

ALEXANDRE CAMACHO ORTHEY JUNIOR

**CAMINHADAS QUÂNTICAS
A PARTIR DE ESTADOS DESLOCALIZADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim

**JOINVILLE - SC
2018**

Orthey Junior, Alexandre Camacho

Caminhadas Quânticas A Partir De Estados Deslocalizados / Alexandre Camacho Orthey Junior. - Joinville - 2018.
100 p.

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2018.

1. Mecânica Quântica.
 2. Caminhadas Quânticas.
 3. Emaranhamento
 4. Propagação.
- I. Amorim, Edgard Pacheco Moreira II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Caminhadas Quânticas a Partir de Estados Deslocalizados

por

Alexandre Camacho Orthey Junior

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

Área de concentração em “Física”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:


Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)


Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz
UFPR


Dr. Fernando Deek Sasse
CCT/UDESC

Joinville, SC, 1º de fevereiro de 2018.

Para Felype.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Sandra e Alexandre.

Aos meus amigos próximos.

Ao meu orientador e aos professores dos departamentos de física e matemática.

À Susele, a melhor secretária do PPGF.

À Alexandra Asanovna Elbakyan, criadora do Sci-Hub.

RESUMO

Orthey Jr., A. C.: *Caminhadas Quânticas A Partir De Estados Deslocalizados*. Dissertação de Mestrado (Universidade do Estado de Santa Catarina, 2017). 100 p..

Estudamos caminhadas quânticas unidimensionais discretas no tempo a partir de estados deslocalizados nos espaços de momento e posição, com respeito ao emaranhamento assintótico, variância de longa-duração da posição e produção de emaranhamento em caminhadas desordenadas. Descobrimos que a deslocalização do estado aumenta o número de estados iniciais de spin que conseguem atingir o emaranhamento máximo no limite assintótico de dois estados (local) para um conjunto contínuo de estados de spin (deslocalizados) dado por uma relação simples entre os ângulos do estado inicial de spin. Ao calcular a média sobre todos os estados de spin, vimos que a variância média da posição de uma caminhada quântica a partir de um estado local é independente da moeda quântica, enquanto que a partir de estados deslocalizados depende da soma das fases relativas entre os estados de spin dados pela moeda quântica, sendo não-dispersiva para uma caminhada Fourier com grande dispersão inicial. A partir de simulações numéricas do emaranhamento médio ao longo do tempo, observamos que a deslocalização reduz a eficiência da produção de emaranhamento em caminhadas quânticas com desordem dinâmica, levando-se muito passos para atingir altas taxas de emaranhamento. No entanto, encontramos outras formas de melhorar essa eficiência, através da diminuição da quantidade de desordem ao longo da caminhada.

Palavras-chave: mecânica quântica; caminhadas quânticas; emaranhamento; dispersão.

ABSTRACT

Orthey Jr., A. C.: *Quantum Walks From Delocalized States*. Master Thesis (Santa Cata-
rina State University, 2017). 100 p..

We study one-dimensional discrete time quantum walks from delocalized states in the position and *momentum* spaces, regarding the asymptotic entanglement, long-time variance of position and production of entanglement in disordered walks. We find out that the delocalization of the state increases the number of initial spin states that can reach maximum entanglement in the asymptotic limit from two states (local) up to a continuous set of spin states (delocalized) given by a simple relation between the angles of the initial spin state. By averaging over all spin states, we observe that the average variance of position of a quantum walk starting from a local state is independent of the quantum coin, while from delocalized states depend on the sum of relative phases between spin states given by the quantum coin, being non-dispersive for a Fourier walk and large initial dispersion. From numerical simulations of average entanglement along the time, we observe that delocalization reduces the efficiency of the production of entanglement in quantum walks with dynamic disorder taking a large number of steps to reach high rates of entanglement. However, we find other ways to improve this efficiency, through the decrease the amount of disorder along the walk.

Key-words: quantum mechanics; quantum walks; entanglement; spreading.

Listas de Figuras

1.1	Exemplo de caminhada aleatória clássica unidimensional de 4 passos a partir da origem.	22
1.2	Função densidade de probabilidade Gaussiana $\mathcal{P}(x)$ dada pela Eq. (1.2), com desvio padrão σ e média μ . Estão destacados os percentuais da distribuição para múltiplos do desvio padrão a partir da média.	22
1.3	Uma partícula com spin <i>up</i> na posição $j = 0$ sofre uma rotação, onde seu estado de spin (azul) entra em um estado de superposição (roxo) entre spins <i>up</i> (azul) e <i>down</i> (vermelho). Logo em seguida, a partícula é transladada condicionalmente a este estado de spin rotacionado, entrando em uma superposição de posições $j = 1$ e $j = -1$ no passo $t = 1$, como expressa pela Eq. (1.4). O processo se repete para o segundo passo.	25
1.4	(a) Interferômetro de Mach-Zehnder [30, 31]: um feixe de fôtons é dividido por um BS de entrada, refletido pelos espelhos M_1 e M_2 , reunido e subdividido novamente por um BS de saída e, por fim, detectado pelos detectores D_{-1} e D_1 . (b) Esquema interferométrico que simula uma CQ de três passos através de interferômetros de Mach-Zehnder com respectivas probabilidades em cada posição. Aqui, cada BS faz as operações da moeda quântica e do translador condicional ao mesmo tempo.	26
1.5	Ilustração intuitiva da diferença entre estados locais e deslocalizados. Acima, a linha vermelha representa o pacote de ondas com centro em $j = 0$ e largura Δj que dará um passo de comprimento l , sendo $l \gg \Delta j$, i.e., um estado local. Abaixo, o estado deslocalizado fica caracterizado por $l \sim \Delta j$	27
1.6	Esquema conceitual da CQ com um único feixe com MAO como grau de liberdade externo. Em cada estágio óptico percorrido (<i>QW unit</i> , onde está incluído o dispositivo <i>q-plate</i> , neste caso, com $q = 1/2$), o fôton pode mover-se para um valor m de MAO que seja aumentado ou diminuído em uma unidade. Fonte: F. Cardano et al., «Quantum walks and wavepacket dynamics on a lattice with twisted photons», <i>Sci. Adv.</i> 1 , e1500087 (2015).	28
2.1	(a) Distribuição de probabilidades total $ \Psi(j) ^2$ (preto), e de amplitudes de spin <i>up</i> $ a(j) ^2$ (vermelho) e <i>down</i> $ b(j) ^2$ (verde) para caminhada quântica com moeda Fourier no passo $t = 100$ partindo do estado inicial $ \Psi(0)\rangle = \uparrow\rangle \otimes 0\rangle$. A distribuição clássica (azul) é apresentada para comparação. (b) Dispersão $\sigma(t)$ calculada através de (2.9) para caminhada quântica (preto) e clássica (azul).	36
2.2	Esfera de Bloch.	48

2.3	$\overline{S_E}(\alpha, \beta)$ para estado local com $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [-\pi, \pi]$. O emaranhamento varia entre aproximadamente 0.736 e 1, com média $\langle \overline{S_E} \rangle \sim 0.871$. Tal valor médio é muito próximo do valor $\overline{S_E} \sim 0.872$, atingido nos casos específicos onde $\alpha = n\pi/2$ para qualquer β e $\beta = \pi/2 + 2n\pi$ para qualquer α , sendo $n \in \mathbb{Z}$.	49
3.1	(a) $\overline{S_E}(\alpha, \beta, \sigma_0 = 1)$ via análise de Fourier, com $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [-\pi, \pi]$. Regiões em vermelho representam emaranhamento próximo a 1, e regiões em branco próximo ao valor mínimo 0.343. O emaranhamento médio é menor que no caso local, $\langle \overline{S_E} \rangle \sim 0.771$. (b) Vista superior. A curva em preto é dada pela Eq. (3.19) e representa a região de máximo emaranhamento.	53
3.2	Cortes feitos nas superfícies $\overline{S_E}$ em (a) $\beta = 0$ e (b) $\pi/2$ para caminhadas partindo de estado local (preto), Gaussiano (colorido contínuo) e retangular (colorido tracejado) para diferentes dispersões iniciais.	56
3.3	Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ calculado sobre $N = 2016$ estados iniciais para CQs partindo de estado local (curva preta), Gaussiana (a) e retangular (b) com valores de dispersão inicial $\sigma_0 = 1, 2, 5, 10$ (curvas coloridas). <i>Detalhe:</i> Emaranhamento médio $\langle S_E(t = 1000) \rangle$ no passo $t = 1000$ via simulação numérica em função da dispersão inicial σ_0 (pontos pretos), e emaranhamento médio $\langle \overline{S_E} \rangle$ no limite assintótico via análise de Fourier em função de σ_0 (curva vermelha). A diferença $\Delta(\%)$, em porcentagem, entre as duas abordagens é apresentada com eixo vertical ao lado direito (curva azul).	57
3.4	Emaranhamento médio no limite assintótico $\langle \overline{S_E} \rangle$ em função de (a) α e (b) β , respectivamente. Constam em ambos, caso local (preto), Gaussiano (colorido contínuo) e retangular (colorido tracejado). Mesma legenda da Fig. 3.2.	58
3.5	Emaranhamento assintótico $\overline{S_E}$ sobre esferas de Bloch para estado local e estados Gaussianos com $\sigma_0 = 0.25, 0.75, 1$ e 10 (da esquerda para a direita).	59
3.6	Emaranhamento assintótico $\overline{S_E}$ em função dos ângulos α e β das amplitudes iniciais de spin e sobre a esfera de Bloch para caminhada Fourier partindo de: (a) estado local com máximo emaranhamento em $(\alpha, \beta) = (\pi/4, \pi/2)$ e $(3\pi/4, -\pi/2)$, com $\overline{S_E} = 0.871$ e 0.736 os valores emaranhamento médio e mínimo, respectivamente, como na caminhada Hadamard; e (b) estado Gaussiano ($\sigma_0 = 10$) com máximo emaranhamento em $\beta = \pm\pi/2$ para qualquer α , com $\overline{S_E} = 0.796$ e ~ 0 os valores de emaranhamento médio e mínimo. Regiões vermelhas (azuis) mostram alto (baixo) emaranhamento.	63
4.1	Velocidade de dispersão v_σ para caminhadas Hadamard ($\theta = \phi = 0$) e Fourier ($\theta = \phi = \pi/2$) que partem de estados locais (a-b) e uniformes (c-d), como funções de α e β . Todas as superfícies seguem a mesma escala de cores. Regiões roxas apresentam os maiores valores (~ 0.71), assim como as vermelhas apresentam valores nulos.	75
4.2	Distribuições de probabilidade média total (preto) e para cada componente de spin (vermelho e azul) após 1000 passos de caminhada Hadamard partindo de estado (a) local e Gaussianos com (b) $\sigma_0 = 1$ e (c) $\sigma_0 = 10$. Para ficar claro, a região com $j \in [-600, 600]$ foi removida por não apresentar valores significativos. (d) Detalhe das distribuições de probabilidade médias para estados local (preto) e Gaussianos com $\sigma_0 = 1$ (azul), 2 (vermelho) e 3 (verde). Para o caso local em (a) e (d), somente a probabilidade dos pontos pares foi apresentada uma vez que não há probabilidade nas posições ímpares.	77

4.3	Acima: Distribuição de probabilidade média total partindo de estados Gaussianos com dispersão inicial (a) $\sigma_0 = 1$ e (b) $\sigma_0 = 10$ mostrando o estado inicial (preto) para $t = 0$, e após 1000 passos. Os estados evoluem sob a ação de moedas com parâmetros $\theta + \phi = 0$ (Hadamard em azul), $\theta + \phi = \pi/2$ (vermelho) e $\theta + \phi = \pi$ (Fourier em verde). Abaixo: variância média para estado local (preto) e para estados Gaussianos com (c) $\sigma_0 = 1$ e (d) $\sigma_0 = 10$ obtidos por simulações numéricas (símbolos) e pelos modelos dados pelas equações (4.52) e (4.57) (linha contínua) para as mesmas moedas com as cores correspondentes em (a-b). Linhas tracejadas em cinza: $\sigma^2(t) = Ct^2$ e $\sigma^2(t) = Ct$ correspondendo aos comportamentos balístico e difusivo com coeficiente de proporcionalidade $C = 1$ como referência.	78
4.4	Coeficiente de proporcionalidade C para $\langle \sigma^2 \rangle = Ct^2$. Os símbolos representam os valores dos coeficientes C extraídos do ajuste polinomial $f(t) = A + Bt + Ct^2$ para $\langle \sigma^2 \rangle(t)$ obtidos por cálculos numéricos (NC) após 1000 passos de CQ para diferentes valores de $\theta + \phi$. Linhas sólidas apresentam os coeficientes de proporcionalidade obtidos pelos modelos das Eqs. (4.52) e (4.57). A linha tracejada corresponde ao caso uniforme a partir da Eq. (4.60). O padrão das cores segue: local (preto), $\sigma_0 = 1$ (azul), 2 (vermelho), 3 (verde) e 10 (rosa).	79
5.1	Distribuição de probabilidade média total $\langle \Psi(j, t) ^2 \rangle$ (preto) e das amplitudes de spin $\langle a(j, t) ^2 \rangle$ (vermelho) e $\langle b(j, t) ^2 \rangle$ (verde), do estado inicial Gaussiano com $\sigma_0 = 10$ (a) e (f), e durante a evolução temporal com moeda fixa Hadamard nos passos $t = 10, 20, 30$ e 100 (b-e), e com DDF_2 (g-j). A média foi feita sobre $N = 2016$ estados iniciais diferentes.	83
5.2	Emaranhamento médio ao longo do tempo para CQs com moeda fixa Hadamard (a) e com desordem (b) do tipo DDF_2 (triângulo) e DDF_∞ (quadrado), que partem de estados iniciais locais (preto) e Gaussianos (colorido).	84
5.3	Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ para CQs que partem de estado (a) local e (b) Gaussiano com $\sigma_0 = 10$, com DDF_2 (triângulo) e DDF_∞ (quadrado) e moeda Hadamard fixa a partir do passo $t = 500$ (ciano), 250 (azul), 100 (verde) e 50 (vermelho). CQs com puro DDF (linha preta) para comparação.	85
5.4	Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ para 1000 passos ADO_2 (triângulo) e ADO_∞ (quadrado) em CQ para $\Delta t = 100$ (verde) e $\Delta t = 10$ (azul) partindo de estados (a) locais e (b) Gaussianos com $\sigma_0 = 10$. CQs com DDF para comparação (linhas vermelhas). Aumento relativo do emaranhamento médio $\eta(\%)$ calculado para $t = 1000$ de ADO_2 e ADO_∞ em CQs com diferentes valores de $\Delta t \in [1, 500]$ partindo de estados (c) locais e (d) Gaussianos ($\sigma_0 = 10$).	87
5.5	Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ para 1000 passos de CQ com DDE_2 a partir de (a-b) estados locais e (c-d) Gaussianos ($\sigma_0 = 10$) para alguns valores de probabilidade p de se obter uma moeda Fourier em vez de Hadamard: (a) 12% (azul), 25% (verde); (b) 12% (azul), 1% (magenta), 0.1% (ciano); (c) 3% (verde), 10% (rosa), 30% (azul); (d) 3% (verde), 1% (magenta), 0.5% (azul), 0.1% (ciano). Linhas vermelhas e pretas representam CQ com DDF_2 e caminhada Hadamard, respectivamente.	88
5.6	Emaranhamento médio $\langle S_E(t = 100) \rangle$ de CQs com DDE_2 para 500 valores diferentes de p entre 0 e 50%, começando de estado local (preto) e Gaussianos com $\sigma_0 = 2, 5$ e 10 (vermelho, azul e verde). <i>No detalhe</i> , temos a região superior ampliada.	89

5.7	Emaranhamento médio partindo de estado (a) local e (b) Gaussiano ($\sigma_0 = 10$) para ADO ₂ em CQ com $\Delta t = 100$ (azul), CQ com DDE ₂ sendo (a) $p = 12\%$ e (b) 3% (verde), DDF ₂ (vermelho), (b) caminhada Hadamard com moeda Fourier a cada $t = 33n$ ($n \in \mathbb{N}$) (magenta) e caminhada Hadamard pura (preto).	90
5.8	Emaranhamento médio para CQ que parte de estado Gaussiano ($\sigma_0 = 10$) com comportamento transiente de (a) Hadamard para CQ com DDF ₂ e de (b) CQ com DDF ₂ para Hadamard através de CQ com DDE ₂ dadas por $p(t)$: quadrática (azul), linear (laranja) e quadrática negativa (magenta) especificadas pela Tab. 5.1. CQ com DDE ₂ com $p = 3\%$ (verde), DDF ₂ (vermelho) e caminhada Hadamard (preto) como referência.	91

Lista de Tabelas

1.1	Distribuição de probabilidades de uma caminhada clássica com moeda justa, segundo (1.1).	22
1.2	Distribuição de probabilidades de uma caminhada quântica do tipo Hadamard partindo do estado $ \uparrow\rangle \otimes 0\rangle$	25
4.1	Parâmetros de ajuste e respectivas margens de erro para μ , ν e ξ	73
5.1	Expressões linear, quadrática e quadrática negativa para $p(t)$ onde $n = 1000$ passos.	90

Sumário

1	Introdução	21
1.1	Caminhadas aleatórias clássicas e quânticas	21
1.2	Os estados deslocalizados	27
1.3	Emaranhamento, dispersão e desordem em CQ	29
1.4	Sobre a dissertação	31
2	Conceitos preliminares	33
2.1	CQ no espaço de posições	33
2.1.1	Distribuição de probabilidades	35
2.1.2	Operador densidade	37
2.1.3	Emaranhamento em CQ	39
2.2	CQ no espaço de momento	40
2.3	Caminhada Hadamard	43
2.4	Estado local	47
3	Emaranhamento assintótico em CQ	51
3.1	Caminhada Hadamard a partir de estado Gaussiano	51
3.2	Caminhada Hadamard a partir de estado retangular	53
3.3	Análise de resultados e simulações numéricas	55
3.4	Conexão entre estados local e deslocalizado	58
3.5	Para comparação: caminhada Fourier	59
3.5.1	Estado inicial local	62
3.5.2	Estado inicial Gaussiano	62
4	Dispersão em CQ	65
4.1	Dispersão no espaço de momento	65
4.2	Moeda genérica justa	69
4.3	Cálculo da variância	70
4.4	Estados iniciais	71
4.4.1	Estado local	72
4.4.2	Estado Gaussiano	72
4.4.3	Estado uniforme	74
4.5	Velocidade de dispersão	74
4.6	Dispersão média: abordagem numérica	76
5	Desordem em CQ	81
5.1	Introdução à desordem em CQ	81
5.2	Eficiência na produção de emaranhamento	85
5.2.1	Ordem e desordem	85

5.2.2	Alternando desordem e ordem	86
5.2.3	Desordem escassa (ou fraca)	87
5.2.4	Transição entre ordem e desordem	90
6	Conclusões	93
	Bibliografia	96

1 Introdução

“Quantum theory makes absolutely no sense!”

Roger Penrose, Quantum Concepts In Space

And Time, p. 129.

1.1 Caminhadas aleatórias clássicas e quânticas

A caminhada aleatória clássica é um problema matemático relativo à teoria das probabilidades e, por consequência, teoria da medida [1], que pode ser apresentado em dois contextos diferentes: discreto ou contínuo. Tal problema, citado na literatura científica pela primeira vez em 1905 por Pearson [2], se resume em descrever a probabilidade de se encontrar um caminhante em uma rede de posições discretas, que caminha segundo o resultado aleatório de uma jogada de moeda. A formulação e solução do problema das caminhadas aleatórias clássicas têm sido usadas em algoritmos para, por exemplo, encontrar soluções de equações diferenciais [3], implementar o método de Monte Carlo para solução da equação de Schrödinger com muitos corpos [4], resolver problemas de otimização [5], clusterização e classificação [6] e teoria de fractais [7]. Existem também aplicações em biologia [8], física de polímeros [9] e movimento browniano [10].

Em sua versão unidimensional, a cada jogada de moeda, o caminhante clássico se desloca para direita se o resultado é, digamos, cara, e para esquerda se coroa, como na Fig. 1.1. Isso significa que, se a probabilidade de sair cara na moeda for $p \in [0, 1]$, então a probabilidade para coroa será $q = 1 - p$. Se a moeda for justa, temos $p = q = 1/2$. Após t passos, a análise combinatória [11] nos fornece a probabilidade de encontrar o caminhante na posição j ,

$$P(j, t) = \frac{t!}{[(t+j)/2]![(t-j)/2]!} p^{(t+j)/2} (1-p)^{(t-j)/2}, \quad (1.1)$$

cujos valores para uma caminhada de cinco passos se encontram na Tab. 1.1.

No limite para muitos passos, é possível aproximar a distribuição de probabilidades

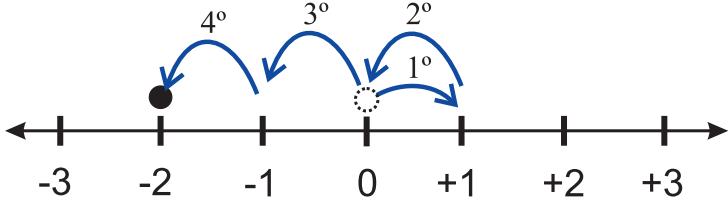


Figura 1.1: Exemplo de caminhada aleatória clássica unidimensional de 4 passos a partir da origem.

t \ j	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		3/8		3/8		1/8		
4		1/16		1/4		3/8		1/4		1/16	
5	1/32		5/32		5/16		5/16		5/32		1/32

Tabela 1.1: Distribuição de probabilidades de uma caminhada clássica com moeda justa, segundo (1.1).

binomial (1.1) por uma distribuição Gaussiana, onde a probabilidade $\mathcal{P}(x)dx$ de se encontrar o caminhante no intervalo entre x e $x + dx$ após t passos de comprimento l é

$$\mathcal{P}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{(x-\mu)/2\sigma^2} dx, \quad (1.2)$$

onde a dispersão da distribuição é dada pelo desvio padrão $\sigma = 2l\sqrt{tpq}$ e a posição média é $\mu = (p - q)tl$. No caso justo, para $l = 1$, temos que $\sigma = \sqrt{t}$ e $\mu = 0$. Veja Fig. 1.2.

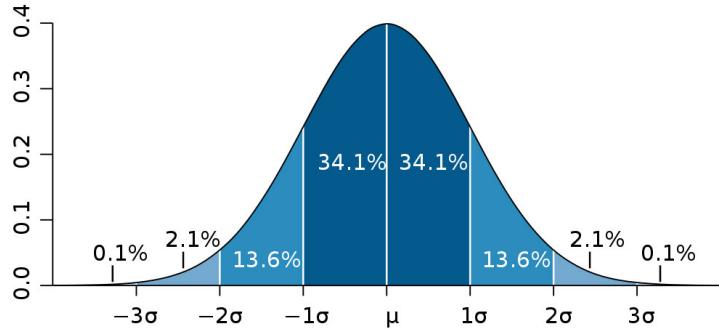


Figura 1.2: Função densidade de probabilidade Gaussiana $\mathcal{P}(x)$ dada pela Eq. (1.2), com desvio padrão σ e média μ . Estão destacados os percentuais da distribuição para múltiplos do desvio padrão a partir da média.

Não é possível dizer com certeza onde o caminhante estará no final da caminhada, uma vez que não é possível prever o resultado das jogadas de moeda. A função densidade de probabilidade nos fornece apenas a probabilidade de encontrar o caminhante em uma dada posição. Além disso, caso fosse perguntado ao caminhante “qual caminho você percorreu?”, ele poderia facilmente descrever o caminho que tomou para chegar até ali,

ou seja, a sequência exata dos resultados das moedas (cara, coroa, coroa, ...). Uma vez que a moeda é lançada, nós efetivamente observamos seu resultado a cada passo: cara ou coroa. Dessa forma, a cada passo, o caminhante clássico vai para direita ou vai para esquerda, exclusivamente.

Aharonov, Davidovich e Zagury [12] propuseram em 1993 o que aconteceria se o caminhante fosse de natureza quântica, ou seja, se o caminhante fosse uma partícula na qual as diferentes possibilidades de caminho (direita ou esquerda) fossem associadas a amplitudes de probabilidades de estados correspondentes nos quais é permitido o princípio da superposição. Eles chamaram tal sistema de *caminhadas aleatórias quânticas*, as quais chamamos hoje de forma mais simples, *caminhadas quânticas* (CQs). Trabalhos posteriores que se tornaram referências básicas obrigatórias neste campo se devem à Kempe [13], Venegas-Andraca [14], Konno [15] e Kendon [16].

As CQs têm atraído atenção da comunidade científica, em especial na área de Informação e Computação Quântica, devido à sua diversidade de implicações nas ciências de base e suas potenciais aplicações. CQs podem ser usadas, por exemplo, na formulação de algoritmos de busca quântica [17, 18], na implementação de computação universal [19, 20], na simulação de Hamiltonianos tipo-Dirac [21] e na geração de protocolos de teletransporte quântico [22]. CQs também podem ser usadas para testar princípios da mecânica quântica no intuito de contrastá-los com o cenário clássico, como por exemplo, a produção de estados emaranhados com dispersão clássica [23, 24], ou ainda, a violação da desigualdade de Leggett-Garg, pondo à prova teorias baseadas em trajetórias clássicas [25]. Elas são úteis, também, na compreensão de alguns processos biológicos, como a eficiência energética da fotossíntese [26] ou a tomada de decisão humana [27].

O caminhante quântico é um *qubit*^{*}, uma partícula com um grau de liberdade interno, como o spin de um elétron ou a polarização de um fóton, colocado em uma rede regular onde cada sítio é um grau de liberdade externo, ou seja, uma posição no espaço. Em vez de um jogo de lançamento de moedas, para determinar se a partícula vai para a esquerda ou para a direita, a dinâmica quântica da caminhada é dada por um operador unitário aplicado sucessivas vezes a um estado inicial, resultando na evolução temporal do estado quântico. Este operador é composto por dois operadores, que ao atuarem sobre o estado

^{*}Um *qubit* é uma unidade de informação quântica, análogo ao bit clássico. Enquanto que um bit clássico carrega apenas uma informação binária '0' ou '1', o *qubit* pode estar em uma superposição de estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ [28].

referente à partícula, efetuam primeiro uma rotação no estado de spin e segundo, uma translação espacial condicionada ao estado de spin. Chamaremos o primeiro operador de *moeda quântica* e o segundo de *translador condicional*.

Tome, como exemplo, uma partícula que se encontra inicialmente no estado $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ (como na Fig. 1.3). Aqui, o estado $|\Psi\rangle$ é composto por dois subestados: o primeiro se refere ao spin e o segundo indica a posição da partícula. O produto tensorial separa respectivamente os graus de liberdade interno e externo, tornando possível a investigação das correlações existentes entre spin e posição [13]. Esta partícula, então, tem seu estado de spin rotacionado pela moeda quântica, podendo ser escrito na base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ como uma combinação $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, com $a, b \in \mathbb{C}$ dependentes da moeda quântica escolhida. Dessa forma, o estado inicial da partícula se torna

$$|\Psi(0)\rangle_{\text{rotacionado}} = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle. \quad (1.3)$$

O primeiro passo da partícula é dado de acordo com o seu estado de spin: *up* para direita e *down* para esquerda. Neste estágio, se uma medida na direção z fosse feita para determinar o estado de spin da partícula, este colapsaria para um dos dois autoestados (*up* ou *down*) e a translação condicional posterior se daria como uma caminhada clássica: direita ou esquerda, exclusivamente. A característica chave da CQ é “não fazer a medida” para que a partícula permaneça em uma superposição de spins e, consequentemente, sofra uma translação que a leve para um estado composto de superposição de posições,

$$|\Psi(1)\rangle = a|\uparrow\rangle \otimes |+1\rangle + b|\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle, \quad (1.4)$$

ilustrado na Fig. 1.3. Se fossem colocados detectores nas posições, a partícula teria uma probabilidade $|a|^2$ de ser encontrada com spin *up* na posição $j = 1$, e probabilidade $|b|^2$ de ser encontrada com spin *down* na posição $j = -1$. Caso não fosse feita uma medida, poderíamos prosseguir com o segundo passo,

$$|\Psi(2)\rangle = a'|\uparrow\rangle \otimes |+2\rangle + (b'|\uparrow\rangle + c'|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle + d'|\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle, \quad (1.5)$$

onde $a', b', c', d' \in \mathbb{C}$. Dessa vez, teríamos probabilidade $|b'|^2$ de encontrar a partícula com spin *up* na posição $j = 0$, bem como, probabilidade $|c'|^2$ de encontrar a partícula com

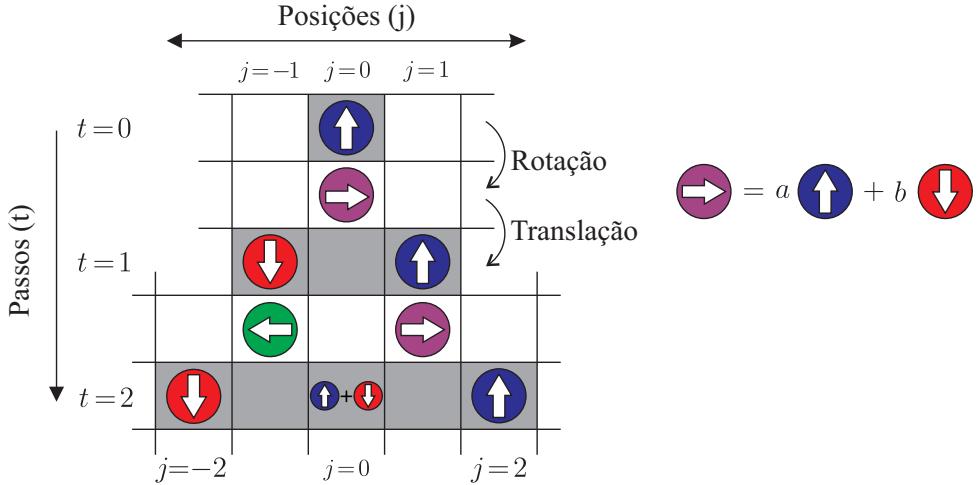


Figura 1.3: Uma partícula com spin *up* na posição $j = 0$ sofre uma rotação, onde seu estado de spin (azul) entra em um estado de superposição (roxo) entre spins *up* (azul) e *down* (vermelho). Logo em seguida, a partícula é transladada condicionalmente a este estado de spin rotacionado, entrando em uma superposição de posições $j = 1$ e $j = -1$ no passo $t = 1$, como expressa pela Eq. (1.4). O processo se repete para o segundo passo.

spin *down* também em $j = 0$. Após a medida, e a constatação de que a partícula chegou à posição $j = 0$ no segundo passo, não seria possível descrever qual a trajetória tomada por ela, ao contrário do caminhante clássico descrito anteriormente.

Agora, suponha que uma caminhada quântica seja feita de forma que tenhamos $a = b = 1/\sqrt{2}$ na Eq. 1.4. Após 3 passos, já fica clara a diferença—no que diz respeito à distribuição de probabilidades—entre uma caminhada quântica (Tab. 1.2) e uma caminhada clássica (Tab. 1.1): um desvio para a direita na distribuição de probabilidades, com dispersão proporcional ao número de passos, *i.e.*, $\sigma(t) \sim t$, em contraste com o caso clássico, $\sigma = \sqrt{t}$. Um esquema interferométrico, composto por um feixe de laser que

$t \setminus j$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		1/8		5/8		1/8		
4		1/16		1/8		1/8		5/8		1/16	
5	1/32		5/32		1/8		1/8		17/32		1/32

Tabela 1.2: Distribuição de probabilidades de uma caminhada quântica do tipo Hadamard partindo do estado $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$.

se divide através de *beam splitters*[†] (BS) em um efeito cascata, pode ser usado para simular as probabilidades de se encontrar um fóton ao fim de uma caminhada quântica, reproduzindo os valores da Tab. 1.2. Neste caso, quando o feixe é dividido em dois,

[†]Divisores de feixe.

cada parte (refletida e transmitida) se encontra em uma nova posição no espaço. O feixe refletido adquire uma fase de meio comprimento de onda, se comparado ao transmitido, levando a efeitos de interferência construtiva e destrutiva (Fig. 1.4). Nestes termos, a mecânica ondulatória seria suficiente para descrever tal experimento, uma vez que o feixe se comporta como uma onda. No entanto, quando o feixe é restrito a um único fóton por vez, somente a mecânica quântica é capaz de descrever os resultados provenientes do processo de medida em uma caminhada aleatória com fótons, segundo a interpretação de Copenhague e o princípio da complementariedade [29].

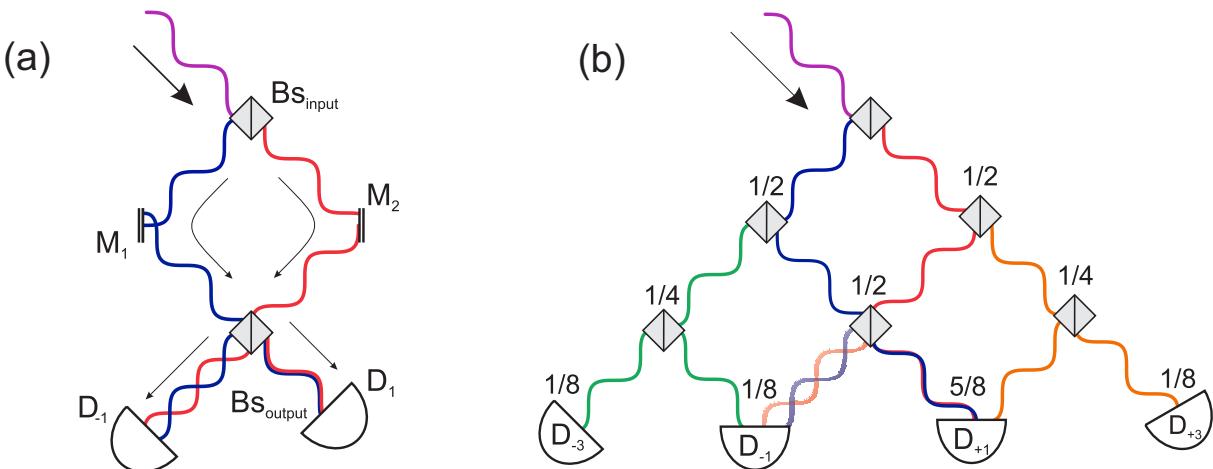


Figura 1.4: (a) Interferômetro de Mach-Zehnder [30, 31]: um feixe de fótons é dividido por um BS de entrada, refletido pelos espelhos M_1 e M_2 , reunido e subdividido novamente por um BS de saída e, por fim, detectado pelos detectores D_{-1} e D_1 . (b) Esquema interferométrico que simula uma CQ de três passos através de interferômetros de Mach-Zehnder com respectivas probabilidades em cada posição. Aqui, cada BS faz as operações da moeda quântica e do translador condicional ao mesmo tempo.

É importante ressaltar que tal esquema interferométrico (Fig. 1.4 (b)) não usa o spin da partícula para fazer a translação condicional. Nesta configuração, o esquema interferométrico é independente de polarização, sendo que o papel do spin, neste caso, é simulado pelo lado de entrada do fóton no BS (esquerda e/ou direita).

Aparatos experimentais para implementação de CQs têm sido realizados com sucesso nos últimos dez anos através de esquemas interferométricos similares aos descritos acima [32–38]. Outros trabalhos relatam experimentos com arranjos de estado sólido, ressonância magnética nuclear, armadilhas de íons, circuitos quânticos, bem como outros tipos de esquemas ópticos, muito bem documentados por Wang & Manouchehri [39] em seu compêndio de implementações físicas para CQs.

1.2 Os estados deslocalizados

Quando afirmamos que o estado inicial da partícula é *local*, significa que, na rede de posições discretas, a partícula ocupa apenas uma única posição ou sítio. O exemplo descrito anteriormente, $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$, é um estado local. De maneira mais precisa, estamos afirmando que o centro do pacote de ondas se encontra próximo à posição discreta $j = 0$. Em um esquema interferométrico como o descrito anteriormente, a largura Δj do pacote de ondas que descreve a partícula é irrelevante, uma vez que a espessura do feixe de laser é muito menor do que a distância entre dois BSs. Em outras palavras, a largura do pacote de ondas é muito menor do que o comprimento l do passo.

A pergunta que este trabalho tenta responder é: o que aconteceria se o comprimento do passo fosse da ordem da largura do pacote de ondas? Equivalentemente, se o passo tem comprimento igual a distância entre posições discretas adjacentes ($l = 1$), o que aconteceria com a CQ se a partícula partisse de um estado que estivesse distribuído sobre várias posições adjacentes, como numa distribuição Gaussiana discreta? Em outras palavras, como se dá a dinâmica das CQs que partem de *estados deslocalizados*? Veja Fig. 1.5 abaixo.

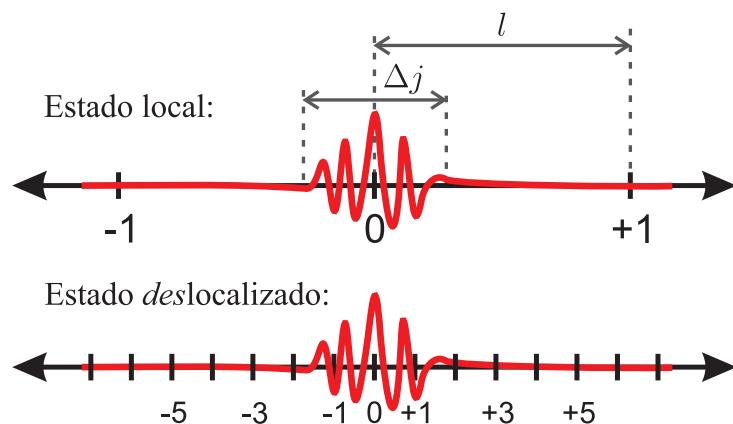


Figura 1.5: Ilustração intuitiva da diferença entre estados locais e deslocalizados. Acima, a linha vermelha representa o pacote de ondas com centro em $j = 0$ e largura Δj que dará um passo de comprimento l , sendo $l \gg \Delta j$, i.e., um estado local. Abaixo, o estado deslocalizado fica caracterizado por $l \sim \Delta j$.

Antes de prosseguirmos com as especificações do que investigar em CQs partindo de estados deslocalizados, podemos fazer duas perguntas iniciais: (i) Por que não usar CQs com tempo contínuo? (ii) De que forma isso poderia ser implementado experimentalmente?

Apesar das CQs discretas e contínuas apresentarem muitas similaridades[‡], o caso discreto possui uma flexibilidade maior para adaptar as moedas empregadas nas caminhadas em sistemas físicos com diferentes arquiteturas experimentais, o que possibilita a investigação de diferentes cenários [41].

Quanto à implementação experimental, existem trabalhos recentes [42–45] que reportam a implementação de CQs sem esquemas interferométricos, mas com a manipulação do momento angular orbital do fóton dentro de um único feixe, sem reflexões ou refrações. Acreditamos que tais esquemas seriam muito apropriados para testar os resultados teóricos que serão apresentados neste trabalho, no que diz respeito às CQs que partem de estados deslocalizados. Em tais experimentos, os graus de liberdade interno e externo do sistema são definidos pelo momento angular de spin (MAS), e pelo momento angular orbital (MAO), respectivamente. O grau de liberdade interno é dado pela polarização circular do fóton (no sentido horário $|R\rangle$ e/ou no sentido anti-horário $|L\rangle$), enquanto que o grau de liberdade externo é expresso pelo autoestado $|m\rangle$, onde m é a componente z do momento angular orbital do fóton, de autovalor $m\hbar$, $m \in \mathbb{Z}$.

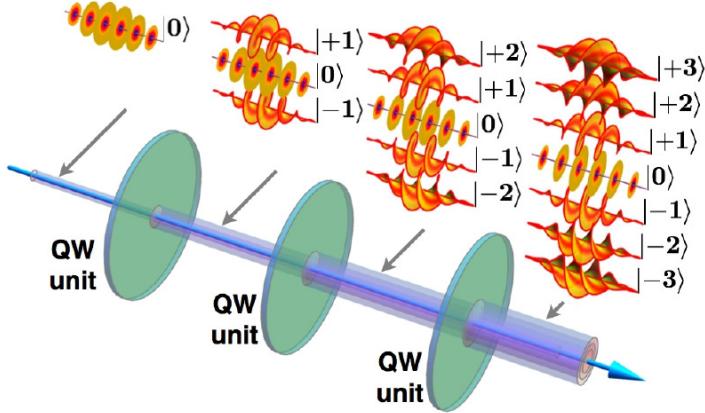


Figura 1.6: Esquema conceitual da CQ com um único feixe com MAO como grau de liberdade externo. Em cada estágio óptico percorrido (*QW unit*, onde está incluído o dispositivo *q-plate*, neste caso, com $q = 1/2$), o fóton pode mover-se para um valor m de MAO que seja aumentado ou diminuído em uma unidade. Fonte: F. Cardano et al., «Quantum walks and wavepacket dynamics on a lattice with twisted photons», *Sci. Adv.* **1**, e1500087 (2015).

O dispositivo óptico que acopla o MAS com o MAO, usado para uma CQ nesse contexto, é um cristal-líquido birrefringente chamado *q-plate* [46]. Resumidamente, um *q-*

[‡]CQs em tempo contínuo são descritas através da equação de Schrödinger para diferenças finitas

$$i\partial_t\psi(j,t) = -\gamma[\psi(j+1,t) - 2\psi(j,t) + \psi(n-1,t)], \quad (1.6)$$

onde $\psi(j,t)$ é uma amplitude complexa com tempo contínuo t e posição discreta j [40].

plate eleva o valor de m em $2q$ unidades se a polarização é L , e abaixa em $2q$ unidades se R , onde q é um parâmetro ajustável do dispositivo através da voltagem aplicada a ele. A Fig. 1.6 ilustra este processo implementado por Cardano *et al* [45].

1.3 Emaranhamento, dispersão e desordem em CQ

Estamos interessados em investigar a influência da deslocalização de estados iniciais em CQs no que diz respeito à três aspectos: (i) emaranhamento assintótico entre spin e posição; (ii) dispersão da distribuição de probabilidades ao longo do tempo; e (iii) produção de emaranhamento em CQs com desordem dinâmica.

O emaranhamento é uma medida de correlação entre subsistemas de um sistema quântico composto, diretamente ligado ao conceito de separabilidade de um estado. Um estado $|\Psi_{SP}\rangle$ de um sistema bipartido (no nosso caso, Spin e Posição) é dito separável se pode ser escrito na forma

$$|\Psi_{SP}\rangle = |\Psi_S\rangle \otimes |\Psi_P\rangle, \quad (1.7)$$

caso contrário, o estado é classificado como *emaranhado* [47]. Para quantificar o emaranhamento de sistemas bipartidos puros, usaremos a entropia de von Neumann [48], que será apresentada logo no próximo capítulo. O estado na Eq. (1.4) é um exemplo de estado completamente emaranhado, pois caso o resultado da medida da posição seja $j = 1$ ($j = -1$), então com certeza o spin da partícula será *up* (*down*). Já em (1.5), esta certeza no resultado da medida do estado de spin uma vez que o resultado na posição foi, digamos, $j = 0$, não ocorre. Nesta situação, o spin da partícula encontrada na posição $j = 0$ poderá ser tanto *up* quanto *down*, ou seja, spin e posição não estão totalmente correlacionados.

Para uma CQ a partir de um estado local, o emaranhamento máximo, *i.e.*, a total correlação entre spin e posição, é alcançado assintoticamente e apenas para alguns estados de spin inicial específicos [49–52] e também no mesmo cenário para caminhadas com dois caminhantes [53]. Existem alguns poucos artigos que tratam de condições iniciais deslocalizadas em CQs que mostram uma rica variedade de comportamentos de dispersão altamente dependentes da moeda quântica empregada [54, 55], e também sobre como o emaranhamento evolui durante a caminhada [56–58]. No entanto, nenhum desses trabalhos aborda a interação entre deslocalização e emaranhamento assintótico para todas as condições iniciais de spin e dois tipos de moedas (Hadamard e Fourier) ou ainda, não

apresentam comparação entre o comportamento médio de emaranhamento ao longo do tempo com seus resultados analíticos. Nossa primeiro objetivo neste trabalho é preencher estas lacunas.

Além da criação de emaranhamento entre spin e posição, a segunda característica chave das CQs é a dispersão balística, *i.e.*, $\sigma(t) \propto t$, em contraste com a sua análoga clássica, que tem dispersão difusiva, $\sigma(t) \propto \sqrt{t}$. A distribuição de probabilidade no caso balístico se caracteriza por uma distribuição de probabilidade com dois picos diametralmente opostos. Nossa segundo objetivo é entender como a deslocalização do estado inicial afeta o comportamento dispersivo das CQs. Alguns trabalhos discutiram alguns aspectos desta questão [54, 55, 59–62], no entanto, até onde temos conhecimento, uma resposta geral para todas as possibilidades de estados de spin iniciais ou para qualquer tipo de moeda quântica ainda não foi apresentada.

Uma vez que, tanto emaranhamento quanto a dispersão de CQs ainda possuem lacunas quando se tratam de estados iniciais deslocalizados, então, por consequência, o mesmo ocorre com CQs desordenadas. Quando a moeda quântica varia aleatoriamente ao longo do tempo em uma caminhada, observamos diferentes tipos de comportamentos, que vão desde a dispersão difusiva (clássica) até a produção de emaranhamento partindo de qualquer estado inicial de spin [23, 24, 63–71]. É importante frisar que, desordem não é o mesmo que descoerência (perda de informação), efeito estudado em diversos trabalhos, sendo o *review* de Kendon [16] um excelente ponto de partida. Tanto a desordem quanto a descoerência levam o estado a se dispersar classicamente, no entanto, como na desordem não há perda de coerência quântica, as correlações quânticas (como o emaranhamento) são mantidas. A partir desse ponto de vista, estamos interessados, também, em estudar a influência da deslocalização do estado inicial em CQs com desordem, em especial as taxas de realização de emaranhamento. Já adiantamos que, apesar da desordem ao longo do tempo (dinâmica) levar qualquer estado inicial ao emaranhamento máximo no limite assintótico, quanto mais deslocalizado for o estado inicial, mais lenta é a produção de emaranhamento. Por este motivo, buscaremos por cenários de desordem dinâmica em CQs que acelerem a produção de emaranhamento num contexto deslocalizado.

1.4 Sobre a dissertação

Os resultados desta dissertação foram submetidos para publicação em revistas internacionais indexadas. Aqueles que ainda estão em processo de avaliação podem ser encontrados na plataforma **arXiv**.

- A. C. Orthey e E. P. M. Amorim, «Asymptotic entanglement in quantum walks from delocalized initial states», *Quantum Information Processing* **16**, 224 (2017).
- A. C. Orthey Jr e E. P. M. Amorim, «On the spreading of quantum walks starting from local and delocalized states», *arXiv:1706.06257* (2017).
- A. C. Orthey Jr e E. P. M. Amorim, «Weak disorder enhancing the production of entanglement in quantum walks», *arXiv:1711.09246* (2017).

A dissertação está organizada conforme foi concebida a pesquisa cronologicamente: no Cap. 2 são apresentados os conceitos básicos iniciais acerca de CQs, tanto no espaço de posições quanto no espaço de momento, bem como o cálculo de emaranhamento; no Cap. 3 são apresentados os resultados analíticos e numéricos referentes ao cálculo de emaranhamento no limite assintótico para CQs a partir de estados deslocalizados; no Cap. 4 apresentamos o formalismo do cálculo de dispersão de CQs no espaço de momento e, logo em seguida, os respectivos resultados analíticos e numéricos para CQs a partir de estados deslocalizados; no Cap. 5 temos um estudo sobre desordem em CQs e os resultados referentes a melhora na produção de emaranhamento com desordem escassa (ou fraca); por fim, uma conclusão dos principais resultados na dissertação é formulada no Cap. 6.

Todas as figuras e gráficos presentes nesta dissertação que não possuem fonte indicada na legenda foram produzidas pelo próprio autor.

2 Conceitos preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as ferramentas matemáticas necessárias para o cálculo de emaranhamento e dispersão em CQs ao longo de todo o trabalho em duas abordagens: pelo espaço de posições e pelo espaço de momento. A primeira se baseia em um processo iterativo onde cada passo é efetuado pela atuação do operador de evolução temporal sobre o estado do caminhante, determinando, assim, as amplitudes de spin em cada posição acessível num dado instante t . Esta abordagem é muito útil para simulações computacionais de muitos passos e será usada para tal finalidade. A segunda, por sua vez, se baseia em escrever o estado no espaço de momento, através de uma transformada de Fourier, o que traz vantagens na obtenção de resultados analíticos no limite assintótico para $t \rightarrow \infty$ devido à diagonalidade do operador de translação condicional nessa base.

Iniciamos o capítulo com uma descrição das CQs no espaço de posições, apresentando o operador de evolução temporal em termos da moeda quântica e do operador de translação condicional. Seguimos adiante transcrevendo as CQs e os operadores no espaço de momento e obtemos o emaranhamento no limite assintótico em uma caminhada que parte de um estado local.

2.1 CQ no espaço de posições

O estado $|\Psi\rangle$ do caminhante quântico unidimensional pertence ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , tal que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$, onde \mathcal{H}_P é o espaço de posições e \mathcal{H}_C é o espaço de moeda. O espaço de posições é um espaço vetorial infinito e enumerável, descrito pelos vetores $|j\rangle$ onde o inteiro j é a posição discreta de um *qubit* em uma rede unidimensional. O espaço de moeda é um espaço bidimensional complexo descrito pelos vetores ortonormais $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ (estados de spin) [12, 13]. Portanto, um estado inicial geral do caminhante quântico é dado por,

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [a(j, 0)|\uparrow\rangle + b(j, 0)|\downarrow\rangle] \otimes |j\rangle, \quad (2.1)$$

onde a condição de normalização é satisfeita por

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(j, 0)|^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a(j, 0)|^2 + |b(j, 0)|^2 = 1. \quad (2.2)$$

A evolução temporal da caminhada quântica considerada aqui é unitária e em passos discretos de tempo. O estado após n passos pode ser escrito como,

$$|\Psi(n)\rangle = \mathcal{T} \prod_{t=1}^n \hat{U} |\Psi(0)\rangle, \quad (2.3)$$

sendo \mathcal{T} o produto ordenado temporalmente e \hat{U} o operador evolução temporal, dado por

$$\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes \mathbb{1}_P) \quad (2.4)$$

onde $\mathbb{1}_P$ é a identidade em \mathcal{H}_P , \hat{C} é a moeda quântica e \hat{S} é o operador de translação condicional.

A moeda quântica pertence ao $SU(2)$ e atua sobre os estados de spin colocando-os em uma superposição. Na sua forma mais geral pode ser escrita na base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ como,

$$\hat{C} = c_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + c_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + c_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + c_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (2.5)$$

ou na forma matricial com três parâmetros independentes,

$$\hat{C} \equiv \begin{pmatrix} c_{\uparrow\uparrow} & c_{\uparrow\downarrow} \\ c_{\downarrow\uparrow} & c_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{1-q}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-q}e^{i\phi} & -\sqrt{q}e^{i(\theta+\phi)} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

onde estabelecemos que,

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Os parâmetros q , θ e ϕ são números reais e determinam o comportamento da caminhada [59]. O primeiro parâmetro dita se a moeda é justa (ou balanceada) ou não e varia entre

0 e 1. Por exemplo, se $q = 1/2$ a moeda cria uma superposição igualitária, ou seja, com as mesmas probabilidades de estados de spin quando atua tanto em $|\uparrow\rangle$ quanto $|\downarrow\rangle$, caso contrário, as probabilidades serão diferentes. Os outros dois termos θ e ϕ definem as fases relativas entre os estados de spin e podem assumir valores entre 0 e 2π .

O operador de translação condicional,

$$\hat{S} = \sum_j (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |j+1\rangle\langle j| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |j-1\rangle\langle j|), \quad (2.8)$$

move o *qubit* para a esquerda ou para direita condicionado pelo seu estado interno, ou seja, do sítio j para $j-1$ se seu estado de spin é $|\downarrow\rangle$ e do sítio j para $j+1$ se o estado é $|\uparrow\rangle$. Esta dinâmica particular que condiciona a posição ao spin torna possível a geração de emaranhamento entre os graus de liberdade externos (posições) e internos (spins).

2.1.1 Distribuição de probabilidades

À primeira vista, a principal diferença entre a caminhada aleatória clássica e a sua versão quântica está no princípio da superposição, fazendo com que a dispersão $\sigma(t)$ se torne quadraticamente superior ao caso clássico. A dispersão é calculada através da raiz quadrada da variância

$$\sigma^2(t) = \sum_j j^2 (|a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2) - \left(\sum_j j (|a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2) \right)^2, \quad (2.9)$$

onde σ é o desvio padrão [11]. Enquanto que uma caminhada clássica se dispersa de maneira difusiva, $\sigma(t) \propto \sqrt{t}$, a distribuição de probabilidades de um caminhante quântico tem dispersão $\sigma(t) \propto t$, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1. Partindo de $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$, e aplicando-se o operador de evolução temporal (2.4) com uma moeda do tipo $q = 1/2$, $\theta = \phi = \pi/2$, conhecida como Fourier (ou Kempe) [13],

$$\hat{F} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

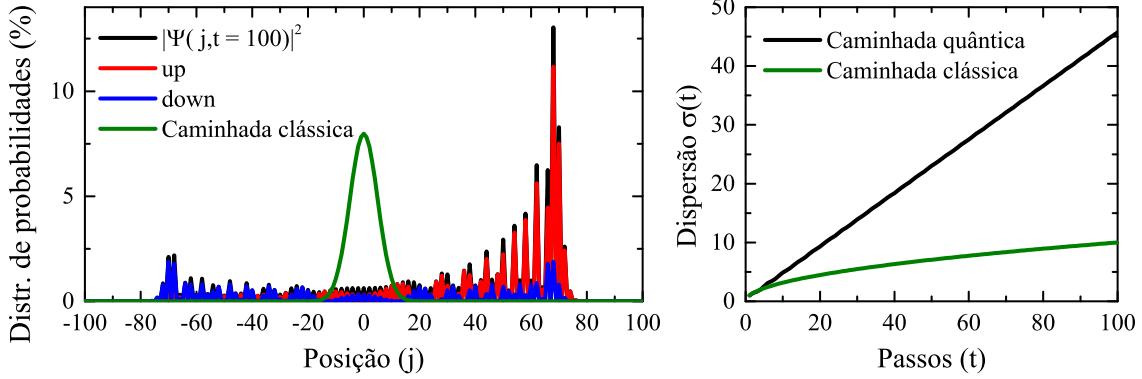


Figura 2.1: (a) Distribuição de probabilidades total $|\Psi(j)|^2$ (preto), e de amplitudes de spin *up* $|a(j)|^2$ (vermelho) e *down* $|b(j)|^2$ (verde) para caminhada quântica com moeda Fourier no passo $t = 100$ partindo do estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$. A distribuição clássica (azul) é apresentada para comparação. (b) Dispersão $\sigma(t)$ calculada através de (2.9) para caminhada quântica (preto) e clássica (azul).

tem-se

$$|\Psi(1)\rangle = \hat{U} |\Psi(0)\rangle \quad (2.11)$$

$$= \hat{S}(\hat{C} \otimes \mathbb{1}_P)(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \quad (2.12)$$

$$= \hat{S}(\hat{C} |\uparrow\rangle \otimes \mathbb{1}_P |0\rangle) \quad (2.13)$$

$$= \hat{S}(\hat{F} |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \quad (2.14)$$

$$= \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle \right) \quad (2.15)$$

$$= \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \otimes |0\rangle \right) \quad (2.16)$$

$$= \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right). \quad (2.17)$$

Inserindo explicitamente o operador de translação condicional, temos

$$|\Psi(1)\rangle = \left(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes \sum_j |j+1\rangle \langle j| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes \sum_j |j-1\rangle \langle j| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right) \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| |\uparrow\rangle \otimes |0+1\rangle \langle 0| |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} i |\downarrow\rangle \langle \downarrow| |\downarrow\rangle \otimes |0-1\rangle \langle 0| |0\rangle \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} i |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle. \quad (2.20)$$

Ou seja, em um passo, o estado *up* na posição $j = 0$ foi dividido (*splitted*) em *up* e

down em posições simétricas $j = -1$ e $j = +1$ com uma diferença de fase de $\pi/2$. Aplicando-se esse procedimento sucessivas vezes, obteremos um estado cuja distribuição de probabilidades segue a forma de pico duplo da Fig. 2.1 (a) com dispersão balística (b), proporcional a t . A assimetria para a direita se dá pelo estado inicial. No caso de uma moeda Fourier, se quiséssemos uma distribuição simétrica, bastava começar a caminhada com $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$, por exemplo.

É interessante notar que uma moeda Fourier simula o efeito de um fóton que atinge um divisor de feixes (*beam splitter* - BS). Se estabelecermos que $|\uparrow\rangle$ representa polarização circular para direita e $|\downarrow\rangle$ para esquerda, então um fóton $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ que atinge um BS entra em um estado de superposição entre transmissão ($|+1\rangle$) e reflexão ($|-1\rangle$), onde a transmissão segue com polarização original e a reflexão tem polarização invertida com diferença de fase, como mostra a Eq. (2.20).

Exemplo 2. Nos moldes do Exemplo 1, um estado $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ sob o efeito de uma moeda Hadamard ($q = 1/2$, $\theta = \phi = 0$) [13], ou seja,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

resulta em

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle, \quad (2.22)$$

exatamente como (2.20), mas sem a diferença de fase de $\pi/2$ imposta por i . Fisicamente, uma moeda Hadamard simula um experimento do tipo Stern-Gerlach, ou seja, um campo magnético não-uniforme aplicado sobre um feixe de partículas de spin-1/2 que seleciona spin $|\uparrow\rangle$ para direita e $|\downarrow\rangle$ para esquerda.

2.1.2 Operador densidade

Vamos introduzir os operadores densidade e densidade reduzida da mecânica quântica, tal como faz [28], mas com a omissão de algumas demonstrações. Tais operadores serão as ferramentas básicas para o cálculo de emaranhamento e dispersão em CQs.

Os estados iniciais $|\Psi\rangle$ de nossas CQs são puros. Por definição, *estados puros* são aqueles que possuem operador densidade dado por $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$. No entanto, qualquer sistema que for descrito por um ensemble de estados puros $|\Psi_i\rangle$ é definido como um

estado misto, com operador densidade

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.23)$$

onde p_i é a probabilidade de se encontrar o sistema no estado $|\Psi_i\rangle$. Dessa forma, o valor esperado $\langle O \rangle_\Psi = \langle \Psi | O | \Psi \rangle$ de um operador O relativo a um estado misto $|\Psi\rangle$ pode ser calculado através do seu respectivo operador densidade,

$$\langle O \rangle_\rho = \sum_i p_i \langle \Psi_i | O | \Psi_i \rangle = \text{Tr}(O\rho). \quad (2.24)$$

O operador densidade pode ser usado também para procedimentos de medição. A probabilidade de se obter o valor m da atuação do operador de medição M_m sobre o estado inicial $|\Psi_i\rangle$ é dada por

$$p(m, i) = \langle \Psi_i | M_m^\dagger M_m | \Psi_i \rangle = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|), \quad (2.25)$$

onde a segunda igualdade decorre de (2.24).

Além de puros, os estados iniciais de CQs de um único caminhante unidimensional são bipartidos, ou seja, são descritos como o produto tensorial de dois subestados $|\Psi_A\rangle$ e $|\Psi_B\rangle$ de dois subsistemas A e B , respectivamente, já citados anteriormente como spin e posição ($A \equiv C$ e $B \equiv P$). Se ρ_{AB} é o operador densidade que descreve o estado bipartido $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$, então o operador densidade reduzida relativo ao subsistema A é definido por

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (2.26)$$

onde Tr_B é o traço parcial sobre o sistema B . O traço parcial é definido por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|), \quad (2.27)$$

onde $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são quaisquer estados do subsistema A , e analogamente para $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$, onde vale a linearidade do traço em sua entrada. Aqui, Tr é o traço usual para o subsistema B , tal que $\text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|) = \langle b_2 | b_1 \rangle$.

Uma medição local apenas no subsistema A , ou seja, $M_{mA} \otimes \mathbb{1}_B$, usará apenas as informações fornecidas pelo operador densidade reduzida ρ_A relativo ao subsistema A .

Dessa forma, a probabilidade de se obter o autovalor m do operador M_{mA} sobre o estado do subsistema A é

$$p(m, t) = \text{Tr} \left[\left(M_{mA}^\dagger M_{mA} \otimes \mathbb{1}_B \right) \rho(t) \right] = \text{Tr} \left(M_{mA}^\dagger M_{mA} \rho_A(t) \right), \quad (2.28)$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [75].

2.1.3 Emaranhamento em CQ

O emaranhamento é uma medida de correlação quântica entre os subsistemas de um sistema quântico composto. Mais abrangente do que direcionamento EPR (EPR *steering*) e não-localidade de Bell, e menos geral do que discórdia quântica [76], o emaranhamento de estados bipartidos puros é definido através de uma negativa, ou seja, definimos o que *não* é um estado emaranhado [47]:

Definição (Emaranhamento). Um estado puro bipartite $|\Psi\rangle$ é dito *emaranhado* quando não puder ser escrito na forma

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle, \quad (2.29)$$

ou seja, quando não puder ser escrito como um estado *separável*.

Surge agora a tarefa de quantificar a não-separabilidade de estados no intuito de verificar a existência, ou não, de emaranhamento. A dificuldade de tal feito surge em duas situações: se o estado é emaranhado, então é impossível encontrar uma decomposição da forma (2.29), e caso contrário, o estado é separável mas tal decomposição é muito difícil de ser feita. Dessa forma, torna-se conveniente quantificar emaranhamento de alguma forma que não use a decomposição do estado, mas que ainda satisfaça os critérios que uma medida de emaranhamento deve satisfazer [77]. A entropia de emaranhamento de von Neumann satisfaz tais critérios.

Já que o estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ da nossa CQ é puro e, como a evolução temporal é unitária (sem decoerência), $|\Psi(t)\rangle$ permanece puro. Isto nos permite quantificar o emaranhamento quântico entre a posição e spin por meio da entropia de von Neumann. Tomando o operador densidade $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$, podemos obter a densidade reduzida no estado de moeda (spin) como $\rho_C = \text{Tr}_P(\rho)$, onde $\text{Tr}_P(\cdot)$ é o traço parcial sobre as posições.

Portanto, a entropia de von Neumann [48], é,

$$S_E = -\text{Tr}(\rho_C \log_2 \rho_C). \quad (2.30)$$

Ao diagonalizar a matriz densidade reduzida,

$$\rho_C(t) = \begin{pmatrix} \sum_j |a(j, t)|^2 & \sum_j a(j, t)b^*(j, t) \\ \sum_j a^*(j, t)b(j, t) & \sum_j |b(j, t)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \Gamma \\ \Gamma^* & B \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

obtemos os autovalores

$$\lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - A(t)(1 - A(t)) + |\Gamma(t)|^2}, \quad (2.32)$$

resultando em [78]

$$S_E(\rho(t)) = -\lambda_+(t) \log_2 \lambda_+(t) - \lambda_-(t) \log_2 \lambda_-(t), \quad (2.33)$$

a entropia de von Neumann escrita em função dos autovalores, sendo 0 para estados separáveis e 1 para estados totalmente emaranhados.

2.2 CQ no espaço de momento

O problema da abordagem no espaço de posições j para o cálculo do emaranhamento no limite assintótico com $t \rightarrow +\infty$ está na sua natureza recursiva. A descrição do sistema no espaço de momento, através do número de onda k , também chamado de espaço de Fourier, oferece vantagens calculacionais devido à diagonalidade do operador de translação condicional neste espaço. Apresentaremos um resumo dessa abordagem seguindo passos similares aos de [49, 50, 79, 80], e aplicaremos esse método para o estado inicial local (já conhecido na literatura), e no próximo capítulo para estados iniciais deslocalizados, cerne desta dissertação.

A transformada de Fourier, a ser empregada aqui, é tal que, dada uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, sua transformada de Fourier discreta é a função $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$\tilde{f}(k) = \sum_j f(j) e^{ikj}. \quad (2.34)$$

A transformada de Fourier inversa, neste caso, fica

$$f(j) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{-ikj}. \quad (2.35)$$

Dessa forma, o estado pertencente ao espaço $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$ é reescrito no espaço $\mathcal{H}_C \otimes \tilde{\mathcal{H}}_k$, onde $\tilde{\mathcal{H}}_k$ é compreendido pelos vetores $|k\rangle$ obtidos através da transformada de Fourier

$$|k\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ikj} |j\rangle, \quad (2.36)$$

com $k \in [-\pi, \pi]$. O estado inicial pode, então, ser reescrito a partir da transformada de Fourier inversa na Eq. (2.1) como

$$|\tilde{\Psi}(0)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \tilde{a}_k(0) |\uparrow\rangle + \tilde{b}_k(0) |\downarrow\rangle \right\} \otimes |k\rangle, \quad (2.37)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(0) &= (\langle \uparrow | \otimes \langle k |) |\tilde{\Psi}(0)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikj} a(j, 0), \\ \tilde{b}_k(0) &= (\langle \downarrow | \otimes \langle k |) |\tilde{\Psi}(0)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikj} b(j, 0). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Observe que, substituindo as Eqs. (2.36) e (2.38) na Eq. (2.37), as exponenciais se cancelam e obtemos:

$$|\tilde{\Psi}(0)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikj} a(j, 0) |\uparrow\rangle + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikj} b(j, 0) |\downarrow\rangle \right\} \otimes \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ikj} |j\rangle \quad (2.39)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (a(j, 0) |\uparrow\rangle + b(j, 0) |\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle = |\Psi(0)\rangle \quad (2.40)$$

O que torna a abordagem pelo espaço de Fourier promissora é o resultado a seguir, já demonstrado por [79] de forma alternativa.

Proposição 1. *O operador de translação condicional \hat{S} no espaço de Fourier é diagonal.*

Demonstração. De fato,

$$\hat{S}(|\uparrow\rangle \otimes |k\rangle) = \left(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes \sum_j |j+1\rangle \langle j| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes \sum_j |j-1\rangle \langle j| \right) \left(|\uparrow\rangle \otimes \sum_j e^{ikj} |j\rangle \right), \quad (2.41)$$

o que nos leva a

$$\hat{S}(|\uparrow\rangle \otimes |k\rangle) = |\uparrow\rangle \otimes \sum_j e^{ikj} |j+1\rangle, \quad (2.42)$$

$$= |\uparrow\rangle \otimes \sum_j e^{-ik} e^{i(j+1)k} |j+1\rangle, \quad (2.43)$$

$$= e^{-ik} (|\uparrow\rangle \otimes |k\rangle). \quad (2.44)$$

Analogamente,

$$\hat{S}(|\downarrow\rangle \otimes |k\rangle) = e^{ik} (|\downarrow\rangle \otimes |k\rangle). \quad (2.45)$$

Isso nos leva a escrever \hat{S} na Eq. (2.8) no espaço $\mathcal{H}_C \otimes \tilde{\mathcal{H}}_k$ como

$$\tilde{S} = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes \sum_j e^{ik(j+1)} e^{-ik(j+1)} |j+1\rangle \langle j| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes \sum_j e^{ik(j-1)} e^{-ik(j-1)} |j-1\rangle \langle j|, \quad (2.46)$$

$$= |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes \sum_j e^{-ik} e^{ik(j+1)} |j+1\rangle e^{-ikj} \langle j| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes \sum_j e^{ik} e^{ik(j-1)} |j-1\rangle e^{-ikj} \langle j|. \quad (2.47)$$

Ou seja,

$$\tilde{S} = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes e^{-ik} |k\rangle \langle k| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes e^{ik} |k\rangle \langle k|. \quad (2.48)$$

□

É interessante notar que o operador identidade pode ser escrito nos dois espaços como

$$\mathbb{1}_P = \sum_j |j\rangle \langle j| = |k\rangle \langle k|. \quad (2.49)$$

A partir das Eqs. (2.5), (2.6) e (2.48), o operador de evolução temporal $\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes \mathbb{1}_P)$ na representação do espaço de Fourier será

$$\begin{aligned} \hat{U}_k = & (|\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes e^{-ik} |k\rangle \langle k| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes e^{ik} |k\rangle \langle k|) \cdot \\ & \left\{ \left(\sqrt{q} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \sqrt{1-q} e^{i\theta} |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + \sqrt{1-q} e^{i\phi} |\downarrow\rangle \langle \uparrow| - \sqrt{q} e^{i(\theta+\phi)} |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \right) \otimes (|k\rangle \langle k|) \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

Matricialmente, temos

$$\hat{U}_k \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{q}e^{-ik} & \sqrt{1-q}e^{-i(k-\theta)} \\ \sqrt{1-q}e^{i(k+\phi)} & -\sqrt{q}e^{ik(\theta+\phi)} \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Aqui, torna-se desnecessário carregar o operador identidade $|k\rangle\langle k|$, uma vez que \hat{S} é diagonal no espaço de Fourier. Por esse motivo, será suficiente usar apenas o estado de spin de (2.37), ou seja, apenas o spinor

$$|\Phi_k(0)\rangle = \langle k|\tilde{\Psi}(0)\rangle = \tilde{a}_k(0)|\uparrow\rangle + \tilde{b}_k(0)|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(0) \\ \tilde{b}_k(0) \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

2.3 Caminhada Hadamard

Como primeira aplicação de cálculo de emaranhamento no limite assintótico, escolhemos a caminhada Hadamard. A moeda Hadamard é justa e não insere diferenças de fase entre as amplitudes de spin, e, por este motivo, é a mais simples das moedas quânticas [59]. Uma análise do comportamento de uma CQ sob seu efeito nos fornecerá um vislumbre de características fundamentais, no que diz respeito ao emaranhamento e dispersão. Assim, no caso de uma moeda Hadamard ($q = 1/2$, $\theta = \phi = 0$), o operador de evolução temporal no espaço de Fourier pode ser escrito através da Eq. (2.51), assumindo a forma

$$\hat{U}_{k,H} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Este operador atua sobre $|\Phi_k(t)\rangle = \langle k|\tilde{\Psi}(t)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(t) \\ \tilde{b}_k(t) \end{pmatrix}^T$ de tal maneira que

$$|\Phi_k(t+1)\rangle = \hat{U}_{k,H} |\Phi_k(t)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(t) \\ \tilde{b}_k(t) \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Faremos a decomposição espectral do operador $\hat{U}_{k,H}$ para que o estado do sistema no t -ésimo passo seja descrito como a atuação de $\hat{U}_{k,H}$ um número t de vezes sobre o estado

inicial. Para isso, calculamos os autovalores de $\hat{U}_{k,H}$,

$$|\Phi_k^{(1)}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2}e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$|\Phi_k^{(2)}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2}e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

com autovalores $\pm e^{\mp i\omega_k}$, onde a frequência* ω_k foi definida por

$$\sin(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin k, \quad (2.57)$$

ou, equivalentemente, por

$$\cos(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 k}, \quad (2.58)$$

onde $\omega_k \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dado que $|\Phi_k(t)\rangle = (\hat{U}_{k,H})^t |\Phi_k(0)\rangle$, então

$$|\Phi_k(t)\rangle = e^{-i\omega_k t} \langle \Phi_k^{(1)} | \Phi_k(0) \rangle |\Phi_k^{(1)}\rangle + (-1)^t e^{i\omega_k t} \langle \Phi_k^{(2)} | \Phi_k(0) \rangle |\Phi_k^{(2)}\rangle, \quad (2.59)$$

onde o estado inicial de spin do sistema no espaço de Fourier é o spinor dado pela Eq. (2.52). Para o cálculo do emaranhamento, basta calcular as integrais

$$A(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{a}_k(t)|^2, \quad (2.60)$$

$$\Gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}_k(t) \tilde{b}_k^*(t). \quad (2.61)$$

Uma vez que $A + B = 1$, pela condição de normalização, é redundante calcular

$$C(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{b}_k(t)|^2. \quad (2.62)$$

*Aqui, a frequência ω_k representa a *quasi-energia* do sistema, já que k , por ser o número de onda, é o *quasi-momento*.

Vamos prosseguir com a seguinte notação:

$$u_k = e^{-ik} = \cos k - i \sin k, \quad (2.63)$$

$$v_k = \sqrt{2}e^{-i\omega_k} - e^{-ik} = \sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k, \quad (2.64)$$

$$w_k = -\sqrt{2}e^{i\omega_k} - e^{-ik} = -\sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k, \quad (2.65)$$

Perceba que v_k e w_k são reais, e que $u_k u_k^* = 1$. Definimos também

$$N_k^{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 + \cos^2 k) \mp \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.66)$$

Dessa forma, os autovetores do operador $\hat{U}_{k,H}$ ficam,

$$|\Phi_k^{(1)}\rangle \equiv N_k^1 \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

$$|\Phi_k^{(2)}\rangle \equiv N_k^2 \begin{pmatrix} u_k \\ w_k \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

Mais explicitamente, a Eq. (2.59) pode ser escrita como o vetor coluna

$$\begin{aligned} |\Phi_k(t)\rangle &\equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(t) \\ \tilde{b}_k(t) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\omega_k t} |N_k^1|^2 (\tilde{a}_k(0) + v_k u_k \tilde{b}_k(0)) + (-1)^t e^{i\omega_k t} |N_k^2|^2 (\tilde{a}_k(0) + w_k u_k \tilde{b}_k(0)) \\ e^{-\omega_k t} |N_k^1|^2 (u_k^* v_k \tilde{a}_k(0) + v_k^2 \tilde{b}_k(0)) + (-1)^t e^{i\omega_k t} |N_k^2|^2 (u_k^* w_k \tilde{a}_k(0) + w_k^2 \tilde{b}_k(0)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Isto nos permite calcular

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_k(t)|^2 &= |N_k^1|^4 \left(\tilde{a}_k(0) + v_k u_k \tilde{b}_k(0) \right) \left(\tilde{a}_k^*(0) + v_k u_k^* \tilde{b}_k^*(0) \right) \\ &\quad + |N_k^2|^4 \left(\tilde{a}_k(0) + w_k u_k \tilde{b}_k(0) \right) \left(\tilde{a}_k^*(0) + w_k u_k^* \tilde{b}_k^*(0) \right) + F, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(t) \tilde{b}_k^*(t) &= |N_k^1|^4 \left(\tilde{a}_k(0) + v_k u_k \tilde{b}_k(0) \right) \left(u_k v_k \tilde{a}_k^*(0) + v_k^2 \tilde{b}_k^*(0) \right) \\ &\quad + |N_k^2|^4 \left(\tilde{a}_k(0) + w_k u_k \tilde{b}_k(0) \right) \left(u_k w_k \tilde{a}_k^*(0) + w_k^2 \tilde{b}_k^*(0) \right) + G, \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde F e G são funções que dependem também do tempo. Usando a linearidade da integração e aplicando o método das fases estacionárias [79], as funções F e G se anulam no limite assintótico quando integramos (2.70) e (2.71) em k . Dessa forma, sobram apenas os termos que seguem:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{a}_k(t)|^2, \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ |N_k^1|^4 \left[|\tilde{a}_k(0)|^2 + v_k u_k^* \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + v_k u_k \tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + v_k^2 |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + |N_k^2|^4 \left[|\tilde{a}_k(0)|^2 + w_k u_k^* \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + w_k u_k \tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + w_k^2 |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right\},\end{aligned}\quad (2.72)$$

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}_k(t) \tilde{b}_k^*(0), \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ |N_k^1|^4 \left[v_k u_k |\tilde{a}_k(0)|^2 + v_k^2 \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + v_k^2 u_k^2 \tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + v_k^3 u_k |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + |N_k^2|^4 \left[w_k u_k |\tilde{a}_k(0)|^2 + w_k^2 \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + w_k^2 u_k^2 \tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + w_k^3 u_k |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.73)$$

Substituindo (2.63), (2.64), (2.65), (2.66) nas duas equações acima, e fazendo algumas manipulações elementares, temos

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2(3 + \cos(2k))} \left[4|\tilde{a}_k(0)|^2 + \tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + 2|\tilde{b}_k(0)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + 2|\tilde{a}_k(0)|^2 \right) \cos(2k) - \right. \\ &\quad \left. \left. i \left(\tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) - \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) \right) \sin(2k) \right] \right\},\end{aligned}\quad (2.74)$$

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \frac{\cos k - i \sin k}{3 + \cos(2k)} \left[\left(\tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) + \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + |\tilde{a}_k(0)|^2 - |\tilde{b}_k(0)|^2 \right) \cos k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \left(\tilde{a}_k^*(0) \tilde{b}_k(0) - \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) \right) \sin k \right] \right\},\end{aligned}\quad (2.75)$$

onde \overline{A} representa o limite assintótico para $A(t \rightarrow +\infty)$, e analogamente para $\overline{\Gamma}$. Finalmente, apesar de substituir (2.74) e (2.75) em (2.33), obtemos uma expressão genérica para o emaranhamento no limite assintótico

$$\overline{S_E}(\Delta) = - \left(\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \right) \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \right) - \left(\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} \right) \log_2 \left(\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} \right), \quad (2.76)$$

onde Δ é uma função característica dada por

$$\Delta = 1 - 4(\bar{A}(1 - \bar{A}) + |\bar{\Gamma}|^2). \quad (2.77)$$

Neste estágio, a Eq. (2.76) nos permite enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2. *Seja \bar{S}_E o emaranhamento no limite assintótico entre spin e posição de uma caminhada quântica na linha. Então $\bar{S}_E = 1$ se, e somente se, $\Delta = 0$.*

Demonstração. Começamos com a volta. Tome $\Delta = 0$ em (2.76). Imediatamente obtemos $\bar{S}_E = 1$. Resolver a ida tentando isolar Δ seria uma tarefa complicada. Equivalentemente, podemos mostrar que $\Delta = 0$ é a única solução para $\bar{S}_E(\Delta) = 1$ no intervalo onde Δ existe, ou seja, $[0, 1]$. Dessa forma, escreva $f(\Delta) = 1 - \bar{S}_E(\Delta)$. A derivada de f é

$$f'(\Delta) = \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{1 - \sqrt{\Delta}} \right). \quad (2.78)$$

É fácil ver que $f' > 0$ no intervalo $(0, 1)$ se reescrita da forma,

$$f'(\Delta) = \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \log_2 \left(1 + \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 - \sqrt{\Delta}} \right). \quad (2.79)$$

Logo, f é crescente em todo intervalo, e portanto $\Delta = 0$ é a única raiz de f em $[0, 1]$. \square

Na seção a seguir, aplicaremos este método para um caminhante partindo de estado local, um resultado já conhecido na literatura [49]. No próximo capítulo, essa metodologia será aplicada no estudo de caminhadas que partem de estados deslocalizados.

2.4 Estado local

Um estado inicial local pode ser escrito de maneira genérica como

$$|\Psi_L(0)\rangle = |\Psi_s(0)\rangle \otimes |0\rangle, \quad (2.80)$$

onde adotaremos, de agora em diante, a notação

$$|\Psi_s(0)\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\downarrow\rangle \quad (2.81)$$

para designar o subestado de spin (ou moeda) do estado composto. Aqui, os ângulos α e β , representados na Fig. 2.2, localizam o estado de spin na superfície da esfera de Bloch [28], uma representação geométrica de um *qubit* (e para qualquer outro sistema de dois níveis) onde os vetores de estados da base $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ se encontram nos polos. Cada ponto na superfície da esfera representa um estado de spin (qubit) diferente, sendo que operações sobre estes estados são interpretadas como rotações na esfera de Bloch.

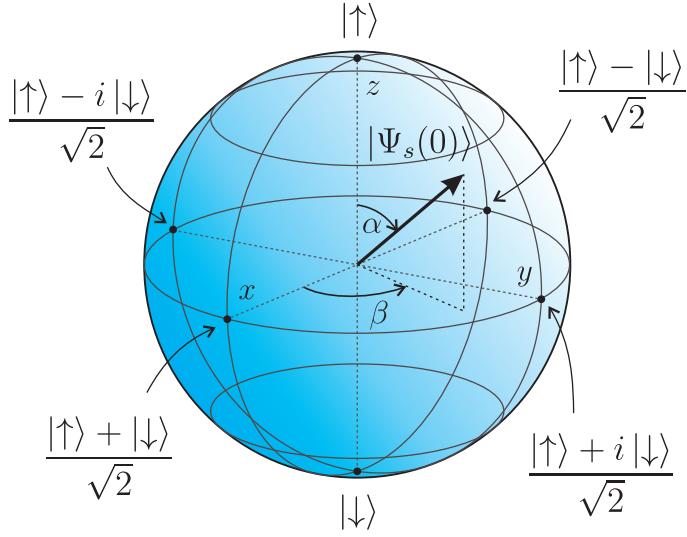


Figura 2.2: Esfera de Bloch.

As amplitudes do estado inicial local são

$$\begin{aligned} a(j=0, t=0) &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ b(j=0, t=0) &= e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

e nulas para $j \neq 0$. Isso significa que, aplicando essas equações em (2.38), obtemos, para todo k ,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(t=0) &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ \tilde{b}_k(t=0) &= e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Dessa forma, observamos que

$$|\Phi_{k,L}(0)\rangle = |\Psi_s(0)\rangle. \quad (2.84)$$

Aplicando as Eqs. (2.83) em (2.74) e (2.75) e integrando analiticamente, obtemos:

$$\bar{A} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \kappa_L\right) [\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta)], \quad (2.85)$$

$$\bar{\Gamma} = \bar{A} - \frac{1}{2} + 2i\kappa_L \sin(\alpha) \sin(\beta), \quad (2.86)$$

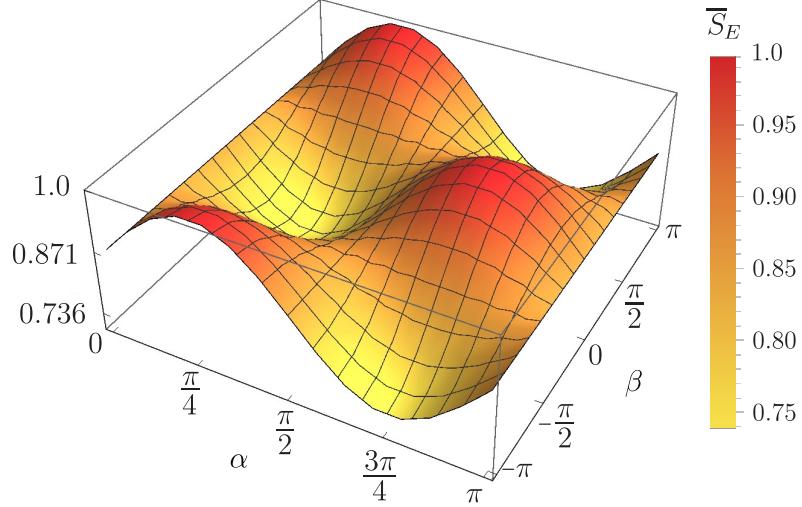


Figura 2.3: $\overline{S_E}(\alpha, \beta)$ para estado local com $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [-\pi, \pi]$. O emaranhamento varia entre aproximadamente 0.736 e 1, com média $\langle \overline{S_E} \rangle \sim 0.871$. Tal valor médio é muito próximo do valor $\overline{S_E} \sim 0.872$, atingido nos casos específicos onde $\alpha = n\pi/2$ para qualquer β e $\beta = \pi/2 + 2n\pi$ para qualquer α , sendo $n \in \mathbb{Z}$.

onde $\kappa_L = -(1 - \sqrt{2})/4$. Finalmente, é possível inserir as Eqs. (2.85) e (2.86) na Eq. (2.77) para obtermos a função característica do caso local[†],

$$\Delta_H(\alpha, \beta) = (3 - 2\sqrt{2})(1 + \cos(\beta) \sin(2\alpha)). \quad (2.87)$$

O emaranhamento no limite assintótico em função dos ângulos α e β do estado inicial é obtido substituindo (2.87) em (2.33). O comportamento de $\overline{S_E}(\alpha, \beta)$ é apresentado na Fig. 2.3, onde é possível observar periodicidade de $\pi/2$ em α e de π em β para qualquer ponto da superfície. Os picos e vales, respectivamente pontos de máximo e mínimo emaranhamento, ocorrem em estados iniciais específicos:

$$\text{Máximo: } \overline{S_E} \sim 1 \begin{cases} (\alpha = \pi/4, \beta = \pi) \\ (\alpha = 3\pi/4, \beta = 0) \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\text{Mínimo: } \overline{S_E} \sim 0.736 \begin{cases} (\alpha = 3\pi/4, \beta = \pi) \\ (\alpha = \pi/4, \beta = 0) \end{cases} \quad (2.89)$$

A média $\langle \overline{S_E} \rangle \sim 0.871$ foi obtida calculando-se

$$\langle \overline{S_E} \rangle = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\beta}{2\pi} \overline{S_E}(\alpha, \beta). \quad (2.90)$$

[†]Aqui, o índice H em Δ remete a Hadamard, uma vez que na seção 3.5 apresentaremos a função característica para uma caminhada com moeda Fourier partindo de estados locais e deslocalizados.

3 Emaranhamento assintótico em CQ a partir de estados deslocalizados

Nosso objetivo neste primeiro capítulo de resultados é estudar—por meios analíticos e numéricos—de que maneira a deslocalização de um estado inicial influencia no emaranhamento assintótico de uma CQ. Para isso, usaremos o ferramental teórico do Cap. 2 para, em um primeiro momento, inserir um estado deslocalizado nas integrais (2.74) e (2.75), obter a função característica Δ e consequentemente o emaranhamento assintótico para uma caminhada Hadamard. Apresentaremos, então, uma comparação destes resultados com simulações numéricas, bem como uma forma de conectar as expressões de emaranhamento assintótico para estados locais e deslocalizados. Ao final do capítulo, realizamos o mesmo estudo para uma caminhada Fourier.

3.1 Caminhada Hadamard a partir de estado Gaussiano

Uma distribuição Gaussiana centrada na origem é da forma

$$|f_G(j)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-j^2/2\sigma_0^2}, \quad (3.1)$$

onde $|f_G(j)|^2$ é a probabilidade de encontrar o caminhante na posição j , e σ_0 é a dispersão inicial da distribuição. No espaço \mathcal{H}_P , um estado genérico distribuído de forma Gaussiana sobre todas as posições j é escrito como

$$|\Psi_G(0)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi_s(0)\rangle \otimes f_G(j) |j\rangle. \quad (3.2)$$

Desta forma, fazendo a transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(0) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikj} a(j, 0), \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{j^2}{4\sigma_0^2} - ikj\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_k(0) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikj} b(j, 0), \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{j^2}{4\sigma_0^2} - ikj\right) e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}\quad (3.4)$$

É possível substituir os somatórios acima por integrais*, de modo que

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{j^2}{4\sigma_0^2} - ikj\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2} - ikx\right) dx \quad (3.5)$$

$$= (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2}\right) \cos(kx) dx \quad (3.6)$$

$$= 2(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{\sigma_0^2}\right) \cos(2kx') dx' \quad (3.7)$$

$$= (8\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}} e^{-k^2\sigma_0^2}, \quad (3.8)$$

onde a parte imaginária da função se anula por ser ímpar e a solução da integral acima consta em [81]. Portanto,

$$|\Phi_{k,G}(0)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(0) \\ \tilde{b}_k(0) \end{pmatrix} \equiv (8\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}} e^{-k^2\sigma_0^2} |\Psi_s(0)\rangle, \quad (3.9)$$

representa o estado inicial Gaussiano no espaço $\tilde{\mathcal{H}}_k$. Inserindo a Eq. (3.9) em (2.74) e (2.75), é possível calcular a integral numericamente para vários valores de σ_0 e, assim, obter uma função analítica através de ajuste em função da dispersão inicial σ_0 . Desta forma, obtemos as mesmas equações (2.85) e (2.86), mas desta vez κ não é mais uma

*Aqui, a distribuição Gaussiana, inserida em uma raiz, está normalizada com o termo usual segundo a integração em todos os reais. No entanto, por se tratar de uma caminhada discreta, usamos o somatório ao invés da integral. Esta manobra foi feita aceitando-se que a diferença entre a integral sobre todos os reais e a soma discreta sobre todos os inteiros do caso em questão com $\sigma_0 = 1$ é da ordem de 10^{-4} , e ainda menor para estados com dispersão maior.

constante, e sim, uma função dependente da dispersão inicial do estado,

$$\kappa_G(\sigma_0) = \frac{\epsilon}{\sigma_0^2}, \quad (3.10)$$

com $\epsilon \sim 0.0327$. Isto nos leva à função característica do caso Gaussiano,

$$\begin{aligned} \Delta_H(\alpha, \beta, \sigma_0) = \frac{1}{2} (1 - 4\kappa_G(\sigma_0))^2 [\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta)]^2 \\ + (4\kappa_G(\sigma_0))^2 [\sin(\beta) \sin(\alpha)]^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, fica descrito o emaranhamento quântico assintótico entre os graus de liberdade externo e interno de uma CQ com estado inicial Gaussiano genérico em termos de α , β e σ_0 , cujo comportamento é apresentado na Fig. 3.1 (a), para o caso onde $\sigma_0 = 1$.

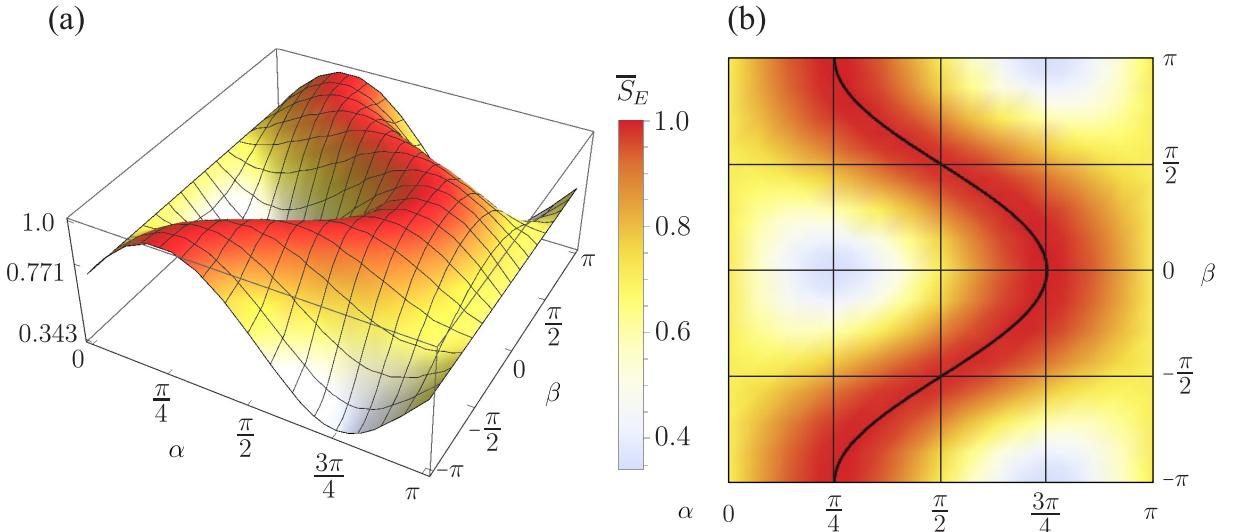


Figura 3.1: (a) $\bar{S}_E(\alpha, \beta, \sigma_0 = 1)$ via análise de Fourier, com $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [-\pi, \pi]$. Regiões em vermelho representam emaranhamento próximo a 1, e regiões em branco próximo ao valor mínimo 0.343. O emaranhamento médio é menor que no caso local, $\langle \bar{S}_E \rangle \sim 0.771$. (b) Vista superior. A curva em preto é dada pela Eq. (3.19) e representa a região de máximo emaranhamento.

3.2 Caminhada Hadamard a partir de estado retangular

No intuito de investigar se o comportamento observado na seção anterior é particular apenas para o estado Gaussiano, ou seja, depende da geometria da distribuição, prosseguiremos com outro tipo de distribuição de probabilidades para um estado deslocalizado, a qual chamaremos de *distribuição retangular*. Definimos uma distribuição retangular

como

$$|f_R(j)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2a+1}, & \text{se } -a \leq j \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.12)$$

onde a correspondência entre o raio a da distribuição e a dispersão σ_0 é obtida por

$$\sigma_0^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j^2 |f_R(j)|^2 = \frac{a(a+1)}{3}. \quad (3.13)$$

Desta forma, um estado inicial retangular pode ser escrito como

$$|\Psi_R(0)\rangle = \sum_{j=-a}^a |\Psi_s(0)\rangle \otimes f_R(j) |j\rangle. \quad (3.14)$$

De forma análoga ao caso Gaussiano, calculamos as transformadas de Fourier das amplitudes de spin segundo

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(0) &= \sum_{j=-a}^a \frac{1}{\sqrt{2a+1}} e^{-ikj} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a+1}} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\cot\left(\frac{k}{2}\right) \sin(k(a+1)) - \cos(k(a+1)) \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k(0) &= \sum_{j=-a}^a \frac{1}{\sqrt{2a+1}} e^{-ikj} e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a+1}} e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\cot\left(\frac{k}{2}\right) \sin(k(a+1)) - \cos(k(a+1)) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Introduzindo essas amplitudes iniciais nas Eqs. (2.74) e (2.75), e integrando numericamente, nos encontramos novamente com expressões da forma (2.85) e (2.86), onde κ agora é função do raio a da distribuição retangular,

$$\kappa_R(a) = \frac{\epsilon}{a}, \quad (3.17)$$

com $\epsilon \sim 0.0684$ e

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{12\sigma_0^2 + 1} - 1 \right). \quad (3.18)$$

3.3 Análise de resultados e simulações numéricas

Enquanto o caso local possui dois estados iniciais que levam ao emaranhamento assintótico máximo (Eq. (2.88)), os estados deslocalizados possuem uma configuração contínua de estados iniciais que atingem emaranhamento máximo dada por uma relação entre os ângulos α e β do estado inicial de spin como podemos enunciar na proposição seguinte.

Proposição 3. *Seja $|\Psi_G(t=0)\rangle$ um estado inicial Gaussiano com $\sigma_0 \gg 1$, tal qual a Eq. (3.2), que evolui no tempo segundo uma caminhada Hadamard. Então $\overline{S}_E = 1$ se, e somente se, os ângulos α e β das amplitudes de spin satisfazem*

$$\cos(\beta) = -\cotan(\alpha). \quad (3.19)$$

Demonstração. A maior parte do trabalho já está feita. Se $\overline{S}_E = 1$, então a Proposição 2 nos diz que $\Delta = 0$. Dessa forma, tome $\sigma_0 \gg 1$ na Eq. (3.11), tal que

$$\Delta_H(\alpha, \beta, \sigma_0 \gg 1) \sim \frac{1}{2} [\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta)]^2, \quad (3.20)$$

já que $\kappa_G \rightarrow 0$ para σ_0 grande. Imediatamente,

$$\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta) = 0, \quad (3.21)$$

e, portanto,

$$\cos(\beta) = -\cotan(\alpha). \quad (3.22)$$

A volta é trivial. □

Fica claro que a Proposição 3 também se aplica para estados retangulares. Na verdade, poderíamos conjecturar que qualquer distribuição suficientemente dispersa satisfaz a Proposição 3, sendo que a única diferença quanto a geometria da distribuição estaria contida na função κ .

A curva da Eq. (3.19) é apresentada no gráfico de densidade da Fig. 3.1 (b). Perceba que as condições de máximo apresentadas em (2.88) satisfazem esta curva, uma vez que os picos de emaranhamento do caso local permanecem nos casos deslocalizados.

O aparecimento dessas regiões de alto emaranhamento é característico para qualquer caminhada com estado inicial Gaussiano ou retangular, como mostra a Fig. 3.2 (a) e (b).

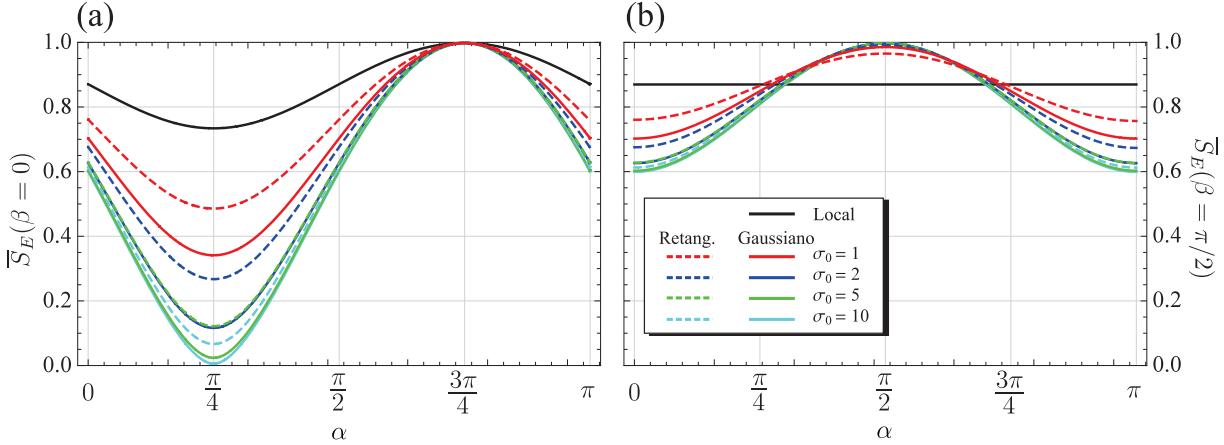


Figura 3.2: Cortes feitos nas superfícies \bar{S}_E em (a) $\beta = 0$ e (b) $\pi/2$ para caminhadas partindo de estado local (preto), Gaussiano (colorido contínuo) e retangular (colorido tracejado) para diferentes dispersões iniciais.

Nela, apresentamos cortes em $\beta = 0$ e $\pi/2$ nas superfícies que caracterizam o emaranhamento no limite assintótico para uma CQ partindo de um estado inicial local genérico, e partindo também de estados iniciais Gaussianos e retangulares com diferentes valores de dispersão inicial σ_0 . Estas curvas mostram que, para todos os casos, as regiões de emaranhamento máximo e mínimo são idênticas. Além disso, todas elas estão relacionadas por um fator de escala que depende não apenas da dispersão inicial do estado, mas também da geometria do estado.

O emaranhamento médio para cada passo de tempo t pode ser calculado por

$$\langle S_E(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{S_{E,i}(t)}{N}, \quad (3.23)$$

onde $S_{E,i}(t)$ é o emaranhamento no passo t , obtido através da Eq. (2.33), para a CQ que parte do i -ésimo estado inicial $|\Psi(0)\rangle_i$ com amplitudes de spin determinadas pelos ângulos $(\alpha, \beta)_i$ da esfera de Bloch.

A Fig. 3.3 apresenta os resultados das simulações numéricas de $\langle S_E(t) \rangle$, onde a média foi obtida sobre $N = 2016$ estados iniciais diferentes, variando-se $(\alpha, \beta)_i$ de $(0, 0)$ até $(\pi, 2\pi)$ em incrementos independentes de 0.1. Nesta figura, estão presentes os valores de emaranhamento médio para cada passo t de CQ com moeda Hadamard partindo de estados local, retangular (a) e Gaussiano (b). *No detalhe*, é apresentada a comparação entre os resultados da simulação numérica $\langle S_E(t=1000) \rangle$ com os resultados da análise de Fourier no limite assintótico, $\langle \bar{S}_E \rangle$, sendo o erro da simulação numérica sempre menor que 0.3% para Gaussiano, e 1.2% para retangular. Com isto, é possível concluir que quanto

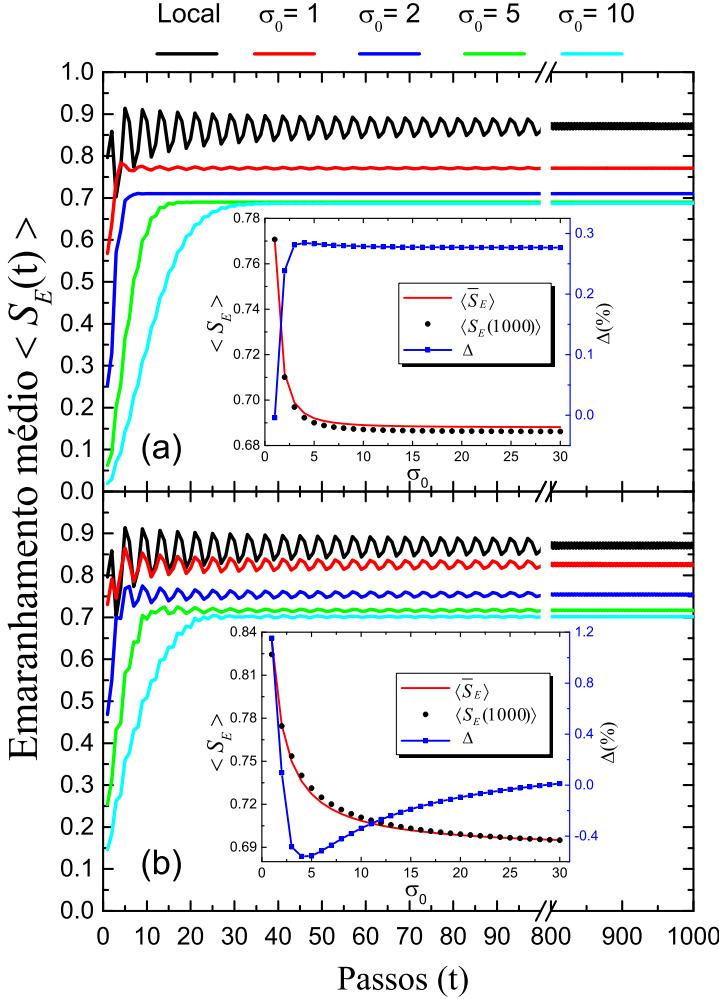


Figura 3.3: Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ calculado sobre $N = 2016$ estados iniciais para CQs partindo de estado local (curva preta), Gaussiana (a) e retangular (b) com valores de dispersão inicial $\sigma_0 = 1, 2, 5, 10$ (curvas coloridas). *Detalhe:* Emaranhamento médio $\langle S_E(t = 1000) \rangle$ no passo $t = 1000$ via simulação numérica em função da dispersão inicial σ_0 (pontos pretos), e emaranhamento médio $\langle \bar{S}_E \rangle$ no limite assintótico via análise de Fourier em função de σ_0 (curva vermelha). A diferença $\Delta(\%)$, em porcentagem, entre as duas abordagens é apresentada com eixo vertical ao lado direito (curva azul).

mais disperso é o estado, menores são as taxas de emaranhamento médio atingidas, sendo $\langle \bar{S}_E \rangle \sim 0.688$ o menor valor de emaranhamento médio possível, como mostra a expressão do caso Gaussiano

$$\langle \bar{S}_E(\sigma_0) \rangle_{\text{Gaussiano}} \sim \frac{0.0835}{\sigma_0^2} + 0.688, \quad (3.24)$$

obtida por integração numérica. No caso retangular, o valor mínimo também é ~ 0.688 , porém este é atingido de maneira linear com o inverso da dispersão:

$$\langle \bar{S}_E(\sigma_0) \rangle_{\text{retangular}} \sim \frac{0.1205}{\sigma_0} + 0.688. \quad (3.25)$$

Contudo, apesar do valor médio do emaranhamento cair com σ_0^2 no caso Gaussiano e σ_0 no caso retangular, sempre atinge emaranhamento máximo nas mesmas regiões (que estão destacadas em vermelho na Fig. 3.1). Mais especificamente, para pontos com $\beta = \pi/2$, o valor médio do emaranhamento é sempre mais alto, como mostra a Fig. 3.4 (b), o que mostra que a diferença de fase no estado de spin tem efeito positivo na criação de

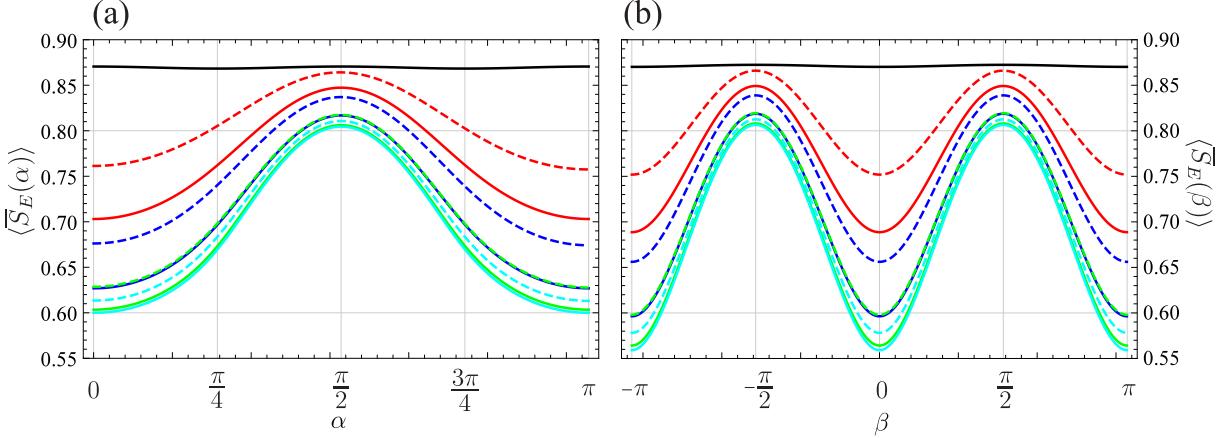


Figura 3.4: Emaranhamento médio no limite assintótico $\langle \bar{S}_E \rangle$ em função de (a) α e (b) β , respectivamente. Constanam em ambos, caso local (preto), Gaussiano (colorido contínuo) e retangular (colorido tracejado). Mesma legenda da Fig. 3.2.

emaranhamento em uma caminhada Hadamard. A Fig. 3.4 (b) mostra que, na média, o emaranhamento é maior para estados de moeda simétricos, ou seja, quando $\alpha = \pi/2$, independentemente da dispersão σ_0 .

Neste momento, é necessário citar que nossos resultados divergiram de Abal *et al.* [49] quanto a um estado Gaussiano específico. Na seção “More general non-local initial states”, os autores afirmam sem apresentar maiores detalhes, que um estado de moeda da forma $(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ (ou seja: $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2$), distribuído de forma Gaussiana tem seu emaranhamento assintótico tendendo a zero segundo $\bar{S}_E \sim \log_2 \sigma_0/4\sigma_0^4 + \mathcal{O}(\sigma_0^{-8})$. Nossos resultados (Fig. 3.2(b)) mostram justamente o contrário: o emaranhamento assintótico tende a 1 para este caso, conforme σ_0 aumenta.

3.4 Conexão entre estados local e deslocalizado

Após inserir a Eq. (3.9) em (2.74) e (2.75), ficamos tentados a extrapolar a integração numérica para valores de dispersão menores que 1, numa tentativa de conectar a expressão do emaranhamento para estados Gaussianos, e de maneira geral para estados deslocalizados, a expressão para estados locais. Para isso, devemos renormalizar $\tilde{a}_k(0)$ e $\tilde{b}_k(0)$ com a Função Erro, a fim de que estas permaneçam normalizadas para $0 < \sigma_0 < 1$, ou seja

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_k(0) \\ \tilde{b}_k(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\text{Erf}(\sqrt{2}\pi\sigma_0)}} (8\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}} e^{-k^2\sigma_0^2} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2)e^{i\beta} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

onde

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du.$$

Após uma extensa integração numérica, obtemos uma expressão aproximada para \bar{A} e \bar{B} , completamente análoga às anteriores, mas desta vez com

$$\kappa_G(\sigma_0) = 0.03651 \left(\frac{\pi}{2} - \text{ArcTan} [3.937 (\sigma_0 - 0.8)] \right). \quad (3.27)$$

Desta vez, $\kappa_G(\sigma_0 \rightarrow 0) \sim -(1 - \sqrt{2})/4$. Isso nos leva à uma fórmula de \bar{S}_E que mostra a conexão, de maneira aproximada, entre as expressões de emaranhamento assintótico de caminhadas com estado local e deslocalizado. A Fig. 3.5 apresenta $\bar{S}_E(\alpha, \beta, \sigma_0)$ sobre a superfície da Esfera de Bloch seguindo as mesmas coordenadas esféricas usuais da Fig. 2.2. Esta sequência de esferas nos mostra a evolução das regiões de emaranhamento máximo do caso local para os casos Gaussianos. Os círculos vermelhos centrados em $(\alpha = \pi/4, \beta = \pi)$ e $(\alpha = 3\pi/4, \beta = 0)$ se estendem formando uma faixa que segue a relação (3.19).

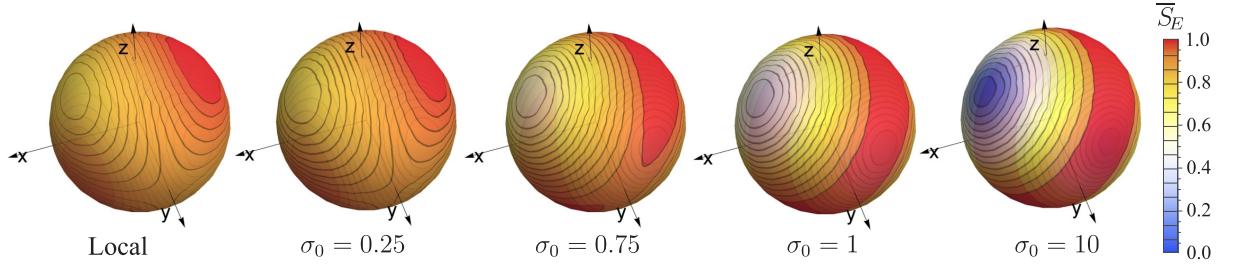


Figura 3.5: Emaranhamento assintótico \bar{S}_E sobre esferas de Bloch para estado local e estados Gaussianos com $\sigma_0 = 0.25, 0.75, 1$ e 10 (da esquerda para a direita).

Por outro lado, as regiões circulares (laranja), centradas em $(\alpha = \pi/4, \beta = 0)$ e $(\alpha = 3\pi/4, \beta = \pi)$, de mínimo emaranhamento do caso local permanecem no mesmo lugar e tem seu valor caindo para zero (azul) conforme σ_0 aumenta, seguindo a relação $\bar{S}_E(\sigma_0) \sim 0.3463\sigma_0^{-1.59}$, no caso Gaussiano, e $\bar{S}_E(\sigma_0) \sim 0.4874\sigma_0^{-0.853}$ no caso retangular (não apresentado na figura).

3.5 Para comparação: caminhada Fourier

Nesta seção, vamos repetir o cálculo de emaranhamento no limite assintótico para CQ partindo de estados locais e Gaussianos, mas desta vez com moeda Fourier. Como visto no início do Cap. 2, a moeda Fourier (ou Kempe) é uma moeda justa assim como a moeda

Hadamard,

$$\hat{F} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Entretanto, esta moeda gera uma distribuição de probabilidade simétrica sem a necessidade de uma diferença de fase entre os estados iniciais de spin ($\beta = 0$), diferente da Hadamard ($\beta = \pi/2$) [13]. O operador de evolução temporal no espaço de momento k para uma moeda Fourier é dado por

$$\hat{U}_{k,F} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & ie^{-ik} \\ ie^{ik} & e^{ik} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

com os autovetores $|\Phi_k^\pm\rangle$ dados por

$$|\Phi_k^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \sin^2 k \pm \sin k \sqrt{1 + \sin^2 k} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -e^{-ik} (\sin k \pm \sqrt{1 + \sin^2 k}) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

e respectivos autovalores

$$\lambda^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos k \mp i \sqrt{1 + \sin^2 k} \right). \quad (3.31)$$

Se definirmos uma frequência ω_k tal que $\cos(\omega_k) = \cos k / \sqrt{2}$, então teremos

$$\lambda^\pm = \cos(\omega_k) \mp i \sin(\omega_k) = e^{\mp i\omega_k}. \quad (3.32)$$

Neste estágio, estamos aptos a escrever a evolução temporal de $|\Phi_k(0)\rangle$, em termos da decomposição espectral de $\hat{U}_{k,F}$,

$$\begin{aligned} |\Phi_k(t)\rangle &= (\hat{U}_{k,F})^t |\Phi_k(0)\rangle, \\ &= e^{-i\omega_k t} \langle \Phi_k^+ | \Phi_k(0) \rangle |\Phi_k^+\rangle + e^{i\omega_k t} \langle \Phi_k^- | \Phi_k(0) \rangle |\Phi_k^-\rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para facilitar a manipulação dos termos, vamos escrever

$$A_k^\pm = \frac{1}{2} \left(1 + \sin^2 k \pm \sin k \sqrt{1 + \sin^2 k} \right)^{-1}, \quad (3.34)$$

$$u_k^\pm = -e^{-ik} \left(\sin k \pm \sqrt{1 + \sin^2 k} \right), \quad (3.35)$$

nos autovetores (3.30). Assim, temos

$$\begin{aligned} |\Phi_k(t)\rangle &\equiv e^{-i\omega_k t} (A_k^+)^2 \left((u_k^+)^* \tilde{a}_k(0) + \tilde{b}_k(0) \right) \begin{pmatrix} u_k^+ \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ e^{i\omega_k t} (A_k^-)^2 \left((u_k^-)^* \tilde{a}_k(0) + \tilde{b}_k(0) \right) \begin{pmatrix} u_k^- \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde o estado inicial é $|\Phi_k(0)\rangle = (\tilde{a}_k(0), \tilde{b}_k(0))^T$. Uma vez que $|\Phi_k(t)\rangle = (\tilde{a}_k(t), \tilde{b}_k(t))^T$, então temos

$$a_k(t) = e^{-i\omega_k t} A_k^+ \left(|u_k^+|^2 \tilde{a}_k(0) + u_k^+ \tilde{b}_k(0) \right) + e^{i\omega_k t} A_k^- \left(|u_k^-|^2 \tilde{a}_k(0) + u_k^- \tilde{b}_k(0) \right), \quad (3.37)$$

$$b_k(t) = e^{-i\omega_k t} A_k^+ \left((u_k^+)^* \tilde{a}_k(0) + \tilde{b}_k(0) \right) + e^{i\omega_k t} A_k^- \left((u_k^-)^* \tilde{a}_k(0) + \tilde{b}_k(0) \right). \quad (3.38)$$

É fácil notar que $\tilde{b}_k(t)$ tem uma expressão mais simples que $\tilde{a}_k(t)$, então nós podemos usar $|\tilde{b}_k(t)|^2$ e $\tilde{a}_k(t)b_k^*(t)$ em vez de $|\tilde{a}_k(t)|^2$ e $\tilde{a}_k(t)\tilde{b}_k^*(t)$ para o cálculo de emaranhamento,

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{b}_k(t)|^2, \quad (3.39)$$

$$\Gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}_k(t) \tilde{b}_k^*(t), \quad (3.40)$$

já que $B(t) = 1 - A(t)$. Usando a linearidade da integração é possível separar as funções que dependem do tempo. Quando $t \rightarrow +\infty$, tais termos se anulam devido a aproximação das Fases Estacionárias [79], levando a

$$\begin{aligned} \overline{B} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ (A_k^+)^4 \left[|u_k^+|^2 |\tilde{a}_k(0)|^2 + (u_k^+)^* \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + u_k^+ \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k(0) + |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + (A_k^-)^4 \left[|u_k^-|^2 |\tilde{a}_k(0)|^2 + (u_k^-)^* \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + u_k^- \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k(0) + |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ (A_k^+)^4 \left[|u_k^+|^2 u_k^+ |\tilde{a}_k(0)|^2 + |u_k^+|^2 \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + (u_k^+)^2 \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k(0) + u_k^+ |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right\} \\ &\quad + (A_k^-)^4 \left[|u_k^-|^2 u_k^- |\tilde{a}_k(0)|^2 + |u_k^-|^2 \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k^*(0) + (u_k^-)^2 \tilde{a}_k(0) \tilde{b}_k(0) + u_k^- |\tilde{b}_k(0)|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.5.1 Estado inicial local

Inserindo o estado inicial local $|\Phi_{k,L}(0)\rangle$ da Eq. (2.84) em (3.41) e (3.42), obtemos a função característica do caso local para uma caminhada Fourier,

$$\Delta_F(\alpha, \beta) = (3 - 2\sqrt{2})(1 - \sin(2\alpha)\sin(\beta)). \quad (3.43)$$

Uma observação mais acurada da Eq. (3.43) nos permite escrever o seguinte resultado, já previsto por Tregenna *et al.* [59].

Proposição 4. *Em uma caminhada quântica que parte de estado local, não há perda de generalidade se ela for dirigida por uma moeda Hadamard ou Fourier, no que tange ao emaranhamento no limite assintótico.*

Demonstração. Basta notar que a Eq. (3.43) satisfaz

$$\Delta_H(\alpha, \beta + \pi/2) = \Delta_F(\alpha, \beta), \quad (3.44)$$

ou seja, o emaranhamento assintótico das caminhadas Hadamard e Fourier diferem apenas em $\pi/2$ no ângulo β . Desta forma, toda a variedade de valores de emaranhamento no limite assintótico relativa à caminhada Hadamard pode ser simulada escolhendo-se o estado de spin adequado em uma caminhada Fourier, e vice-versa. \square

Tal resultado fica visível ao compararmos a Fig. 3.6 (a) com a Fig. 2.3.

3.5.2 Estado inicial Gaussiano

Aplicando a Eq. (3.9) nas Eqs. (3.41) e (3.42), obtemos a função característica do caso Fourier partindo de um estado Gaussiano,

$$\Delta_F(\alpha, \beta, \sigma_0) = \frac{1}{2} (1 - 4\kappa'_G(\sigma_0))^2 [\cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta]^2 + (4\kappa'_G(\sigma_0))^2 [\sin \alpha \cos \beta]^2, \quad (3.45)$$

com uma função κ'_G dependente da dispersão. Apesar de que, substituir β por $\beta + \pi/2$ leva Δ_H (3.11) para a mesma forma da expressão Δ_F , κ'_G aqui tem um comportamento que difere do caso Hadamard: $\kappa'_G(\sigma_0) \rightarrow 1/4$ quando $\sigma_0 \rightarrow +\infty$, como mostram as integrações numéricas. Isso significa que, quando σ_0 aumenta, o segundo termo na Eq.

(3.45) se sobressai, ao contrário do caso Hadamard, o que leva a uma expressão diferente, mas ainda com o mesmo comportamento de faixa de emaranhamento assintótico máximo.

Análogo à Proposição 3, enunciamos a sua versão para caminhada Fourier:

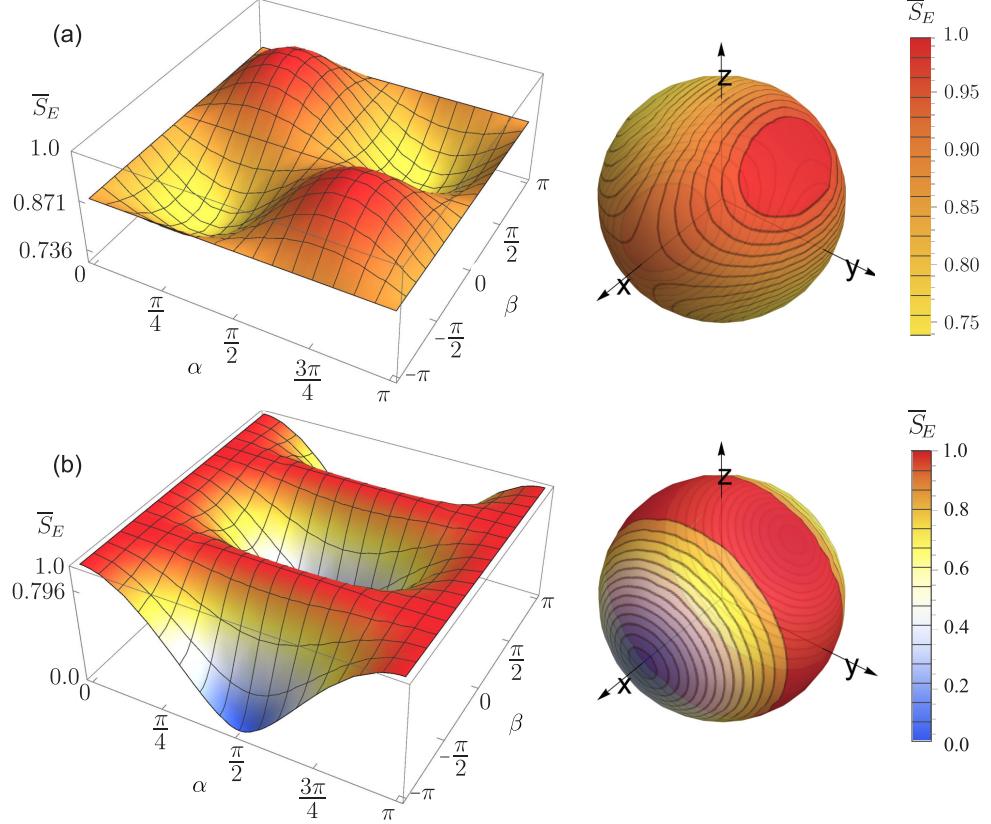


Figura 3.6: Emaranhamento assintótico \bar{S}_E em função dos ângulos α e β das amplitudes iniciais de spin e sobre a esfera de Bloch para caminhada Fourier partindo de: (a) estado local com máximo emaranhamento em $(\alpha, \beta) = (\pi/4, \pi/2)$ e $(3\pi/4, -\pi/2)$, com $\bar{S}_E = 0.871$ e 0.736 os valores emaranhamento médio e mínimo, respectivamente, como na caminhada Hadamard; e (b) estado Gaussiano ($\sigma_0 = 10$) com máximo emaranhamento em $\beta = \pm\pi/2$ para qualquer α , com $\bar{S}_E = 0.796$ e ~ 0 os valores de emaranhamento médio e mínimo. Regiões vermelhas (azuis) mostram alto (baixo) emaranhamento.

Proposição 5. *Seja $|\Psi(t=0)\rangle$ um estado inicial Gaussiano com $\sigma_0 \gg 1$, tal qual a Eq. (3.2), que evolui no tempo segundo uma caminhada Fourier. Então $\bar{S}_E = 1$ se, e somente se, o ângulo β da diferença de fase entre as amplitudes de spin for*

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.46)$$

Demonstração. Tome $\sigma_0 \gg 1$ na Eq. (3.45), de modo a obter

$$\Delta_F(\alpha, \beta) \sim (\sin \alpha \cos \beta)^2, \quad (3.47)$$

e aplique a Proposição 2. □

Logo, estados iniciais Gaussianos com $\sigma_0 \gg 1$ podem atingir alto emaranhamento em uma caminhada Fourier se partirem de qualquer ponto na faixa vertical vermelha da Fig. 3.6 (b), neste caso para $\sigma_0 = 10$. É interessante citar que, quando $\sigma_0 \rightarrow +\infty$, encontramos um emaranhamento assintótico médio maior que na caminhada Hadamard, $\langle \bar{S}_E \rangle \sim 0.793$.

A ideia amplamente aceita, nos estudos relativos às caminhadas quânticas que partem de estados locais, de que a escolha da moeda quântica é irrelevante—uma vez que os estados iniciais de spin podem simular todos os comportamentos possíveis—não se aplica aos estados deslocalizados. Como observamos, apesar da faixa característica de emaranhamento máximo estar presente em ambas as caminhadas Fourier e Hadamard, o emaranhamento médio da primeira é maior. Esta diferença entre estados locais e deslocalizados ficará ainda mais evidente no próximo capítulo quando apresentarmos os resultados relativos à dispersão.

4 Dispersão em CQ a partir de estados deslocalizados

Como apresentado brevemente no Cap. 2, a dispersão da CQ é quadraticamente superior quando comparada com a caminhada clássica, ou seja, $\sigma(t) \sim t$. O objetivo principal deste capítulo é entender como a deslocalização do estado inicial afeta o comportamento de dispersão das CQs. Poucos trabalhos anteriores discutem alguns aspectos desta questão [54, 55, 59, 60], no entanto, uma resposta geral para todas as possibilidades de estados iniciais de spin ou para qualquer tipo de moeda quântica ainda não existe. Para atingir esse objetivo, usaremos um formalismo matemático para obter—através de abordagens analíticas e numéricas—a variância da posição em relação aos estados locais, Gaussianos e uniformes para qualquer *qubit* inicial e moeda equilibrada. Em particular, calcularemos também as quantidades médias para analisar as características gerais e as diferenças entre esses estados.

Vamos usar novamente a abordagem pelo espaço de momento, uma vez que a expressão dada pela Eq. (2.9) em termos da posição j não é convidativa analiticamente. Dessa forma, vamos reescrever a Eq. (2.9) em termos dos valores esperados dos operadores de posição, neste caso

$$\langle \hat{\mathbf{j}}^n \rangle_t = \sum_j j^n |\Psi(j, t)|^2, \quad (4.1)$$

de forma que a dispersão fica

$$\sigma(t) = \sqrt{\langle \hat{\mathbf{j}}^2 \rangle_t - \langle \hat{\mathbf{j}} \rangle_t^2}. \quad (4.2)$$

4.1 Dispersão no espaço de momento

Para alcançarmos uma expressão analítica da dispersão em função do passo t da caminhada, transcreveremos o formalismo apresentado primeiramente por Brun *et al.* [60, 61], e de maneira mais detalhada por Annabestani *et al.* [62]. Sabemos que o operador

densidade para o estado inicial pode ser escrito a partir de (2.37) como

$$\rho(0) = |\tilde{\Psi}(0)\rangle \langle \tilde{\Psi}(0)| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} |\Phi_k(0)\rangle \langle \Phi_{k'}(0)| \otimes |k\rangle \langle k'|, \quad (4.3)$$

onde lembramos que

$$|\Phi_k(0)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(0) \\ \tilde{b}_k(0) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Vamos agora, usar o operador de evolução temporal no espaço de momento para obter o operador densidade no passo t . Explicitamente, um operador densidade genérico Λ é transformado por

$$\mathcal{L}_{kk'}\Lambda = \hat{U}_k \Lambda \hat{U}_{k'}^\dagger. \quad (4.5)$$

Introduzindo a notação $\rho_k(0) = |\Phi_k(0)\rangle \langle \Phi_{k'}(0)|$, o operador densidade no passo t é

$$\rho(t) = |\tilde{\Psi}(t)\rangle \langle \tilde{\Psi}(t)| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} \mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0) \otimes |k\rangle \langle k'|. \quad (4.6)$$

Pela Eq. (2.26), o operador densidade reduzida relativo à posição é

$$\rho_P(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} |k\rangle \langle k'| \text{Tr} \{ \mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0) \}. \quad (4.7)$$

A probabilidade de encontrar o caminhante na posição j no passo t pode ser calculada utilizando-se o operador densidade reduzida relativo à posição através da Eq. (2.28),

$$|\Psi(j, t)|^2 = \text{Tr} \{ (\mathbb{1}_C \otimes |j\rangle \langle j|) \rho(t) \}, \quad (4.8)$$

$$= \text{Tr} \{ |j\rangle \langle j| \rho_P(t) \}, \quad (4.9)$$

$$= \langle j | \rho_P(t) | j \rangle, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$|\Psi(j, t)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} \langle j | k \rangle \langle k' | j \rangle \text{Tr} \{ \mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0) \}, \quad (4.11)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ij(k'-k)} \text{Tr} \{ \mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0) \}, \quad (4.12)$$

onde lembramos que a transformada de Fourier inversa é

$$|j\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikj} |k\rangle. \quad (4.13)$$

Agora, calculamos os momentos de ordem m da distribuição,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{j}}^m \rangle_t &= \sum_j j^m |\Psi(j, t)|^2, \\ &= \sum_j j^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ij(k'-k)} \text{Tr}\{\mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0)\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde o operador posição atua da forma $\hat{\mathbf{j}}|j\rangle = j|j\rangle$. Podemos inverter a ordem de operação da integral com o somatório na Eq. (4.14) e usar a seguinte identidade relativa à representação em série da função delta de Dirac,

$$2\pi(-i)^m \delta^{(m)}(k' - k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^m e^{-ij(k'-k)}, \quad (4.15)$$

onde $\delta^{(m)}(k' - k)$ é a derivada de ordem m da função delta de Dirac. Isto nos leva a

$$\langle \hat{\mathbf{j}}^m \rangle_t = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \int_{-\pi}^{\pi} dk' \delta^{(m)}(k' - k) \text{Tr}\{\mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0)\}, \quad (4.16)$$

ou seja, os valores esperados da posição e do quadrado da posição podem ser obtidos respectivamente através de

$$\langle \hat{\mathbf{j}} \rangle_t = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk dk' \frac{\partial \delta(k' - k)}{\partial k} \text{Tr}\{\mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0)\}, \quad (4.17)$$

e

$$\langle \hat{\mathbf{j}}^2 \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk dk' \frac{\partial^2 \delta(k' - k)}{\partial k' \partial k} \text{Tr}\{\mathcal{L}_{kk'}^t \rho_k(0)\}. \quad (4.18)$$

A primeira integração de cada uma dessas duas expressões pode ser feita por partes. Para isso, usaremos a derivada em k do operador $\mathcal{L}_{kk'}$ a partir da forma decomposta da Eq. (2.51),

$$\hat{U}_k = (e^{-ik} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + e^{ik} |\downarrow\rangle \langle \downarrow|) \hat{C}, \quad (4.19)$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial k} \hat{U}_k \Lambda \hat{U}_{k'}^\dagger = (-ie^{-ik} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + ie^{ik} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \hat{C} \Lambda \hat{U}_{k'}^\dagger \quad (4.20)$$

$$= -i (e^{-ik} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - e^{ik} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \hat{C} \Lambda \hat{U}_{k'}^\dagger \quad (4.21)$$

$$= -i (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \hat{U}_k \Lambda \hat{U}_{k'}^\dagger \quad (4.22)$$

$$= -i \hat{Z} \hat{U}_k \Lambda \hat{U}_{k'}^\dagger \quad (4.23)$$

onde empregamos a matriz $\hat{Z} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ de Pauli. De acordo com as propriedades do traço,

$$\frac{\partial}{\partial k} \text{Tr}\{\mathcal{L}_{kk'} \rho_k(0)\} = \text{Tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{L}_{kk'} \rho_k(0) \right\} \quad (4.24)$$

$$= -i \text{Tr} \left\{ \hat{Z} \mathcal{L}_{kk'} \rho_k(0) \right\}, \quad (4.25)$$

$$= -i \text{Tr} \left\{ [\mathcal{L}_{kk'} \rho_k(0)] \hat{Z} \right\}, \quad (4.26)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial k'} \text{Tr} \{ \mathcal{L}_{kk'} \rho_k(0) \}. \quad (4.27)$$

Usando a Eq. (4.27) na integração por partes de (4.17), obtemos

$$\langle \hat{\mathbf{j}} \rangle_t = - \int \frac{dk}{2\pi} \sum_{n=1}^t \text{Tr} \{ \hat{Z} \mathcal{L}_{kk}^n \rho_k(0) \}. \quad (4.28)$$

Similarmente, podemos integrar (4.18) para obter

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{j}}^2 \rangle_t &= - \int \frac{dk}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^t \sum_{n'=1}^n \text{Tr} \left[\hat{Z} \mathcal{L}_{kk}^{n-n'} \left(\hat{Z} \mathcal{L}_{kk}^{n'} \rho_k(0) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^t \sum_{n'=1}^{n-1} \text{Tr} \left[\hat{Z} \mathcal{L}_{kk}^{n-n'} \left((\mathcal{L}_{kk}^{n'} \rho_k(0)) \hat{Z} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

É possível expandir os estados $|\Phi_k(0)\rangle$ em termos dos autovetores do operador \hat{U}_k ,

$$|\Phi_k(0)\rangle = c_k^+ |\Phi_k^+\rangle + c_k^- |\Phi_k^-\rangle, \quad (4.30)$$

de tal forma que os coeficientes c_k^\pm ficam,

$$c_k^\pm = \langle \Phi_k^\pm | \Phi_k(0) \rangle. \quad (4.31)$$

Inserindo as Eqs. (4.30) e (4.31) em (4.28), obtemos o valor esperado da posição

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{j}} \rangle_t &= - \sum_{n=1}^t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \langle \Phi_k(0) | (\hat{U}_k)^n \hat{Z} (\hat{U}_k^\dagger)^n | \Phi_k(0) \rangle, \\ &= -t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ |c_k^+|^2 \langle \Phi_k^+ | \hat{Z} | \Phi_k^+ \rangle + |c_k^-|^2 \langle \Phi_k^- | \hat{Z} | \Phi_k^- \rangle \right\} + \text{termos oscilatórios},\end{aligned}\quad (4.32)$$

e da mesma forma, através de (4.29), o valor esperado do quadrado da posição,

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{j}}^2 \rangle_t &= t^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ |c_k^+|^2 \langle \Phi_k^+ | \hat{Z} | \Phi_k^+ \rangle^2 + |c_k^-|^2 \langle \Phi_k^- | \hat{Z} | \Phi_k^- \rangle^2 \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(t) + \text{termos oscilatórios}.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Aqui, os termos oscilatórios vão a zero para uma caminhada de muitos passos.

4.2 Moeda genérica justa

Agora, tome uma moeda genérica justa ($q = 1/2$), da forma (2.6), mas desta vez em termos da soma $\delta = (\theta + \phi)/2$ e da diferença $\delta' = (\theta - \phi)/2$,

$$\hat{C}^{(\text{gen})} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\delta} & e^{i\delta'} \\ e^{-i\delta'} & -e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

onde uma fase global $e^{i\delta}$ foi suprimida. Pela Eq. (2.50), podemos facilmente reescrever a Eq. (4.34) no espaço de momento como

$$\hat{U}_k^{(\text{gen})} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\delta+k)} & e^{i(\delta'-k)} \\ e^{-i(\delta'+k)} & -e^{i(\delta+k)} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

De modo análogo ao feito no Cap. 2, calculamos os autovetores e autovalores de (4.35) assim como faz Tregenna et. al. [59],

$$|\Phi_k^\pm\rangle = \frac{1}{N_k^\pm} \begin{pmatrix} e^{ik} \\ e^{-i\theta} \left(\pm e^{i\delta} \left(\sqrt{1 + \cos^2(k - \delta)} \pm i \sin(k - \delta) \right) - e^{ik} \right) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\lambda_k^\pm = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta} \left(\sqrt{1 + \cos^2(k - \delta)} \pm i \sin(k - \delta) \right), \quad (4.37)$$

onde

$$(N_k^\pm)^2 = 4 \mp 2 \left(\cos(k - \delta) \sqrt{1 + \cos^2(k - \delta)} \pm \sin^2(k - \delta) \right). \quad (4.38)$$

Finalmente, após alguma álgebra, é possível calcular os valores esperados,

$$\langle \Phi_k^\pm | \hat{Z} | \Phi_k^\pm \rangle = \pm \frac{\cos(k - \delta) \left[\sqrt{1 + \cos^2(k - \delta)} \mp \cos(k - \delta) \right]}{1 + \cos(k - \delta) \left[\sqrt{1 + \cos^2(k - \delta)} \mp \cos(k - \delta) \right]}, \quad (4.39)$$

e também, a partir da Eq. (4.31), os coeficientes

$$c_k^\pm = \frac{e^{-ik}}{N_k^\pm} \left\{ \tilde{a}_k(0) - \tilde{b}_k(0) e^{i\theta} \left[1 \mp e^{i(k-\delta)} \left(\sqrt{1 + \cos^2(k - \delta)} \mp i \sin(k - \delta) \right) \right] \right\}, \quad (4.40)$$

ambos dependentes do estado inicial e das fases da moeda.

4.3 Cálculo da variância

Um estado inicial de spin genérico no espaço de momento pode ser escrito por

$$|\Phi_k(0)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(0) \\ \tilde{b}_k(0) \end{pmatrix} \equiv \tilde{f}(k) |\Psi_s(0)\rangle, \quad (4.41)$$

onde $\tilde{f}(k)$ é a amplitude do estado de spin no espaço de momento. Dessa forma, podemos obter a expressão do valor esperado $\langle \hat{\mathbf{j}} \rangle_t$ da posição inserindo o estado inicial (4.41) na Eq. (4.40) e, logo em seguida, em (4.32) junto de (4.39). Depois de desprezar os termos oscilatórios e os de ordem t , nos deparamos com a integral

$$I(\delta) = \int \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2 \left\{ \frac{\cos^2(k - \delta)}{1 + \cos^2(k - \delta)} \right\}, \quad (4.42)$$

para obter

$$\langle \hat{\mathbf{j}} \rangle_t = I(\delta) [\cos \alpha + \sin \alpha \cos(\beta + \theta)] t, \quad (4.43)$$

para $t \gg 1$. Aqui, já fica evidente que o valor esperado da posição depende das condições iniciais de spin através de α e β , uma vez que podemos direcionar a tendência dos picos da distribuição balística escolhendo um estado inicial que se encontra mais ao polo norte da esfera de Bloch, ou mais ao sul (polo sul = spin *down* e norte = spin *up*). O mesmo

não ocorre com o valor esperado do quadrado da posição,

$$\langle \hat{\mathbf{j}}^2 \rangle_t = I(\delta)t^2. \quad (4.44)$$

Finalmente, a expressão da variância é obtida depois que calculamos a integral $I(\delta)$ apropriada e inserimos (4.43) e (4.44) em (4.2),

$$\sigma^2(t) = I(\delta) \{1 - I(\delta) [\cos \alpha + \sin \alpha \cos(\beta + \theta)]^2\} t^2. \quad (4.45)$$

4.4 Estados iniciais

Vamos agora implementar os estados iniciais locais e deslocalizados na expressão da variância obtida previamente. Já sabemos, do capítulo anterior, que os estados iniciais de spin no espaço de momento dos casos local e Gaussiano são, respectivamente,

$$|\Phi_{k,L}(0)\rangle = |\Psi_s(0)\rangle, \quad (4.46)$$

$$|\Phi_{k,G}(0)\rangle = (8\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}} e^{-k^2\sigma_0^2} |\Psi_s(0)\rangle. \quad (4.47)$$

Por motivos que ficarão mais claros adiante, implementaremos também o estado uniforme,

$$|\Psi_U(0)\rangle = \sum_j |\Psi_s(0)\rangle \otimes u|0\rangle, \quad (4.48)$$

onde u é a constante de normalização tal que $\sum_j u^2 = 1$. Podemos conceber um estado uniforme como uma situação hipotética limite onde o estado se encontra altamente deslocalizado. É imediato que a transformada de Fourier de um estado uniforme seja dada por uma delta de Dirac, de maneira que, no espaço de momento,

$$|\Phi_{k,U}(0)\rangle = \sqrt{2\pi\delta(k)} |\Psi_s(0)\rangle. \quad (4.49)$$

4.4.1 Estado local

Para um estado local, a amplitude de spin no espaço de momento é simplesmente $\tilde{f}_L(k) = 1$, logo a integral em (4.42) resulta na constante

$$I_L = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.50)$$

Assim, inserindo a Eq. (4.50) em (4.45), alcançamos a expressão para a variância,

$$\sigma_L^2(t) = \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 [\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta + \theta)]^2 \right\} t^2. \quad (4.51)$$

para uma caminhada que parte de um estado local com spin arbitrário. Podemos obter a média da variância através da integral sobre todos os estados iniciais de spin. Veremos que, para um estado inicial local, a dispersão média independe da moeda.

Proposição 6. *Seja $\sigma_L^2(t)$ a variância de uma caminhada quântica unidimensional que parte de um estado local com moeda fixa. Então a média da variância sobre todos os estados iniciais de spin independe da moeda empregada na caminhada.*

Demonstração. Uma vez que tenhamos atingido a Eq. (4.51), basta calcular a integral dupla

$$\langle \sigma_L^2 \rangle(t) = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\beta}{2\pi} \sigma_L^2(t) = \frac{2\sqrt{2}-1}{8} t \sim 0.228t. \quad (4.52)$$

Ou seja, a dependência em θ some durante a integração sobre todos os valores de β . \square

4.4.2 Estado Gaussiano

Para um estado inicial Gaussiano, temos

$$\tilde{f}_G(k) = (8\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}} e^{-k^2\sigma_0^2}. \quad (4.53)$$

Logo, a integral a ser resolvida é

$$I_G(\delta, \sigma_0) = \int_{-\pi}^\pi \frac{dk}{2\pi} \left\{ 2\sigma_0 \sqrt{2\pi} e^{-2k^2\sigma_0^2} \frac{\cos^2(k - \delta)}{1 + \cos^2(k - \delta)} \right\}. \quad (4.54)$$

Em virtude da exponencial, a integral em (4.54) não possui solução analítica. Uma solução aproximada, obtida através de integração numérica, é

$$I_G(\delta, \sigma_0) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\mu \cos^4 \delta + \nu \cos^2 \delta + \xi)}{1 + \cos^2 \delta}. \quad (4.55)$$

Aqui, μ , ν e ξ são parâmetros dependentes da dispersão inicial do estado que podem ser ajustados por uma expressão da forma $\sum_{n=0}^4 a_n / \sigma_0^n$, onde os parâmetros a_n são apresentados na Tabela 4.1.

	μ	ν	ξ
a_0	0.0022 ± 0.0004	-0.0020 ± 0.0005	0.0002 ± 0.0001
a_1	-0.0492 ± 0.0077	1.2995 ± 0.0085	-0.0053 ± 0.0020
a_2	0.2938 ± 0.0361	-0.2668 ± 0.0400	0.0296 ± 0.0095
a_3	0.5030 ± 0.0596	-1.0016 ± 0.0661	0.2548 ± 0.0157
a_4	-0.4612 ± 0.0312	0.5991 ± 0.0346	-0.1049 ± 0.0082

Tabela 4.1: Parâmetros de ajuste e respectivas margens de erro para μ , ν e ξ .

Observação. *O modelo proposto para solução da integral (4.54), expresso pela Eq. (4.55), diverge para $\sigma_0 \rightarrow +\infty$, no entanto, nesse limite podemos aproximar uma Gaussiana por um estado uniforme, como será mostrado a seguir.*

Dessa forma, a dispersão de longa duração do caminhante, cujo estado inicial está distribuído segundo uma Gaussiana, dependerá novamente de todos os parâmetros iniciais—a citar, α , β , θ , ϕ e σ_0)—através da expressão

$$\sigma_G^2(t) = \{I_G(\delta, \sigma_0) - I_G^2(\delta, \sigma_0) [\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta + \theta)]^2\} t^2. \quad (4.56)$$

No entanto, ao contrário do que ocorre com o estado local, a variância média do caso Gaussiano depende somente das condições iniciais de spin, um resultado expresso pela proposição a seguir.

Proposição 7. *Seja $\sigma_G^2(t)$ a variância de uma caminhada quântica em uma dimensão que parte de um estado Gaussiano com moeda fixa. Então a média da variância sobre todos os estados iniciais de spin depende somente da soma $\theta + \phi$ das fases da moeda empregada na caminhada e da dispersão inicial do estado.*

Demonstração. Analogamente à proposição anterior, calculamos a integral dupla sobre

todos os valores de α e β das amplitudes de spin na Eq. (4.56),

$$\langle \sigma_G^2 \rangle(t) = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\beta}{2\pi} \sigma_G^2(t) = \left(1 - \frac{3}{4} I_G(\delta, \sigma_0)\right) I_G(\delta, \sigma_0) t^2 + \mathcal{O}(t), \quad (4.57)$$

onde a função $I_G(\delta, \sigma_0)$ é dada pela Eq. (4.55). \square

Esta última proposição nos fornece o principal resultado deste capítulo. Observamos que, ao contrário do caso local, a soma das fases da moeda em $\delta = (\theta + \phi)/2$ permanece após o cálculo da média sobre todos os estados de spin na expressão (4.56) do caso Gaussiano. Este fato reafirma que CQs que partem de estados deslocalizados possuem comportamentos distintos do caso local também para a dispersão, assim como para o emaranhamento como mostramos no capítulo anterior.

4.4.3 Estado uniforme

De forma análoga aos passos anteriores, prosseguiremos com o estado uniforme descrito pela Eq. (4.49). Dessa vez, encontramos uma integral cuja solução é trivialmente calculada,

$$I_U(\delta) = \int_{-\pi}^\pi \frac{dk}{2\pi} \left\{ 2\pi\delta(k) \frac{\cos^2(k - \delta)}{1 + \cos^2(k - \delta)} \right\} = \frac{\cos^2(\delta)}{1 + \cos^2(\delta)}, \quad (4.58)$$

resultando na expressão para dispersão em termos da variância como sendo

$$\sigma_U^2(t) = \{I_U(\delta) - I_U^2(\delta) [\cos \alpha + \sin \alpha \cos(\beta + \theta)]^2\} t^2. \quad (4.59)$$

Observe que tal dispersão é sempre zero para $\delta = \pi/2$, como no caso de uma moeda Fourier. A variância média é dada, então, por

$$\langle \sigma_U^2 \rangle(t) = \left(1 - \frac{3}{4} I_U(\delta)\right) I_U(\delta) t^2. \quad (4.60)$$

4.5 Velocidade de dispersão

Para comparar os resultados dos casos local e uniforme, vamos definir a velocidade de dispersão de uma CQ por meio da derivada temporal do desvio padrão,

$$v_\sigma = \frac{d}{dt} \sigma(t). \quad (4.61)$$

Na Fig. 4.1, apresentamos a velocidade de dispersão de caminhadas Hadamard e Fourier que partem de estados locais e uniformes, segundo as Eqs. (4.51) e (4.59), em função dos ângulos do estado inicial de spin. Como esperado, segundo a Eq. (4.51), v_σ de

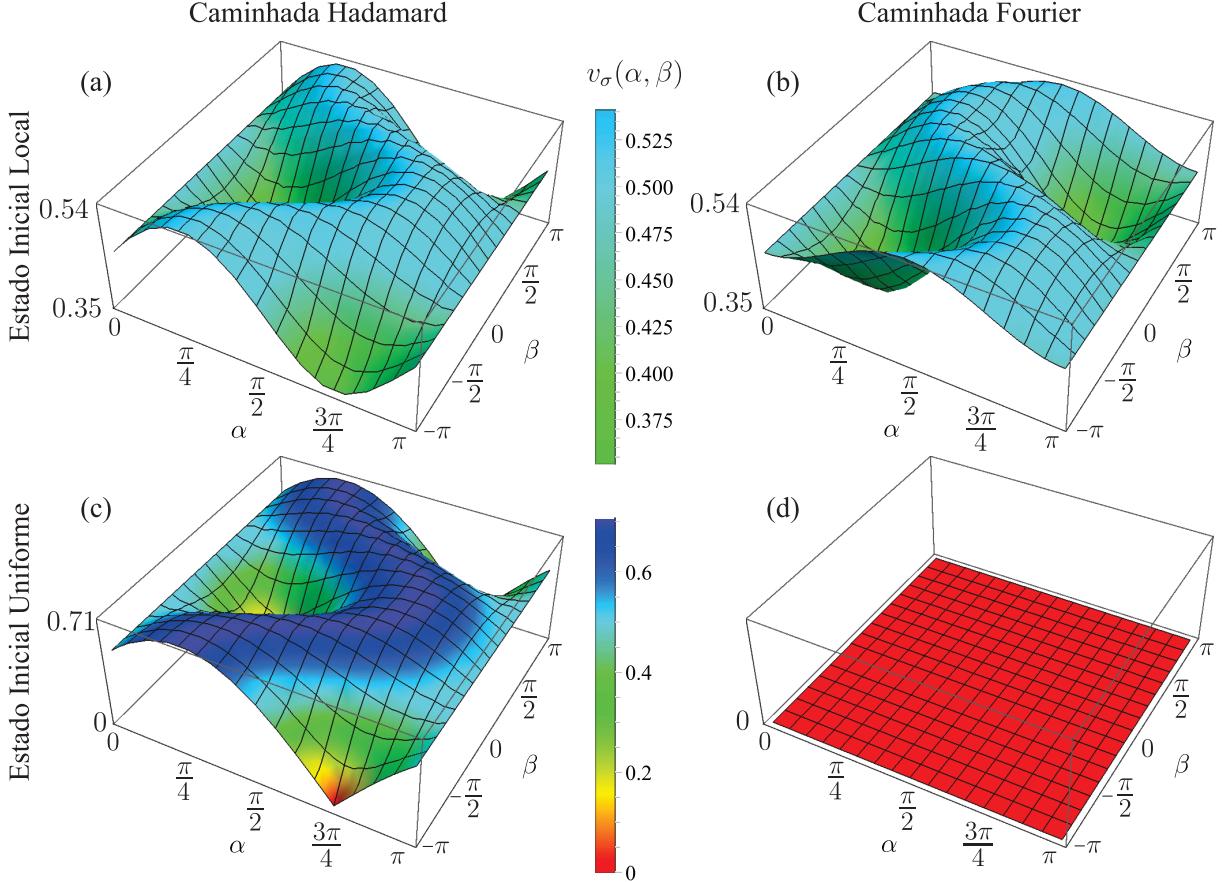


Figura 4.1: Velocidade de dispersão v_σ para caminhadas Hadamard ($\theta = \phi = 0$) e Fourier ($\theta = \phi = \pi/2$) que partem de estados locais (a-b) e uniformes (c-d), como funções de α e β . Todas as superfícies seguem a mesma escala de cores. Regiões roxas apresentam os maiores valores (~ 0.71), assim como as vermelhas apresentam valores nulos.

caminhadas Hadamard e Fourier que partem de estados locais diferem apenas por uma translação em β . Esta constatação reafirma o fato observado por [59, 80] de que não há perda de generalidade ao se escolher uma moeda em uma CQ, já que basta alterar o estado de spin para se obter o comportamento desejado. No entanto, quando se trata de estados deslocalizados, há de fato, perda de generalidade ao se escolher uma moeda quântica. Os quadros (c-d) da Fig. 4.1 mostram que a velocidade de dispersão de caminhadas Hadamard que partem de estados deslocalizados possuem uma variação maior de valores, comparado ao caso local, enquanto que caminhadas Fourier são, particularmente, não-dispersivas.

4.6 Dispersão média: abordagem numérica

No intuito de apresentar características gerais, fazer uma comparação justa do estado local com o estado Gaussiano e confrontar o modelo analítico com as simulações numéricas, realizamos uma média sobre um grande conjunto de estados de spin, uma vez que as CQs são muito sensíveis às condições iniciais. Todas as médias apresentadas a seguir, assim como para o emaranhamento médio do capítulo anterior (Eq. (3.23)), foram feitas a partir de $N = 2016$ estados iniciais diferentes, variando-se $(\alpha, \beta)_i$ de $(0, 0)$ a $(\pi, 2\pi)$ em incrementos independentes de 0.1. Desta forma, a distribuição de probabilidade média total—spin *up* mais *down*—em cada posição j para um tempo arbitrário t é

$$\langle |\Psi(j, t)|^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{|a_i(j, t)|^2}{N} + \sum_{i=1}^N \frac{|b_i(j, t)|^2}{N}, \quad (4.62)$$

onde os termos do lado direito são a distribuição de probabilidade média de se encontrar o caminhante com spin *up* e *down*, respectivamente, e o índice i corresponde a cada estado distinto inicial de spin. Da mesma forma, a variância média pode ser calculada por

$$\langle \sigma^2 \rangle(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2(t)}{N}. \quad (4.63)$$

A Fig. 4.2 mostra as distribuições de probabilidade média sobre as posições j depois de uma caminhada Hadamard com 1000 passos partindo de estados (a) local e (b-c) Gaussianos com dispersões iniciais 1 e 10. Em todos os casos obtemos distribuições de probabilidade média total simétricas para ambos os spins em lados opostos. Entretanto, a probabilidade de se medir spin *up* (*down*) do lado direito (esquerdo) é maior. A razão entre as probabilidades médias de spin *up* e *down* para posições positivas ou negativas se mantém aproximadamente a mesma ao longo da evolução temporal e decai assintoticamente com a dispersão inicial do estado implementado. Tome, como exemplo, posições $j < 0$. Tal razão entre probabilidades médias será de aproximadamente 33% para o caso local, 21% e 18% para estados Gaussianos com $\sigma_0 = 1$ e 2, respectivamente, e 17% para $\sigma_0 = 3$ e além.

A Fig. 4.2 (d) mostra em detalhe a probabilidade média total, onde é possível ver que, na medida em que os estados Gaussianos se deslocalizam, ou seja, σ_0 aumenta, a probabilidade rapidamente cai para zero perto de $j = 0$, enquanto que, no estado local, a

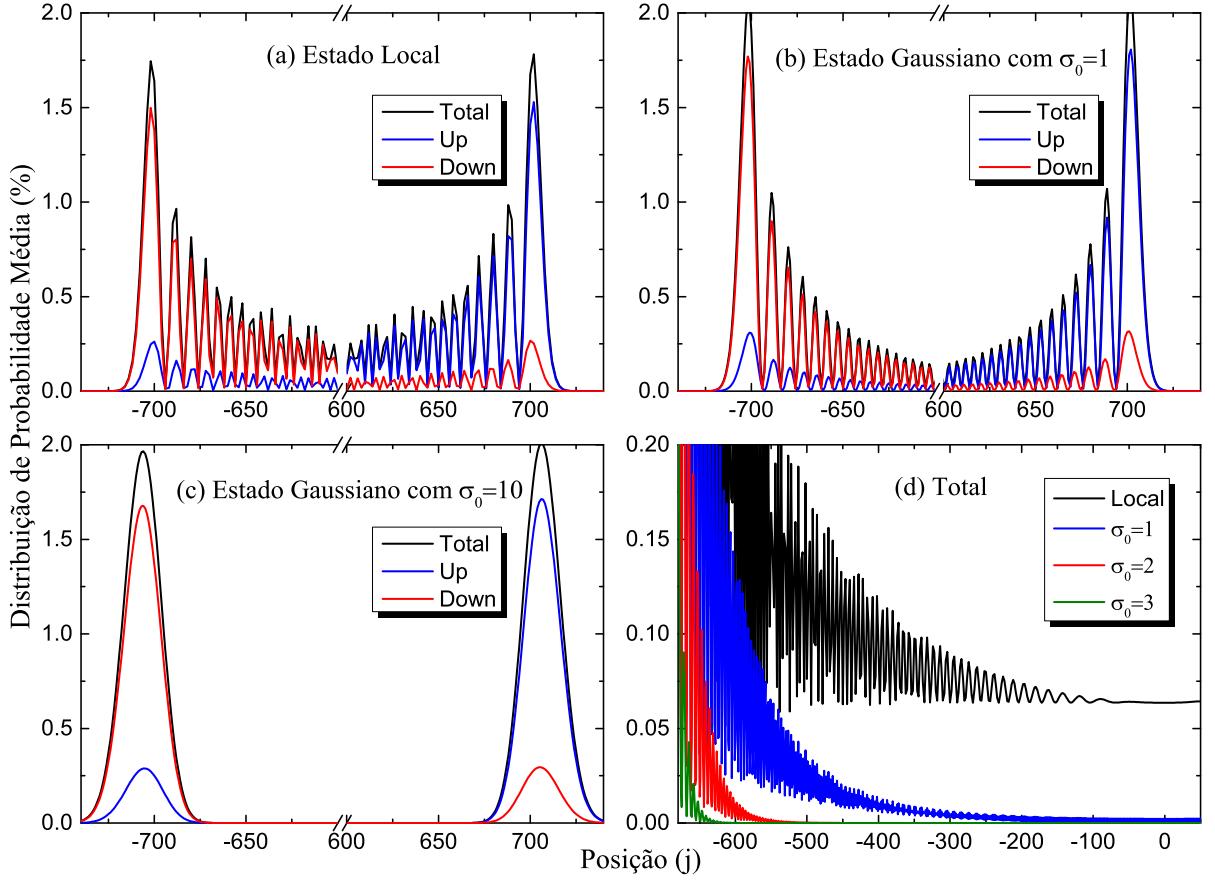


Figura 4.2: Distribuições de probabilidade média total (preto) e para cada componente de spin (vermelho e azul) após 1000 passos de caminhada Hadamard partindo de estado (a) local e Gaussianos com (b) $\sigma_0 = 1$ e (c) $\sigma_0 = 10$. Para ficar claro, a região com $j \in [-600, 600]$ foi removida por não apresentar valores significativos. (d) Detalhe das distribuições de probabilidade médias para estados local (preto) e Gaussianos com $\sigma_0 = 1$ (azul), 2 (vermelho) e 3 (verde). Para o caso local em (a) e (d), somente a probabilidade dos pontos pares foi apresentada uma vez que não há probabilidade nas posições ímpares.

probabilidade tende a uma distribuição uniforme em torno de $j = 0$.

O comportamento da dispersão média para uma CQ partindo de um estado local permanece o mesmo para todas as moedas justas ($q = 1/2$) como mostrado na Fig. 4.2 (a). Por outro lado, os estados Gaussianos possuem forte dependência com os parâmetros θ e ϕ , particularmente com a soma $\theta + \phi$ e também com a dispersão inicial. No intuito de verificar a dependência entre a dispersão inicial e a moeda quântica, nós também realizamos simulações numéricas com moedas justas indo da Hadamard com $\theta + \phi = 0$ até a Fourier com $\theta + \phi = \pi$. A Fig. 4.3 apresenta a distribuição de probabilidade total média partindo de estados Gaussianos com $\sigma_0 = 1$ (a) e 10 (b) e suas respectivas evoluções da variância média (c-d) em função do tempo. Em todos os casos, a variância média tem comportamento quadrático, *i.e.*, $\langle \sigma^2(t) \rangle = Ct^2$, como esperado para CQs. No entanto, para estados com alta dispersão inicial, a moeda Fourier governa a caminhada

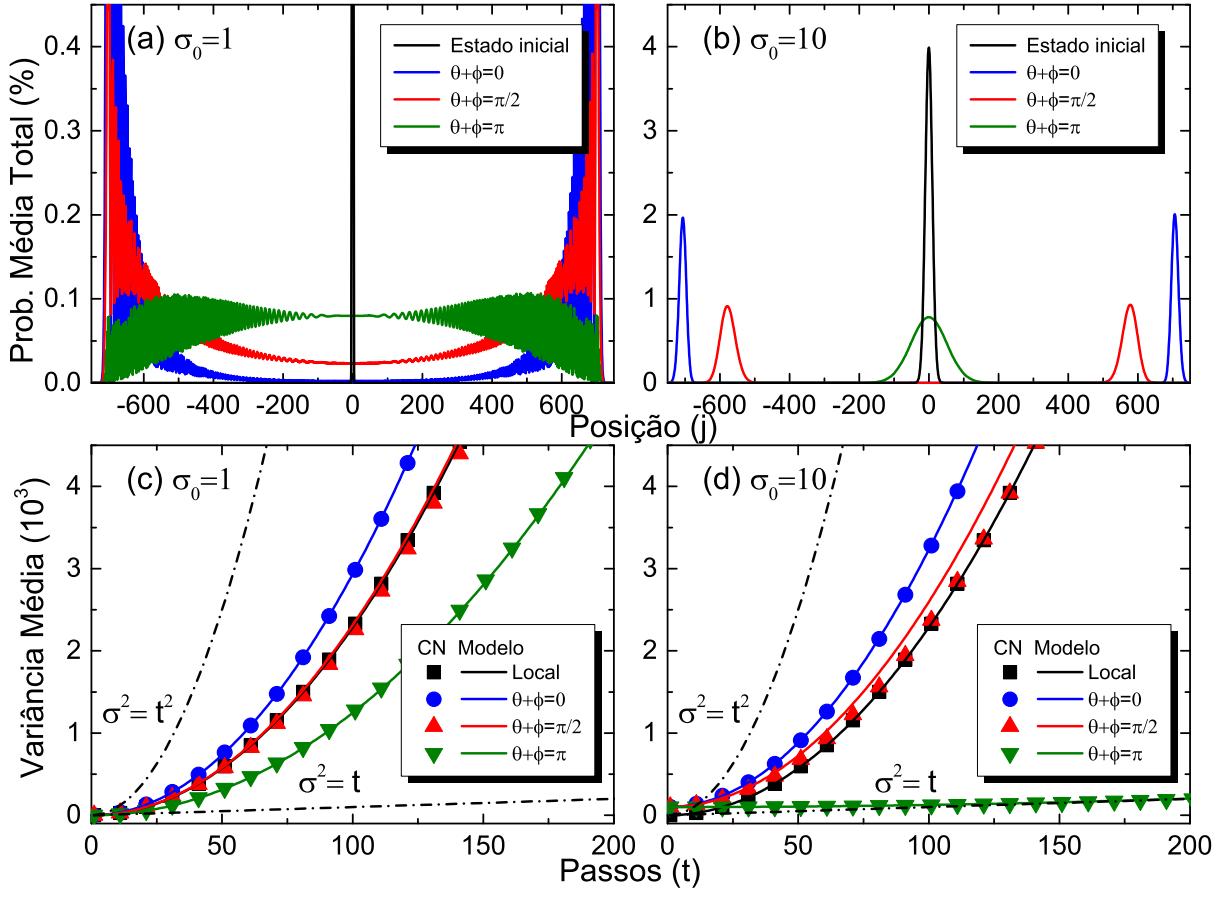


Figura 4.3: Acima: Distribuição de probabilidade média total partindo de estados Gaussianos com dispersão inicial (a) $\sigma_0 = 1$ e (b) $\sigma_0 = 10$ mostrando o estado inicial (preto) para $t = 0$, e após 1000 passos. Os estados evoluem sob a ação de moedas com parâmetros $\theta + \phi = 0$ (Hadamard em azul), $\theta + \phi = \pi/2$ (vermelho) e $\theta + \phi = \pi$ (Fourier em verde). Abaixo: variância média para estado local (preto) e para estados Gaussianos com (c) $\sigma_0 = 1$ e (d) $\sigma_0 = 10$ obtidos por simulações numéricas (símbolos) e pelos modelos dados pelas equações (4.52) e (4.57) (linha contínua) para as mesmas moedas com as cores correspondentes em (a-b). Linhas tracejadas em cinza: $\sigma^2(t) = Ct^2$ e $\sigma^2(t) = Ct$ correspondendo aos comportamentos balístico e difusivo com coeficiente de proporcionalidade $C = 1$ como referência.

de modo que a variância apresenta um comportamento quase não-dispersivo. Podemos verificar que na Fig. 4.3 (b), o pacote Gaussiano sob a ação da moeda Fourier (linha verde) ainda não assumiu uma distribuição de probabilidade com dois picos após 1000 passos de caminhada.

A Fig. 4.4 apresenta como o coeficiente C varia para diferentes valores de $\theta + \phi$. Aqui, nós comparamos um ajuste polinomial obtido a partir das simulações numéricas com os seus respectivos modelos, das Eqs. (4.52) e (4.57), para os estados locais e alguns estados Gaussianos.

Por fim, a linha tracejada na Fig. 4.4 representa o caso uniforme a partir da Eq. (4.60), ou seja, a situação limite onde o estado inicial da partícula é altamente deslocalizado. Tal figura revela que, é possível se utilizar da facilidade imposta pela matemática de um

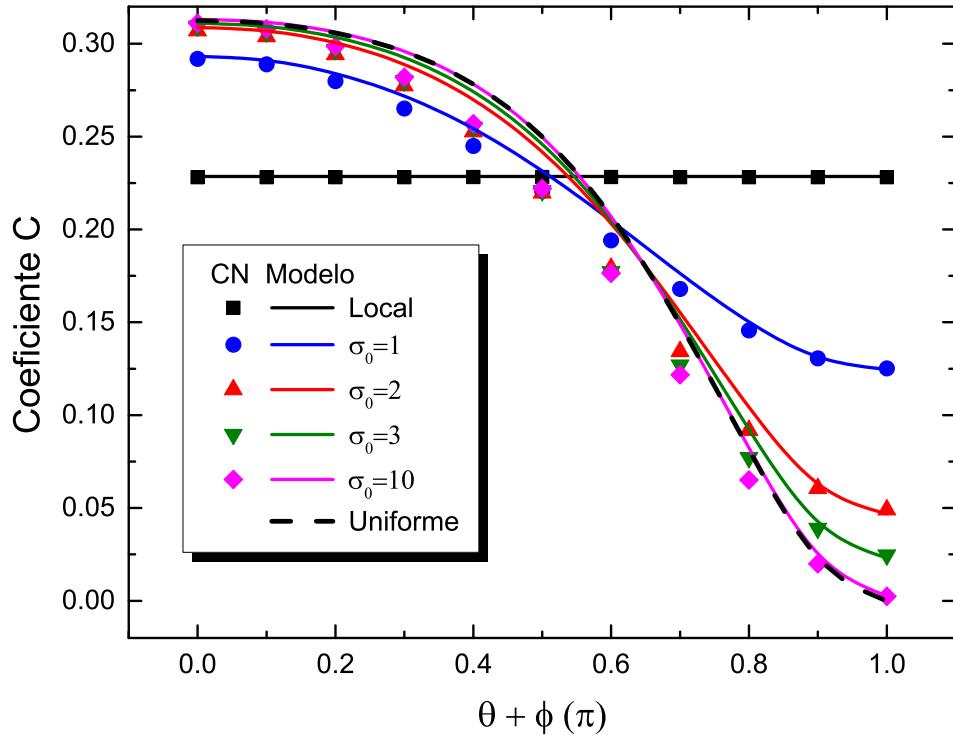


Figura 4.4: Coeficiente de proporcionalidade C para $\langle \sigma^2 \rangle = Ct^2$. Os símbolos representam os valores dos coeficientes C extraídos do ajuste polinomial $f(t) = A + Bt + Ct^2$ para $\langle \sigma^2 \rangle(t)$ obtidos por cálculos numéricos (NC) após 1000 passos de CQ para diferentes valores de $\theta + \phi$. Linhas sólidas apresentam os coeficientes de proporcionalidade obtidos pelos modelos das Eqs. (4.52) e (4.57). A linha tracejada corresponde ao caso uniforme a partir da Eq. (4.60). O padrão das cores segue: local (preto), $\sigma_0 = 1$ (azul), 2 (vermelho), 3 (verde) e 10 (rosa).

estado uniforme, já que sua transformada de Fourier é uma conveniente delta de Dirac, para se inferir sobre o comportamento de CQs que partem de estados suficientemente deslocalizados ($\sigma_0 \sim 10$).

5 Desordem em CQ a partir de estados deslocalizados

Nos capítulos anteriores, todas as CQs realizadas tinham moeda fixa no tempo. Fomos capazes de identificar os efeitos que diferentes moedas quânticas têm no emaranhamento assintótico e na dispersão de CQs que partem de estados deslocalizados. Neste último capítulo, estamos interessados nos efeitos da deslocalização em CQs com desordem, ou seja, CQs cuja moeda quântica varia no tempo de forma aleatória. Ao inserir parâmetros com dependência temporal e espacial na Eq. (2.6),

$$\hat{C}(j, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{q(j, t)} & \sqrt{1 - q(j, t)} e^{i\theta(j, t)} \\ \sqrt{1 - q(j, t)} e^{i\phi(j, t)} & -\sqrt{q(j, t)} e^{i(\theta(j, t) + \phi(j, t))} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

e permitir que a moeda se altere ordenadamente ou aleatoriamente em função do tempo e/ou posição durante a evolução do sistema, é possível observar uma grande variedade de comportamentos como, por exemplo, recuperação da dispersão difusiva (clássica) [63–65], localização de Anderson [66–69], produção de estados emaranhados [23, 24, 69] e efeito *ratchet* [70].

Vamos inicialmente apresentar as ideias básicas acerca de desordem em CQ e, logo em seguida, analisar os efeitos que a deslocalização tem na realização de emaranhamento. Já adiantamos que a deslocalização causará um retardamento na produção de estados emaranhados, e, portanto, vamos concentrar nossos esforços na busca por meios de se amenizar tal efeito.

5.1 Introdução à desordem em CQ

Se $\hat{C}(j, t)$ varia de maneira aleatória, então chamamos isso de desordem. A desordem é dita estática (DE) quando \hat{C} só depende de j , dinâmica (DD) quando depende apenas de t e flutuante (DF) quando depende de ambos os parâmetros.

Se a CQ é desordenada em todos os passos t , chamamos isso de desordem dinâmica forte (DDF). Por outro lado, se a maior parte da caminhada é composta por uma única

moeda padrão, como Hadamard, por exemplo, e em poucos passos de tempo, escolhidos aleatoriamente, inserimos moedas quânticas diferentes, chamamos isso de desordem dinâmica escassa (DDE)*. A nomenclatura para denominação de outras combinações de desordem segue a mesma lógica, mas, em resumo, temos que: (i) desordem estática leva à localização de Anderson do estado; (ii) desordem dinâmica é suficiente para levar qualquer estado inicial a um estado completamente emaranhado no limite assintótico; e (iii) desordem flutuante também leva, ainda que de forma menos eficiente levando mais passos de tempo, a estados maximamente emaranhados já que, por definição, também é dinamicamente desordenada [24]. Uma vez que decidimos nos concentrar na produção de emaranhamento, a desordem dinâmica será nosso foco de estudo, o que implica em suprimir a dependência em j da Eq. (5.1).

A partir das ferramentas matemáticas expostas no Cap. 2, é possível aplicar a desordem em CQs que partem de estados iniciais deslocalizados. Uma vez que não existem diferenças qualitativas na evolução do sistema para estados iniciais Gaussianos e retangulares, como mostram as Figs. 3.2 e 3.4, optamos por prosseguir nosso estudo apenas com o caso Gaussiano. Já que, no âmbito de desordem, a matriz do operador de evolução temporal é aleatória, torna-se complicado usar o ferramental da análise de Fourier. Sendo assim, os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos apenas por implementação de simulações numéricas iterativas de CQs no espaço de posições, onde os cálculos de emaranhamento médio e distribuição de probabilidade média foram realizados conforme os capítulos anteriores seguindo as Eqs. (3.23) e (4.62), respectivamente.

A CQ com DDF é dada por uma moeda quântica $C(t)$ com $q(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ igual para todas as posições, porém $C(t)$ varia aleatoriamente para cada passo de duas maneiras distintas. Na primeira forma, a saber, DDF_2 , $C(t)$ é escolhida aleatoriamente entre as moedas Hadamard e Fourier, portanto $q(t)$ é fixo e igual a $1/2$, e $\theta = \varphi = (\pi r_N)/2$, onde o número inteiro aleatório r_N é escolhido 0 ou 1 com igual probabilidade. A segunda forma, DDF_∞ , $C(t)$ pode ser qualquer moeda do espaço $SU(2)$, portanto $q(t) = r_q$, $\theta(t) = 2\pi r_\theta$ e $\varphi(t) = 2\pi r_\varphi$, de modo que os números reais aleatórios r_q , r_θ e r_φ sejam escolhidos independentemente a partir de uma distribuição uniforme no intervalo entre 0 e 1.

O primeiro efeito que a DDF causa em uma CQ é a dispersão difusiva, $\sigma \propto \sqrt{t}$, como em uma caminhada aleatória clássica. A Fig. 5.1 apresenta, na média, como um

*Decidimos substituir o termo original “fraca”—de *weak*—por “escassa”, já que DDF já se refere ao caso forte.

estado Gaussiano evolui no tempo sob a ação de uma moeda Hadamard (b-e) e sob a ação de DDF_2 (g-j). Como esperado, uma caminhada que evolui segundo uma moeda fixa Hadamard apresenta comportamento balístico que evolui para uma distribuição de probabilidade com dois picos. Sob o efeito de DDF_2 , o pacote Gaussiano se mantém na mesma posição e se dispersa classicamente.

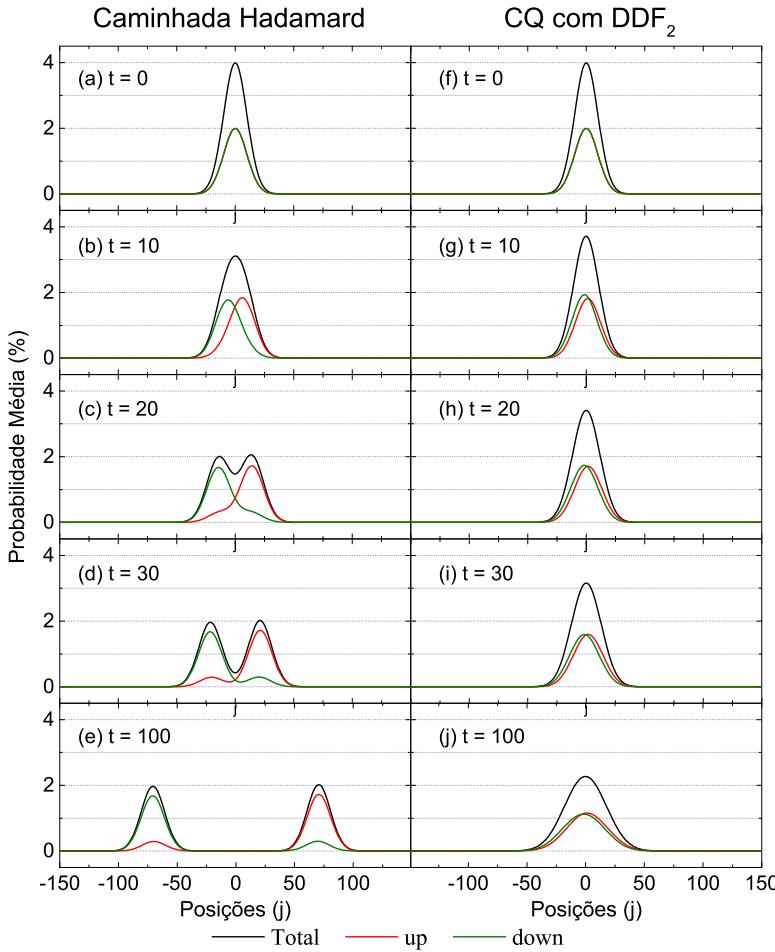


Figura 5.1: Distribuição de probabilidade média total ($|\Psi(j, t)|^2$) (preto) e das amplitudes de spin ($|a(j, t)|^2$) (vermelho) e ($|b(j, t)|^2$) (verde), do estado inicial Gaussiano com $\sigma_0 = 10$ (a) e (f), e durante a evolução temporal com moeda fixa Hadamard nos passos $t = 10, 20, 30$ e 100 (b-e), e com DDF_2 (g-j). A média foi feita sobre $N = 2016$ estados iniciais diferentes.

No entanto, apesar de o estado se propagar classicamente em uma dimensão quando sob efeito de desordem dinâmica, a coerência quântica é mantida, uma vez que a evolução contínua sendo unitária. Em outras palavras, desordem não é o mesmo que descoerência, *i.e.*, perda de informação. De fato, CQs com descoerência também tem dispersão clásica [16], mas perdem emaranhamento assintoticamente conforme a taxa de descoerência aumenta [82], o que não é o caso com desordem. A Fig. 5.2 compara a evolução do emaranhamento médio entre CQs feitas com moeda fixa Hadamard (a) e moedas aleatórias (b), partindo de estados iniciais locais e Gaussianos. A desordem dinâmica não apenas mantém a coerência, como também reforça o emaranhamento independentemente do estado inicial. É válido ressaltar que a desordem dinâmica entre duas moedas com $\pi/2$

de diferença de fase—Hadamard e Fourier—é mais eficiente do que a desordem “infinita” que explora todo o espaço $SU(2)$, fato observado por [23] e explorado posteriormente por [69]. Aqui, nos referimos à eficiência na produção de emaranhamento, como a capacidade de atingir valores maiores com menos passos de tempo.

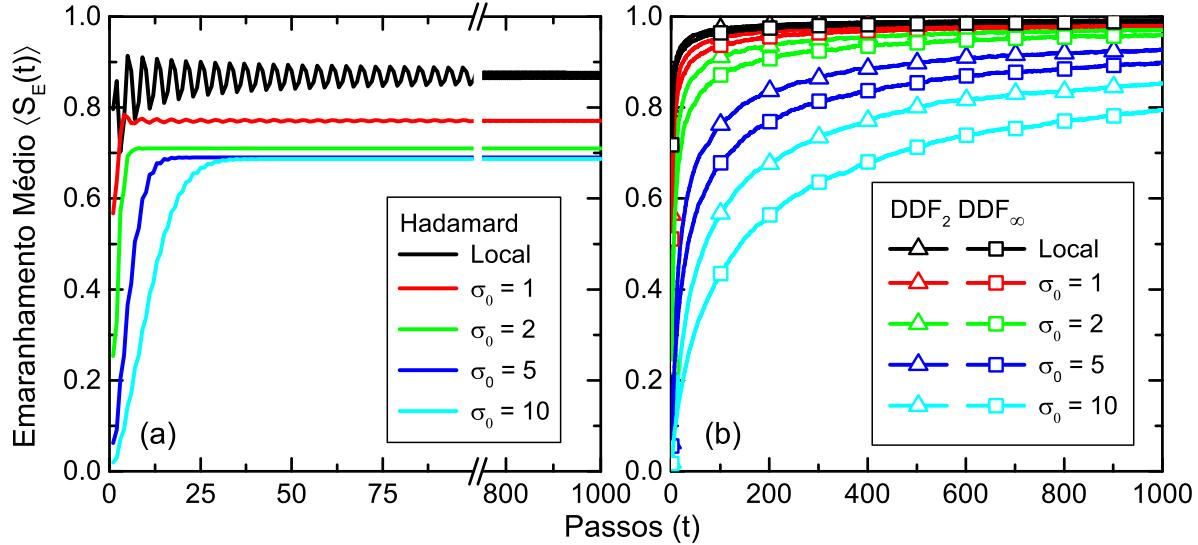


Figura 5.2: Emaranhamento médio ao longo do tempo para CQs com moeda fixa Hadamard (a) e com desordem (b) do tipo DDF_2 (triângulo) e DDF_∞ (quadrado), que partem de estados iniciais locais (preto) e Gaussianos (colorido).

Neste estágio, convém citar o teorema demonstrado no trabalho de Vieira et al. [23, 71], que fornece uma condição suficiente para a produção de estados totalmente emaranhados através da desordem.

Teorema 1. *Se a moeda $\hat{C}(t)$ que governa uma caminhada quântica unidimensional é um operador aleatório pertencente ao $SU(2)$ e o estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ é qualquer, então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_E(t) = \overline{S_E} = 1. \quad (5.2)$$

Perceba que é suficiente que a desordem seja no mínimo dinâmica—já que \hat{C} depende de, ao menos, t —para que o emaranhamento no limite assintótico seja máximo. A desordem estática, como citamos anteriormente, não consegue produzir máximo emaranhamento, mas leva o estado a se concentrar na origem numa localização de Anderson. A Fig. 5.2 (b) apenas reafirma que o Teorema 1 é válido para estados deslocalizados independentemente do estado inicial.

5.2 Eficiência na produção de emaranhamento

De fato, a desordem dinâmica das moedas em uma CQ leva os graus de liberdade do caminhante a se emaranharem, não importando o estado inicial de spin ou a deslocalização inicial. No entanto, quanto mais deslocalizado é o estado, mais lenta é a produção de emaranhamento, vide a Fig. 5.2 (b), onde o valor de $\langle S_E(t = 1000) \rangle$ cai assintoticamente conforme σ_0 cresce. Torna-se interessante, então, a procura de cenários de desordem dinâmica que sejam mais eficientes na produção de emaranhamento do que DDF. As seções a seguir tratam desse problema.

5.2.1 Ordem e desordem

Nossa busca por um cenário de desordem dinâmica mais eficiente para a produção de estados emaranhados parte do resultado a seguir: a mudança abrupta de desordem para ordem causa um salto na curva de emaranhamento médio ao longo do tempo.

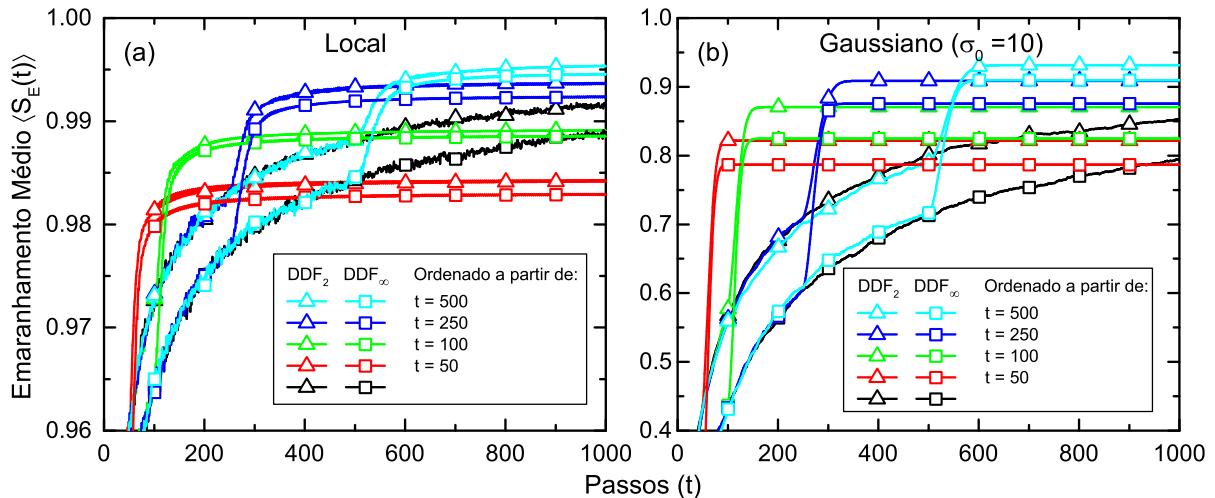


Figura 5.3: Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ para CQs que partem de estado (a) local e (b) Gaussiano com $\sigma_0 = 10$, com DDF_2 (triângulo) e DDF_∞ (quadrado) e moeda Hadamard fixa a partir do passo $t = 500$ (ciano), 250 (azul), 100 (verde) e 50 (vermelho). CQs com puro DDF (linha preta) para comparação.

A Fig. 5.3 apresenta as curvas de evolução de emaranhamento médio de CQs que são dinamicamente desordenadas até determinado passo de tempo, e, depois disso, seguem ordenadamente com moeda fixa Hadamard, para os casos local (a) e Gaussiano (b). No passo onde ocorre a mudança, podemos observar um salto (*kink*) na produção do emaranhamento, seguido por um limite assintótico abaixo do valor máximo $\overline{S_E} = 1$. A diferença entre o emaranhamento médio depois e antes do salto diminui assintoticamente ao longo

do tempo, assim como o tempo necessário para atingir o emaranhamento de muitos passos é maior quanto mais tarde for o salto.

Se, no regime ordenado, o emaranhamento fica fadado a atingir um valor constante abaixo do máximo, podemos supor que o retorno da desordem retomaria a produção de emaranhamento. Mais do que isso, podemos nos perguntar qual sequência de intervalos de desordem e ordem ao longo do tempo seria mais eficiente na produção de estados maximamente emaranhados. A próxima seção aborda esta ideia.

5.2.2 Alternando desordem e ordem

O resultado da seção anterior sugere uma possível rota alternativa para a obtenção de altas taxas de emaranhamento através da inserção de intervalos de passos ordenados em uma caminhada com DDF.

Vamos considerar uma CQ que tem sua evolução dada inicialmente por DDF por um intervalo de tempo fixo de Δt passos, seguido por mais Δt passos de moeda fixa Hadamard, alternando entre desordem e ordem (ADO) periodicamente. Dessa forma, ADO_2 em CQ com $\Delta t = 10$, por exemplo, é uma CQ que alterna entre DDF_2 e caminhada Hadamard a cada 10 passos. Analogamente, temos também ADO_∞ .

Nas simulações numéricas a seguir que exploram tal dinâmica, optamos por escolher todos os valores de Δt de forma que a caminhada inteira tenha sempre o mesmo número de passos ordenados e desordenados. Para fazer uma comparação entre a eficiência de ADO e DDF em CQs, definimos o valor η de aumento relativo do emaranhamento médio no passo $t = 1000$,

$$\eta = \frac{\langle S_E(1000) \rangle_{\text{ADO}}}{\langle S_E(1000) \rangle_{\text{DDF}}} - 1. \quad (5.3)$$

A Fig. 5.4 apresenta o emaranhamento médio de ADO em CQ para $\Delta t = 10$ e 100 , e η para valores distintos de Δt partindo de estados (a-b) local e (c-d) Gaussiano ($\sigma_0 = 10$). Para todos os casos destacados na Fig. 5.4, fica claro que ADO em CQ supera a DDF ao longo de toda a evolução. É interessante notar que para todos os casos de ADO em CQ que partem de estados deslocalizados, a melhora na produção de emaranhamento é muito superior do que para estados iniciais locais. Por um lado, ADO_2 supera ADO_∞ assim como DDF_2 supera DDF_∞ . Por outro lado, se nós comparamos a eficiência de emaranhamento de cada ADO em CQ com a sua respectiva DDF, como mostrado na Fig.

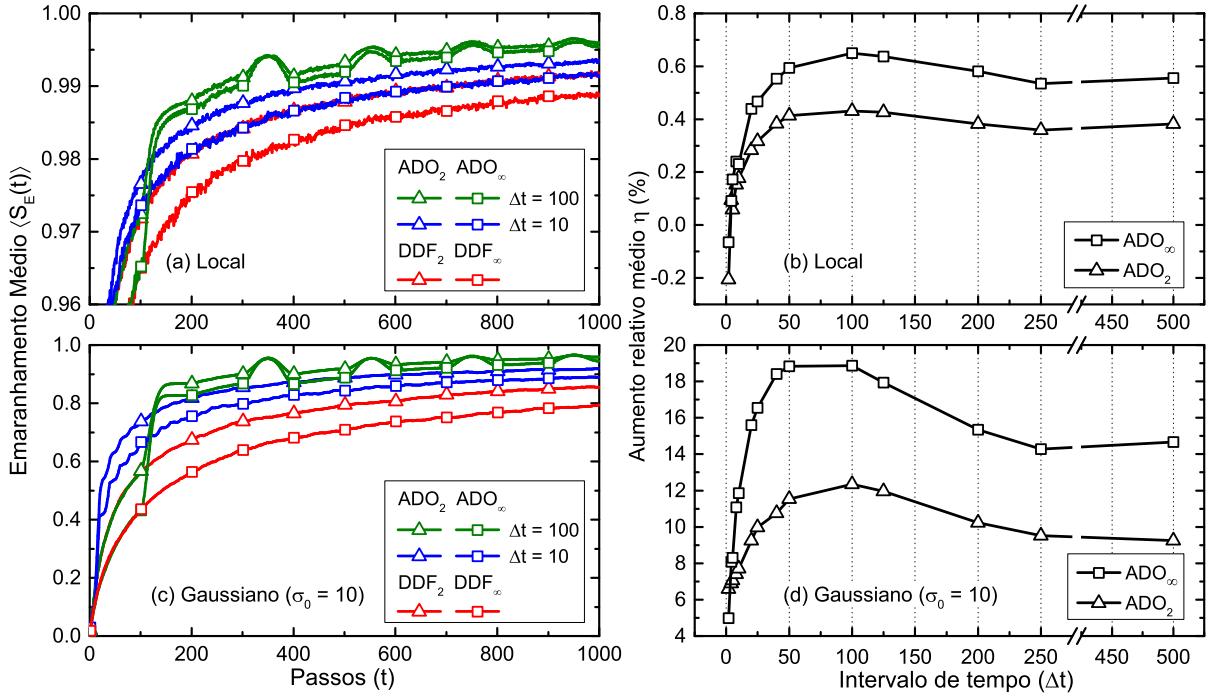


Figura 5.4: Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ para 1000 passos ADO_2 (triângulo) e ADO_∞ (quadrado) em CQ para $\Delta t = 100$ (verde) e $\Delta t = 10$ (azul) partindo de estados (a) locais e (b) Gaussianos com $\sigma_0 = 10$. CQs com DDF para comparação (linhas vermelhas). Aumento relativo do emaranhamento médio $\eta(\%)$ calculado para $t = 1000$ de ADO_2 e ADO_∞ em CQs com diferentes valores de $\Delta t \in [1, 500]$ partindo de estados (c) locais e (d) Gaussianos ($\sigma_0 = 10$).

5.4 (b) e (d), ADO_∞ em CQ tem uma melhora relativa superior a ADO_2 .

Para ambos os casos de desordem e estados iniciais, o melhor aumento relativo para ADO_2 (ADO_∞) em CQ é atingido para $\Delta t = 100$ sendo 0,65% (0,43%) começando de estado local e 18,9% (12,3%) a partir de estado Gaussiano ($\sigma_0 = 10$). A única exceção é para $\Delta t = 2$, no caso local, onde o emaranhamento tem um pequeno decréscimo de 0,21% e 0,06% para ADO_2 e ADO_∞ respectivamente.

5.2.3 Desordem escassa (ou fraca)

Já que a introdução de intervalos de tempo com passos ordenados ao longo de uma caminhada desordenada melhora a eficiência na produção de emaranhamento, faz sentido supor, então, que menos desordem implicaria em maior eficiência. Portanto, uma forma controlada e sistemática de se diminuir a quantidade de desordem em uma caminhada quântica pode ser feita através da manipulação da probabilidade de se obter uma moeda quântica aleatória em detrimento de outra fixa. Uma vez que a desordem que escolhe aleatoriamente entre as moedas Hadamard e Fourier tem uma eficiência de produção de emaranhamento melhor do que a desordem que envolve infinitas moedas do espaço $SU(2)$

inteiro [23, 69], prosseguiremos nosso estudo apenas com o primeiro tipo de desordem: DD_2 .

Vamos considerar, então, um cenário de desordem dinâmica escassa (DDE_2), onde, em cada passo de tempo de uma caminhada Hadamard, temos uma probabilidade $p(t) \in [0, 1]$ de se obter uma moeda Fourier. Se $p(t) = 0$ para todo t , então obtemos uma caminhada Hadamard novamente. Se $p(t) = 0.5$, recuperamos o cenário DDF_2 .

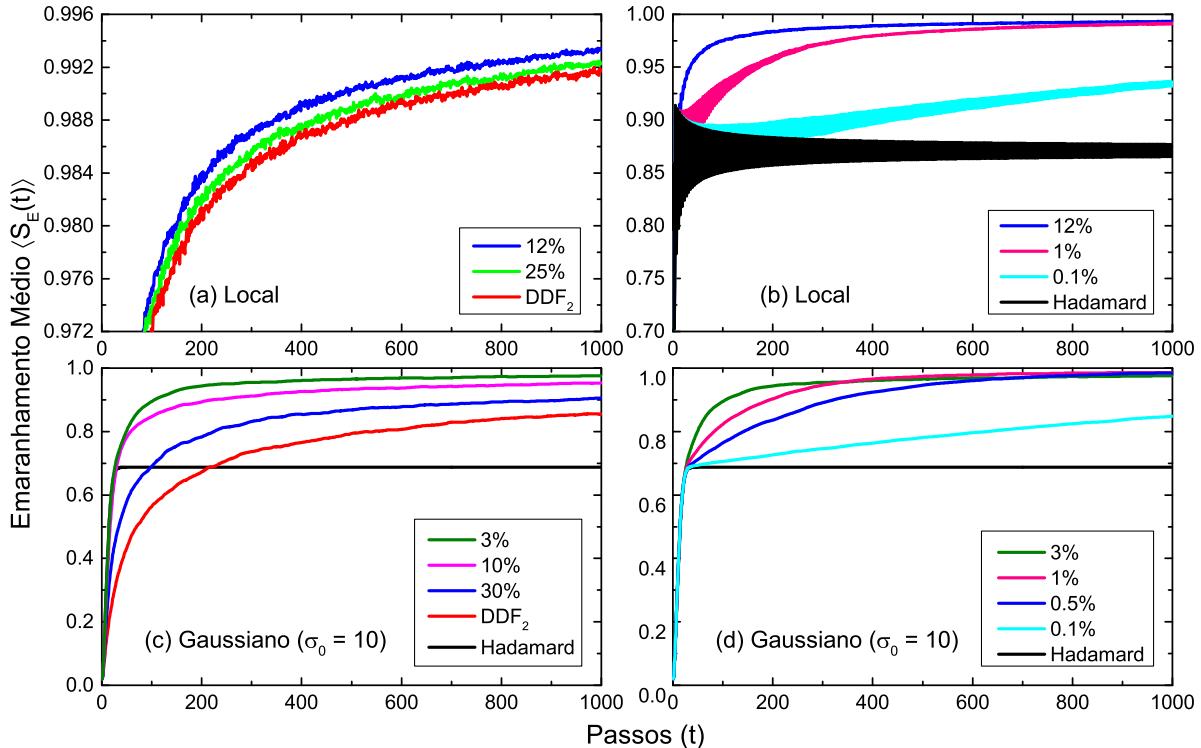


Figura 5.5: Emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ para 1000 passos de CQ com DDE_2 a partir de (a-b) estados locais e (c-d) Gaussianos ($\sigma_0 = 10$) para alguns valores de probabilidade p de se obter uma moeda Fourier em vez de Hadamard: (a) 12% (azul), 25% (verde); (b) 12% (azul), 1% (magenta), 0.1% (ciano); (c) 3% (verde), 10% (rosa), 30% (azul); (d) 3% (verde), 1% (magenta), 0.5% (azul), 0.1% (ciano). Linhas vermelhas e pretas representam CQ com DDF_2 e caminhada Hadamard, respectivamente.

A Fig. 5.5 mostra o emaranhamento médio de CQs com DDE_2 para diferentes valores de p , sendo $p = 12\%$ e $p = 3\%$ os cenários mais efetivos—presentes na figura—para produção de emaranhamento para os casos local e Gaussiano ($\sigma_0 = 10$), respectivamente, superando a eficiência de DDF_2 ao longo de toda a evolução temporal. Uma vez que, em todos os casos de CQ com DDE_2 observamos uma evolução de emaranhamento que tende ao máximo no limite assintótico, a partir da Fig. 5.5 é possível distinguir qual é o melhor valor de p já no passo $t = 100$. Portanto, na Fig. 5.6 calculamos $\langle S_E(t = 100) \rangle$ numericamente como função de p , revelando os melhores valores de p : $\sim 12\%$ para estado inicial local; e $\sim 9\%$, $\sim 6\%$ e $\sim 3\%$ para estados Gaussianos com $\sigma_0 = 2, 5$ e 10 , respecti-

vamente. Para valores de p menores que estes, as curvas de evolução de emaranhamento tendem ao comportamento característico de uma caminhada Hadamard.

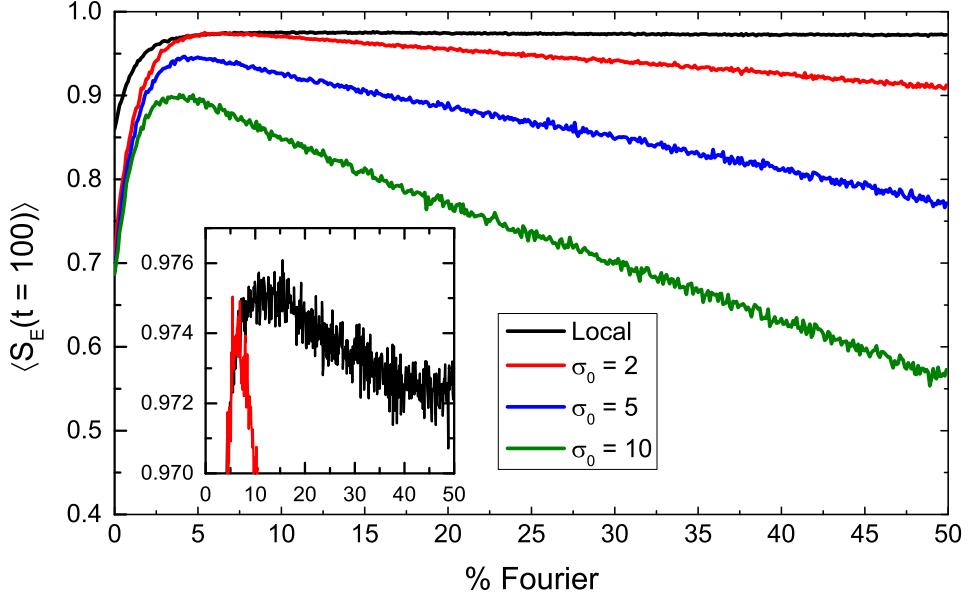


Figura 5.6: Emaranhamento médio $\langle S_E(t = 100) \rangle$ de CQs com DDE₂ para 500 valores diferentes de p entre 0 e 50%, começando de estado local (preto) e Gaussianos com $\sigma_0 = 2, 5$ e 10 (vermelho, azul e verde). No detalhe, temos a região superior ampliada.

A escolha por $t = 100$ é arbitrária, mas até certo ponto. Avaliar o emaranhamento médio em tempos maiores demandaria esforço computacional excessivo, e, em contrapartida, em tempos curtos não teríamos informação suficiente. Uma abordagem analítica seria mais complicada, mas traria resultados mais rigorosos. Conjecturamos uma medida de eficiência de produção de emaranhamento até o passo t como sendo o emaranhamento acumulado até então, cuja probabilidade crítica p_c seria encontrada por:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^t \langle S_E(t', p) \rangle dt' \right) \Big|_{p=p_c} = 0. \quad (5.4)$$

Para encerrar a seção, comparamos na Fig. 5.7 todos os melhores cenários encontrados até então. Quando a caminhada começa de um estado local, ADO₂ com $\Delta_t = 100$ ultrapassa a DDE₂ com $p = 12\%$ e DDF₂ em termos de eficiência, enquanto que, para estados Gaussianos, a DDE₂ com $p = 3\%$ se sai melhor do que ADO₂ e DDF₂. Além disso, nós adicionamos uma simulação de caminhada Hadamard com moeda Fourier a cada 33 passos, o que nos dá uma probabilidade de $\sim 3\%$ de se ter uma moeda Fourier ao longo de toda a caminhada, no intuito de enfatizar a necessidade de aleatoriedade para que tenhamos emaranhamento máximo no limite assintótico [23].

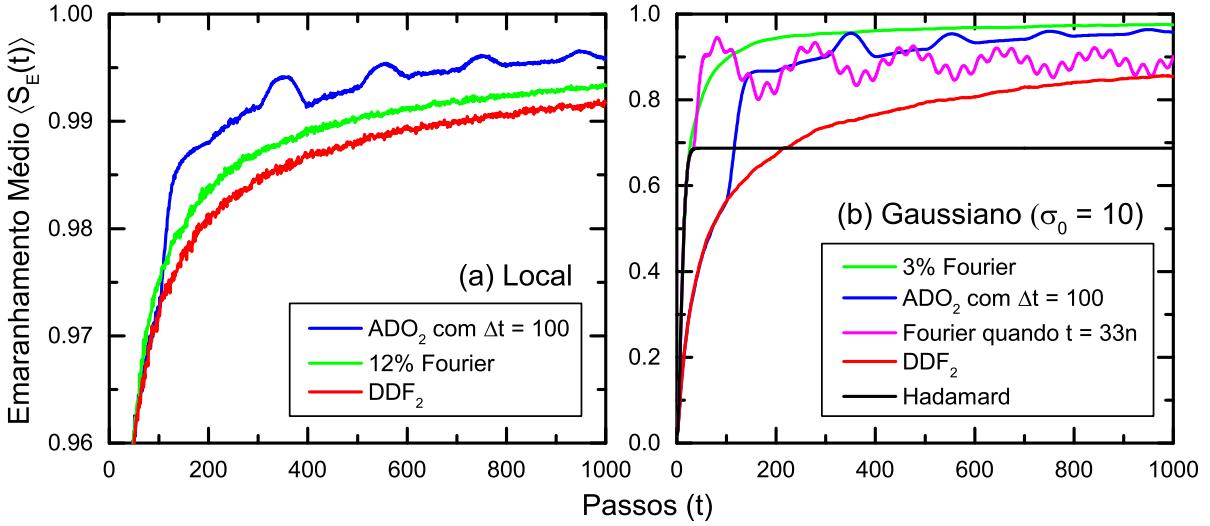


Figura 5.7: Emaranhamento médio partindo de estado (a) local e (b) Gaussiano ($\sigma_0 = 10$) para ADO_2 em CQ com $\Delta t = 100$ (azul), CQ com DDE_2 sendo (a) $p = 12\%$ e (b) 3% (verde), DDF_2 (vermelho), (b) caminhada Hadamard com moeda Fourier a cada $t = 33n$ ($n \in \mathbb{N}$) (magenta) e caminhada Hadamard pura (preto).

5.2.4 Transição entre ordem e desordem

Para encerrar o capítulo, estudaremos o comportamento transiente de ordem para desordem, e vice-versa, através de simulações de CQs com DDE_2 onde a probabilidade $p(t)$ varia no tempo.

Propomos aqui três funções suaves, definidas na Tab. 5.1, que nos permitem estudar o comportamento transiente entre uma caminhada Hadamard ($p(0) = 0$) e um cenário de DDF_2 ($p(n) = 0.5$), ou vice-versa, de maneira linear e quadrática (cônica e convexa).

$p(t)$ (% moedas Fourier)	Linear	Quadrática	Quadrática Negativa
De Hadamard para DDF_2	$\frac{t}{2n}$	$\frac{t^2}{2n^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{(t-n)^2}{2n^2}$
De DDF_2 para Hadamard	$-\frac{t-n}{2n}$	$\frac{(t-n)^2}{2n^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2n^2}$

Tabela 5.1: Expressões linear, quadrática e quadrática negativa para $p(t)$ onde $n = 1000$ passos.

A Fig. 5.8 apresenta as curvas de evolução do emaranhamento médio para todos os cenários transitentes que, como se vê, superam os das CQs com DDF_2 para o caso Gaussiano ($\sigma_0 = 10$). No entanto, nenhum deles consegue ultrapassar a eficiência proporcionada pelas CQs com DDE_2 com $p = 3\%$. Entre os três tipos de probabilidades dependentes do tempo, a quadrática supera a performance quadrática negativa e a linear ao longo da maioria dos passos de tempo. O emaranhamento médio das CQs com DDE_2 com pro-

babilidade constante calculado em $t = 1000$ é apenas 0,4% e 0,3% superior ao das CQs com DDE₂ com $p(t)$ quadrática para as transições de caminhada Hadamard para CQ com DDF₂ e de CQ com DDF₂ para caminhada Hadamard, conforme descrito na Fig. 5.8 (a) e (b), respectivamente. Finalmente, vale a pena mencionar que a transição de caminhada Hadamard para DDF₂ cria alto emaranhamento em menos passos de tempo do que o caso oposto.

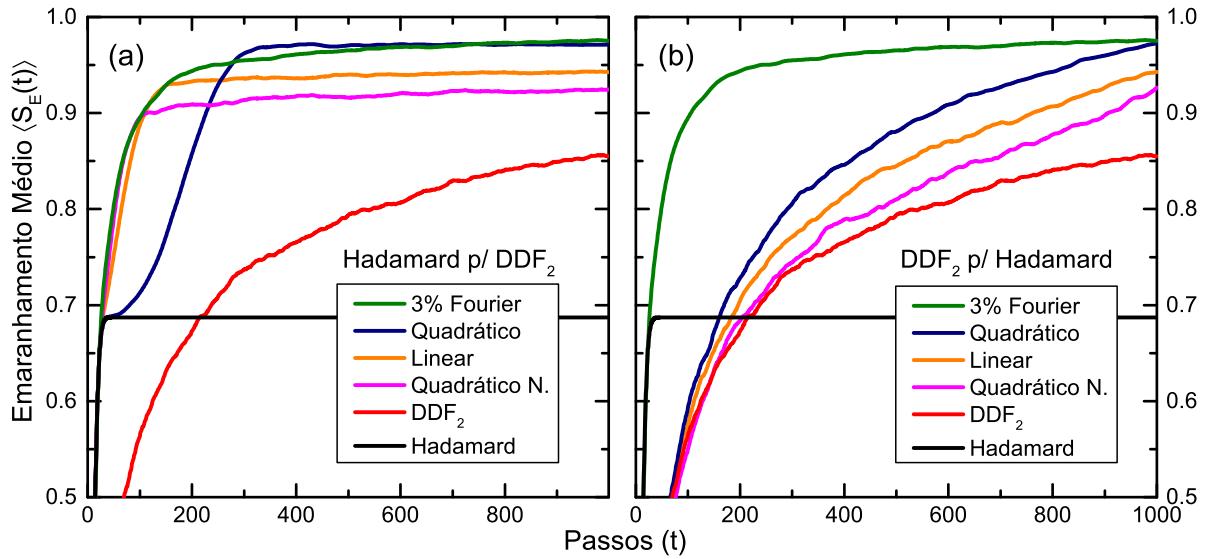


Figura 5.8: Emaranhamento médio para CQ que parte de estado Gaussiano ($\sigma_0 = 10$) com comportamento transitivo de (a) Hadamard para CQ com DDF₂ e de (b) CQ com DDF₂ para Hadamard através de CQ com DDE₂ dadas por $p(t)$: quadrática (azul), linear (laranja) e quadrática negativa (magenta) especificadas pela Tab. 5.1. CQ com DDE₂ com $p = 3\%$ (verde), DDF₂ (vermelho) e caminhada Hadamard (preto) como referência.

6 Conclusões

A proposta inicial de investigação foi identificar a influência da deslocalização de estados iniciais em caminhadas quânticas discretas numa linha com um único caminhante, no que diz respeito a três pontos: (i) emaranhamento no limite assintótico; (ii) dispersão da função densidade de probabilidade; e (iii) caminhadas quânticas com desordem. Enquanto que no caso local o emaranhamento máximo no limite assintótico é atingido apenas para duas condições iniciais de spin, no caso deslocalizado obtemos um conjunto contínuo de estados de spins que produzem emaranhamento máximo, tanto na caminhada Hadamard, quanto na Fourier. Tal conjunto contínuo pode ser identificado como um círculo máximo desenhado sobre a esfera de Bloch, onde a inclinação relativa ao eixo z depende da moeda quântica empregada. Descobrimos também que existe um valor mínimo de emaranhamento médio no limite assintótico para estados iniciais altamente deslocalizados, sendo que tal valor mínimo é dependente da moeda quântica. Conjecturamos que estas características sejam válidas para qualquer geometria de estados deslocalizados, uma vez que não foram encontradas diferenças qualitativas entre os comportamentos de caminhadas quânticas que partem de estados Gaussianos e retangulares. Para provar isto, sugerimos uma discussão mais profunda sobre o que significa de fato um estado ser deslocalizado e, consequentemente, a formulação de uma definição apropriada. Foi possível, também, desvendar a dinâmica que conecta os valores de emaranhamento no limite assintótico para estados locais e deslocalizados. Essa conexão ficou explícita através de uma função característica Δ apropriada, dada pela eq. (3.27), resultando na Fig. 3.5, principal resultado do Cap. 3.

As simulações numéricas de caminhadas quânticas forneceram dados sobre o emaranhamento que corroboraram com nossos resultados analíticos. É importante notar que, além dessas abordagens serem diferentes por natureza, uma analítica e a outra numérica, elas também diferem por método: a abordagem numérica é feita no espaço de posições através de cálculos recursivos, passo a passo; e a abordagem analítica é feita no espaço de

momento, tomando o limite assintótico de infinitos passos.

No que diz respeito à dispersão, fomos capazes de aplicar com sucesso o formalismo de Brun para o cálculo de variância em caminhadas quânticas e descobrimos que a deslocalização do estado inicial exerce influência crucial em seu comportamento. Assim como afirmam alguns dos primeiros estudos em caminhadas quânticas, verificamos que não há perda de generalidade ao se escolher uma moeda quântica específica em uma caminhada que parte de estado local, uma vez que podemos obter toda a variedade de comportamentos possíveis apenas mudando-se o estado de spin inicial. No entanto, o mesmo não ocorre com caminhadas que partem de estados deslocalizados. Em tal situação, há, de fato, perda da generalidade ao se escolher uma moeda quântica em detrimento de outra. No caso de uma caminhada Hadamard, por exemplo, o conjunto de velocidades de dispersão acessíveis é maior do que no caso local, enquanto que em uma caminhada Fourier, o caminhante que parte de estado suficientemente deslocalizado permanece não-difusivo. Enquanto que para estados locais, a dispersão média é a mesma para qualquer moeda quântica, para estados deslocalizados a dispersão média apresenta grande dependência com a deslocalização inicial do estado e com a moeda quântica empregada. Ao observar os resultados das simulações numéricas, constatamos que caminhadas quânticas que partem de estados deslocalizados apresentam variância média com comportamentos que vão desde uma situação quase não-dispersiva, $\sigma^2(t) \sim 0$, passando por algo equivalente ao caso local, e atingindo até valores de dispersão maiores que no caso local. Mais uma vez, as simulações numéricas forneceram dados que reforçaram nossos resultados analíticos, vide a Fig. 4.4, principal resultado do Cap. 4.

No Cap. 5, terminamos nossos estudos sobre caminhadas quânticas que partem de estados deslocalizados por meio da inserção de desordem, ou seja, aleatoriedade das moedas quânticas ao longo da evolução temporal da caminhada. De fato, a desordem dinâmica—a que depende apenas do tempo—leva qualquer estado inicial, independente da configuração de spin ou da dispersão inicial, à situação de máximo emaranhamento no limite assintótico, fato que reafirma o Teorema 1. No entanto, quanto mais deslocalizado é o estado, mais lento é o processo de realização de emaranhamento. Por este motivo, ficamos interessados em procurar um cenário de desordem dinâmica que acelerasse a produção de emaranhamento. Nossas primeiras simulações mostraram que a mudança abrupta de desordem dinâmica para ordem—moeda fixa Hadamard—causa um salto (*kink*) na curva de

evolução do emaranhamento, atingindo um patamar constante abaixo do máximo. Baseados neste resultado, prosseguimos nossa investigação e descobrimos que: (i) alternar entre intervalos iguais de desordem dinâmica e moeda fixa Hadamard e (ii) desordem dinâmica escassa (fraca) otimizam a produção de emaranhamento, não apenas para estados iniciais locais, mas principalmente para deslocalizados. As simulações numéricas mostraram que o primeiro se mostrou mais eficiente sobre estados iniciais locais, assim como o segundo para deslocalizados, resultado ilustrado pela Fig. 5.7.

Nesta dissertação, abordamos três grandes assuntos no que se refere às caminhadas quânticas a partir de estados deslocalizados: emaranhamento assintótico, dispersão de longa duração e produção de emaranhamento em caminhadas com desordem dinâmica. Em virtude de uma nova gama de comportamentos terem sido revelados, muitos estudos ainda podem ser realizados neste tema. Além das opções imediatas como a generalização dos resultados do capítulo 3 para caminhadas dirigidas por qualquer tipo de moeda e do capítulo 4 para moedas completamente genéricas (incluindo não balanceadas), podemos estender esses estudos para outros tipos de estados deslocalizados, avaliar a transição do comportamento quântico para o clássico em situações com descoerência, realizar caminhadas com dois ou mais caminhantes ou ainda, avaliar o efeito de localização por meio de desordem estática (na posição). Por fim, acreditamos que nossas descobertas poderiam ser verificadas a partir de diferentes plataformas experimentais, em especial aquelas baseadas na manipulação do momento angular orbital do fóton.

Bibliografia

- ¹F. Spitzer, *Principles of random walk*, vol. 34 (Springer Science & Business Media, 2013).
- ²K. Pearson, «The problem of the random walk», *Nature* **72**, 294 (1905).
- ³S. Hoshino e K. Ichida, «Solution of partial differential equations by a modified random walk», *Numerische Mathematik* **18**, 61–72 (1971).
- ⁴D. Ceperley e B. Alder, «Quantum monte carlo», *Science* **231** (1986).
- ⁵B. A. Berg, «Locating global minima in optimization problems by a random-cost approach», *Nature* **361**, 708–710 (1993).
- ⁶J. Schöll e E. Schöll-Paschinger, «Classification by restricted random walks», *Pattern Recognition* **36**, 1279–1290 (2003).
- ⁷C. Anteneodo e W. Morgado, «Critical scaling in standard biased random walks», *Phys. Rev. Lett.* **99**, 180602 (2007).
- ⁸H. C. Berg, *Random walks in biology* (Princeton University Press, 1993).
- ⁹P.-G. De Gennes, *Scaling concepts in polymer physics* (Cornell university press, 1979).
- ¹⁰I. Stewart, «Mathematics: where drunkards hang out», *Nature* **413**, 686–687 (2001).
- ¹¹F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics* (Waveland Press, 2009).
- ¹²Y. Aharonov, L. Davidovich e N. Zagury, «Quantum random walks», *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
- ¹³J. Kempe, «Quantum random walks: an introductory overview», *Contemporary Physics* **44**, 307–327 (2003).
- ¹⁴S. E. Venegas-Andraca, «Quantum walks: a comprehensive review», *Quantum Inf Process* **11**, 1015–1106 (2012).
- ¹⁵N. Konno, «Quantum walks», em *Quantum potential theory*, ed. por U. Franz e M. Schürmann (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008), pp. 309–452.
- ¹⁶V. Kendon, «Decoherence in quantum walks—a review», *Math. Struct. Comp. Sci.* **17**, 1169 (2007).
- ¹⁷N. Shenvi, J. Kempe e K. B. Whaley, «Quantum random-walk search algorithm», *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- ¹⁸A. Tulsi, «Faster quantum-walk algorithm for the two-dimensional spatial search», *Phys. Rev. A* **78**, 012310 (2008).
- ¹⁹A. M. Childs, «Universal computation by quantum walk», *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
- ²⁰N. B. Lovett et al., «Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk», *Phys. Rev. A* **81**, 042330 (2010).

- ²¹C. Chandrashekar, «Two-component dirac-like hamiltonian for generating quantum walk on one-, two- and three-dimensional lattices», *Sci. Rep.* **3**, 2829 (2013).
- ²²Y. Wang, Y. Shang e P. Xue, «Generalized teleportation by quantum walks», *Quantum Inf. Process.* **16**, 221 (2017).
- ²³R. Vieira, E. P. M. Amorim e G. Rigolin, «Dynamically disordered quantum walk as a maximal entanglement generator», *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180503 (2013).
- ²⁴R. Vieira, E. P. M. Amorim e G. Rigolin, «Entangling power of disordered quantum walks», *Phys. Rev. A* **89**, 042307 (2014).
- ²⁵C. Robens et al., «Ideal negative measurements in quantum walks disprove theories based on classical trajectories», *Phys. Rev. X* **5**, 011003 (2015).
- ²⁶G. S. Engel et al., «Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems», *Nature* **446**, 782–786 (2007).
- ²⁷J. R. Busemeyer, Z. Wang e J. T. Townsend, «Quantum dynamics of human decision-making», *Journal of Mathematical Psychology* **50**, 220–241 (2006).
- ²⁸M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information* (Cambridge university press, 2010).
- ²⁹W. Heisenberg, *Physics and philosophy: the revolution in modern science* (Harper & Brothers, 1958) cap. VIII, pp. 128–146.
- ³⁰L. Mach, «Ueber einen interferenzrefraktor», *Zeitschrift für Instrumentenkunde* **12**, 89–93 (1892).
- ³¹L. Zehnder, *Ein neuer interferenzrefraktor* (Springer, 1891).
- ³²P. S. Ribeiro et al., «Quantum random walks and wave-packet reshaping at the single-photon level», *Phys. Rev. A* **78**, 012326 (2008).
- ³³A. Peruzzo et al., «Quantum walks of correlated photons», *Science* **329**, 1500–1503 (2010).
- ³⁴A. Schreiber et al., «Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations», *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
- ³⁵F. Zähringer et al., «Realization of a quantum walk with one and two trapped ions», *Phys. Rev. Lett.* **104**, 100503 (2010).
- ³⁶J. C. Matthews e M. G. Thompson, «Quantum optics: an entangled walk of photons», *Nature* **484**, 47–48 (2012).
- ³⁷L. Sansoni et al., «Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics», *Phys. Rev. Lett.* **108**, 010502 (2012).
- ³⁸A. Crespi et al., «Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk», *Nature Photonics* **7**, 322–328 (2013).
- ³⁹J. Wang e K. Manouchehri, *Physical implementation of quantum walks* (Springer, 2013).
- ⁴⁰F. W. Strauch, «Connecting the discrete- and continuous-time quantum walks», *Phys. Rev. A* **74**, 030301 (2006).
- ⁴¹L. Innocenti et al., «Quantum state engineering using one-dimensional discrete-time quantum walks», arXiv:1710.10518 (2017).
- ⁴²P. Zhang et al., «Demonstration of one-dimensional quantum random walks using orbital angular momentum of photons», *Phys. Rev. A* **75**, 052310 (2007).

- ⁴³P. Zhang et al., «Implementation of one-dimensional quantum walks on spin-orbital angular momentum space of photons», *Phys. Rev. A* **81**, 052322 (2010).
- ⁴⁴S. K. Goyal et al., «Implementing quantum walks using orbital angular momentum of classical light», *Phys. Rev. Lett.* **110**, 263602 (2013).
- ⁴⁵F. Cardano et al., «Quantum walks and wavepacket dynamics on a lattice with twisted photons», *Sci. Adv.* **1**, e1500087 (2015).
- ⁴⁶L. Marrucci, C. Manzo e D. Paparo, «Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media», *Phys. Rev. Lett.* **96**, 163905 (2006).
- ⁴⁷R. Horodecki et al., «Quantum entanglement», *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- ⁴⁸C. H. Bennett et al., «Concentrating partial entanglement by local operations», *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- ⁴⁹G. Abal et al., «Quantum walk on the line: entanglement and nonlocal initial conditions», *Phys. Rev. A* **73**, 042302 (2006).
- ⁵⁰G. Abal et al., «Erratum: quantum walk on the line: entanglement and non-local initial conditions [phys. rev. a 73, 042302 (2006)]», *Phys. Rev. A* **73**, 069905 (2006).
- ⁵¹S. Salimi e R. Yosefjani, «Asymptotic entanglement in 1d quantum walks with a time-dependent coined», *International Journal of Modern Physics B* **26**, 1250112 (2012).
- ⁵²R. Eryiğit e S. Gündüç, «Time exponents of asymptotic entanglement of discrete quantum walk in one dimension», *International Journal of Quantum Information* **12**, 1450036 (2014).
- ⁵³B. Allés, S. Gündüç e Y. Gündüç, «Maximal entanglement from quantum random walks», *Quantum Information Processing* **11**, 211–227 (2012).
- ⁵⁴G. J. de Valcárcel, E. Roldán e A. Romanelli, «Tailoring discrete quantum walk dynamics via extended initial conditions», *New Journal of Physics* **12**, 123022 (2010).
- ⁵⁵W.-W. Zhang et al., «Creating cat states in one-dimensional quantum walks using delocalized initial states», *New J. Phys.* **18**, 093025 (2016).
- ⁵⁶A. Romanelli, «Distribution of chirality in the quantum walk: markov process and entanglement», *Phys. Rev. A* **81**, 062349 (2010).
- ⁵⁷A. Romanelli, «Thermodynamic behavior of the quantum walk», *Phys. Rev. A* **85**, 012319 (2012).
- ⁵⁸A. Romanelli e G. Segundo, «The entanglement temperature of the generalized quantum walk», *Physica A* **393**, 646–654 (2014).
- ⁵⁹B. Tregenna et al., «Controlling discrete quantum walks: coins and initial states», *New J. Phys.* **5**, 83 (2003).
- ⁶⁰T. A. Brun, H. A. Carteret e A. Ambainis, «Quantum to classical transition for random walks», *Phys. Rev. Lett.* **91**, 130602 (2003).
- ⁶¹T. A. Brun, H. A. Carteret e A. Ambainis, «Quantum random walks with decoherent coins», *Phys. Rev. A* **67**, 032304 (2003).
- ⁶²M. Annabestani, S. J. Akhtarshenas e M. R. Abolhassani, «Decoherence in a one-dimensional quantum walk», *Phys. Rev. A* **81**, 032321 (2010).
- ⁶³P. Ribeiro, P. Milman e R. Mosseri, «Aperiodic quantum random walks», *Phys. Rev. Lett.* **93**, 190503 (2004).

- ⁶⁴N. Konno, «A path integral approach for disordered quantum walks in one dimension», *Fluct. Noise Lett.* **05**, L529–L537 (2005).
- ⁶⁵M. C. Bañuls et al., «Quantum walk with a time-dependent coin», *Phys. Rev. A* **73**, 062304 (2006).
- ⁶⁶C. M. Chandrashekhar, «Disordered-quantum-walk-induced localization of a bose-einstein condensate», *Phys. Rev. A* **83**, 022320 (2011).
- ⁶⁷A. Schreiber et al., «Decoherence and disorder in quantum walks: from ballistic spread to localization», *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180403 (2011).
- ⁶⁸T. Chen e X. Zhang, «The defect-induced localization in many positions of the quantum random walk», *Sci. Rep.* **6** (2016).
- ⁶⁹M. Zeng e E. H. Yong, «Discrete-time quantum walk with phase disorder: localization and entanglement entropy», *Sci. Rep.* **7** (2017).
- ⁷⁰S. Chakraborty et al., «Quantum ratchet in disordered quantum walk», *Annalen der Physik* **529** (2017).
- ⁷¹R. Vieira, «Emaranhamento em caminhadas quânticas desordenadas», tese de mestrado (UDESC, 2014).
- ⁷²A. C. Orthey e E. P. M. Amorim, «Asymptotic entanglement in quantum walks from delocalized initial states», *Quantum Information Processing* **16**, 224 (2017).
- ⁷³A. C. Orthey Jr e E. P. M. Amorim, «On the spreading of quantum walks starting from local and delocalized states», arXiv:1706.06257 (2017).
- ⁷⁴A. C. Orthey Jr e E. P. M. Amorim, «Weak disorder enhancing the production of entanglement in quantum walks», arXiv:1711.09246 (2017).
- ⁷⁵G. M. Guimarães, «Não-localidade em sistemas quânticos», tese de mestrado (UFMG, 2012).
- ⁷⁶A. Costa, M. Beims e R. Angelo, «Generalized discord, entanglement, einstein–podolsky–rosen steering, and bell nonlocality in two-qubit systems under (non-) markovian channels: hierarchy of quantum resources and chronology of deaths and births», *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **461**, 469–479 (2016).
- ⁷⁷D. Bruß, «Characterizing entanglement», *J. Math. Phys.* **43**, 4237–4251 (2002).
- ⁷⁸Y. Ide, N. Konno e T. Machida, «Entanglement for discrete-time quantum walks on the line», *Quantum Info. Comput.* **11**, 855–866 (2011).
- ⁷⁹A. Nayak e A. Vishwanath, «Quantum walk on the line», arXiv preprint quant-ph/0010117 (2000).
- ⁸⁰A. Ambainis et al., «One-dimensional quantum walks», em *Proceedings of the thirty-third annual acm symposium on theory of computing* (ACM, 2001), pp. 37–49.
- ⁸¹M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55 (Courier Corporation, 1964).
- ⁸²O. Maloyer e V. Kendon, «Decoherence versus entanglement in coined quantum walks», *New J. Phys.* **9**, 87 (2007).