$, conforme representa a Figura 6.8. A área do trapézio é dada por $S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, onde B é a base maior, b é a base menor e h é a altura.

Figura 6.8 – Área sob o gráfico de uma função repartida em trapézios.



Fonte: Autoria própria.

Orientações para Professores(as): Essa atividade tem o propósito de avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado. Nesse momento, os estudantes resolverão individualmente um problema similar aos propostos anteriormente. Sugerimos que reservem 10 minutos para os estudantes resolverem e corrijam nos 5 minutos finais da Aula.

6.5 REFERÊNCIAS DIRECIONADAS

Atividade Motivadora:

- EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.
- NETO, A. A. C. **Cálculo integral para o ensino médio.** 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo710>. Acesso em: 19 de setembro de 2019.

Atividade principal:

- NETO, A. A. C. **Cálculo integral para o ensino médio.** 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo710>. Acesso em: 19 de setembro de 2019.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos da história da matemática.** Rio de janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

Sistematização:

- EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos da história da matemática**. Rio de janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

Atividade Avaliativa

- NETO, A. A. C. **Cálculo integral para o ensino médio.** 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em:

7 RESOLUÇÕES DAS QUESTÕES DO CADERNO DE ATIVIDADES

Caro(a) Docente, nas páginas a seguir, estão registradas propostas de soluções para todas as atividaes desse material, você deve tomar conhecimento dessas resoluções bem como das sugestões e orientações presentes nessas resoluções antes de aplicar as atividades.

7.1 RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES DA AULA 1

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes iniciarem a correção.

7.1.1 Resolução da Atividade Motivadora

Professores(as), iniciem a resolução dessa atividade lendo o enunciado junto com a turma e pergunte se alguém quer propor alguma estratégia para sua solução. Deixe os estudantes pensando por alguns minutos. Com certeza alguém apontará o caminho correto, caso contrário, apontem a forma correta de resolver e iniciem a solução.

Tenha em mente que o propósito desta atividade é fixar a ideia da decomposição e composição de áreas, abrindo caminho para a resolução da atividade principal, que será executada pelos alunos no próximo momento da aula. Exploraremos basicamente as ideias sobre tomar uma unidade como padrão de medida, decomposição e composição de áreas e propriedade aditiva das áreas.

Note que no primeiro passo da resolução, mediremos a área do triângulo ABC em função dos triângulos menores resultantes da decomposição, essses triângulos menores serão usados como unidade de medida na obtenção da área do retângulo $DEFG$ e não são quadrados.

Resolução:

Observe a Figura 7.1 e acompanhe o raciocínio exposto nos itens a seguir:

i) Usando o fato de que a base DE do retângulo é $\frac{1}{4}$ do lado do triângulo isósceles ABC, dividimos a base em 4 partes iguais, marcando os pontos O, P e Q.

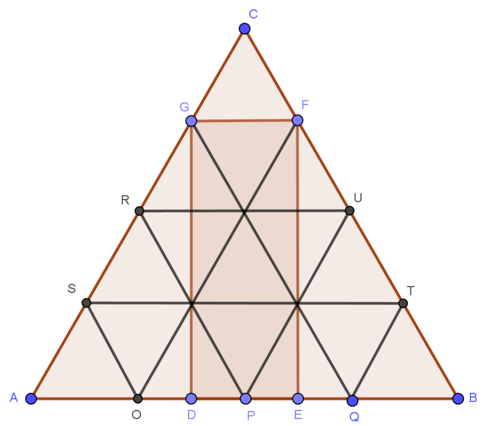
ii) Traçamos os segmentos OS, PR e QG, paralelos ao lado BC, dessa forma, os pontos G, R e S dividem AC em 4 partes iguais. De modo análogo, dividimos o lado BC em 4 partes iguais pelos pontos F, U e T, conforme Figura 7.1.

iii) Traçamos os segmentos RU e ST e então, o triângulo ABC fica subdividido em 16 triângulos equiláteros congruentes, cada um deles tem $\frac{1}{16}$ da área de ABC, que vale $\frac{8\sqrt{3}}{5}$, logo, cada um dos triângulos menores tem área

$$\frac{1}{16} \times \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

iv) Fazendo a contagem, nota-se que o retângulo $DEFG$ é composto por 6 triângulos menores, dessa forma sua área é $6 \times \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$ unidades de área.

Figura 7.1 – Triângulo ABC decomposto em 16 triângulos congruentes.



Fonte: Autoria própria.

Professores(as), a atividade motivadora deve ser resolvida de forma conduzida, e com ênfase na decomposição da área do retângulo feita através dos triângulos menores, essa ideia é fundamental na resolução da atividade principal. Observem também que quando usamos paralelismo para obter esses triângulos menores, isso garante congruência entre eles e a semelhança entre esses e o triângulo ABC.

7.1.2 Resolução da Atividade Principal

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que etão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

Na atividade motivadora, os estudantes observaram a resolução de um problema usando técnicas de decomposição e composição. Espera-se que na resolução da atividade principal, procedam de maneira análoga, contando os quadradinhos da malha que estão sob as manchas solares.

Espera-se que usem o *zoom* da câmera de seus telefones celulares, uma lente de aumento, ou até mesmo, reunir todas as manchas em uma área mais próxima copiando em um pedaço de papel manteiga.

De posse da quantidade aproximada de quadrados da malha sob as manchas, podem escolher muitos caminhos para obter a solução do problema. Apresentaremos a seguir, dois possíveis caminhos:

Uma Resolução.

A imagem do Sol e das manchas solares estão impressas em uma malha quadriculada, **mas não é milimetrada**. Conforme indica a Figura 2.3, os quadrados maiores têm lado 1 $cm = 10\ mm$. Os lados desse quadrado maior estão divididos em 5 partes, então o lado de cada quadradinho da malha é $\frac{10\,mm}{5} = 2\,mm$ e dessa forma, os quadradinhos têm área de $4\,mm^2$. Fazendo a contagem, o diâmetro do Sol, representado pelo segmento EF, contém aproximadamente 54 partes de 2 mm, ou seja, o diâmetro tem 108 milímetros. O raio do Sol é dado no problema e vale 695 700 km, então o diâmetro é 1 391 400 km.

Dividindo 1 391 400 km por 108, cada milímetro corresponde à

$$1\,391\,400 \div 108 = 12\,883,3333\ km,$$

logo, cada quadrado de 1 $mm \times 1\ mm$ representa a área de $(12\,883,333)^2 = 165\,980\,276,9189\ km^2$.

Em nossa contagem, obtivemos 14 quadrados de $2\ mm \times 2\ mm$, e isso equivale a $4 \times 14 = 56\ mm^2$.

Dessa forma, a área total das manchas é de aproximadamente $165\,980\,276,9189 \times 56 = 9\,294\,895\,507,458\ km^2$.

Em notação científica, a área da manchas é aproximadamente $9,29 \times 10^9\ km^2$.

Outra Resolução.

Se considerarmos que o diâmetro do círculo da Figura 2.3 tem 108 mm, seu raio possui 54 mm, logo, a área total $\mathcal{S}_C$ é:

$$\mathcal{S}_C = \pi \times R^2 = 3,141592 \times (54)^2 = 3,141592 \times 2916 = 9160,8822\ mm^2, \tag{7.1}$$

ou seja, no círculo que representa o disco solar, temos aproximadamente 9161 quadrados de 1 mm^2.

A área de cada quadrado corresponde a $\frac{1}{9161}$ da área total.

Usando o raio do Sol $R = 695\,700\ km$, a área do disco solar é:

$$\mathcal{S}_{Sol} = \pi \times R^2 = 3,141592 \times (695700)^2 = 1\ 520\ 525\ 784\ 196,08\ km^2. \tag{7.2}$$

Como as manchas solares abrangem 56 quadrados de 1 mm^2, essas ocupam uma área de $56 \times \frac{1}{9161} = \frac{56}{9161}$ da área total, ou seja,

$$\frac{56}{9161} \times 1\,520\,525\,784\,196,08 = 9\,294\,776\,106,863\ km^2.$$

Em notação científica, temos aproximadamente $9,29 \times 10^9\ km^2$.

Professores(as), na contagem dos quadrados da malha que compreendem as manchas solares expostas na figura, haverá muita variação nas quantidades obtidas por seus alunos, inclusive quando vocês forem resolver essa atividade pode ter diferença entre a contagem aqui exposta e as suas. Reforcem para os alunos que estamos apenas fazendo uma **estimativa** da área total dessas manchas, e é normal nesses casos obtermos diferenças no valor final, o importante aqui é que o procedimento empregado para obter o resultado seja produzido a partir de um raciocínio justificável através da matemática usada pelo estudante. Porém, resultados muito diferentes dos demais devem ser explorados junto à classe para analisar onde estão os erros que os geraram.

O item (b) dessa atividade pergunta "quais são os fatores que tornam nosso problema uma idealização da situação real?"

Professores(as), certamente vocês e as suas turmas poderão pontuar muitos outros fatores além dos sugeridos, a seguir:

- O Sol é esférico, então essas manchas pertencem a uma superfície esférica, e em nossos cálculos consideramos essa superfície como um disco plano.

- Para calcular com mais exatidão, deveriamos considerar a curvatura da superfície, ou seja, levar em conta a geodésia. Esse é um excelente tema para propor como pesquisa, introduzindo a noção de geometria esférica.

- A luz do sol sofre interferências ao chegar na Terra, por exemplo, ao sair do vácuo e entrar no ar. a luz sofre refração, então, é bem provável que Galileu viu uma imagem bastante distorcida dessas manchas.

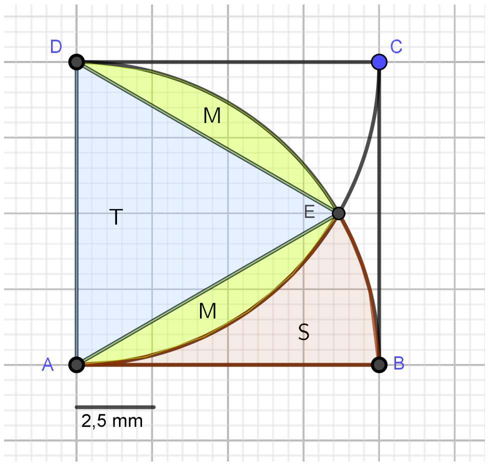
7.1.3 Resolução da Atividade Avaliativa

Professores(as) essa atividade avaliativa deve ser proposta nos últimos quinze minutos da aula, após cumpridas as etapas anteriores. Reservem dez minutos para a resolução e 5 minutos para sua correção na lousa. Exponha a resolução algébrica da questão, conforme apresentado a seguir.

Resolução.

A área procurada corresponde à região S, conforme Figura 7.2.

Figura 7.2 – Quadrado *ABCD* decomposto em áreas não poligonais.



Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 7.2, note que a região delimitada pelo arco DB e pelos segmentos de reta AB e AD tem área

$$\mathcal{S}(\widehat{\mathrm{DEB}}) = 2\mathcal{S}(M) + \mathcal{S}(T) + \mathcal{S}(S). \tag{7.3}$$

Isolando o valor que queremos determinar, temos:

$$\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(\widehat{\mathrm{DEB}}) - 2\mathcal{S}(M) - \mathcal{S}(T). \tag{7.4}$$

Temos ainda,

- A área delimitada pelo arco DB e pelos lados AB e AD, representada por $\mathcal{S}(\widehat{\mathrm{DEB}})$ corresponde a área de um quarto de círculo de raio 1 cm logo,

$$\mathcal{S}(\widehat{\mathrm{DEB}}) = \frac{\pi}{4}\, cm^2.$$

- A área $\mathcal{S}(T)$ corresponde a área de um triângulo equilátero de lado 1 cm logo,

$$\mathcal{S}(T) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, cm^2.$$

Para determinarmos a área da região M, observaremos a Figura 7.2. Perceba que o arco AE delimita um setor circular de lados DA e DE, de raio 1 cm, cujo ângulo do vértice D é 60^o dado que o triângulo DEA é equilátero. A área desse setor corresponde a um sexto da área de um círculo de raio 1 cm, ou seja, sua área é $\frac{\pi}{6}\, cm^2$.

Dessa forma, a área M pode ser obtida pela diferença entre a área do setor circular DAE e do triângulo equilátero DEA:

$$\mathcal{S}(M) = \mathcal{S}(\widehat{\mathrm{AE}}) - \mathcal{S}(T) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Agora que já sabemos todos os valores do segundo membro da Equação 7.4, podemos fazer a substituição e determinar o valor procurado, acompanhe:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(S) &= \mathcal{S}(\widehat{\mathrm{DEB}}) - 2\mathcal{S}(M) - \mathcal{S}(T) \\
&= \frac{\pi}{4} - 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{12} \approx 0,1712\, cm^2. \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

Espera-se que os estudantes resolvam o problema através da contagem de quadrados da malha, conforme o procedimento exposto na resolução da atividade principal. Esse caminho demanda mais tempo e provavelmente você não conseguirá desenvolver essa resolução algébrica. Assim, quando todos terminarem, apenas exponha o resultado na lousa. Os resultados dos alunos devem se aproximar de $0,1712\, cm^2$.

7.1.4 Resolução das Atividades Complementares

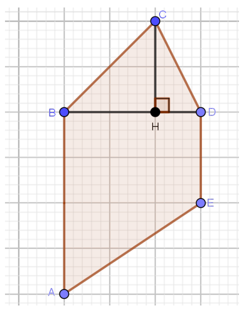
As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

Resolução da questão 1:

ITEM (A):

Observando a Figura 7.3, percebemos que a área do pentágono $ABCDE$ pode ser dividida em um triângulo BCD e um trapézio retângulo $ABDE$.

Figura 7.3 – Pentágono $ABCDE$ dividido em triângulo e trapézio.



Fonte: Autoria própria.

Como cada quadrado delimitado pela linha mais escura da malha tem 90 cm de lado, o triângulo BCD tem base $BD = 270\, cm$ e altura $CH = 180\, cm$, sendo o ponto H pé de perpendicular. Dessa forma, a área $\mathcal{S}(BCD)$ do referido triângulo é:

$$\mathcal{S}(BCD) = \frac{BD \cdot CH}{2} = \frac{270 \cdot 180}{2} = 270 \cdot 90 = 24300 \; cm^2. \tag{7.6}$$

Como a questão pede a área em metros quadrados, basta dividirmos o valor por 10000 pois 1 $m^2 =$ 10000 cm^2. Logo, $\mathcal{S}(BCD) = 2,43 \; m^2$.

A área do trapézio retângulo $ABDE$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(ABDE) &= \frac{(AB+DE) \cdot BD}{2} \\ &= \frac{(AB+DE) \cdot BD}{2} \\ &= \frac{(360+180) \cdot 270}{2} \\ &= \frac{540 \cdot 270}{2} = 270 \cdot 270 \\ &= 72900 \; cm^2. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Como a questão pede a área em metros quadrados, basta dividirmos o valor por 10000 pois 1 $m^2 =$ 10000 cm^2. Logo, $\mathcal{S}(BCD) = 7,29 \; m^2$.

Dessa forma, a área total do pentágono $ABCDE$ é:

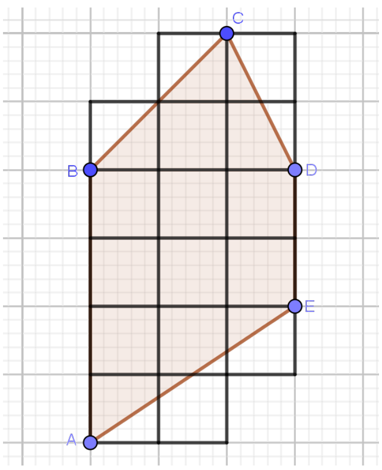
$$\mathcal{S}(BCD) + \mathcal{S}(BCD) = 2,43 + 7,29 = 9,72 \; m^2. \tag{7.8}$$

Portanto, o valor da área total do piso representado pela Figura 7.3 é $9,72 \; m^2$.

ITEM (B):

Considerando que os ladrilhos que são recortados não dão garantia de que o pedaço não ocupado poderá ser reaproveitado, devido a quebras inesperadas e possíveis erros no ato do corte, podemos dividir o pentágono $ABCDE$ em quadrados de lados de 90 cm, seguindo as linhas mais escuras da malha quadriculada, conforme Figura 7.4.

Figura 7.4 – Ladrilhos quadrados de lado 90 cm pavimentando a superfície $ABCDE$.



Fonte: Autoria própria.

Contando os quadrados destacados em linha mais escura na Figura 7.4, temos um total de 16 ladrilhos.

Portanto, usaremos 16 ladrilhos de 90 *cm* de lado para pavimentar o referido piso.

ITEM (C):

Cada ladrilho de 90 *cm* de lado tem área de $90^2 = 8\,100\ cm^2$. Como usaremos 16 ladrilhos, temos $16 \cdot 8\,100 = 129\,600\ cm^2 = 12,96\ m^2$.

O desperdício pode ser obtido dividindo 12,96 pelo valor da área $\mathcal{S}(ABCDE)$:

$$\frac{12,96}{9,72} \times 100\% = 133,3\%. \tag{7.9}$$

A área de 16 ladrilhos corresponde a $133,3\%$ da área total do pentágono da Figura 7.4, portanto, teremos um desperdício de $133,3\% - 100\% = 33,3\%$.

É importante observar que desprezar as partes cortadas sem verificar se podem ser utilizadas não é uma boa decisão, pois gera um desperdício considerável.

Resolução da questão 2:

Do enunciado, temos que:

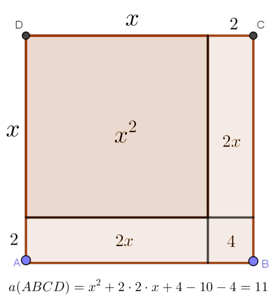
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{7.10}$$

A identidade (7.10) é comumente associada a um quadrado, conforme ilustrado na Figura 2.8 do enunciado desse problema (ver Seção A.1.2.5).

Na Figura 2.8, $ABCD$ é um quadrado de área a^2, $BCFE$ e $DCHK$ são dois retângulos congruentes de áreas ab e $HCFG$ um quadrado de área b^2.

A equação quadrática $x^2 + 4x - 10 = 11$, ao ser comparada à identidade (7.10) pode indicar que é possível obtermos um quadrado de lados $(x+2)$ cuja área é 11 (ver Figura 7.5).

Figura 7.5 – Quadrado de lado $(x+2)$.



Fonte: Autoria própria.

Escrevendo a equação quadrática $x^2 + 4x - 10 = 11$ na forma $(a+b)^2 = c$ e usando a técnica de completar quadrados, podemos encontrar as suas raízes:

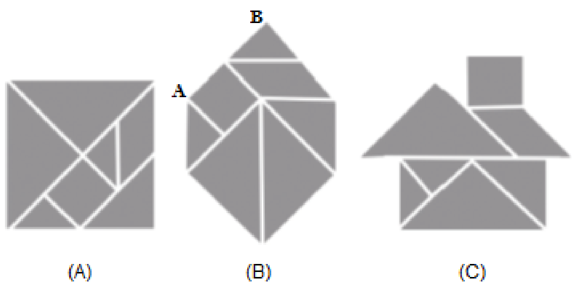
$$\begin{aligned}
x^2+4x-10 &= 11\\
x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-10-2^2 &= 11\\
x^2+4x+4-10-4 &= 11\\
x^2+4x+4-14 &= 11\\
x^2+4x+4 &= 11+14\\
(x+2)^2 &= 25\\
x+2 &= \pm\sqrt{25}\\
x+2 &= \pm 5 \Longrightarrow x=3 \text{ ou } x=-7
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Portanto a solução é $\{-7,3\}$.

Resolução da questão 3:

Primeiramente, notamos que nas três configurações de tangran mostradas na Figura 7.6 as áreas são iguais, pois são formadas pelas mesmas peças justapostas sem que haja sobreposição.

Figura 7.6 – Composições com o Tangran



Fonte: exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br

Se o lado AB da Figura 7.6 (B) mede 2 cm, os lados do triângulo e do quadrado que o formam valem 1 cm. Notamos também que o lado adjacente a AB é um paralelogramo e devido à simetria, tem o lado maior igual a 2 cm.

Dessa forma, ao observarmos o quadrado da Figura 7.6 (A), e comparando com as medidas já descobertas, conclui-se que suas diagonais medem 4 cm. Podemos então obter a área da casinha calculando a área do quadrado.

Sabemos o valor das diagonais, e como todo quadrado é também um losango, temos

$$\mathcal{S}(casinha) = \frac{4\cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8\ cm^2. \tag{7.12}$$

Portanto, a alternativa correta é (B).

7.2 RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES DA AULA 2

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes iniciarem a correção.

7.2.1 Resolução da Atividade Motivadora

Professores(as), iniciem a resolução dessa atividade lendo o enunciado junto com a turma e perguntem se alguém quer propor alguma estratégia para encontrar o número x, pertencente ao intervalo real $1 < x < 2$, tal que x elevado ao quadrado é igual a 2. Deixem os estudantes pensando por alguns minutos. Com certeza alguém apontará o caminho correto, caso contrário, apontem esse caminho, conforme o texto dessa atividade e iniciem a exposição das ideias, pois nesse caso, não temos uma atividade e sim um texto sobre o tema.

Nessa atividade, pretende-se fixar a ideia da existência de números irracionais, a partir da descoberta das grandezas incomensuráveis na Grécia Antiga. Pretende-se fazer com que os estudantes percebam por inspeção, que não conseguimos encontrar um número decimal/racional que elevado ao quadrado é igual a 2. Para esse momento da aula basta discutir as tabelas expostas no próprio texto da atividade com as respectivas discussões sobre o fato.

Esse Momento da Aula tem o objetivo de despertar o interesse e a curiosidade sobre o tema da aula, inclusive fornecendo ferramentas, tais como fórmulas e conceitos necessários para a solução da atividade principal, da atividade avaliativa e das atividades complementares. Lembre-se que o tempo estimado para esse momento da aula é de 15 minutos.

7.2.2 Resolução da Atividade Principal

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que etão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.

- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.

- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

A finalidade dessa atividade é verificar a teoria das proporções de Eudoxo para alguns valores de grandezas, bem como propiciar ao estudante a oportunidade de pensar e escolher alguns valores que se encaixem nas implicações dessa teoria.

Resolução da Atividade Principal:

ITEM (A)

Para verificar se quatro grandezas formam uma proporção, devemos observar se elas satisfazem a Propriedade Fundamental das Proporções (PFP), expressa no resultado (7.13) a seguir,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \tag{7.13}$$

Sejam $a = 2\ cm^2$, $b = \sqrt{5}\ cm^2$, $c = \frac{2}{3}\ cm^2$ e $d = \frac{\sqrt{5}}{3}\ cm^2$ e os números inteiros $m = 5$ e $n = 3$, aplicando esses valores no resultado (7.13), temos,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5}} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} &= \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{3} &= \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Como os valores de a, b, c e d satisfazem a propriedade (7.13), eles estão em proporção.

ITEM (B)

Para os valores de a, b, c e d do enunciado, usando $\sqrt{5} = 2,24$, e substituindo os valores, temos:

$$\begin{aligned} m \cdot a > n \cdot b &\Rightarrow m \cdot c > n \cdot d \\ 5 \cdot 2 > 3 \cdot \sqrt{5} &\Rightarrow 5 \cdot \frac{2}{3} > 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 10 > 3 \cdot \sqrt{5} &\Rightarrow \frac{10}{3} > \sqrt{5} \\ 10 > 3 \cdot 2,24 &\Rightarrow 3,33 > 2,24 \\ 10 > 6,72 &\Rightarrow 3,33 > 2,24. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Portanto, a implicação entre as desigualdades é verdadeira.

ITEM (C)

Nas desigualdades $10 > 6,72 \Rightarrow 3,33 > 2,24$, faremos a diferença entre o maior e o menor valor em cada uma. Logo,

$$10 - 6,72 = 3,28 \text{ e } 3,33 - 2,24 = 1,09. \tag{7.16}$$

Note que a razão entre as grandezas $\frac{c}{a}$ e $\frac{d}{b}$ é $\frac{1}{3}$, conforme exposto no enunciado. Ao observarmos as diferenças obtidas em (7.16), notamos que $3,28 \approx 3 \cdot 1,09$, logo, a proporção se manteve. Não conseguimos um resultado mais aproximado devido ao uso de $\sqrt{5}$ com apenas duas casas decimais.

ITEM (D)

Nesse item, os estudantes devem escolher valores para a, b, c, d, em proporção, sendo b e d incomensuráveis (irracionais). Os valores de $m = 5$ e $n = 7$ são dados. Mostraremos aqui uma possível resolução para os valores $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = \frac{1}{5}$ e $d = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Inicialmente verifique se há proporção entre os valores escolhidos, acompanhe:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{5}} \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} \tag{7.17}$$

Verificada a proporção, faremos a verificação e usaremos $\sqrt{3} = 1,73$:

$$\begin{aligned}
m \cdot a < n \cdot b \quad &\Rightarrow \quad m \cdot c < n \cdot d \\
5 \cdot 1 < 7 \cdot \sqrt{3} \quad &\Rightarrow \quad 5 \cdot \frac{1}{5} < 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} \\
5 < 7 \cdot 1,73 \quad &\Rightarrow \quad 1 < \frac{7}{5} \cdot \sqrt{3} \\
5 < 7 \cdot 1,73 \quad &\Rightarrow \quad 1 < 1,4 \cdot 1,73 \\
5 < 12,11 \quad &\Rightarrow \quad 1 < 2,422.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Com as desigualdades $5 < 12,11 \Rightarrow 1 < 2,422$, faremos a diferença entre o maior e o menor valor em cada uma. Logo,

$$12,11 - 5 = 7,11 \text{ e } 2,442 - 1 = 1,442. \tag{7.19}$$

Note que a razão entre as grandezas $\frac{c}{a}$ e $\frac{d}{b}$ é $\frac{1}{5}$ e ao observarmos as diferenças obtidas em (7.19), notamos que $7,11 \approx 5 \cdot 1,442$, logo, a proporção se manteve. Não conseguimos um resultado mais aproximado devido ao uso de $\sqrt{3}$ com apenas duas casas decimais.

ITEM (E)

A igualdade ocorre quando as grandezas são comensuráveis. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 7.1. *Verifique se o item* (ii) *da Definição V.5 (Definição 3.1 do enunciado da atividade) se verifica para as seguintes grandezas comensuráveis:* $a = 0,5$, $b = 1,5$, $c = 1$, $d = 3$. *Use* $m = 9$ *e* $n = 3$.

Resolução.

O item (ii) dessa definição indica que

$$m \cdot a = n \cdot b \Rightarrow m \cdot c = n \cdot d. \tag{7.20}$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$
\begin{aligned}
9 \cdot 0,5 = 3 \cdot 1,5 \quad &\Rightarrow \quad 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3 \\
4,5 = 4,5 \quad &\Rightarrow \quad 9 = 9.
\end{aligned} \tag{7.21}
$$

Portanto, o caso (ii) se verifica para grandezas comensuráveis.

7.2.3 Resolução da Atividade Avaliativa

Professores(as), nessa atividade avaliativa há dois itens a serem resolvidos. Acampanhem a resolução de cada item.

Resolução do item (I):

O Triângulo ABC da Figura 3.2 é retângulo de catetos $AB = x$, $BC = 1\ cm$ e hipotenusa $AC = \frac{5}{2}\ cm$. Obtemos o valor de x pelo Teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
(AB)^2 + (BC)^2 &= (AC)^2 \\
x^2 + 1^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
x^2 + 1 &= \frac{25}{4} \\
x^2 &= \frac{25}{4} - 1 \\
x^2 &= \frac{21}{4} \\
x &= \sqrt{\frac{21}{4}} \\
x &= \frac{\sqrt{21}}{2}\ cm
\end{aligned} \tag{7.22}
$$

Agora, conhecido o comprimento do cateto AB, determinaremos a área do triângulo ABC.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(ABC) &= \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (BC) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{\sqrt{21}}{4}\ cm^2.
\end{aligned} \tag{7.23}
$$

O número 21 não é um quadrado perfeito então, $\sqrt{21}$ é irracional, portanto, a área do triângulo ABC é uma grandeza incomensurável.

Sugestão para a correção do item (II):

Para esse item, os alunos devem atribuir valores às medidas do triângulo DEF da Figura 3.2 de forma que a área seja uma grandeza incomensurável. Priorize a correção da primeira questão na lousa ao final da aula e na segunda questão, você deve pedir para alguns alunos exporem para a turma os valores usados bem como suas resoluções. É provável que a correção da segunda questão precise ser deixada para a aula seguinte, devido ao tempo, mas é de suma importância que se trabalhe a habilidade de os estudantes escolherem os valores visando um resultado solicitado.

7.2.4 Resolução das Atividades Complementares

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

Resolução da Questão 1:

De acordo com o que foi apresentado nesse enunciado, verifique se há comensurabilidade entre a grandeza p em relação à grandeza q. A comensurabilidade existirá se, e somente se, a razão $\frac{p}{q}$ for racional. Pode-se também aproveitar a questão para reforçar que devemos ter $q \neq 0$. Questione os alunos sobre isso.

ITEM A: $p = 6$ e $q = 3$;

$$\frac{p}{q} = \frac{6}{3} = 2. \tag{7.24}$$

Como 2 é um número racional, p e q são comensuráveis entre si.

ITEM B: $p = 5$ e $q = 153$;

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \tag{7.25}$$

Como $\frac{1}{3}$ é um número racional, p e q são comensuráveis entre si.

ITEM C: $p = 7\sqrt{3}$ e $q = 14\sqrt{3}$;

$$\frac{p}{q} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \tag{7.26}$$

Como $\frac{1}{2}$ é um número racional, p e q são comensuráveis entre si.

ITEM D: $p = 6\sqrt{2}$ e $q = 2\sqrt{2}$;

$$\frac{p}{q} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 3. \tag{7.27}$$

Como 3 é um número racional, p e q são comensuráveis entre si.

ITEM E: $p = 9$ e $q = 21\sqrt{3}$;

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{9}{21\sqrt{3}} = \frac{3}{7\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{3}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Como $\frac{1}{7} \cdot \sqrt{3}$ é um número irracional, p e q são incomensuráveis entre si.

Resolução da Questão 2:

De acordo com os exemplos dados no enunciado, faremos a antifairese entre os valores dados.

ITEM A: 12 e 4;

$$\begin{aligned} 12-4 &= 8 \\ 8-4 &= 4 \\ 4-4 &= 0 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Portanto, $MDC(8,12) = 4$.

ITEM B: 75 e 30;

$$\begin{aligned} 75-30 &= 45 \\ 45-30 &= 15 \\ 30-15 &= 15 \\ 15-15 &= 0 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Portanto, $MDC(75,30) = 15$.

ITEM C: 47 e 21;

$$\begin{aligned} 47-21 &= 26 \\ 26-21 &= 5 \\ 21-5 &= 16 \\ 16-5 &= 11 \\ 11-5 &= 6 \\ 6-5 &= 1 \end{aligned} \tag{7.31}$$

Portanto, $MDC(47,21) = 1$. Observe que 47 e 21 são primos entre si pois o m.d.c. entre eles é 1.

ITEM D: 108 e 60;

$$\begin{aligned} 108-60 &= 48 \\ 60-48 &= 12 \\ 48-12 &= 36 \\ 36-12 &= 24 \\ 24-12 &= 12 \\ 12-12 &= 0. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Portanto, $MDC(108,60) = 12$.

ITEM E: $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}-\frac{1}{2} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6} &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6} &= 0. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Portanto, $MDC\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$.

Resolução da Questão 3:

A solicitação do arquiteto foi de cortar as tábuas de um mesmo tamanho sem sobras, dessa forma, o carpinteiro precisa determinar o maior número inteiro que divide simultaneamente 540, 810 e 1080. Trata-se de encontrar o m.d.c. entre esses valores. Inicialmente, determinaremos pelas subtrações sucessivas o m.d.c. entre 1080 e 810:

$$\begin{aligned} 1080-810 &= 270 \\ 810-270 &= 540 \\ 540-270 &= 270 \\ 270-270 &= 0. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Dessa forma, $(1080,810) = 270$.

Agora faremos o m.d.c entre 540 e 270:

$$\begin{aligned} 540-270 &= 270 \\ 270-270 &= 0. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Logo, $MDC(540,810,1080) = 270$.

O arquiteto ainda deu outra condição, as tábuas devem ter menos de 2 metros de comprimento, logo, fazendo $\frac{270}{2} = 135$ e 135 também é divisor comum de 540, 810 e 1080. Assim, as tábuas devem ser cortadas com 135 cm de comprimento.

- Há 40 tábuas de 540 cm. Cada uma delas pode ser dividida em quatro peças de 135 cm. Teremos 160 peças.

- Há 30 tábuas de 810 cm. Cada uma delas pode ser dividida em seis peças de135 cm. Teremos 180 peças.

- Há 10 tábuas de 1080 cm. Cada uma delas pode ser dividida em oito peças de 135 cm. Teremos 80 peças.

Somando o número de peças de cada tipo de tábua, temos: $160+180+80 = 420$ peças, portanto, a alternativa **(e)** é a correta.

7.3 RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES DA AULA 3

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes iniciarem a correção.

7.3.1 Resolução da Atividade Motivadora

Essa atividade tem o objetivo de despertar o interesse e a curiosidade sobre o tema da aula, inclusive fornecendo ferramentas, tais como fórmulas e conceitos necessários para a solução da Atividade Principal, da Atividade Avaliativa e das Atividades Complementares. Lembre-se que o tempo estimado para esse momento da aula é de 15 minutos.

Nessa atividade, pretende-se retomar e fixar a habilidade de se calcular áreas inscritas e/ou hachuradas pela diferença e/ou soma entre áreas conhecidas nas figuras dadas. Também se propõe relembrar o Teorema de Pitágoras e as fórmulas para obter a área de um círculo e a área de um triângulo.

Resolução:

(a) Inicialmente, vamos determinar o raio do semicírculo de diâmetro AB. Note que AB é também hipotenusa do triângulo retângulo ABC, conforme Figura 4.1. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (AC)^2 + (BC)^2 \\ &= 9^2 + \left(3\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 81 + 63 = 144 \Rightarrow AB = \sqrt{144} = 12\ cm \qquad (7.36)\end{aligned}$$

Dessa forma, chamando de $\mathcal{S}(D)$ a área procurada, esta é dada pela diferença entre a área do semicírculo de diâmetro AB e a área do triângulo retângulo ABC.

Sendo $\mathcal{S}(S)$ a área do semicírculo de diâmetro AB e $\mathcal{S}(T)$ a área do triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(D)=\mathcal{S}(S)-\mathcal{S}(T) &= \frac{\pi\cdot r^2}{2}-\frac{AC\cdot BC}{2}\\ &= \frac{\pi\cdot 6^2}{2}-\frac{3\sqrt{7}\cdot 9}{2}=\frac{36\cdot\pi-27\sqrt{7}}{2}\\ &= \frac{9}{2}\cdot\left(4\pi-3\sqrt{7}\right)\ cm^2. \end{aligned}\tag{7.37}$$

Portanto, a área procurada é $\mathcal{S}(D)=\frac{9}{2}\cdot\left(4\pi-3\sqrt{7}\right)\ cm^2$.

(b) O valor $\mathcal{S}(D)=\frac{9}{2}\cdot\left(4\pi-3\sqrt{7}\right) cm^2$ é a área exata mas, note que se quisermos saber seu valor numérico, teremos que substituir $\pi=3,141592...$ e como sabemos, π é irracional, logo, por mais casas decimais que se use, encontraremos sempre um valor aproximado para a área em questão. Porém, quanto maior o número de casas decimais de π usadas, melhor será a aproximação obtida.

7.3.2 Resolução da Atividade Principal

A finalidade dessa atividade é verificar a a validade das definições de *Arbelos* e *Salinons* para alguns valores numéricos dados. Também pretende-se propiciar ao estudante a oportunidade de conhecer as definições e as formas dessas figuras planas, a história relacionada à essas figuras, bem como de retomar algumas fórmulas relacionadas ao círculo e ao triângulo retângulo.

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que estão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Aproveitem essa aula para que os estudantes aprendam, ou melhorem as habilidades, no uso de régua e do compasso. Peçam que reproduzam as figuras em seus cadernos, junto com as anotações da resolução da atividade.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

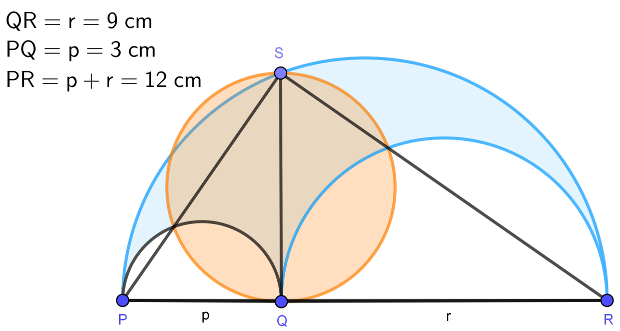
Resolução:

Verificação para a Definição 4.1.

Para o *Arbelos*, temos as medidas indicadas na Figura 7.7 e a área $\mathcal{S}(A)$, conforme Definição 4.1, pode ser obtida fazendo a diferença entre a área do semicírculo de diâmetro PR com a área dos semicírculos de diâmetros PQ e QR.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(A) &= \frac{1}{2}\left(\frac{p+r}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\pi\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3+9}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^2\cdot\pi\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{12}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^2\cdot\pi\\
&= \frac{1}{2}\frac{144}{4}\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\pi-\frac{1}{2}\frac{81}{4}\cdot\pi=\frac{144}{8}\cdot\pi-\frac{9}{8}\cdot\pi-\frac{81}{4}\cdot\pi\\
&= \frac{144\cdot\pi-9\cdot\pi-81\cdot\pi}{8}\\
&= \frac{54\cdot\pi}{8}\Rightarrow\mathcal{S}(A)=\frac{27\cdot\pi}{4}\,cm^2. \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

Figura 7.7 – *Arabelos* de diâmetro $p+r$.



Fonte: Autoria própria.

Para verificarmos se a área do *Arbelos* é igual a área do círculo de diâmetro SQ, iniciaremos determinando o valor do diâmetro $d = SQ$.

Note que d é a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, logo:

$$\begin{aligned}
d^2 &= p\cdot r\Rightarrow d=\sqrt{p\cdot r}\\
d &= \sqrt{3\cdot 9}=\sqrt{27}\Rightarrow d=\sqrt{27}\,cm., \qquad (7.39)
\end{aligned}$$

Logo, o raio do círculo de diâmetro SQ é $\frac{\sqrt{27}}{2}$ cm e a área do círculo é:

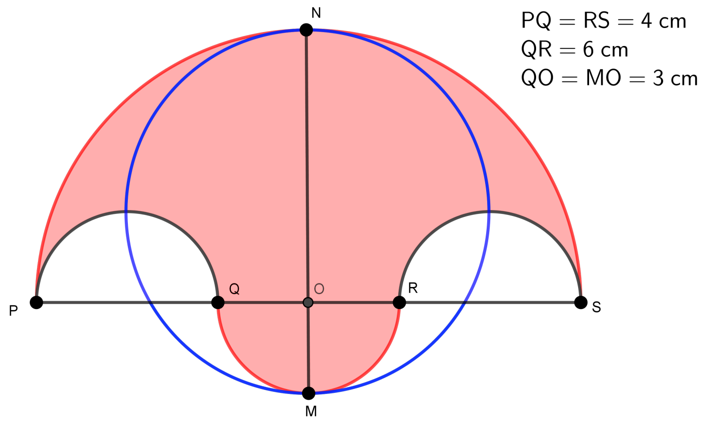
$$\mathcal{S}(C)=\left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2\cdot\pi=\frac{27\cdot\pi}{4}. \qquad (7.40)$$

Portanto, de acordo com a Definição 4.1, verificamos que $\mathcal{S}(A)=\mathcal{S}(C)$.

Verificação para a Definição 4.2.

Para o *Salinon* temos as medidas indicadas na Figura 7.8 e a área $\mathcal{S}(S)$, conforme a Definição 4.2, pode ser obtida somando as áreas dos semicírculos de diâmetros PS e QR subtraindo da área de um círculo de diâmetro $PQ = RS$.

Figura 7.8 – *Salinon* de Arquimedes.



Fonte: Autoria própria.

Devemos verificar se a área do salinon é igual a área do círculo de diâmetro MN, ou seja, $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(S) &= \frac{1}{2}(PQ+OQ)^2\cdot\pi + \frac{1}{2}(OQ)^2\cdot\pi - \left(\frac{RS}{2}\right)^2\cdot\pi \\ &= \frac{1}{2}(4+3)^2\cdot\pi + \frac{1}{2}(3)^2\cdot\pi - \left(\frac{4}{2}\right)^2\cdot\pi \\ &= \frac{1}{2}(7)^2\cdot\pi + \frac{1}{2}(3)^2\cdot\pi - (2)^2\cdot\pi \\ &= \frac{49}{2}\cdot\pi + \frac{9}{2}\cdot\pi - 4\cdot\pi = \frac{49\cdot\pi + 9\cdot\pi - 8\cdot\pi}{2} \\ &= \frac{50\cdot\pi}{2} \Longrightarrow \mathcal{S}(S) = 25\cdot\pi\, cm^2. \end{aligned} \tag{7.41}$$

A área do círculo de raio $\frac{MN}{2}$ onde $MN = PQ + QO + OM$ logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(C) &= \left(\frac{PQ+QO+OM}{2}\right)^2\cdot\pi \\ &= \left(\frac{4+3+3}{2}\right)^2\cdot\pi = 5^2\cdot\pi \Longrightarrow \mathcal{S}(C)25\cdot\pi\, cm^2. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Portanto, de acordo com a Definição 4.2, verificamos que $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$.

7.3.3 Resolução da Atividade Avaliativa

Professor(a) a atividade avaliativa deve ser aplicada nos minutos finais da aula, de forma individual, conforme o tempo estimado nas orientações iniciais da aula. Reserve 10 minutos para os estudantes trabalharem na resolução e nos 5 minutos finais faça a correção na lousa.

Resolução:

A área em branco a ser determinada na Figura 4.7 é dada pela área do retângulo $ABCD$ subtraindo-se dela a área do semicírculo de diâmetro BF e a área do quarto de círculo de raio HD, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(branca) &= 4\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\pi-\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\pi \\ &= 12-\frac{1}{2}\cdot\pi-\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\pi = 12-\frac{\pi}{2}-\pi \\ &= 12-\frac{3\pi}{2}=\frac{24-3\pi}{2} \\ &= \frac{3\,(8-\pi)}{2}\,cm^2. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Portanto, a área procurada é $\frac{3(8-\pi)}{2}\,cm^2$.

7.3.4 Resolução das Atividades Complementares

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

Resolução da questão 1:

A área hachurada da Figura 4.9 pode ser obtida pela diferença entre a área do retângulo $FGJH$ e a área do segmento parabólico de base FG e altura PK, e, denominando $\mathcal{S}(SP)$ a área do segmento parabólico e $\mathcal{S}(T)$ a área do triângulo inscrito FGP de mesma base e mesma altura que o segmento parabólico, pela Proposição 4.1 (Proposição de Arquimedes para a quadratura da parábola), temos:

$$\mathcal{S}(SP)=\frac{4}{3}\mathcal{S}(T), \tag{7.44}$$

onde,

$$\mathcal{S}(T)=\frac{FG\cdot FH}{2}=\frac{5\cdot 9}{2}\,cm^2. \tag{7.45}$$

Dessa forma, temos

$$\mathcal{S}(SP)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5\cdot 9}{2}=\frac{4\cdot 5\cdot 9}{3\cdot 2}=30\,cm^2. \tag{7.46}$$

Sendo $\mathcal{S}(R)$ a área do retângulo $FGJH$, segue que

$$\mathcal{S}(hachurada) = \mathcal{S}(R) - \mathcal{S}(SP) = 5 \cdot 9 - 30 = 45 - 30 = 15\ cm^2. \tag{7.47}$$

Portanto, a área hachurada da Figura 4.9 é 15 cm^2.

Resolução da questão 2:

A quantidade de granito em metros quadrados a ser usada no revestimento é a área da passarela representada na Figura 4.10, dada pela diferença entre as áreas de um quarto do círculo de raio $AB = AE + EB = 8 + 12 = 20\ cm$ e um quarto do círculo de raio $AE = 12\ cm$. Sendo $\mathcal{S}(P)$ a área da passarela, temos

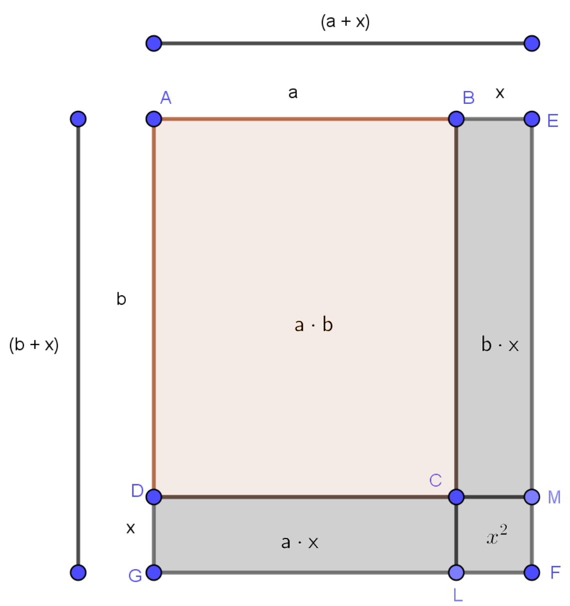
$$\begin{aligned} \mathcal{S}(P) &= \frac{(AB)^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(AE)^2 \cdot \pi}{4} \\ &= \frac{(20)^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(12)^2 \cdot \pi}{4} \\ &= \frac{400 \cdot \pi}{4} - \frac{144 \cdot \pi}{4} = \frac{400 \cdot \pi - 144 \cdot \pi}{4} = \frac{256 \cdot \pi}{4} \\ &= 64 \cdot \pi m^2 \Longrightarrow \mathcal{S}(P) = 64 \cdot (3,14) = 200,96 \approx 201\ m^2. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Portanto, serão usados aproximadamente 201 m^2 de granito para revestir o piso da passarela.

Resolução da questão 3:

A Figura 7.9 mostra a área cultivável $ABCD$ e a faixa de terra de largura x doada para cumprir os requisitos da legislação.

Figura 7.9 – Retângulo de lados $a + x$ e $b + x$.



Fonte: Autoria própria.

A faixa de terra de largura x que circunda a área cultivada pode ser decomposta em 3 outras áreas: os retângulos de áreas $a \cdot x$ e $b \cdot x$ e o quadrado $CMFL$ de área x^2, conforme indicado na Figura 7.9.

Dado que a área de largura x que circunda o terreno deve ser de 20% da área cultivada, temos

$$\begin{aligned} ax + bx + x^2 &= 0,2 \cdot (a+x) \cdot (b+x) \\ &= 0,2 \cdot \left(ab + ax + bx + x^2\right) \\ &= 0,2 \cdot ab + 0,2 \cdot ax + 0,2 \cdot bx + 0,2 \cdot x^2 \\ 0,8 \cdot x^2 + 0,8 \cdot ax + 0,8 \cdot bx - 0,2 \cdot ab &= 0 \\ 0,8 \cdot x^2 + 0,8 \cdot (a+b)x - 0,2 \cdot ab &= 0. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Multiplicando todos os termos da Equação 7.49 por 5, temos

$$4 \cdot x^2 + 4 \cdot (a+b)x - ab = 0. \tag{7.50}$$

Obtemos uma equação quadrática na incógnita x do tipo $Ax^2 + Bx + C = 0$onde os coeficientes são $A = 4$, $B = 4(a+b)$ e $C = -ab$.

Aplicando os coeficientes na fórmula resolutiva, e considerando apenas o resultado maior que zero, temos,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4(a+b) + \sqrt{[4(a+b)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-ab)}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-4(a+b) + \sqrt{16(a+b)^2 + 16ab}}{8} \\ &= \frac{-4(a+b) + \sqrt{16\left[(a+b)^2 + ab\right]}}{8} \\ &= \frac{-4(a+b) + 4 \cdot \sqrt{(a+b)^2 + ab}}{8} \\ &= \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + ab}}{2} \\ 2 \cdot x &= 2 \cdot \left[\frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + ab}}{2}\right] \\ 2x &= -(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + ab} = \sqrt{(a+b)^2 + ab} - (a+b). \end{aligned} \tag{7.51}$$

Como (7.51) é o dobro de x, a anternativa **(e)** é a correta.

7.4 RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES DA AULA 4

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade

Motivadora, devemos estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções, inclusive, convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes de vocês iniciarem suas correções.

Nessa aula, abordamos o Teorema de Pick. Esse teorema propõe um jeito muito interessante de se obter a área de um polígono inscrito em uma rede quadricular. Além de ser estimulante, curioso e divertido, possibilita trabalhar com atividades relacionadas a mapas e imagens obtidas por satélites e *drones*, ideal para se fazer um trabalho multidisciplinar com Geografia.

7.4.1 Resolução da Atividade Motivadora

Professores(as) a Atividade Motivadora dessa aula já está resolvida no texto introdutório, basta ler esse texto e desenvolver as ideias e resoluções da forma com que estão expostas. Observem que os triângulos fundamentais expostos na Figura 5.1 de área igual a $\frac{1}{2}$ são os responsáveis por fornecer o valor da área do polígono e a fórmula de Pick nos dá uma contagem indireta da quantidade de triângulos fundamentais que compõe o polígono. Sugerimos um tempo de 10 minutos para o desenvolvimento desse momento da aula.

7.4.2 Resolução da Atividade Principal

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que etão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.

- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.

- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

Após a leitura silenciosa e individual, libere as equipes para discutir as idéias e terminar a resolução em dupla/trio, utilizando qualquer estratégia, porém, é mais provável e desejável que todos procurem resolver aplicando o Teorema de Pick.

Enquanto os alunos resolvem essa atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução que as equipes estão desenvolvendo. Caso os estudantes tenham dúvidas, ou até mesmo apresentem dificuldades, procure não indicar de forma direta o caminho para a solução, e sim, fazer algum questionamento simples ao aluno que ao respondê-lo, o ajude a encontrar a resposta desejada.

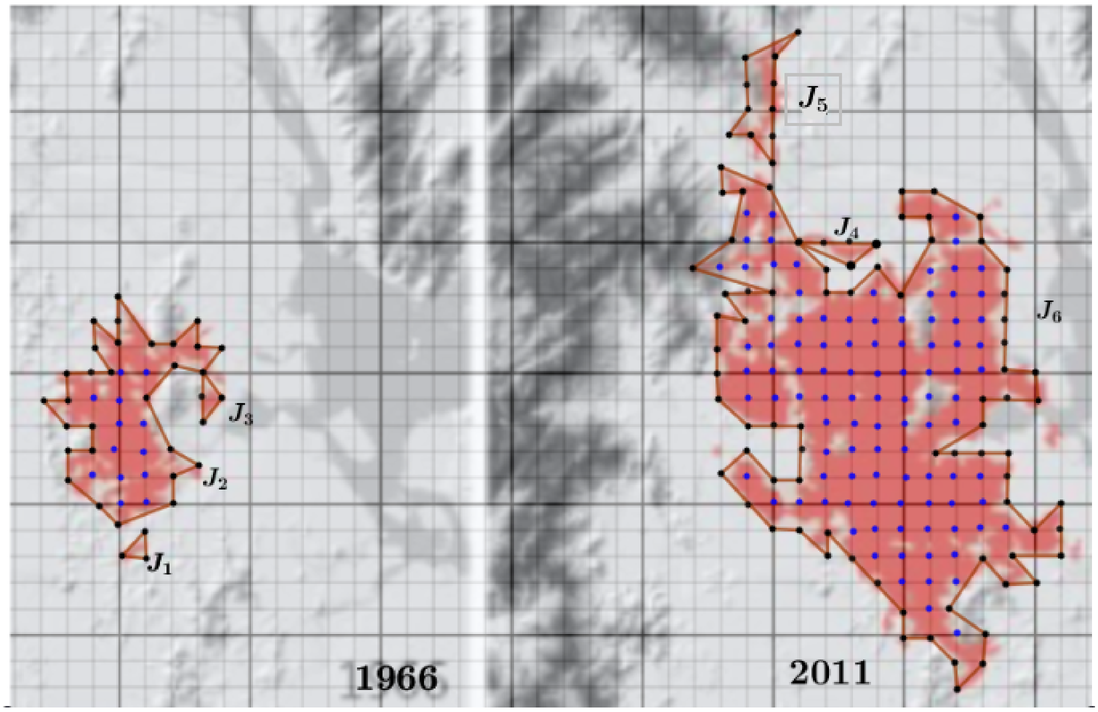
Essa atividade será resolvida através da construção de um polígono que circunscreve a área da região urbana da cidade nos dois anos considerados, e com certeza haverá variações na forma com que os estudantes construirão esse polígono, logo, apresentaremos aqui uma possível solução, mas cabe ao professor analizar as resoluções dos alunos e orientá-los como devem fazer esse procedimento com a maior precisão possível.

Note também que não estamos trabalhando com unidades de área nem escala conhecida, porém a escala nos dois mapas é a mesma, e isso já basta para conhecermos a porcentagem de aumento da área urbana da cidade entre os anos considerados.

Uma resolução.

Para o ano de **1966**, inicialmente, construímos os polígonos que circunscrevem as regiões e efetuamos a contagem do número de pontos B da malha sobre o perímetro e também dos pontos internos I, também pertencentes à malha, conforme a Figura 7.10

Figura 7.10 – Polígonos circunscritos aos mapas de Joinville em 1966 e 2011.



Fonte: Adaptado de Joinville Bairro a Bairro.

Para o polígono J_1, percebemos que se trata de um triângulo fundamental, logo $S(J_1) = \frac{1}{2} = 0,5$ $u.a.$

Para o polígono J_2, temos $B = 29$ e $I = 13$, logo, sua área é

$$S(J_2) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{29}{2} + 13 - 1 = 24,5 + 12 = 36,5 \ u.a. \tag{7.52}$$

Para o polígono J_3, temos $B = 4$ e $I = 0$, logo, sua área é

$$S(J_3) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{2}{2} + 0 - 1 = 2 - 1 = 1 \ u.a. \tag{7.53}$$

Por fim, basta somarmos as áreas dos três polígonos,

$$S(1966) = J_1 + J_2 + J_3 = 0,5 + 36,5 + 1 = 38\ u.a. \tag{7.54}$$

Dessa forma, em **1966**, a região urbana do município de Joinville, nas condições dadas, tinha aproximadamente $38,0$ u.a.(unidades de área).

Professores(as) é importante deixar claro para os alunos que a unidade de área usada nesse caso é o "quadradinho" da malha quadricular.

Para o ano de **2011**, procedendo de maneira análoga a anterior, inicialmente, construímos os polígonos que circunscrevem o mapa e efetuamos a contagem do número de pontos B da malha sobre o perímetro e também dos pontos internos I, também pertencentes à malha, conforme a Figura 7.10.

No caso do polígono J_4, temos $B = 5$ e $I = 5$, logo, sua área é

$$S(J_4) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{5}{2} + 0 - 1 = 2,5 - 1 = 1,5\ u.a. \tag{7.55}$$

Para o polígono J_5, temos $B = 11$ e $I = 0$, logo, sua área é

$$S(J_5) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{11}{2} + 0 - 1 = 5,5 - 1 = 4,5\ u.a. \tag{7.56}$$

No caso do polígono J_6, temos $B = 79$ e $I = 99$, logo, sua área é

$$S(J_5) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{79}{2} + 99 - 1 = 39,5 + 98 = 137,5\ u.a. \tag{7.57}$$

Por fim, basta somarmos as áreas dos três polígonos,

$$S(2011) = J_4 + J_5 + J_6 = 1,5 + 4,5 + 137,5 = 143,5\ u.a. \tag{7.58}$$

Dessa forma, em 2011, a região urbana do município de Joinville, nas condições dadas, tinha aproximadamente $143,5$ u.a (unidades de área).

Resta agora determinarmos qual foi a porcentagem de crescimento da região urbana de Joinville entre 1966 e 2011. Seja P o crescimento percentual, temos:

$$P = \left(\frac{143,5}{38}\right) \times 100 = (3,7763...) \times 100 \approx 378\%. \tag{7.59}$$

Portanto, a área urbana do município de Joinville em 2011 ocupa 378% da área que ocupava em 1966.

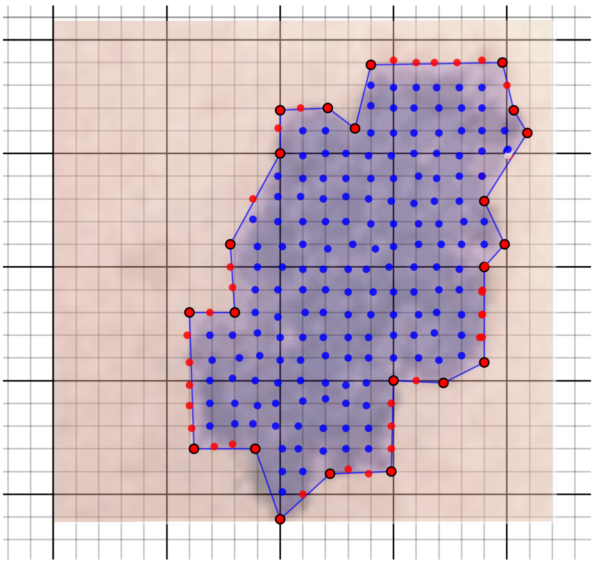
7.4.3 Resolução da Atividade Avaliativa

Para essa atividade, será muito difícil os estudantes chegarem ao mesmo resultado pois a sua solução vai depender de como inscreverá o melanoma da imagem dentro de um polígono. Dessa forma, vamos apresentar uma possível solução e o ideal é que os estudantes encontrem um valor aproximado ao que será aqui determinado. Seria importante o Professor(a) construir seu próprio polígono em torno da mancha e determinar o valor da área do melanoma, inclusive, é bem provável que seu resultado não seja idêntico ao nosso.

Resolução.

Inicialmente, temos que circunscrever a região do melanoma em uma região poligonal. Observe a Figura 7.11.

Figura 7.11 – Polígono circunscrevendo um melanoma.



Fonte: Autoria própria.

Após construído o polígono que circunscreve a região, pela contagem dos pontos sobre o perímetro temos $B = 51$ e para os pontos internos temos $I = 168$. Aplicando os valores na fórmula de Pick, a área $S(M)$ do melanoma é:

$$\begin{aligned} S(M) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{51}{2} + 168 - 1 \\ &= 25,5 + 167 = 192,5. \end{aligned} \tag{7.60}$$

A mancha ocupa 192,5 quadradinhos da malha, cada um com $0,4\ mm$ de lado, então a área de cada quadradinho é $(0,4)^2 = 0,16\ mm^2$. Portanto, a área é $192,5 \times 0,16 = 30,8\ mm^2$.

7.4.4 Resolução das Atividades Complementares

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

Resolução da questão 1:

Para a área $\mathcal{S}_1$ temos $B = 10$ e $I = 0$, logo, Pela fórmula de Pick,

$$\mathcal{S}_1 = \frac{10}{2} + 0 - 1 = 5 - 1 = 4\ u.a. \tag{7.61}$$

Por se tratar de uma simples aplicação da fórmula, apresentaremos apenas os resultados para as demais áreas.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= 5,5\ u.a. \\ \mathcal{S}_3 &= 6,5\ u.a. \\ \mathcal{S}_4 &= 3,5\ u.a. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Resolução da questão 2:

A área alaranjada do logotipo é dada pela diferença entre a área do círculo de centro O e o polígono marrom no interior desse círculo.

Pelo Teorema de Pick o polígono marrom tem área $4,5\ cm^2$.

O círculo de centro O, usando $\pi = 3,14$ tem área $11,775 \approx 11,8\ cm^2$.

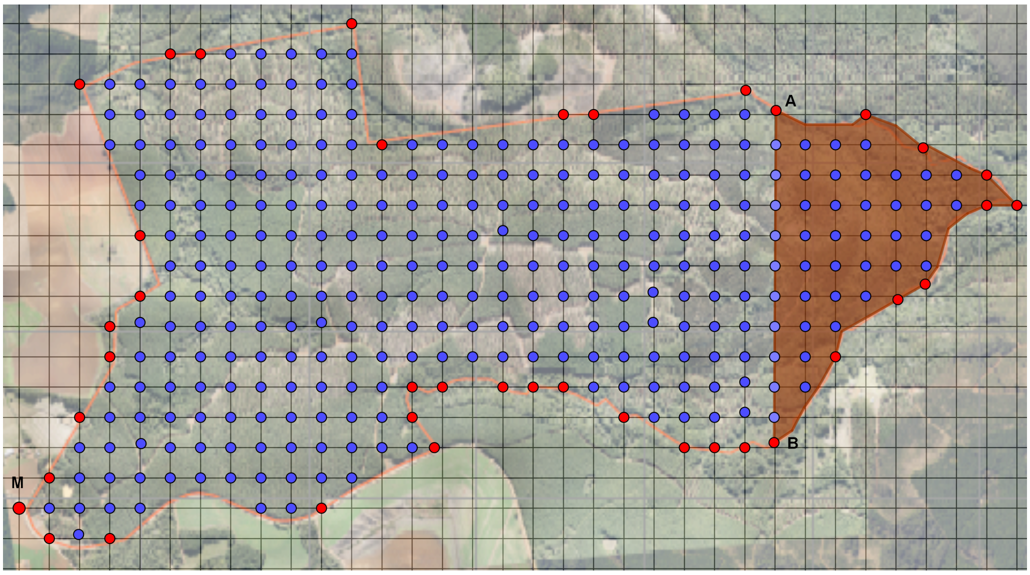
A diferença entre a área do círculo de centro O e o polígono marrom no interior desse círculo é o valor da área alaranjada: $11,8 - 4,5 = 7,3\ cm^2$

Portanto, a área marrom é $4,5\ cm^2$ e a área alaranjada é $7,3\ cm^2$.

Resolução da questão 3:

Inicialmente, vamos efetuar a contagem dos pontos de corrdenadas inteiras sobre o perímetro da fazenda (pontos vermelhos) e dos pontos contidos no interior da fazenda (pontos azuis).

Figura 7.12 – Uma possível contagem para os pontos da rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 7.12 apresenta uma possível contagem que gerou os dados dessa resolução. Observe o ponto M da Figura 7.12, esse ponto está bem próximo a um ponto de coordenadas inteiras, logo, o consideramos. Se observar, há mais pontos na figura que usamos esse critério.

Sobre o perímetro da fazenda contamos o total de $B = 40$ pontos, e no interior da fazenda, contamos o número de $I = 295$ pontos. Pelo Teorema de Pick, a área da fazenda é aproximadamente

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_F &= \frac{40}{2} + 295 - 1 \\ &= 20 + 294 \\ &= 314\,u.a. \end{aligned} \tag{7.63}$$

Faremos a mesma contagem para a região à direita do segmento AB.

Na parte indicada como provável reserva legal, sobre seu perímetro contamos o total de $B = 20$ pontos, e no interior dessa área, contamos o número de $I = 33$ pontos. Pelo Teorema de Pick, a área da fazenda é, aproximadamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_R &= \frac{20}{2} + 33 - 1 \\ &= 10 + 32 \\ &= 42\,u.a. \end{aligned} \tag{7.64}$$

Agora, basta conferir se a área que o proprietário indicou para ser a Reserva Legal equivale a 20% de toda a propriedade,

$$\left(\frac{42}{314}\right) \cdot 100\% \approx 13,38\% \tag{7.65}$$

Não esperamos que outra pessoa, ao resolver esse problema obtenha os mesmos valores, porém, o resultado deve ser aproximado e a conclusão final deve ser a mesma.

Portanto, a área desejada é muito inferior à porcentagem indicada na Lei.

7.5 RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES DA AULA 5

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenha em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes de você iniciar sua correção.

Nessa aula, abordamos a Soma de Riemann, esse conteúdo não faz parte do curriculo do Ensino Médio, por isso, propomos atividades simples e elaboradas de forma a fazer o estudante entender a ideia principal relacionada ao tema.

7.5.1 Resolução da Atividade Motivadora

Professores(as)) a Atividade Motivadora dessa aula já está resolvida no texto introdutório, basta ler esse texto e desenvolver as ideias e resoluções da forma com que estão expostas. Procurem detalhar bem a explicação dessa atividade motivadora, pois a partir dela, se desencadeará todos os outros momentos da aula.

7.5.2 Resolução da Atividade Principal

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que etão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.

- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.

- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

Inicialmente é solicitado aos estudantes que refaçam o exemplo resolvido na Atividade Motivadora, mas com os 4 retângulos circunscritos à figura. Não detalharemos essa resolução, pois é análoga à resolvida no texto. Os alunos devem obter os seguintes valores:

A área do retângulo de altura $f(5)$ é $77,5$ $u.a.$

A área do retângulo de altura $f(10)$ é $70,0$ $u.a.$

A área do retângulo de altura $f(15)$ é $57,5$ $u.a.$

A área do retângulo de altura $f(20)$ é 40 $u.a.$

Portanto a área total é $77,5+70+57,5+40 = 245$ $u.a.$

Note que o valor real dessa área se encontra em um intervalo entre 185 $u.a$ e 2455 $u.a.$ Isso traz uma margem de erro muito grande, logo, fazer partições de 4 retângulos não foi uma boa decisão.

Na soma inferior com 10 retângulos a área deve ser $204,4$ $u.a$, e na soma superior com 10 retângulos, a área obtida deve ser $228,4$ $u.a.$ Omitiremos esses cálculos, pois são análogos aos que já foram apresentados na Atividade Motivadora. E nesse caso, o valor exato da área está entre $204,4$ $u.a$ e $228,4$ $u.a.$ Note que para a partição com 10 retângulos, conseguimos estreitar um pouco mais o intervalo onde se situa o valor exato da área da região sob a curva. Agora, resta respondermos as perguntas da atividade.

a) Em qual intervalo se situa a área procurada?
Resposta. O valor exato da área pertence ao intervalo $[204,4\ ,228,4]$

b) Observando os gráficos das Figuras 6.5 e 6.6, o que diferencia a soma inferior da soma superior?
Resposta. A soma superior é formada por retângulos circunsccritos à região, logo, essa soma terá um valor maior que a soma inferior, onde os retângulos estão inscritos em tal região.

c) Qual será o comportamento dessa diferença quando aumentarmos o número de retângulos?
Resposta. Conforme aumentamos o número de retângulos, a diferença entre as somas superior e inferior será cada vez menor.

d) Quantos retângulos devemos usar para que a diferença entre os valores obtidos na soma superior e na soma inferior seja muito próxima de zero? E nesse caso, encontraremos apenas um valor aproximado para a área? Justifique.
Resposta. Devemos usar um número de retângulos acima de qualquer valor que se possa imaginar, por maior que seja, essa é uma maneira de dizer que o número de retângulos tende ao infinito, e para esse caso, a diferença entre as somas será muito próxima de zero. Quanto à soma das áreas dos infinitos retângulos, as figuras que trabalhamos, sugerem que há um valor limite para a soma,

e esse limite é dado pela área da figura. A medida que o número de retângulos n cresce, a soma das áreas dos retângulos aproximam-se desse valor limite, chegando infinitamente próximo a ele, porém nunca no valor exato.

7.5.3 Resolução da Atividade Avaliativa

Devido ao processo ser muito similar a Soma de Riemann, não iremos detalhar as resoluções, basta calcular a área de cada trapézio e efetuar a soma de todas elas. Os alunos devem encontrar o valor $192,6\ u.a$ para a área solicitada. Observe que essa aproximação por trapézios é mais precisa que a usada nas atividades da aula, feita com retângulos.

REFERÊNCIAS

ENEM. **Exame nacional do ensino médio**. 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de janeiro: GRAFITEX Comunicação Visual, 1991.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de janeiro: Editora Zahar, 2012.