

Financiamentos e Empréstimos: Uma Abordagem Prática

Guia do Professor

Bruna Zigovski Biaobock*

2020

*Produção Técnica – Desenvolvimento de Material Didático e Instrucional associado à dissertação defendida no PROFMAT/UDESC, sob orientação do Prof. Fernando Deeke Sasse

APRESENTAÇÃO

Caro (a) professor (a),

Este Produto Educacional é resultado da pesquisa intitulada “Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio”, realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse.

Este produto é um caderno de atividades voltado ao professor com sugestões e questões com resolução que mesclam atividades criadas especificamente para esse trabalho e questões de concursos públicos.

Espero que esse material contribua de maneira significativa na prática pedagógica do professor frente ao conteúdo de matemática financeira, valorizando em sala de aula a capacidade crítica do aluno e sua consciência financeira para que saiba tomar decisões corretas diante das inúmeras ofertas de créditos disponibilizadas por instituições financeiras e estabelecimentos comerciais. O conteúdo deste material pode ser utilizado e modificado livremente, sempre que esta fonte for citada.

Considerações adicionais sobre este tema podem ser encontrados no site <https://www.udesc.br/cct/profmat/defesas> ou através do e-mail bruna.biaobock2014@gmail.com.

Bruna Zigovski Biaobock

ÍNDICE

Introdução.....	4
Conceitos iniciais.....	6
Atividades para matemática financeira.....	13
Questões de concursos públicos.....	20
Resolução das questões.....	30
Considerações.....	39
Referências.....	40

INTRODUÇÃO

A matemática financeira contribui para o entendimento dos cálculos que envolvem as operações que ocorrem nas finanças do cotidiano. Por sua importância deve ser trabalhada desde o início da formação dos indivíduos. Logo, na escola, ela deverá ter espaço dentro do currículo de modo a fornecer as ferramentas necessárias para os alunos lidarem com problemas que envolvem a matemática financeira.

Quando focamos nos adolescentes entre 15 e 18 anos, percebemos que muitos deles trabalham ou estão próximos de começar a trabalhar, o que faz com que eles entrem em contato com os aspectos financeiros da relação trabalhista e com a necessidade de gerenciar seus salários. A partir daí surge a vontade e a necessidade de adquirir produtos e serviços, e um dos bens que a maioria almeja de início é o automóvel. Como a maioria não trabalha a muito tempo, surge a necessidade de procurar um financiamento ou empréstimo para a aquisição do veículo, e com pouco conhecimento desses esquemas, é capaz do indivíduo acabar se envolvendo em um plano que o fará pagar mais do que o necessário. Com base nisso, percebe-se a relevância de se trabalhar esses temas quando se aborda a matemática financeira no ensino médio.

A matemática financeira é trabalhada no ensino médio de maneira superficial, não abordando muito mais do que porcentagem, juros simples e compostos. Pela sua importância na preparação dos adolescentes para o exercício pleno da cidadania, deveria ter mais espaço no currículo da educação básica, abordando também outros assuntos relacionados a esse tema, tais como o funcionamento dos cartões de crédito, investimentos, economia, financiamentos e empréstimos.

Em consonância com as recomendações da BNCC pode-se trabalhar o tema da educação financeira de maneira transversal e conjunta entre as disciplinas, exemplificando posteriormente com um projeto entre as disciplinas de matemática e história sobre dinheiro e sua função na sociedade entre outros.

Os alunos de ensino médio, em sua maioria, se já não estão no mercado de trabalho, estão próximos dessa etapa. Portanto, o conhecimento da matemática financeira pode auxiliar os jovens nas tomadas de decisões importantes. Abordando os financiamentos e empréstimos, este trabalho apresenta uma sequência de atividades a serem aplicadas a alunos de ensino médio.

A bibliografia usada para a fundamentação teórica deste material inclui os livros de Mathias e Gomes (2008) e Puccini (2009), que trazem definições, fórmulas e aplicações dos conteúdos da matemática financeira de maneira objetiva. Este trabalho também é todo baseado na dissertação de mestrado de Biaobock (2020) que traz um estudo do tema focando na aplicação em sala de aula.

As figuras contidas nesse material foram tiradas do site da Wikicommons (<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4657697>,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15660715>,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=88502136>,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=44755458>).

CONCEITOS INICIAIS

JUROS

No desenvolvimento da sociedade de acordo com o tempo, percebe-se a necessidade das pessoas de adquirir bens e serviços que iniciou o processo de trocas de mercadorias e, mais tarde, a criação da moeda. A ideia de juro vem do fato de que as pessoas preferem consumir seus bens no presente e não no futuro. Ou seja, havendo uma preferência temporal para o consumo, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro.

Define-se juro como sendo a remuneração do capital a qualquer título. Assim, outras expressões podem ser utilizadas para a definição desse conceito, como a remuneração do capital empregado em atividades produtivas, o custo do capital de terceiros ou a remuneração paga pelas instituições financeira sobre o capital nelas aplicado.

JUROS SIMPLES

O regime de juro simples é o menos utilizado no sistema financeiro, por ser menos lucrativo. Nesse sistema o juro de cada período é sempre calculado em função do capital inicial aplicado. O juro do período, que não for pago no final do período, não é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes.

Assim, um capital C aplicado a uma taxa i de juro simples durante n períodos gera a quantidade de juro J através da regra

$$J = C i n . \quad (1)$$

O montante M , resultante da aplicação de um capital C durante n períodos com uma taxa de juro i por período, no regime de juro simples, é obtido pela expressão

$$M = C(1 + i n) . \quad (2)$$

Exemplo 1: Qual é o rendimento de juro simples de um capital de R\$ 4560,00, aplicado a um taxa de 3% ao mês, durante 6 meses?

Resolução: De acordo com os dados do problema, temos $C = 4560,00$, $i = 3\% = 0,03$ e $n = 6$, logo, usando a equação (1),

$$J = 4560 \cdot 0,03 \cdot 6 = 820,80 . \quad (3)$$

Portanto, o rendimento será de R\$ 820,80 em 6 meses.

Exemplo 2: Qual deverá ser o capital aplicado para que se tenha um montante de R\$ 12300,00 ao final de dois anos com um taxa de juro de 10% ao ano no regime de juro simples?

Resolução: O montante é $M = 12300$, a taxa é $i = 10\% = 0,1$ e o número de períodos é $n = 2$. Usando a equação (2) temos

$$12300 = C(1 + 0,1 \cdot 2). \quad (4)$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 10250, \quad (5)$$

que é o capital que deve ser aplicado.

Exemplo 3: Um banco emprestou a quantia de R\$ 450,00 a um cliente, devendo ser paga a quantia de R\$ 510,00 ao final de três meses. Sabendo que foi empregado o regime de juro simples, qual a taxa de juro cobrada pelo banco?

Resolução: O montante é $M = 510$, o capital é $C = 450$ e o número de períodos é $n = 3$.

Utilizando a equação (2) temos

$$510 = 450(1 + 3i) . \quad (6)$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0443 = 4,43\%, \quad (7)$$

que é a taxa de juro empregada pelo banco.

JUROS COMPOSTOS

O regime de juro composto possui um crescimento exponencial, consequentemente é mais lucrativo nas operações, o que faz com que seja o regime mais utilizado no sistema financeiro. Aqui o juro de cada período que não for pago no final do período é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros são capitalizados, e consequentemente, rendem juro, o que faz com que esse regime seja conhecido como juro sobre juro. Assim, o juro de cada período é calculado sobre o saldo existente no início do respectivo período, e não apenas sobre o capital inicial (principal) aplicado.

Nesse regime um capital C aplicado à taxa i gera, em n períodos de tempo, um montante

$$M = C(1 + i)^n. \quad (8)$$

Exemplo 1: Qual será o montante de uma aplicação de um capital de R\$ 900,00, a uma taxa de 1,3% ao mês durante 8 meses?

Resolução: De acordo com os dados, temos $C = 900$, $i = 1,3\% = 0,013$ e $n = 8$, logo, usando a equação (8)

$$M = 900(1 + 0,013)^8 = 900 \cdot 1,013^8 = 900 \cdot 1,108857 = 997,97 \quad (9)$$

Portanto, o montante será de R\$ 997,97.

Exemplo 2: Paulo tomou um empréstimo à taxa de 2,1% e o pagou ao final de 4 meses no valor de R\$ 5900,00. Qual foi o capital emprestado por Paulo?

Resolução: Segundo o problema, temos $M = 5900$, $i = 2,1\% = 0,021$ e $n = 4$. Utilizando a equação (8) temos

$$5900 = C(1 + 0,021)^4. \quad (10)$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 5429,36505. \quad (11)$$

Portanto, o capital emprestado foi de R\$ 5429,37.

Exemplo 3: Um capital de R\$ 3800,00 aplicado ao regime de juro composto durante 3 anos gerou um montante de R\$ 6100,00. Qual foi a taxa usada na aplicação?

Resolução: Temos $C = 3800$, $n = 3$ e $M = 6100$. Usando a equação (8) temos

$$6100 = 3800(1 + i)^3. \quad (12)$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,170888 = 17,09\%, \quad (13)$$

que é a taxa de juro empregada na aplicação.

TAXAS DE JURO

TAXAS PROPORCIONAIS E TAXAS EQUIVALENTES

A taxa proporcional está relacionada diretamente com o regime de juro simples. Duas taxas são proporcionais quando, apesar de expressas em unidades de tempo diferentes, geram o mesmo montante quando aplicado o mesmo capital por um mesmo período.

Exemplo: A taxa anual de juro proporcional a 5% ao mês é de $12 \times 5\% = 60\%$.

Taxas equivalentes possuem a mesma definição de taxas proporcionais, porém estão ligadas ao regime de juro composto. Considerando uma taxa de juro i relativamente a um determinado período de tempo, a taxa de juro I relativamente a n períodos de tempo é tal que (MORGADO; CARVALHO, 2015)

$$1 + I = (1 + i)^n . \quad (14)$$

Exemplo: A taxa de juro ao mês é $i = 5\% = 0,05$ e o número de períodos é $n = 12$. Usando a equação (14) temos

$$(1 + I) = (1 + 0,05)^{12} . \quad (15)$$

Isolando I nesta equação obtemos

$$I = 0,795856 = 79,59\%, \quad (16)$$

que é a taxa anual de juro equivalente a 5% ao mês.

TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL

A taxa efetiva é aquela na qual há coincidência entre a unidade de tempo usada na taxa de juro e nos períodos de capitalização. Como por exemplo, 6% ao mês com capitalização mensal, ou 10% ao semestre com capitalização semestral.

Taxa nominal é uma taxa de juro em que a unidade referencial de seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. Esse tipo de taxa não deve ser utilizada no regime de juro composto por não representar uma taxa efetiva.

Exemplo: Juliana fez um investimento a juros de 7,2% ao semestre com capitalização mensal. Nesse investimento qual é a taxa de juro semestral?

Solução: Como o investimento é de 7,2% ao semestre, isto é proporcional a 1,2% ao mês. Assim, a taxa de juro é $i = 1,2\% = 0,012$ e o número de períodos é $n = 6$. Utilizando a equação (14) temos

$$(1 + I) = (1 + 0,012)^6 . \quad (17)$$

Isolando I nesta equação obtemos

$$I = 0,074195 = 7,42\%, \quad (18)$$

que é a taxa de juro semestral. A taxa de 7,2% ao semestre é nominal, enquanto a taxa de 7,42% ao semestre é efetiva.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é um dos mais utilizados nas operações financeiras. Nesse sistema, todas as parcelas de amortização são iguais. O juro é calculado, a cada período, multiplicando-se a taxa de juro contratada pelo saldo devedor existente no período anterior.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)

O sistema de amortização francês tem como característica o fato de todas as prestações serem iguais. Essas prestações são calculadas de forma que uma parte paga o juro e outra o principal. Muito utilizado em empréstimos e financiamentos de automóveis.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO

Neste tipo de sistema após um certo prazo p devedor paga o capital emprestado em uma única parcela. Na modalidade mais comum o juro é pago durante o período de carência. É pouco utilizado no Brasil.

FINANCIAMENTOS

Financiamento é uma operação de compra parcelada de um bem ou serviço onde há uma finalidade já estabelecida no ato de sua aquisição. As parcelas são definidas em acordo entre quem compra e quem vende o financiamento, podendo ter valores iguais ou não e podendo ser submetidas a cobrança de juro com relação ao tempo ou não. Na maioria das vezes é tomado para a obtenção de um veículo ou um imóvel.

Existem três principais tipos de financiamentos para aquisição de automóveis: o CDC (Crédito Direto ao Consumidor), o leasing e o consórcio.

- O CDC (Crédito Direto ao Consumidor) é um tipo de financiamento onde a agência empresta dinheiro para o comprador em troca da aquisição de um bem ou serviço e o bem fica no seu nome. Com isso, há o risco de inadimplência para a agência, mesmo que o bem fique relacionado como garantia da dívida do empréstimo, o que faz com que o juro seja mais alto. Nessa forma de financiamento há também a cobrança do imposto IOF. Se tratando

de financiamento de veículos, é a modalidade mais utilizada no país. O comprador pode adiantar o pagamento das parcelas do empréstimo com redução do juro que seria cobrado.

- O leasing, também chamado de arrendamento mercantil, é um tipo de financiamento onde o bem não fica no nome do comprador até o final da quitação das parcelas, portanto é uma espécie de aluguel. Apesar de suas taxas de juro serem menores, sem cobrança do IOF, é pouco utilizado no Brasil. Um motivo para isso é talvez a burocracia para quitação do financiamento e a dificuldade para compradores entenderem seu funcionamento.

- Consórcio é um tipo de financiamento o qual funciona com uma espécie de poupança em grupo. Segundo a ABAC (Associação Brasileira de Administradoras de Consórcio) consórcio é uma espécie de autofinanciamento que tem como base uma união de pessoas contribuindo mensalmente em uma mesma poupança que será utilizada por todos do grupo para a aquisição do produto, como um carro, por exemplo. A ordem para usufruir da poupança em grupo é definida por sorteio e lance.

Todos os participantes do grupo podem ser sorteados para utilizarem o crédito, porém não há como saber em que data, mas existem possibilidades no lance de aumentar as chances de ser contemplado.

EMPRÉSTIMOS

Empréstimo é um valor concedido para uso livre de quem o está recebendo. Como não existe a obrigatoriedade de informação de sua utilização como satisfação à quem está emprestando, costuma ter taxa de juro maior que o financiamento.

Os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo, onde os de curto e de médio prazo caracterizam-se, geralmente, por serem saldados em até 3 anos e os empréstimos de longo prazo sofrem um tratamento especial porque existem várias modalidades de restituição do principal e juro.

Existem vários tipos de empréstimos. O mais comum é conhecido como empréstimo pessoal, onde a pessoa vai até uma agência, é realizada uma análise e o dinheiro é concedido. Mas, geralmente, nesse tipo de operação a taxa de juro é muito alta. Outro tipo de empréstimo comum é chamado de consignado, onde as parcelas são descontadas diretamente na folha de pagamento ou da aposentadoria do tomador, e se tem como vantagem uma taxa de juro mais baixa que o empréstimo pessoal. Também existe o empréstimo por penhor, realizado pela Caixa Econômica Federal, onde um bem é concedido à agência, geralmente joias, e o valor do empréstimo é relativo a esse bem, se o pagamento for realizado no prazo, o bem é devolvido.

TAXA SELIC

A Selic (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia) é uma taxa de juros básica da economia do país. Como explica o Banco Central do Brasil, é um instrumento que controla a inflação e influencia todas as taxas de juro no Brasil, a taxa Selic tem como referência a taxa de juro apurada nas operações de empréstimos de um dia entre as financeiras que utilizam títulos públicos federais como garantia.

O Copom (Comitê de Política Monetária do Banco Central) faz reuniões oito vezes ao ano onde definem a meta da Selic e o Banco Central trabalha nas operações com títulos públicos para que sempre fique nivelada com a meta da Selic. Quando a meta da Selic é alterada, os títulos relacionados à taxa também tem seu rendimento alterado e, consequentemente, o recolhimento dos bancos também muda.

Se a taxa Selic está alta, aumenta o juro dos financiamentos, empréstimos e cartões de crédito, o que faz com que o consumo da população diminua e a inflação cai. Do contrário, se a taxa Selic está baixa, os juros das operações também diminui, o que faz com que estimule os empréstimos e financiamentos e o consumo em geral.

Para obter mais conhecimento sobre a matemática financeira indicamos os livros “Matemática financeira” de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes, 2008, e “Matemática financeira: objetiva e aplicada” de Abelardo de Lima Puccini, 2009.

ATIVIDADES PARA MATEMÁTICA FINANCEIRA

As atividades a seguir foram elaboradas pensando na abordagem da matemática financeira no primeiro ano do ensino médio sobre matemática financeira com foco em financiamentos e empréstimos. Cada atividade possui sugestão ao professor que tem o objetivo de auxiliar o professor na aplicação da questão em sala de aula. As soluções dos problemas constantes das atividades estão no final desse caderno de atividades.



ATIVIDADE 1

Conteúdo abordado: Juro simples, juro composto e conversão de taxas.

Objetivo: Fazer com que os alunos enxerguem que o juro simples, quando calculado em tempos menores do que o período da taxa de juro, rende mais do que o juro composto. Ao mesmo tempo, auxilia no conhecimento dos alunos de como é calculado o juro no atraso do pagamento de contas, como a de energia elétrica, de suas residências.

Procedimento: Para iniciar essa atividade, primeiramente, o professor lê as condições de cobrança de atraso na conta de energia elétrica. Entre essas cobranças, existe uma chamada juro de mora de 1% ao mês (pro rata die). O professor questiona os alunos se sabem o significado e como se calcula esse tipo de juro, também pode aproveitar para perguntar se alguém conhece o termo “pro rata die” contido na descrição da taxa. O professor prossegue a atividade explicando que o significado de pro rata die é de proporção por dia, ou seja, a taxa de juro cobrada por mês deve ser convertida para dia, e lembra também que um mês comercial contém 30 dias, assim, solicita que os alunos, utilizando conhecimentos sobre conversão de taxas já visto anteriormente, calculem a taxa de juro por dia com relação à taxa de 1% ao mês, nos regimes de capitalização simples e composto. (Sugere-se que os alunos utilizem cinco casas decimais)

Com essas taxas, o professor supõe o seguinte problema: O proprietário de uma empresa recebeu sua conta de energia elétrica com vencimento em 10 de dezembro de 2019 no valor de R\$ 10000,00, mas alguns problemas aconteceram na empresa e ele sabe que pagará a conta com atraso. Então, com os conhecimentos de cálculo de juro e montante em regime de juro simples e composto já vistos, o professor pede que os alunos calculem o montante considerando os Juro de Mora que já foram convertidos para a proporção em dia da conta de energia elétrica se ela for paga com os seguintes dias de atraso:

Quadro 1 – Montante calculado pelos dias de atraso (Tabela de exemplo)

Dias	Juro simples (Montante)	Juro composto (Montante)
5		
10		
15		
20		
30		
40		
50		
55		

Fonte: Autora

Depois de todos os cálculos necessários, o professor deve incentivar os alunos a analisar e comparar os montantes obtidos pelo atraso do pagamento nos dois regimes de capitalização.

Os montantes calculados, analisados e discutidos foram obtidos calculando o juro de mora no pagamento em atraso da conta de energia elétrica. Mas além dessa taxa, a conta possui uma multa de 2% pelo atraso. Então, para finalizar a atividade e chegar mais próximo da

realidade do aluno, o professor sugere o seguinte cálculo: Dado o valor da conta de energia elétrica trazida pelo professor, calcular o novo valor da conta a ser paga com 23 dias de atraso.



Sugestão ao professor

Essa atividade exige que os alunos já possuam conhecimento dos cálculos de juro e montante dos regimes de capitalização simples e composto e da conversão de taxas nesses regimes. A atividade incentiva os educandos a compararem os valores de montante obtidos após certos períodos nos dois regimes de capitalização (simples e composto). Recomenda-se que, para a realização dessa atividade, o professor leve para sala de aula uma conta de energia elétrica de sua cidade, para que se aproxime mais da realidade do aluno. Durante a comparação dos montantes obtidos, espera-se que os alunos enxerguem que para períodos menores que 30 dias, o juro simples supera o juro composto, observem também que esses valores são iguais quando o período é exatamente um mês, e que a partir daí o juro composto é maior que o simples. Assim, o professor pode questionar os alunos sobre qual dos dois regimes eles acreditam que é utilizado no cálculo do atraso da conta de luz e mostrar que geralmente as contas são cobradas com juro simples quando o período é menor que o período da taxa de juro, justamente por render mais nesses casos.



ATIVIDADE 2

Conteúdo abordado: Cálculo de transformação de taxas de juro e valores no tempo.

Objetivo: Desenvolver a capacidade de análise dos alunos em escolher o empréstimo mais adequado à situação, utilizando o conhecimento adquirido sobre o conteúdo abordado.

Procedimento: Antes de apresentar o problema o professor pode fazer uma explanação sobre a abertura de uma empresa, sobre o capital inicial, capital de giro. Isto fornece ao aluno uma ideia de empreendedorismo. Também deve ser explanado que para abrir uma empresa um conhecimento de matemática financeira e contabilidade básica é essencial.

Marco Antônio abriu uma livraria recentemente. Como utilizou toda sua reserva de dinheiro no estoque e equipamentos para a livraria, está sem verba para comprar uma remessa de livros que acabaram de ser lançados. Então decidiu adquirir um empréstimo no valor de R\$ 5000,00 para esse fim. Marco Antônio é muito cauteloso, então resolveu pesquisar em várias agências o empréstimo que melhor se encaixa em seu orçamento. Ele quer pagar o menor preço total possível, mas as parcelas não devem ultrapassar R\$ 450,00.

A pesquisa resultou nas seguintes propostas de empréstimos:

Quadro 2 – Propostas de empréstimos

Agência	Taxa aplicada	Período
Banco Cordial	33,6% ao ano com capitalização mensal	13 meses
Empréstimos Alfa	40% ao ano com capitalização trimestral	14 meses
Banco Ideal	3,4% ao mês com capitalização mensal	14 meses
Financeira Beta	16,5% ao semestre com capitalização semestral	12 meses

Fonte: Autora

Qual é a melhor opção de empréstimo para Marco Antônio?



Sugestão ao professor

Essa atividade simula uma a realização de um empréstimo e pode servir como base para a criação de outras atividades do mesmo estilo por professores que desejem aplicar em sala de aula. Ela tem duração de uma hora aula e pode ser resolvida em grupos entre os estudantes. Espera-se que os alunos façam a transformação das taxas para que haja uma comparação entre as mesmas, verificando a menor delas que por consequência será mais vantajosa para Marco Antônio. Além disso, deve-se verificar se o empréstimo com menor taxa atende o valor de prestação mensal que a personagem pode pagar.



ATIVIDADE 3

Conteúdo abordado: Cálculo de valores através do tempo.

Objetivo: Levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

Procedimento: Informar aos alunos que este problema trata-se de uma situação real, o professor pode aproveitar para discutir os tipos de financiamentos de veículos como o CDC e o Leasing.

O site da Toyota apresenta um financiamento chamado Ciclo Toyota onde oferece um Etios Hatch X Man sendo pago da seguinte forma:

- Entrada de R\$ 30834,00, mais 24 parcelas de R\$ 672,78 e mais uma parcela residual de R\$ 10278,00 paga junto com a última das 24 parcelas.

Já o valor à vista é de R\$ 51390,00.

O site da BV Financeira faz uma simulação de financiamento para o mesmo carro no mesmo valor à vista sendo pago da seguinte forma:

- Entrada de R\$ 30834,00 e mais 24 parcelas de R\$ 1140,88.

Considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, analise qual das propostas é mais vantajosa referente ao valor final pago nos financiamentos.



Sugestão ao professor

Essa atividade simula uma opção de financiamento de um veículo por uma financiadora real. Espera-se que os alunos calculem o valor total a ser pago pelo financiamento levando em consideração a inflação. O professor pode personalizar essa atividade escolhendo outras ofertas de carros com valores atuais e outras opções de financiamentos.



ATIVIDADE 4

Conteúdo abordado: Cálculo de valores através do tempo.

Objetivo: Levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

Procedimento: No problema anterior foi discutido o financiamento de um veículo, discutir com os alunos a existência de várias opções de crédito informando que a financeira da revendedora nem sempre é a melhor opção. Aproveitar para discutir a aquisição de veículo e imóveis por meio de consórcios.

A seguinte situação é apresentada: Você decidiu comprar um automóvel zero km através de um financiamento. O carro escolhido é um Etios Sedan X Man da Toyota, que à vista custa R\$ 56690,00. Você tem uma economia de R\$ 34000,00 que irá utilizar na entrada do

financiamento e pode gastar até R\$ 850,00 nas prestações, além disso pretende quitar a dívida em três anos.

Temos duas propostas diferentes. A primeira delas retirada do próprio site da Toyota, chamada Ciclo Toyota, oferece o Etios Sedan X Man por uma entrada no valor de R\$ 34014,00, 36 parcelas de R\$ 552,54,00 e mais uma parcela residual que deve ser paga junto com a última das 36 parcelas no valor de R\$ 11338,00. Como você não sabe se terá R\$ 11338,00 na 36^a parcela, mas tem R\$ 850,00 para gastar com as prestações, uma alternativa é aplicar a diferença de R\$ 297,46 entre esse valor e a real parcela da proposta (R\$ 850,00 - R\$ 552,54,00) em um investimento, como a poupança, por exemplo.

A taxa de juro da poupança varia de acordo com a taxa Selic e a taxa de Referencial (TR). Vamos supor uma aplicação na poupança com taxa de rendimento de 0,35% ao mês. Como a parcela residual de R\$ 11338,00 deve ser paga junto com a 36^a prestação, a aplicação de R\$ 297,46 por mês será feita nesse período.

A segunda alternativa de financiamento foi realizada através de uma simulação no site do banco Itaú, onde foram escolhidos os mesmos valores do carro à vista (R\$ 56690,00) e de entrada (R\$ 34014,00) do Ciclo Toyota. Assim, a proposta apresentada pelo site foi de uma entrada de R\$ 34014,00 e mais 36 parcelas no valor de R\$ 849,38, o que cabe no seu orçamento.

A questão é: Qual a melhor proposta?



Sugestão ao professor

Nessa atividade, assim como a anterior, espera-se que os alunos consigam, através dos cálculos necessários, decidir a melhor proposta de financiamento. O professor pode solicitar uma pesquisa sobre a taxa de rendimento da poupança atual dos principais bancos de sua cidade, usando-as em substituição da taxa apresentada nessa atividade.



ATIVIDADE 5

Conteúdo abordado: Cálculo de valores através do tempo e prestações.

Objetivo: Levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

Procedimento: Dividir a turma em grupos de 3 alunos e inicialmente solicitar que cada aluno leia individualmente o problema. Após a leitura individual solicitar que a leitura seja feita em grupo e dar um tempo pequeno para as discussões. Observe que neste problema solicita-se a comparação entre três propostas. Discutir com os alunos que a escolha da melhor proposta implica em economia de dinheiro.

Nesta atividade também supomos a compra do carro Etios Sedan X Man da Toyota de R\$ 56690,00 à vista, comparando o Ciclo Toyota com uma opção de financiamento do banco Bradesco sob outras condições de compra.

Nesse caso, supomos que você só pode pagar uma entrada de 20% do valor à vista do automóvel, ou seja, R\$ 11338,00, ou se necessário, no máximo R\$ 11500,00 e quer quitá-lo em 36 meses. A primeira opção de financiamento é a do banco Bradesco, obtida através de uma simulação no site do banco. Esse financiamento exige a entrada de R\$ 11338,00 e mais 36 pagamentos de R\$ 1738,47.

A segunda proposta é o Ciclo Toyota. Nesse caso, a entrada exigida é de, no mínimo, 30% do valor à vista do veículo, ou seja, R\$ 17017,00, mais 36 parcelas de R\$ 1148,87 e também uma prestação residual de R\$ 11338,00. Como o valor máximo que você pode dar de entrada é R\$ 11500,00, então uma alternativa é obter um empréstimo de R\$ 5500,00 para completar a entrada exigida. Foi realizada uma simulação de empréstimo no site do Serasa Crédito, que utiliza a taxa média de juro usada nas opções de empréstimo disponíveis do mercado. Essa alternativa empresta os R\$ 5500,00 sendo pago em 36 vezes de R\$ 271,18. E, ainda, para você obter R\$ 11338,00 para a parcela residual, uma possibilidade é fazer uma aplicação financeira que renda esse valor ao final dos três anos, como a poupança, por exemplo. Vamos supor um investimento com juro de 0,5% ao mês.

Qual das propostas é mais vantajosa?



Sugestão ao professor

O professor pode sugerir a resolução dessa questão em grupos de três ou quatro alunos, já que vários aspectos devem ser analisados para se chegar a uma conclusão com coerência. Espera-se que os alunos façam os cálculos necessários para uma real comparação dos financiamentos.

QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

As questões a seguir foram selecionadas de concursos públicos de todo o país. Foram escolhidas com base em conteúdos da matemática financeira a serem trabalhados em sala de aula e também enfatizando a tomada de decisões por parte dos alunos diante de financiamentos, empréstimos e investimentos. Estas atividades têm como objetivo o desenvolvimento da interpretação e a análise crítica nos estudantes, além da resolução de cálculos.

Nesta parte deixamos os procedimentos a escolha do professor. Diferente das atividades anteriores, nesta parte apresentamos as habilidades que podem ser desenvolvidas pelos alunos de acordo com a BNCC, nas atividades anteriores não foram colocadas as habilidades porque os problemas envolvem várias habilidades e competências e o professor deverá selecionar aquela que mais se adequa ao seu planejamento de aula.



QUESTÃO 1

Nível: Fácil

Conteúdo: Avaliação de alternativas de investimento; Juro;

Objetivo: Fazer com que o aluno use o conhecimento de juro composto para comparar os investimentos das instituições, seja calculando o montante ou encontrando a taxa de juro.

Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juro composto, destacando o crescimento exponencial.

Um investidor mantém seu capital aplicado em uma instituição financeira que paga a taxa líquida de juro composto mensal de 0,6%. Uma segunda instituição financeira ofereceu a esse investidor as seguintes opções de investimento.

Opção I: Investimento inicial de R\$ 100.000,00 com retorno líquido, em um mês, do montante no valor de R\$ 100.580,00;

Opção II: Investimento inicial de R\$ 85.000,00 com retorno líquido, em um mês, do montante no valor de R\$ 85.527,00.

A respeito dessas opções e da comparação com aquela oferecida pela primeira instituição financeira, onde o capital do investidor já está aplicado, julgue o item seguinte.

Para o investidor, as opções I e II são menos vantajosas que a oferecida pela primeira instituição financeira.

- Certo
- Errado



Sugestão ao professor

Essa questão exige o conhecimento de juro simples e compostos. Pode ser abordada depois do ensino desses conteúdos em sala de aula ou como abertura para eles, usando apenas o cálculo de porcentagem para descobrir o montante no caso do primeiro investimento com os capitais do segundo e comparando-os. Pode também ser usada em um teste ou avaliação. Pode também ser sugerida uma pesquisa das taxas de juro da poupança, por exemplo, de bancos de sua cidade e complementar essa questão com o cálculo do montante dos capitais de acordo com essas taxas, para depois analisar qual banco oferece o investimento mais vantajoso.



QUESTÃO 2

Nível: Médio

Conteúdo: Taxa de juro; Juros compostos;

Objetivo: Testar o conhecimento do aluno quanto ao cálculo do montante de juro composto e verificar a atenção quanto a transformação da taxa de juro necessária.

Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juro composto, destacando o crescimento exponencial.

Nesta prova serão utilizados os resultados aritméticos que estão nas tabelas a seguir.

Figura 1 – Resultados aritméticos

Tabela para o fator $(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5396	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3049	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4099	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5765	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Fonte: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5f97b063-4c>

Figura 2 – Resultados aritméticos

Tabela para o fator $\frac{1}{(1+i)^n}$ **na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.**

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7694	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6910	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

Fonte: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5f97b063-4c>

Qual o valor do montante composto recebido na aplicação de R\$ 50.000,00, durante oito meses, o qual rende com uma taxa de 6% ao trimestre, capitalizada mensalmente?

- A) R\$ 56585,00
- B) R\$ 57585,00
- C) R\$ 58585,00
- D) R\$ 59585,00
- E) R\$ 60585,00



Sugestão ao professor

Essa questão exige dos educandos o conhecimento de juro composto e de diferentes tipos de taxas e suas transformações. Supondo já possuírem o conhecimento de juro composto, para que entendam os tipos de taxas o professor pode utilizar um vídeo explicativo com as definições, com exemplos e até situações do cotidiano onde esses tipos de taxas aparecem. Por não ser uma questão de nível difícil, pode ser resolvida individualmente.



QUESTÃO 3

Nível: Difícil

Conteúdo: Juro simples e composto;

Objetivo: Saber utilizar as fórmulas de juro simples e composto com o intuito de utilizá-las em uma comparação para encontrar o capital.

Habilidade da BNCC: Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juro composto, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Uma pessoa tem duas opções para aplicar um capital na data de hoje.

Primeira opção: Aplicar todo o capital, durante 8 meses, a juro simples com uma taxa de 9,6% ao ano.

Segunda opção: Aplicar todo o capital, durante 1 semestre, a juro composto com uma taxa de 2% ao trimestre.

Sabe-se que o valor do juro referente à primeira opção supera o valor do juro da segunda opção em R\$ 354,00. O valor do juro referente à primeira opção é, em R\$, igual a:

- A) R\$ 1080,00
- B) R\$ 1140,00
- C) R\$ 1200,00
- D) R\$ 960,00
- E) R\$ 1314,00



Sugestão ao professor

Essa questão exige o conhecimento dos alunos sobre juro simples e composto e transformação de taxas, além de uma interpretação e uso das fórmulas de maneira um pouco mais complexa. Portanto o professor pode sugerir a resolução dessa questão em equipes, podendo até ser incluída em algum tipo de jogo ou competição entre essas equipes.



QUESTÃO 4

Nível: Fácil

Conteúdo: Juro simples e composto;

Objetivo: Saber calcular o juro simples e composto de uma aplicação.

Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Considere que para uma quantia de R\$ 2000,00 sejam oferecidas duas opções de investimento:

- Opção 1: Juro simples de 7% ao mês, ao longo de 3 meses.
- Opção 2: Juro compostos de 5% ao mês, ao longo de 2 meses.

Assinale a alternativa que indica qual a diferença entre o total de juro obtidos nestas duas opções:

- A) R\$ 215,00
- B) R\$ 225,00
- C) R\$ 235,50
- D) R\$ 305,25
- E) R\$ 321,25



Sugestão ao professor

Essa questão exige apenas o conhecimento de juro simples e composto. Por ser de fácil resolução pode ser feita individualmente e até mesmo incluída em algum tipo de teste. O professor também pode complementar essa questão levando para a sala de aula panfletos de lojas com ofertas de produtos que podem ser pagos parcelados e utilizar as taxas de juro cobradas por essas lojas para calcular o juro nos dois regimes e comparar os valores.



QUESTÃO 5

Nível: Médio

Conteúdo: Sistema Price

Objetivo: Utilizar os conhecimentos de sistemas de amortização para calcular juro e amortização do capital de uma dívida.

Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos

como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.

Uma prefeitura do interior do estado adquiriu um equipamento de terraplanagem no valor de R\$ 300000,00. Impossibilitada de efetuar o pagamento à vista, a citada prefeitura solicitou ao banco de seu relacionamento um financiamento para a compra do equipamento. O banco aceitou a operação, financiando o valor total do equipamento em 10 parcelas iguais e consecutivas no valor de R\$ 33398,00 cada uma. O juro pactuado foi de 2% ao mês. A primeira parcela vence 30 dias a partir da assinatura do contrato e pagamento pelo banco ao fornecedor, e o sistema de amortização é o PRICE. Com base nos dados acima descritos, assinale a alternativa correta que indica respectivamente o valor aproximado do juro e da amortização do capital, relativos à segunda prestação do financiamento.

- A) R\$ 6000,00 e R\$ 27398,00
- B) R\$ 6000,00 e R\$ 27946,00
- C) R\$ 5452,00 e R\$ 27946,00
- D) R\$ 4893,00 e R\$ 28515,00



Sugestão ao professor

Essa questão exige do aluno o conhecimento do sistema de amortização francês, também conhecido como Price, além do regime de juro composto. Como não é comum em sala de aula o ensino sobre os sistemas de amortização, o professor pode preparar uma apresentação de slides em Power Point explicando e mostrando exemplos sobre as definições, diferenças e exemplos de utilização no dia a dia de sistemas de amortização. Essa questão pode ser resolvida individualmente, já que está em um nível médio de dificuldade.



QUESTÃO 6

Nível: Fácil

Conteúdo: Avaliação de alternativas de investimentos; Taxas de juro;

Objetivo: Calcular a taxa de retorno pedida para conseguir avaliar a melhor opção de investimento entre as apresentadas.

Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Uma empresa planeja um fundo de reserva. Para tal deseja investir R\$ 500000,00 hoje e resgatar o montante da aplicação daqui a 2 anos. Após pesquisa de mercado, a equipe financeira da empresa identificou cinco opções de investimento apresentadas a seguir.

Investimento 1 – taxa de 3% ao mês

Investimento 2 – taxa de 6% ao bimestre

Investimento 3 – taxa de 19% ao semestre

Investimento 4 – taxa de 40% ao ano

Investimento 5 – taxa de 90% ao biênio

Dos investimentos apresentados, qual proporciona a maior taxa de retorno em 2 anos?

Dados:

$$1,03^{12} \equiv 1,43;$$

$$1,06^{12} \equiv 2,01;$$

$$1,19^2 \equiv 1,42;$$

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5



Sugestão ao professor

Essa questão é de fácil resolução, uma vez que basta para o aluno o conhecimento de conversão de taxas para resolvê-la. O professor pode levar para sala de aula uma notícia que inclua um tipo de taxa como a questão mostra, e pode pedir para que os alunos calculem também aquela taxa equivalente a dois anos de aplicação ou pode usar como um exemplo introdutório.



QUESTÃO 7

Nível: Difícil

Conteúdo: Séries de pagamento

Objetivo: Apresentar conhecimento necessário para calcular o valor futuro do investimento e as prestações, utilizando a fórmula correta de modo que os valores dados no enunciado sejam utilizados.

Habilidade da BNCC: Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar,

simuladores de cálculos de juro composto, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Um pai, preocupado em compor recursos para a educação superior de seu filho, idealizou juntar dinheiro em uma conta investimento que rende 8% ao ano. O pai depositaria, durante nove anos, R\$ 24000,00 por ano nessa conta, para que o filho fizesse cinco saques de valores iguais, um a cada ano, com o primeiro saque um ano após o último depósito. O saldo remanescente a cada saque ficaria rendendo à mesma taxa até o quinto saque, quando o saldo se anularia.

Nessa situação, considerando-se 0,68 e 2 como valores aproximados para $1,08^{-5}$ e $1,08^9$, respectivamente, cada saque anual teria o valor de

- A) R\$ 67100,00
- B) R\$ 75000,00
- C) R\$ 150000,00
- D) R\$ 10500,00
- E) R\$ 43200,00



Sugestão ao professor

Essa questão apresenta um nível de dificuldade de resolução difícil, portanto uma alternativa é fazer com que os alunos formem equipes para discuti-la e respondê-la. Exige o conhecimento de valores no tempo, incluindo a fórmula de valor futuro. Uma alternativa é a apresentação de um vídeo aos alunos, podendo ser um documentário sobre o conteúdo, mostrando como os valores se comportam através do tempo, apresentando exemplos e fórmulas.



QUESTÃO 8

Nível: Médio

Conteúdo: Juro simples e composto; Dinheiro no tempo;

Objetivo: Saber utilizar os cálculos de juro e dinheiro no tempo necessários para tomar a decisão correta.

Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Em determinada loja, uma bicicleta é vendida por R\$ 1720,00 à vista ou em duas vezes, com uma entrada de R\$ 920,00 e uma parcela de R\$ 920,00 com vencimento para o mês

seguinte. Caso queira antecipar o crédito correspondente ao valor da parcela, o lojista paga para a financeira uma taxa de antecipação correspondente a 5% do valor da parcela.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

1. Considere que um comprador sabe que o preço da bicicleta não irá aumentar durante 1 mês e tem a possibilidade de investir suas economias em uma aplicação com rendimento líquido de 5% ao mês. Nessa situação, o comprador poderá realizar a compra à vista da bicicleta investindo nessa aplicação uma quantia inferior a R\$ 1650,00, independentemente de o regime de capitalização da aplicação ser simples ou composto.

- Certo
- Errado

2. Na compra a prazo, o custo efetivo da operação de financiamento pago pelo cliente será inferior a 14% ao mês.

- Certo
- Errado
- Errado

3. No caso de uma venda a prazo em que o lojista optasse pela antecipação do crédito correspondente à parcela que só seria paga no mês seguinte, o valor total que ele receberia (entrada mais antecipação) seria superior a R\$ 1790,00.

- Certo
- Errado



Sugestão ao professor

Essa questão exige do aluno o conhecimento de juros compostos e dinheiro no tempo. Pode ser resolvida e discutida em equipes. Como é dividida em três partes, pode ser incluída em algum jogo ou competição entre os alunos. O professor pode também trazer para a sala de aula exemplos reais resolvidos que envolvem a noção de dinheiro através do tempo.

RESOLUÇÕES

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

ATIVIDADE 1

Para a resolução do início do problema, quando o professor questiona o significado de juro de mora e da expressão “pro rata die” não se espera que os alunos conheçam tais termos. Quanto aos cálculos de conversão para a taxa de 1% ao mês, deve-se ter:

Regime de juro simples:

$$\frac{1\%}{30} = 0,03333\% \text{ ao dia} \quad (19)$$

Regime de juro compostos:

Usando a equação (14) temos

$$1 + 0,01 = (1 + i)^{30} \quad (20)$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0003317 = 0,03317\%, \quad (21)$$

que é a taxa juro ao dia.

Em seguida, utilizando os valores do problema proposto, temos;

Para o regime de juro simples:

$$C = 10000 \text{ e } i = 0,03333\% = 0,0003333.$$

Para o regime de juro composto:

$$C = 10000 \text{ e } i = 0,03317\% = 0,0003317.$$

Logo, a tabela será preenchida da seguinte maneira:

Quadro 3 – Montante calculado pelos dias de atraso

Dias	Juros simples (Montante)	Juros compostos (Montante)
5	R\$ 10016,67	R\$ 10016,60
10	R\$ 10033,33	R\$ 10033,22
15	R\$ 10050,00	R\$ 10049,87
20	R\$ 10066,66	R\$ 10066,55
30	R\$ 10100,00	R\$ 10100,00
40	R\$ 10133,32	R\$ 10133,54
50	R\$ 10166,65	R\$ 10167,20
55	R\$ 10183,32	R\$ 10184,08

Fonte: Autora

Quando considerados períodos menores que um mês comercial (30 dias), vemos que o juro simples é maior que o juro composto. Quando consideramos exatamente 30 dias vemos que os regimes se igualam e quando consideramos períodos maiores que isso, o juro composto supera o juro simple.

Para finalizar a atividade, vamos supor que a conta que o professor trouxe para a sala de aula é no valor de R\$ 178,90. Então, como o atraso foi de 23 dias, o novo valor será:

$$\text{Multas de } 2\%: 178,90 \cdot 0,02 = R\$ 3,578.$$

Juro de mora de 1% a.m. = 0,03333% a.d.

$$J = 178,90 \cdot 0,0003333 \cdot 23 = R\$ 1,3714295.$$

Logo, o valor final da conta é de $R\$ 178,90 + R\$ 3,58 + R\$ 1,37 = R\$ 183,85$.

ATIVIDADE 2

Vamos inicialmente analisar as taxas efetivas ao mês das propostas acima para comparação.

Banco Cordial: 33,6% ao ano com capitalização mensal é equivalente a $\frac{33,6\%}{12} = 2,8\%$ ao mês.

Empréstimos Alfa: 40% ao ano com capitalização trimestral é equivalente a $\frac{40\%}{4} = 10\%$ ao trimestre. Como está ao trimestre, devemos deixar na mesma unidade de tempo que a anterior. Logo, utilizando a equação (14), temos

$$1 + 0,1 = (1 + i)^3. \quad (22)$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,03228 = 3,23\%, \quad (23)$$

que é a taxa ao mês.

Banco Ideal: 3,4% ao mês com capitalização mensal já é a taxa efetiva.

Financeira Beta: 16,5% ao semestre com capitalização semestral devemos deixar por mês.

Logo, usando a equação (14), obtemos

$$1 + 0,165 = (1 + i)^6. \quad (24)$$

Isolando i nesta equação temos

$$i = 0,02578 = 2,58\%, \quad (25)$$

que é a taxa ao mês.

Portanto, analisando apenas as taxas de juro cobradas, podemos concluir que a melhor opção de empréstimo para Marco Antônio é a da Financeira Beta, seguida do Banco Cordial, dos Empréstimos Alfa e por último o Banco Ideal. Porém, nem todas as opções oferecem o mesmo período de pagamento do empréstimo, então precisa-se analisar se as parcelas estão dentro do orçamento mensal de R\$ 450,00 de Marco Antônio.

Utilizaremos a noção de dinheiro no tempo e a fórmula que apresenta diretamente o valor das parcelas dos empréstimos, para encontrar as parcelas de cada empréstimo:

$$P = V \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}, \quad (26)$$

sendo P o valor das parcelas do empréstimo, V o valor do empréstimo, i a taxa de juro e n o tempo, nesse caso em meses. Assim, obtemos:

Banco Cordial:

$$P = 5000 \frac{(1+0,028)^{13} \cdot 0,028}{(1+0,028)^{13} - 1} = 464,15. \quad (27)$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ 464,15, totalizando em 13 parcelas o valor de R\$ 6033,95.

Empréstimos Alfa:

$$P = 5000 \frac{(1+0,0323)^{14} \cdot 0,0323}{(1+0,0323)^{14} - 1} = 449,60. \quad (28)$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ 449,60, totalizando em 14 parcelas o valor de R\$ 6294,40.

Banco Ideal:

$$P = 5000 \frac{(1+0,034)^{14} \cdot 0,034}{(1+0,034)^{14} - 1} = 454,79. \quad (29)$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ 454,79, totalizando em 14 parcelas o valor de R\$ 6367,06.

Financeira Beta:

$$P = 5000 \frac{(1+0,0258)^{12} \cdot 0,0258}{(1+0,0258)^{12} - 1} = 489,80. \quad (30)$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ 489,80, totalizando em 12 parcelas o valor de R\$ 5877,60.

Portanto, tanto a Financeira Beta, quanto o Banco Cordial que seriam as melhores taxas de juro tem suas parcelas ultrapassando o orçamento de Marco Antônio de R\$ 450,00. Assim, podemos concluir que o melhor empréstimo para as condições de Marco Antônio é o da Empréstimos Alfa.

ATIVIDADE 3

Analizando a proposta do Ciclo Toyota através do tempo e considerando a taxa de inflação de 0,2%, temos:

$$\begin{aligned} V_1 &= 30834 + 67278 \left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{24}} \right) + \frac{10278}{(1+0,002)^{24}} \\ &= 56380,73417. \end{aligned} \quad (31)$$

Logo, o valor total a ser pago pelo financiamento no Ciclo Toyota será de aproximadamente R\$ 56380,73.

Analizando a proposta da BV Financeira através do tempo e considerando a taxa de inflação de 0,2%, temos:

$$\begin{aligned} V_2 &= 30834 + 1440,88 \left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{24}} \right) \\ &= 57542,29875. \end{aligned} \quad (32)$$

Logo, o valor total a ser pago pelo financiamento na BV Financeira será de aproximadamente R\$ 57542,30.

Portanto, a proposta do Ciclo Toyota se mostra mais vantajosa com relação à proposta da BV Financeira.

ATIVIDADE 4

Primeiramente precisamos saber se o investimento de R\$ 297,46 renderá o valor de R\$ 11338,00 necessário para a parcela residual ao final de 36 meses. A quantia V será

$$V = 297,46(1,0035) + 297,46(1,0035)^2 + \cdots + 297,46(1,0035)^{35} + 297,46(1,0035)^{36}$$

$$\begin{aligned}
&= 297,46(1,0035 + 1,0035^2 + \dots + 1,0035^{35} + 1,0035^{36}) \\
&= 297,46 \left[1,0035 \left(\frac{1,0035^{36}-1}{1,0035-1} \right) \right] \\
&= 11431,11.
\end{aligned} \tag{33}$$

Como o valor necessário será adquirido, então as duas propostas cabem no orçamento, restando ainda da aplicação o valor de R\$ 93,11.

Podemos então analisar qual das propostas tem valor menor se comparadas no tempo atual. Assim, considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, temos para a primeira proposta:

$$\begin{aligned}
V &= 34014 + 552,54 \frac{(1+0,002)^{36} - 1}{(1+0,002)^{36} \cdot 0,002} + \frac{11338}{(1+0,002)^{36}} \\
&= 34014 + 19173,74 + 10551,12 \\
&= 63738,86.
\end{aligned} \tag{34}$$

Como restam R\$ 93,11 ao final de 36 meses, trazendo para o tempo atual,

$$V = \frac{93,11}{(1+0,002)^{36}} = 86,85. \tag{35}$$

Então, R\$ 63738,86 - R\$ 86,85 = R\$ 63652,21 é o valor atual da proposta de financiamento do Ciclo Toyota já descontado o valor que resta do investimento para a parcela residual.

Da mesma forma, calculando o valor atual para a segunda proposta e considerando também a taxa constante de 0,2% de inflação, temos:

$$V = 34014 + 849,38 \frac{(1+0,002)^{36} - 1}{(1+0,002)^{36} \cdot 0,002} = 34014 + 29474,42 = 63488,42. \tag{36}$$

Assim, o valor atual da proposta de financiamento do banco Itaú é de R\$ 63488,42. Portanto, vemos que essa proposta se mostra ligeiramente mais vantajosa do que o Ciclo Toyota, com uma diferença de R\$ 63652,21 - R\$ 63488,42 = R\$ 163,79.

ATIVIDADE 5

Inicialmente vamos calcular o valor atual da proposta do banco Bradesco, considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês.

$$V = 11338 + 1738,47 \frac{(1+0,002)^{36} - 1}{(1+0,002)^{36} \cdot 0,002} = 11338 + 60326,82 = 71664,82. \tag{37}$$

Para a análise do Ciclo Toyota, primeiramente vamos calcular a parcela que deverá ser depositada todo mês no investimento, para que se obtenha R\$ 11338,00 ao final de 36 meses.

$$P = 11338 \frac{0,005}{(1+0,005)[(1+0,005)^{36}-1]} = 286,80. \tag{38}$$

Agora, calculando o valor atual do Ciclo Toyota sem considerar o empréstimo de R\$ 5500,00 e considerando a taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, temos

$$\begin{aligned}
 V &= 11517 + 1147,83 \frac{(1+0,002)^{36} - 1}{(1+0,002)^{36} \cdot 0,002} + \frac{11338}{(1+0,002)^{36}} \\
 &= 11517 + 39830,96 + 10551,12 \\
 &= 61899,08.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Da mesma forma, vamos calcular o valor atual para o empréstimo de R\$ 5500,00:

$$V = 271,18 \frac{(1+0,002)^{36} - 1}{(1+0,002)^{36} \cdot 0,002} = 9410,24. \tag{40}$$

Portanto, o valor atual de todo o pagamento nessa proposta é de R\$ 61899,08 + R\$ 9410,24 = R\$ 71309,32.

Analizando os valores atuais das duas propostas, vemos que a segunda opção que une o Ciclo Toyota com um empréstimo e mais um investimento é ligeiramente mais vantajosa com relação ao financiamento do banco Bradesco, com uma diferença de R\$ 355,50.

Outro ponto que podemos comparar é o valor da prestação desembolsada. Na opção do banco Bradesco temos uma parcela de R\$ 1738,47, enquanto que na segunda proposta temos como prestação a soma da parcela do Ciclo Toyota, do empréstimo e do investimento, ou seja, R\$ 1147,83 + R\$ 271,18 + R\$ 286,80 = R\$ 1705,81, o que mostra que, novamente, o Ciclo Toyota está em vantagem com relação ao banco Bradesco.

QUESTÕES DE CONCURSO

QUESTÃO 1

Gabarito: Errado

Resolução: Uma alternativa para encontrar a solução dessa questão é determinar a taxa de juro aplicada a cada opção e compará-las. Assim, usando a equação (8):

Opção I:

$$100580 = 100000(1+i)^1. \tag{41}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0058 = 0,58\%, \tag{42}$$

que é a taxa utilizada na opção I.

Opção II:

$$\begin{aligned}
 85527 &= 85000(1+i)^1. \\
 85527 &= 85000(1+i)^1.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0062 = 0,62\%, \tag{44}$$

que é a taxa utilizada na opção II.

Assim, vemos que a opção II é mais vantajosa que a oferecida pela primeira instituição financeira onde o capital do investidor já está aplicado.

Outra alternativa de resolução é aplicar a taxa de 0,6% da primeira instituição nas duas opções de investimento da segunda. Logo, utilizando a equação (8) :

Opção I:

$$M = 100000(1 + 0,006)^1 = 100000 \cdot 1,006 = 100600. \quad (45)$$

Opção II:

$$M = 85000(1 + 0,006)^1 = 85000 \cdot 1,006 = 85510. \quad (46)$$

Portanto, para a opção II, a taxa de 0,6% renderia menos que o montante de R\$ 85527,00 proposto pela segunda instituição.

QUESTÃO 2

Gabarito: C) R\$ 58585,00

Resolução: Notemos que a taxa de 6% está ao trimestre, mas sua capitalização é mensal. Assim, como um trimestre equivale a 3 meses, então a taxa é de $6\%/3 = 2\%$ ao mês. Determinamos o montante usando a equação (8) e encontrando o valor da potência indicada na tabela:

$$M = 50000(1 + 0,02)^8 = 50000(1,02)^8 = 50000 \cdot 1,1717 = 58585. \quad (47)$$

Logo, o montante será de R\$ 58585,00.

QUESTÃO 3

Gabarito: D) R\$ 960,00

Resolução: Vamos analisar as opções inicialmente sem saber qual é o capital a ser aplicado.

Primeira opção: Primeiro tem-se que 9,6% ao ano equivale a $9,6\%/12 = 0,8\%$ ao mês. Utilizando a equação (1), temos

$$J_1 = C \cdot 0,008 \cdot 8 = 0,064C. \quad (48)$$

Segunda opção: Sabemos que um semestre equivale a dois trimestres. Logo, usando a equação (8) obtemos

$$M = C(1 + 0,02)^2 = C(1,02)^2 = 1,0404C. \quad (49)$$

E, como $M = C + J_2$, então

$$1,0404C = C + J_2 \rightarrow J_2 = 0,0404C. \quad (50)$$

De acordo com o enunciado da questão, $J_1 = J_2 + 354$, assim

$$0,064C = 0,0404C + 354. \quad (51)$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 15000, \quad (52)$$

que é o capital. Portanto,

$$J_1 = 0,064 \cdot 15000 = 960, \quad (53)$$

que é o juro da primeira opção.

QUESTÃO 4Gabarito: A) R\$ 215,00Resolução: Utilizando a equação (1) obtemos

$$J_1 = 2000 \cdot 0,07 \cdot 3 = 420, \quad (54)$$

que é o juro da primeira opção.

Usando a equação (8) obtemos

$$M = 2000(1 + 0,05)^2 = 2000 \cdot 1,1025 = 2205, \quad (55)$$

que é o montante da segunda opção, e como $M = C + J_2$ temos

$$2205 = 2000 + J_2. \quad (56)$$

Isolando J_2 nesta equação obtemos

$$J_2 = 205, \quad (57)$$

que é o juro da segunda opção.

A diferença pedida entre J_1 e J_2 é de R\$ 215,00.**QUESTÃO 5**Gabarito: C) R\$ 5452,00 e R\$ 27946,00Resolução: No sistema Price as parcelas do financiamento são todas iguais, onde em cada parcela uma parte paga o juro e outra amortiza a dívida. Por esse motivo, as parcelas de amortização são crescentes. Analisando a primeira parcela, temos que o juro será de

$$R\$ 300000,00 \cdot 0,02 = R\$ 6000,00, \quad (58)$$

enquanto que a amortização será de

$$R\$ 33398,00 - R\$ 6000,00 = R\$ 27398,00. \quad (59)$$

Logo, vemos que a alternativa A já pode ser descartada, já que esses valores referem-se à primeira prestação e o que nos interessa são os valores da segunda prestação. Assim,

$$R\$ 300000,00 - R\$ 27398,00 = R\$ 272602,00, \quad (60)$$

ou seja, o estado atual da dívida é de R\$ 272602,00. Portanto, para o segundo mês, temos que o juro é de

$$R\$ 272602,00 \cdot 0,02 = R\$ 5452,04, \quad (61)$$

e a amortização é de

$$R\$ 33398,00 - R\$ 5452,04 = R\$ 27945,46. \quad (62)$$

Sendo assim, a alternativa que mais se aproxima desses valores é a C.

QUESTÃO 6

Gabarito: A) 1

Resolução: Essa questão se refere à taxas equivalentes. Como a pergunta pede a maior taxa de retorno em 24 meses, pode-se transformar todas as taxas para esse período. Assim, utilizando a equação (14) encontraremos I_n que será a taxa equivalente um número n de anos.

Investimento 1:

$$(1 + I_1) = (1 + 0,03)^{24}. \quad (63)$$

$$I_1 = 1,0449 = 104,49\%, \quad (64)$$

Investimento 2:

$$(1 + I_2) = (1 + 0,06)^{12}. \quad (65)$$

$$I_2 = 1,01 = 101\%, \quad (66)$$

Investimento 3:

$$(1 + I_3) = (1 + 0,19)^4. \quad (67)$$

$$I_3 = 0,4161 = 41,61\%, \quad (68)$$

Investimento 4:

$$(1 + I_4) = (1 + 0,4)^2. \quad (69)$$

$$I_4 = 0,96 = 96\%, \quad (70)$$

Investimento 5: Nesse caso a taxa não precisa ser transformada, pois foi dada no período de 24 meses. Portanto a taxa de retorno será de 90%.

Logo, o investimento que dará o maior retorno é o investimento 1.

É importante observar que nem todos os cálculos precisam ser efetuados até o fim. Percebe-se, em alguns casos, de maneira rápida que sua taxa será menor, sem precisar chegar a um resultado final.

QUESTÃO 7

Gabarito: B) R\$ 75000,00

Resolução: Iniciamos calculando o valor da série de pagamentos após os nove anos de depósitos. Assim, usando a equação

$$FV = P \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (71)$$

temos

$$FV = 24000 \frac{(1+0,08)^9 - 1}{0,08} = 24000 \frac{(2-1)}{0,08} = \frac{24000}{0,08} = 300000. \quad (72)$$

Portanto, o valor dos depósitos depois de nove anos é de R\$ 300000,00.

Em seguida, precisamos encontrar o valor de cada saque que o filho fará. Para isso, como o valor dado no enunciado da questão é o resultado de $1,08^{-5}$, então utilizando a equação

$$P = FV \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \quad (73)$$

temos

$$P = 300000 \frac{0,08}{1-(1+0,08)^{-5}} = 300000 \frac{0,08}{1-0,68} = 300000 \cdot 0,25 = 7500. \quad (74)$$

Portanto, o valor de cada saque do filho será de R\$ 75000,00.

QUESTÃO 8

Item 1.

Gabarito: Certo

Resolução: Primeiramente é importante lembrar que para o prazo de um período, nesse caso um mês, o rendimento no regime de juro simples ou composto é o mesmo. Portanto, basta analisar se dadas as condições, o valor a ser aplicado será mesmo inferior a R\$ 1650,00. Assim, usando a equação (2) temos

$$1720 = C(1 + 0,05 \cdot 1). \quad (75)$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 1638,10. \quad (76)$$

Logo, o valor a ser aplicado é de R\$ 1638,10, que é inferior a R\$ 1650,00.

Item 2.

Gabarito: Errado

Resolução: Para encontrar a taxa pedida, é necessário avaliar o dinheiro através do tempo. Sabemos que o valor atual é de R\$ 1720,00 e temos uma entrada de R\$ 920,00 com mais uma parcela paga no mês seguinte também de R\$ 920,00. Assim

$$1720 = 920 + \frac{920}{(1+i)}. \quad (77)$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,15 = 15\%. \quad (78)$$

Ou seja, a taxa é de 15%, o que é superior a 14%.

Item 3.

Gabarito: Certo

Resolução: Nesse caso, o lojista recebe os R\$ 920,00 da entrada e mais a parcela de R\$ 920,00 subtraída de 5%, ou seja, $R\$ 920,00 \cdot 0,95 = R\$ 874,00$. Isso totaliza R\$ 1794,00, o que é superior a R\$ 1790,00.

CONSIDERAÇÕES

Espero que este material contribua de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem de matemática financeira no ensino médio.

Professor(a), sinta-se a vontade para alterar, complementar e adaptar este produto para que fique de acordo com a realidade de suas turmas. Este trabalho pode ser utilizado e modificado livremente para fins não lucrativos.

Bom trabalho!

REFERÊNCIAS

ABAC, Associação Brasileira de Administradoras de Consórcios. **Sistema de Consórcios: o que é e como funciona.** São Paulo, 2020. Disponível em: <<http://blog.abac.org.br/consorcio-de-a-a-z/sistema-de-consorcios-o-que-e-e-como-funciona-2>>. Acesso em: 12 set. 2020.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxa Selic.** Brasília, 2020. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>>. Acesso em: 12 set. 2020.

BIAOBOCK, Bruna Zigovski. **Financiamentos e empréstimos: Uma abordagem para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade do Estado de Santa Catarina, 2020.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática Financeira.** 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. **Matemática Discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática Financeira: objetiva e aplicada.** 8. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.