

ANO  
2018



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CAROLINI COSTA FELICIO  
A DINÂMICA DE MODELOS DE LORENZ 5D E 6D

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**A DINÂMICA DE MODELOS DE  
LORENZ 5D E 6D**

CAROLINI COSTA FELICIO

JOINVILLE, 2018

Neste trabalho, investigamos os modelos generalizados de Lorenz, que são o modelo de Lorenz 5D e o modelo de Lorenz 6D. São utilizados planos de parâmetros, diagramas de bifurcações e atratores no espaço de fase, a fim de estudar as diferenças entre o modelo de Lorenz 5D e o modelo de Lorenz 6D quando comparados com as soluções para o modelo clássico de Lorenz. É mostrado nos planos de parâmetros que o início do comportamento caótico nos modelos 5D e 6D necessita de um valor maior para o parâmetro  $r$  quando fixamos os parâmetros  $\sigma$  e  $b$ , em comparação com o plano de parâmetros para o modelo de Lorenz original. Além disso, é mostrado que a forma dos diagramas de bifurcações e atratores no espaço de fase (periódicos e caóticos) é preservada nos dois modelos de Lorenz generalizados. Também, mostra-se que o comportamento hipercaótico é observado apenas no modelo de Lorenz 6D, pelo menos nos intervalos de parâmetros aqui investigados.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, 2018

**CAROLINI COSTA FELICIO**

**A DINÂMICA DE MODELOS DE LORENZ 5D E 6D**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado de Santa Catarina Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** PAULO CESAR RECH

**Joinville**

**2018**

Felicio, Carolini Costa.

A Dinâmica de Modelos de Lorenz 5D e 6D/ Carolini Costa Felicio.  
- Joinville, 2018.

56 p.

Orientador: Paulo Cesar Rech.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2018.

1. Lorenz. 2. Lorenz 5D. 3. Lorenz 6D. 4. Expoente de Lyapunov.
5. Plano de Parâmetros. 6. Hipercaos. I. Rech, Paulo Cesar. II. Universidade Do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

# **A Dinâmica de Modelos de Lorenz 5D e 6D**

por

**Carolini Costa Felicio**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**MESTRA EM FÍSICA**

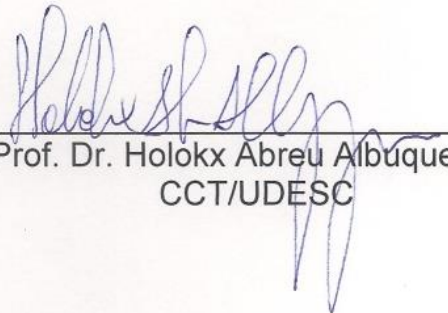
Área de concentração em "Física"  
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Paulo César Rech  
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque  
CCT/UDESC



Prof. Dr. Emerson Luiz Lapolli  
Anhanguera

**Joinville, SC, 02 de março de 2018.**



As mulheres especiais de minha vida,  
Neide e Bernardina.

# Agradecimentos

A Deus, por sempre estar ao meu lado, atendendo minhas orações e manifestando seu imenso amor. Por ser meu porto, onde posso descansar e refletir. Por tudo, uma vez que sem Ele nada seria.

A minha mãe Neide, pela esplêndida vida que me proporcionou, seu esforço para educar-me e ajudar-me, emocionam-me profundamente. Saiba que sou muito grata e feliz por tudo. Espero um dia poder retribuir e tornar-me uma pessoa tão batalhadora e corajosa como você é.

Ao meu namorado Max, pela compreensão, pelo amor e amizade ao longo desses anos, pelo apoio e por ajudar-me a acreditar na minha capacidade.

Aos meus avós Euclides e Bernardina, por toda a educação dada, todo o carinho e tempo disponibilizado. Pela referência de família e pelos valores ensinados.

Ao meu orientador professor Paulo Cesar Rech, agradeço imensamente pela paciência, conhecimentos transmitidos, compreensão durante os 5 anos de orientação e sobretudo por demonstrar-me um exemplo de profissional a seguir.

Aos professores do Departamento de Física da UDESC Joinville que foram fundamentais para minha formação e aos integrantes do Grupo de Dinâmica Não-Linear.

A minha família e amigos que compreenderam minha ausência, animaram-me e deram-me suporte em muitos momentos.

Aos meus amigos do mestrado, em especial aos amigos Liana, Monik, Nathan e Eduardo por toda a ajuda e momentos de descontração.

As amigas Pietra, Fabiola, Nayra e Fernanda que encontrei na UDESC e levarei comigo sempre.

A Susele, secretária do Programa de Pós-Graduação em Física, pelas dicas e ajuda.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

*A menos que modifiquemos nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.*

Albert Einstein

# Resumo

Neste trabalho, investigamos os modelos generalizados de Lorenz, que são o modelo de Lorenz 5D e o modelo de Lorenz 6D. São utilizados planos de parâmetros, diagramas de bifurcações e atratores no espaço de fase, a fim de estudar as diferenças entre o modelo de Lorenz 5D e o modelo de Lorenz 6D quando comparados com as soluções para o modelo clássico de Lorenz. É mostrado nos planos de parâmetros que o início do comportamento caótico nos modelos 5D e 6D necessita de um valor maior para o parâmetro  $r$  quando fixamos os parâmetros  $\sigma$  e  $b$ , em comparação com o plano de parâmetros para o modelo de Lorenz original. Além disso, é mostrado que a forma dos diagramas de bifurcações e atratores no espaço de fase (periódicos e caóticos) é preservada nos dois modelos de Lorenz generalizados. Também, mostra-se que o comportamento hipercaótico é observado apenas no modelo de Lorenz 6D, pelo menos nos intervalos de parâmetros aqui investigados.

**Palavras chaves:** Lorenz. Lorenz 5D. Lorenz 6D. Expoente de Lyapunov. Plano de Parâmetros. Hipercaos.

# Abstract

In this work we investigate generalized Lorenz models, which are the five-dimensional Lorenz model and the six-dimensional Lorenz model. We use parameter planes, bifurcations diagrams and attractors in the phase space in order to study the differences between the Lorenz 5D model and the Lorenz 6D model when compared with the solutions for the classical Lorenz model. It is shown in the parameter planes that the onset of the chaotic behavior in the 5D and 6D models requires a larger value for the parameter  $r$  when we kept fixed the parameters  $\sigma$  and  $b$ , compared with the parameter planes for the original Lorenz model. In addition, it is shown that the shape of bifurcations diagrams and attractors in the phase space (periodic and chaotic) is preserved in both generalized Lorenz models. Also, it is shown that hyperchaotic behavior is observed only in the Lorenz 6D model, at least in the parameter ranges here investigated.

**Key words:** Lorenz. Lorenz 5D. Lorenz 6D. Lyapunov Exponents. Parameter Planes. Hyperchaos.

# Lista de Figuras

Figura 2.1	Uma órbita em um espaço de fase tridimensional. Figura retirada da referência [5]. . . . .	22
Figura 2.2	Evolução temporal de duas trajetórias de um sistema genérico a partir de condições iniciais infinitesimalmente próximas. . . . .	24
Figura 2.3	Evolução de um volume infinitesimal no espaço de fase. Uma pequena esfera e sua imagem após $n$ iteradas, para um mapa tridimensional. Figura retirada da referência [6]. . . . .	25
Figura 2.4	Plano de parâmetros retirado da referência [22]. . . . .	28
Figura 3.1	Esboço dos rolos de convecção, sem levar em conta efeitos de borda. Figura baseada na referência [1]. . . . .	30
Figura 3.2	Planos de parâmetros para o sistema 3.1. (a) Plano de parâmetros $(r, \sigma)$ , para $b = 8/3$ . (b) Plano de parâmetros $(r, b)$ para $\sigma = 10$ . (c) Plano de parâmetros $(\sigma, b)$ para $r = 100$ . . . . .	31
Figura 3.3	Diagramas de bifurcações para o sistema 3.1. (a) foram considerados os pontos ao longo de $r = 250$ , com $b = 8/3$ na Figura 3.2(a). (b) foram considerados os pontos ao longo de $r = 250$ , com $\sigma = 10$ na Figura 3.2(b). (c) foram considerados os pontos ao longo de $\sigma = 10$ , com $r = 100$ na Figura 3.2(c). . . . .	33
Figura 3.4	Atratores do sistema 3.1. (a), (c) e (e) são trajetórias periódicas correspondentes a pontos nas estruturas periódicas das Figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(b). (b), (d) e (f) são trajetórias caóticas correspondentes a pontos na região entre as cores amarela e vermelha das Figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(b). . . . .	34

Figura 4.1	Planos de parâmetros para o sistema 3.2. (a) Plano de parâmetros $(r, \sigma)$ , para $b = 8/3$ . (b) Plano de parâmetros $(r, b)$ para $\sigma = 10$ . (c) Plano de parâmetros $(\sigma, b)$ para $r = 100$ . . . . .	38
Figura 4.2	Diagramas de bifurcações para o sistema 3.2. (a) foram considerados os pontos ao longo de $r = 250$ , com $b = 8/3$ na Figura 4.1(a). (b) foram considerados os pontos ao longo de $r = 250$ , com $\sigma = 10$ na Figura 4.1(b). (c) foram considerados os pontos ao longo de $\sigma = 10$ , com $r = 100$ na Figura 4.1(c). . . . .	40
Figura 4.3	Atratores do sistema 3.2. (a), (c) e (e) são trajetórias periódicas correspondentes a pontos nas estruturas periódicas das Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(b). (b), (d) e (f) são trajetórias caóticas correspondentes a pontos na região entre as cores amarela e vermelha das Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(b). . . . .	41
Figura 4.4	Planos de parâmetros para o sistema 3.3. (a) Plano de parâmetros $(r, \sigma)$ , para $b = 8/3$ . (b) Plano de parâmetros $(r, b)$ para $\sigma = 10$ . (c) Plano de parâmetros $(\sigma, b)$ para $r = 100$ . . . . .	43
Figura 4.5	Diagramas de bifurcações para o sistema 3.3. (a) foram considerados os pontos ao longo de $r = 250$ , com $b = 8/3$ na Figura 4.4(a). (b) foram considerados os pontos ao longo de $r = 250$ , com $\sigma = 10$ na Figura 4.4(b). (c) foram considerados os pontos ao longo de $\sigma = 10$ , com $r = 100$ na Figura 4.4(c). . . . .	44
Figura 4.6	Atratores do sistema 3.3. (a), (c) e (e) são trajetórias periódicas. (b), (d) e (f) são trajetórias caóticas. . . . .	46
Figura 4.7	Regiões com comportamentos dinâmicos diferentes. (a), (c), (e) O segundo maior expoente de Lyapunov para o modelo 5D. (b), (d), (f) O terceiro maior expoente de Lyapunov para o modelo 5D. . .	48
Figura 4.8	Regiões com comportamentos dinâmicos diferentes. (a), (b), (c) O segundo maior expoente de Lyapunov para o modelo 6D. . . . .	49

Figura 4.9 Regiões com comportamentos dinâmicos diferentes. (a), (c), (e) O terceiro maior expoente de Lyapunov para o modelo 6D. (b), (d), (f) O quarto maior expoente de Lyapunov para o modelo 6D. . . . 50



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>20</b>
2.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	20
2.2	Espaço de Fase . . . . .	21
2.3	Atrator . . . . .	22
2.4	Expoente de Lyapunov . . . . .	24
2.5	Bifurcação . . . . .	27
2.6	Plano de Parâmetros . . . . .	27
<b>3</b>	<b>MODELOS DE LORENZ</b>	<b>29</b>
3.1	Lorenz . . . . .	29
3.2	Lorenz 5D . . . . .	35
3.3	Lorenz 6D . . . . .	36
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>37</b>
4.1	Lorenz 5D . . . . .	37
4.2	Lorenz 6D . . . . .	42
4.3	Hipercaos . . . . .	46
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>53</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Previsão científica do tempo é assunto de interesse, destarte modelos matemáticos para previsão do tempo foram desenvolvidos e modificados ao longo dos anos. Nascido em 1917, Edward Norton Lorenz se tornou professor de ciências atmosféricas em 1962 e sendo ele meteorologista, perguntava-se por que não se conseguia prever o tempo que fará nos próximos dias, com um grau de confiabilidade razoável, apesar de se conhecer as equações da circulação atmosférica e as condições climáticas em qualquer instante [1]. Naquele tempo, o modelo utilizado para previsão se baseava em dados experimentais, onde a temperatura do dia seguinte era prevista como uma combinação linear dos dados obtidos. Movido por tal questionamento e pela falta de confiabilidade dos modelos existentes Lorenz realizou estudos sobre circulação atmosférica. Um sistema com sete equações para o qual existia uma solução que parecia estar, eternamente em regime transiente foi estudado por Barry Saltzman. Em 1961, Lorenz notou que os valores de quatro, das sete variáveis deste sistema, tornavam-se muitas pequenas rapidamente. Assim, ele investigou o sistema formado pelas três outras equações pesquisadas por Saltzman a fim de saber se tal sistema exibiria comportamento aperiódico. Os resultados desta pesquisa foram publicados no seu artigo *Deterministic Nonperiodic Flow* [2] em 1963.

O sistema apresentado por Lorenz em seu artigo compunha três equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, as quais continham três variáveis,  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , e três parâmetros:  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$ . Este modelo foi amplamente estudado e vários resultados foram publicados sobre o mesmo. Em 2013, Bo-Wen Shen publicou o artigo *Nonlinear*

*Feedback in a Five-Dimensional Lorenz Model* [3] onde apresentou um modelo generalizado do modelo proposto por Lorenz. Neste artigo Shen escreveu sobre um sistema de cinco equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem com cinco variáveis,  $x(t), y(t), z(t), y_1(t)$  e  $z_1(t)$ , e quatro parâmetros,  $\sigma, r, b$  e  $d_0$  (porém podemos escrever  $d_0 = 2b + 1$ ). Anos mais tarde, Shen publicou *Nonlinear feedback in a six-dimensional Lorenz model: impact of an additional heating term* [4] no qual discorreu sobre um outro modelo estendido do modelo proposto por Lorenz, este agora é um modelo com seis equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, com os mesmos quatro parâmetros utilizados no modelo 5D e a adição da variável  $x_1(t)$ .

Por meio do expoente de Lyapunov, somos capazes de construir planos de parâmetros que possibilitam-nos investigar o comportamento de um sistema, por exemplo, somos capazes de observar para quais valores de parâmetros do sistema temos o início do comportamento caótico. Ainda, podemos estudar as regiões periódicas do sistema, as quais determinamos os períodos através dos diagramas de bifurcações. Estes diagramas são úteis para verificarmos as mudanças qualitativas no comportamento dos sistemas, bem como identificar o valor do período de estruturas periódicas presentes no plano de parâmetros. Também utilizamos para descrever um sistema os atratores no espaço de fase. Podemos caracterizar um sistema mediante estes diagramas. Desta maneira fizemos para os modelos estudados neste trabalho.

Construímos para o clássico modelo de Lorenz, ou modelo de Lorenz 3D, três planos de parâmetros, onde variamos dois parâmetros e fixamos um. Também obtivemos diagramas de bifurcações e atratores. Utilizamos para os parâmetros os intervalos:  $0 < \sigma < 50$ ,  $20 < r < 300$  e  $1 < b < 5$ . Estes resultados já são conhecidos de outras literaturas, mas como nosso objetivo é comparar os dois modelos propostos por Shen com o modelo de Lorenz 3D, estes se encontram no capítulo 3. Igualmente, produzimos tais diagramas para os modelos 5D e 6D, com as mesmas variações para os parâmetros. Com os resultados obtidos comparamos os dois modelos generalizados com o clássico modelo de Lorenz a fim de analisar se existem diferenças entre eles.

Este trabalho compreende cinco capítulos. No capítulo 2, nomeado *Fundamentação Teórica* apresentamos de forma sucinta aspectos teóricos da área de sistemas dinâmicos

os quais utilizamos para construção e compreensão dos resultados obtidos. O capítulo *Modelos de Lorenz* está dedicado à apresentação dos modelos estudados, bem como à retomada de resultados para o modelo clássico de Lorenz. Os planos de parâmetros, diagramas de bifurcações e atratores para os modelos 5D e 6D, os quais são os resultados deste trabalho, encontram-se no capítulo 4. Por fim, apresentamos as conclusões e as referências bibliográficas utilizadas nesta dissertação.

## Capítulo 2

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para compreensão deste trabalho, faz-se necessária a apresentação de conceitos utilizados no estudo e análise dos resultados obtidos. Estes conceitos são vastamente discutidos e demonstrados nas bibliografias existentes [1, 5, 6]. Nas seções seguintes abordamos brevemente aspectos que caracterizam a dinâmica de um sistema.

### 2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema é definido como um conjunto de elementos que se encontram interligados por alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os objetos desse conjunto [1]. Para que este sistema seja dinâmico, algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes devem variar no tempo. Encontramos interesse no estudo de sistemas dinâmicos em diversas áreas. Alguns exemplos são os sistemas que caracterizam circuitos elétricos [7, 8], modelos de neurônios [9] e osciladores forçados [10].

Podemos classificar um sistema quanto a variação temporal que este assume. Dividimos em duas categorias: tempo discreto e tempo contínuo. Se a variação temporal do sistema assumir valores inteiros para o tempo  $t$ , ou seja  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ , este é um sistema dinâmico discreto. Estes sistemas são representados vetorialmente por *mapas* do tipo:

$$\vec{X}_{t+1} = \vec{M}(\vec{X}_t), \quad (2.1)$$

onde  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  é o tempo discreto,  $\vec{X}_t$  é o vetor de estado no tempo  $t$ ,  $\vec{X}_{t+1}$  é o vetor de estado no tempo  $t + 1$  e  $\vec{M}$  é o mapa. Uma função  $f(x)$  é dita um mapa quando seus conjuntos domínio e imagem são os mesmos. Usa-se um modelo de tempo discreto quando é necessário esperar um tempo finito para que o valor de  $X$  possa variar [1].

Se o tempo  $t$  tem variações contínuas, ou seja assume valores reais, este é classificado como um sistema a tempo contínuo ou *fluxo*, como é comumente chamado. A evolução desse sistema é governada por uma ou mais equações diferenciais. Uma maneira de representar é usando um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, do seguinte tipo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ou na forma vetorial, representamos genericamente um sistema a tempo contínuo por:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}[\vec{X}(t)],\tag{2.3}$$

onde  $\vec{X}$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\vec{F}$  é uma função vetorial desta variável [5]. Usa-se um modelo de tempo contínuo quando  $X$  pode variar num intervalo de tempo tão pequeno quanto se queira, ou seja, infinitesimal [1]. Neste trabalho investigamos a dinâmica de dois sistemas a tempo contínuo.

## 2.2 Espaço de Fase

Os modelos de Lorenz estudados são sistemas dissipativos. Para compreendermos a diferença entre um sistema dissipativo de um conservativo, precisamos definir o que é um espaço de fase, ou também chamado espaço de estados ou espaço das variáveis.

O espaço de fase é um espaço  $n$ -dimensional, cujos os eixos coordenados são as variáveis dinâmicas do sistema. Um estado é representado como um ponto com coordenadas  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  nesse espaço e este ponto se moverá com o passar do tempo [1]. A Figura 2.1 mostra o caminho seguido pelo estado do sistema à medida que ele evolui com o tempo em um caso onde  $n = 3$  para o sistema de equações 2.2. O espaço na figura é referido como espaço de fase, e o caminho no espaço de fase seguido pelo sistema à medida que evolui com o tempo é chamado de *órbita* ou *trajetória* [5].

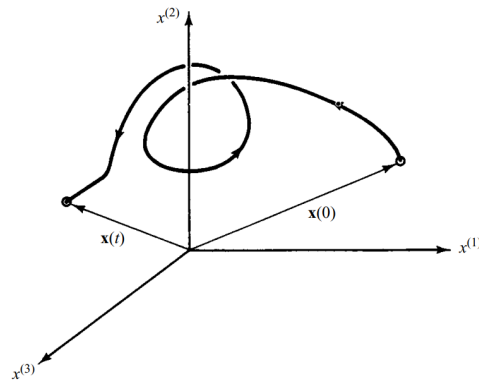


Figura 2.1 – Uma órbita em um espaço de fase tridimensional. Figura retirada da referência [5].

Um sistema será *dissipativo* se, tomando um volume\* de condições iniciais no espaço de fase, este volume se contrai com o passar do tempo. Quando há preservação do volume no espaço de fases, o sistema será *conservativo*. Aqui estamos estudando três sistemas dissipativos.

## 2.3 Atrator

É um conceito importante em dinâmica que os sistemas dissipativos são tipicamente caracterizados pela presença de conjuntos atrativos ou *atratores* no espaço de fase [5]. Monteiro [1] diz que um conjunto fechado de pontos  $A$ , no espaço de fases de um sistema dinâmico é definido como atrator, se:

- $A$  é um conjunto invariante: ou seja, qualquer trajetória  $\vec{x}(t)$  que começa em  $A$ , permanece em  $A$  por todo o tempo;

---

\*no caso de um sistema unidimensional, teríamos um comprimento; no caso bidimensional, uma área; no caso tridimensional, um volume e no caso de um sistema com mais de três dimensões, um hipervolume

- $A$  atrai um conjunto aberto de condições iniciais: isto é, há um hipervolume  $B$ , que contém  $A$ , tal que para qualquer condição inicial  $\vec{x}(0)$  pertencente a  $B$ , a distância entre a trajetória  $\vec{x}(t)$  correspondente e  $A$  tende a zero, quanto  $t \rightarrow \infty$ . O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado de *bacia de atração* de  $A$ ;
- $A$  é mínimo: ou seja, não há subconjunto de  $A$  que satisfaça as duas condições anteriores.

Para um sistema tridimensional de tempo contínuo e autônomo (não dependentes explicitamente do tempo) a figura atratora pode ser do tipo:

- *ponto de equilíbrio*: é uma solução do sistema cujo comportamento dinâmico independe do tempo, ou seja, é um ponto no espaço de fase para o qual a trajetória do sistema convergirá.
- *ciclo-limite ou atrator periódico*: descreve um comportamento periódico no tempo, onde a amplitude e o período são determinados pelos valores dos parâmetros e pela forma das equações;
- *superfície toroidal ou atrator quase-periódico*: representa um regime periódico ou quase-periódico, com duas frequências fundamentais independentes. Para o comportamento quase-periódico temos que as trajetórias nunca se fecham sobre si mesmas;
- *atrator caótico*: apresenta dependência sensível nas condições iniciais. Neste caso se tomarmos duas trajetórias vizinhas no espaço de fases e evoluirmos o sistema no tempo, a distância entre elas divergirá exponencialmente.

Podemos ainda diferenciar os tipos de atratores segundo o expoente de Lyapunov, o qual será abordado na seção seguinte.



## 2.4 Expoente de Lyapunov

Um sistema pode apresentar diferentes comportamentos. Para que um sistema dinâmico apresente comportamento caótico deve haver dependência sensível nas condições iniciais, ele deve apresentar transitividade topológica e suas órbitas devem ser densas em seu domínio [11]. Imaginemos um sistema onde duas trajetórias,  $\vec{x}_1(t_0)$  e  $\vec{x}_2(t_0)$  são iniciadas infinitesimalmente próximas, conforme está representado na Figura 2.2. Conforme

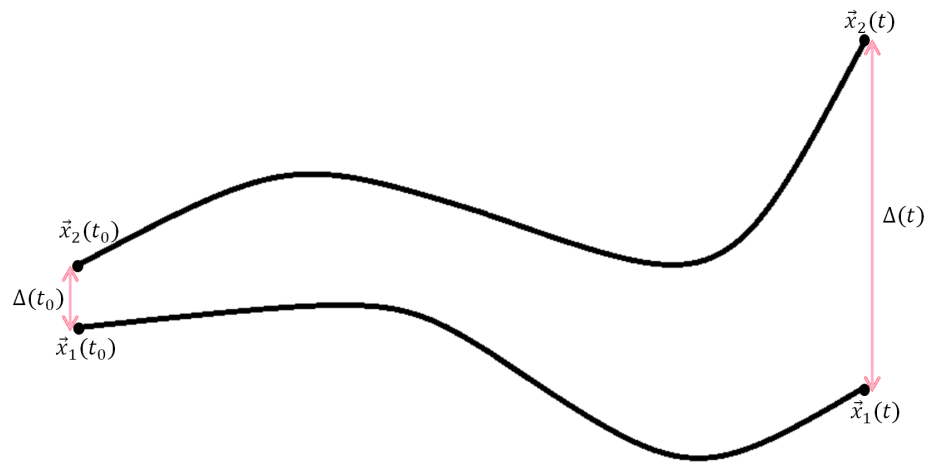


Figura 2.2 – Evolução temporal de duas trajetórias de um sistema genérico a partir de condições iniciais infinitesimalmente próximas.

o sistema evolui, as trajetórias se afastam. O *expoente de Lyapunov* quantifica a taxa de divergência entre trajetórias de um mesmo sistema, obtidas a partir de condições iniciais ligeiramente diferentes [12].

Seja um sistema de  $n$  equações ordinárias. Seja uma hipersfera de condições iniciais no ponto  $\vec{x}(t_0)$ . Conforme o tempo evolui, o volume da hipersfera se deforma. Considerando que ao longo de cada  $n$  dimensão, o raio inicial  $d_j(t_0)$  varie exponencialmente no tempo, tal que a relação entre  $d_j(t_0)$  e o valor correspondente em  $t$ , dado por  $d_j(t)$ , seja:

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (2.4)$$

com  $j=1,2,\dots,n$ . Teremos então:

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{(t - t_0)}. \quad (2.5)$$

Sendo os  $\lambda_j$  os expoentes de Lyapunov. Nota-se que o número de expoentes de Lyapunov está associado a dimensão  $n$  do sistema, ou seja, para um sistema tridimensional teremos três expoentes de Lyapunov. Considerando que o volume da hipersfera no tempo  $t$  é  $V(t)$ , podemos escrever:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t), \quad (2.6)$$

Ou, utilizando 2.4, temos:

$$V(t) \propto V(t_0) e^{(t-t_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (2.7)$$

A Figura 2.3 esquematiza a contração de um volume no espaço de fase.

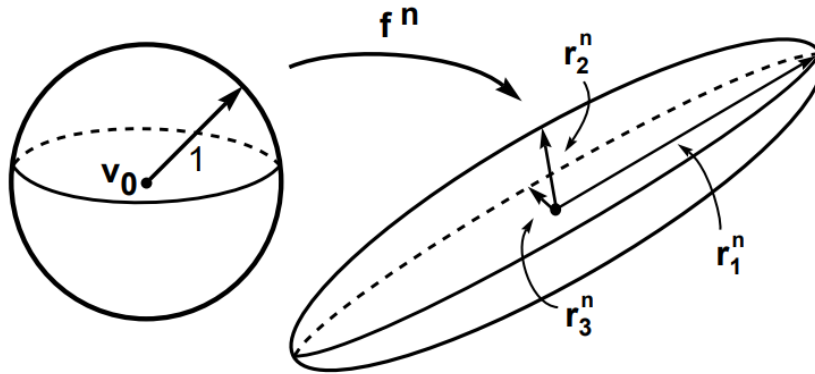


Figura 2.3 – Evolução de um volume infinitesimal no espaço de fase. Uma pequena esfera e sua imagem após  $n$  iterações, para um mapa tridimensional. Figura retirada da referência [6].

Podemos diferenciar um sistema conservativo de um sistema dissipativo por meio da equação 2.11. Se um sistema é conservativo, então:

$$V(t) = V(t_0), \quad (2.8)$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0, \quad (2.9)$$

E, se um sistema é dissipativo teremos:

$$V(t) < V(t_0), \quad (2.10)$$

Assim:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j < 0. \quad (2.11)$$

Isto verifica-se pelo teorema de Liouville [13, 14].

No caso de soluções periódicas, a distância entre duas condições iniciais vizinhas se mantém constante na média, tal que o expoente de Lyapunov associado a esta direção é nulo. Nas direções perpendiculares ao atrator periódico há contração do volume no espaço de fase. Já para o comportamento caótico, sendo este caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Isso implica na sensibilidade nas condições iniciais.

Podemos classificar os tipos de atratores, em sistemas dissipativos, de acordo com os sinais dos expoentes de Lyapunov. Para um sistema com três equações diferenciais, teremos:

- *ponto de equilíbrio*:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ , o que faz sentido, uma vez que a trajetória convergirá para um ponto no espaço de fase;
- *ciclo-limite ou atrator periódico*:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ , com o expoente nulo correspondendo à direção ao longo da trajetória fechada;
- *superfície toroidal ou atrator quase-periódico*:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ , onde as trajetórias atratoras se encontram sobre uma superfície;
- *atrator caótico*:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ , onde o expoente positivo está associado à direção na qual a trajetória diverge no espaço de fase. A soma dos três expoentes deve ser negativa, assim a magnitude do expoente negativo deve ser maior que a do positivo, uma vez que o sistema é dissipativo e caracterizado pela equação 2.11.

## 2.5 Bifurcação

Um gráfico de *variável*  $\times$  *parâmetro* é chamado de *diagrama de bifurcações*. Este tipo de diagrama mostra como a dinâmica do sistema evolui conforme um parâmetro de controle é variado, além disso, permite-nos diferenciar regiões periódicas e regiões não-periódicas. Nas regiões periódicas conseguimos contabilizar o período das mesmas, tomando uma reta vertical para um valor de parâmetro, podemos contar o período olhando para os pontos do diagrama que se encontram sob esta reta. Assim, um diagrama de bifurcações classifica de forma muito condensada todos os modos possíveis de comportamento do sistema e as transições (bifurcações) entre eles sob variações de parâmetros [15].

Uma *bifurcação* é uma mudança do tipo topológica do sistema à medida que seus parâmetros passam por um valor crítico [15] e a *codimensão* de uma bifurcação é o número de parâmetros cujos valores são variados a fim de se produzir a bifurcação em estudo. Podemos dividir em duas categorias: as *bifurcações locais* e as *bifurcações globais*. As bifurcações locais são aquelas que podem ser previstas estudando o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de uma trajetória fechada. Alguns exemplos são as bifurcações sela-nó, de forquilha e Hopf. As bifurcações globais são aquelas que não podem ser deduzidas a partir de uma análise local, como as bifurcações homoclínica e heteroclínica [1].

## 2.6 Plano de Parâmetros

Além dos diagramas de bifurcações, utilizamos de *planos de parâmetros* para estudarmos os modelos. Os planos de parâmetros de diferentes sistemas contínuos não-lineares têm sido objeto de várias publicações recentes. Alguns exemplos consideram o circuitos eletrônicos [16, 17], laser semiconductor [18–20] e um modelo de crescimento tumoral [21]. Um plano de parâmetros pode ser interpretado como uma seção transversal de um espaço de parâmetros  $n$ -dimensional de um sistema com mais de dois parâmetros de controle. Assim, um plano de parâmetros para o modelo de Lorenz 3D, é uma seção transversal

de seu espaço de parâmetros tridimensional  $(b, r, \sigma)$ , por exemplo,  $(b, r)$  para  $\sigma = 10$ . Este é um gráfico de *parâmetro*  $\times$  *parâmetro* com uma escala de cor, conforme o exemplo da Figura 2.4 e mostra regiões de diferentes comportamentos dinâmicos, como ponto de equilíbrio, caos e regularidade, dependendo dos parâmetros.

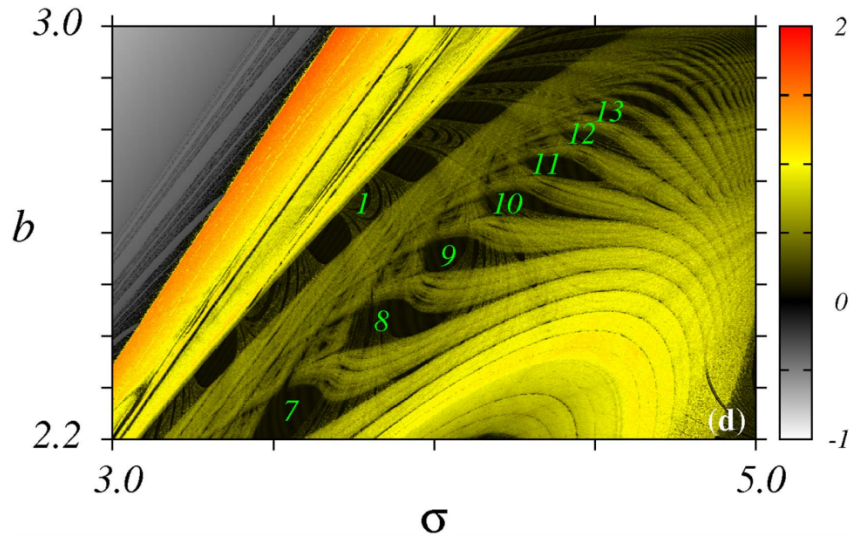


Figura 2.4 – Plano de parâmetros retirado da referência [22].

Na figura acima, temos a variação de dois parâmetros,  $b$  e  $\sigma$ . Ainda, há um gradiente de cor que indica o valor do maior expoente de Lyapunov, sendo o maior 2 e o menor  $-4$ . Para expoentes de Lyapunov negativos, onde as cores variam do branco ao preto, temos regiões de equilíbrio (onde encontramos atratores do tipo ponto de equilíbrio). Comportamento caótico é representado por expoentes positivos, onde o gradiente de cor varia entre amarelo e vermelho. Para a cor preta, onde o maior expoente de Lyapunov é zero, temos regiões periódicas (ou quase-periódicas, se o segundo maior expoente de Lyapunov também for nulo). Na figura 2.4 os número em verde indicados são os períodos das estruturas periódicas em preto.

Construindo um plano de parâmetros considerando o maior expoente de Lyapunov somente, não nos permite diferenciar comportamento caótico de hipercaótico. Para que as regiões hipercaóticas sejam evidenciadas devemos construir planos de parâmetros considerando, pelo menos, o segundo maior expoente de Lyapunov. Assim, caso existam segundos maiores expoentes de Lyapunov positivos, teremos uma região de hipercaos. Investigamos para os modelos estudados a existência de comportamento hipercaótico com dois, três e até quatro (modelo 6D) expoentes de Lyapunov positivos.

# Capítulo 3

## MODELOS DE LORENZ

Comparamos neste trabalho dois modelos com o clássico sistema de Lorenz [2, 23]. O primeiro é o modelo de Lorenz 5D [3] e o segundo, o modelo de Lorenz 6D [4]. Na seção seguinte apresentamos resultados já conhecidos para o Lorenz 3D, a fim de compará-los posteriormente com os resultados obtidos para os demais modelos. Nas seções 3.2 e 3.3 são apresentados o modelo de Lorenz 5D e o modelo de Lorenz 6D, respectivamente.

### 3.1 Lorenz

O sistema proposto por Lorenz em 1963, obtido do modelo apresentado por Saltzman em 1962, dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{3.1}$$

é um sistema autônomo de primeira ordem com três equações diferenciais ordinárias. Este é um modelo matemático para a convecção de Rayleigh-Bénard em um fluido [24, 25], representado na Figura 3.1, o qual está contido entre duas placas paralelas colocadas na direção perpendicular à força gravitacional da Terra. As placas são aquecidas por baixo e refrigeradas por cima.

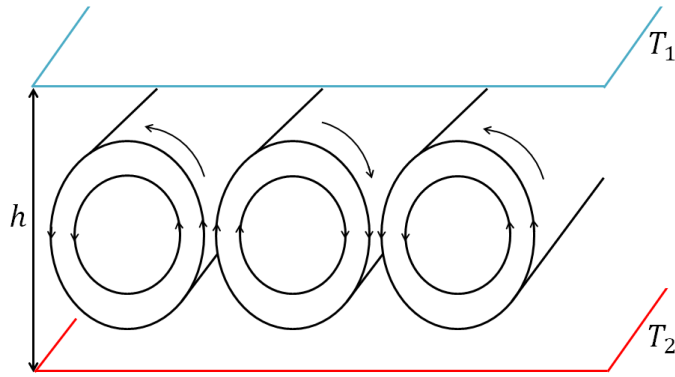


Figura 3.1 – Esboço dos rolos de convecção, sem levar em conta efeitos de borda. Figura baseada na referência [1].

O modelo (3.1) tem três parâmetros de controle. O parâmetro  $r$  é a diferença de temperatura normalizada entre a placa inferior mais quente e a placa superior mais fria, ou seja  $r = \Delta T / \Delta T_c = R_a / R_{ac}$ .  $\Delta T_c$  é a diferença de temperatura no início da convecção.  $R_a = g\alpha_p h^3 \Delta T / \nu \kappa$  é a diferença de temperatura adimensional, sendo esta chamada de número de Rayleigh.  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\alpha_p$  é coeficiente de dilatação térmica do fluido e  $h$  é a distância entre as placas na direção ascendente.  $\nu$  é a viscosidade e  $\kappa$  é a condutividade térmica. O parâmetro  $\sigma$  é o número de Prandtl dado por  $\sigma = \nu / \kappa$ . E o terceiro parâmetro  $b$  é a força de acoplamento [26].

São três variáveis que compõe este modelo. A variável  $x(t)$  é proporcional à intensidade da convecção, ou seja, para  $x = 0$  não há movimento convectivo, assim o calor é transportado apenas por condução. A variável  $y(t)$  é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes do fluido. E a variável  $z(t)$  é proporcional à distorção do perfil vertical de temperatura em relação ao perfil linear, por exemplo: para  $z = 0$  a temperatura decresce linearmente, conforme se sobe pelo eixo  $z$  [1].

A Figura 3.2 mostra planos de parâmetros para o sistema (3.1). Em (a) temos o plano de parâmetros  $(r, \sigma)$ , para  $b = 8/3$ , em (b) temos o plano de parâmetros  $(r, b)$  para  $\sigma = 10$  e, em (c), o plano de parâmetros  $(\sigma, b)$  para  $r = 100$ . Para a construção destas figuras foi considerado o valor do maior expoente de Lyapunov em cada ponto de uma grade de  $10^3 \times 10^3$  pontos igualmente espaçados. O sistema foi integrado numericamente usando um algoritmo com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, antes do cálculo de cada

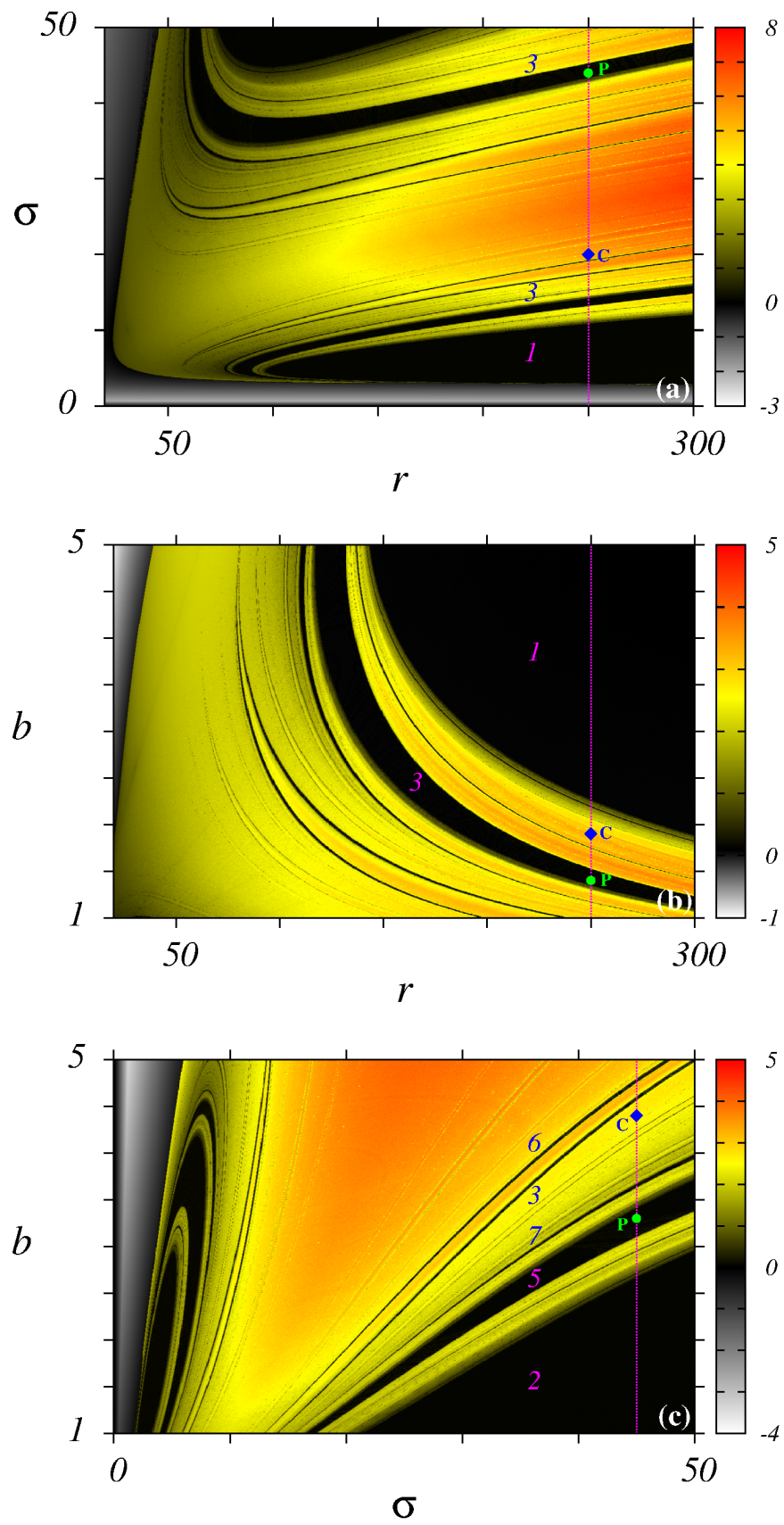


Figura 3.2 – Planos de parâmetros para o sistema 3.1. (a) Plano de parâmetros  $(r, \sigma)$ , para  $b = 8/3$ . (b) Plano de parâmetros  $(r, b)$  para  $\sigma = 10$ . (c) Plano de parâmetros  $(\sigma, b)$  para  $r = 100$ .



valor do maior expoente de Lyapunov. Utilizamos um passo fixo igual a  $10^{-4}$  e descartamos os primeiros  $1 \times 10^6$  passos de integração pois consideramos como transiente. Usamos  $(x_0, y_0, z_0) = (0,1; 0,2; 0,3)$  como condição inicial para a integração do sistema (3.1).

A cor nos planos de parâmetros da Figura 3.2 está relacionada à magnitude do maior expoente de Lyapunov. Indicamos um valor positivo para o maior expoente de Lyapunov por uma mudança contínua entre as cores amarela e vermelha, um valor negativo é indicado por uma mudança contínua entre as cores branca e preta e, a cor preta indica que o maior valor para o expoente de Lyapunov é zero. Esta escala é apresentada ao lado direito de cada plano de parâmetros. Assim, podemos identificar em qualquer um dos planos de parâmetros da Figura 3.2 uma grande região caótica, região de pontos de equilíbrio e regiões periódicas. Em meio as regiões caóticas, existem faixas periódicas em preto, para aquelas mais visíveis, identificamos seu período por um número.

Os períodos identificados na Figura 3.2 foram obtidos através de diagramas de bifurcações. A Figura 3.3 apresenta os diagramas de bifurcações para o sistema (3.1). O diagrama da Figura 3.3(a) foi construído variando  $\sigma$  ao longo da linha tracejada rosa  $r = 250$  na Figura 3.2(a). Na Figura 3.3(b) variamos  $b$  ao longo da linha tracejada rosa  $r = 250$  na Figura 3.2(b) e na Figura 3.3(c) consideramos a variação de  $b$  ao longo da linha tracejada rosa  $\sigma = 45$  na Figura 3.2(c). Podemos ver que para cada janela numerada com um período no diagrama de bifurcações, há uma estrutura periódica associada no plano de parâmetros da Figura 3.2, por exemplo, se olharmos para a Figura 3.2(c) ao longo de  $\sigma = 45$  veremos estruturas periódicas de períodos 2, 5, 7, 3 e 6 e estas estruturas estão associadas as janelas 2, 5, 7, 3 e 6 no diagrama de bifurcações da Figura 3.3(c).

Os diagramas apresentados consideraram  $10^3$  valores para cada respectivo parâmetro no eixo horizontal e são plotados os máximos locais da variável  $x$ , representados por  $x_m$ , para uma trajetória completa do atrator no espaço de fase, em função do respectivo parâmetro. O método Runge-Kutta de quarta ordem, com um passo de  $10^{-4}$  foi utilizado para a integração numérica envolvida.

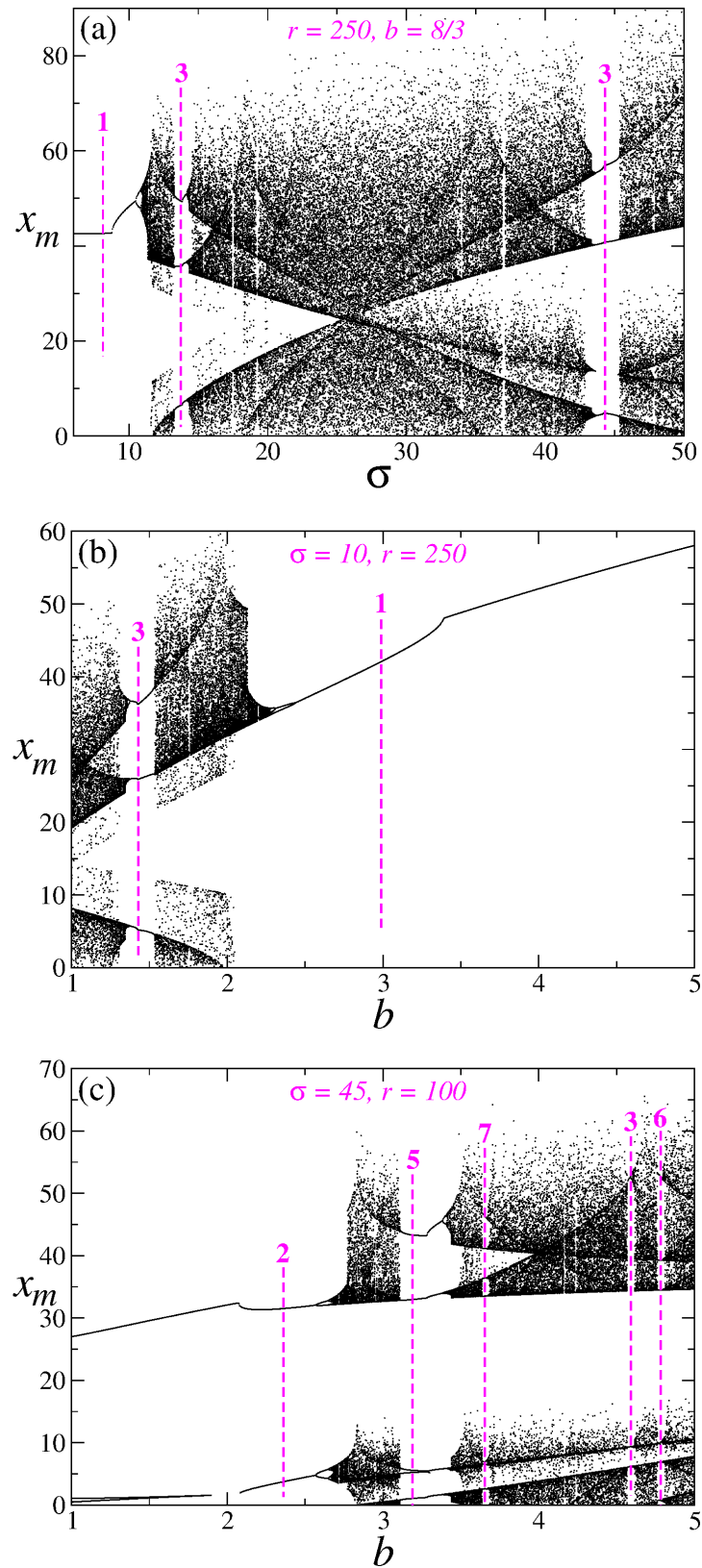


Figura 3.3 – Diagramas de bifurcações para o sistema 3.1. (a) foram considerados os pontos ao longo de  $r = 250$ , com  $b = 8/3$  na Figura 3.2(a). (b) foram considerados os pontos ao longo de  $r = 250$ , com  $\sigma = 10$  na Figura 3.2(b). (c) foram considerados os pontos ao longo de  $\sigma = 10$ , com  $r = 100$  na Figura 3.2(c).

A Figura 3.4 mostra os atratores periódicos e caóticos do sistema de Lorenz (3.1). Para a construção de cada trajetória periódica foram considerados  $20 \times 10^3$  passos de integração, após um transiente adequado, e para a construção de trajetórias caóticas foram considerados  $10 \times 10^4$  passos de integração.

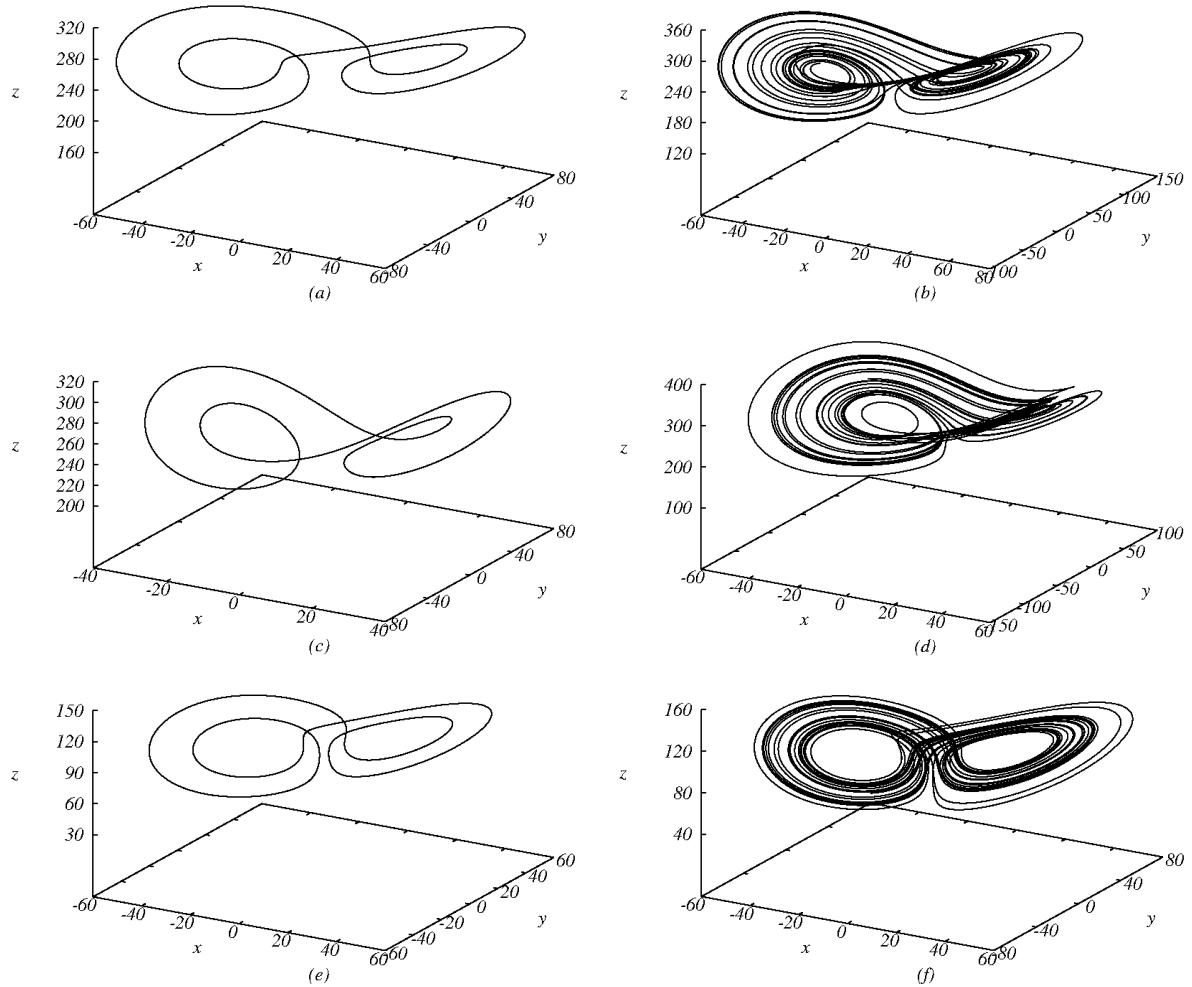


Figura 3.4 – Atratores do sistema 3.1. (a), (c) e (e) são trajetórias periódicas correspondentes a pontos nas estruturas periódicas das Figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(b). (b), (d) e (f) são trajetórias caóticas correspondentes a pontos na região entre as cores amarela e vermelha das Figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(b).

Os atratores periódicos estão nas Figuras 3.4(a), 3.4(c) e 3.4(e), para os quais foram utilizados os parâmetros  $(b, r, \sigma) = (8/3; 250; 44)$ ,  $(b, r, \sigma) = (1, 4; 250; 10)$  e  $(b, r, \sigma) = (3, 3; 100; 45)$ , respectivamente. Cada conjunto de parâmetros desses atratores periódicos localiza um ponto em uma estrutura periódica da Figura 3.2, assim os conjuntos de parâmetros para os atratores das Figuras 3.4(a), 3.4(c) e 3.4(e) localizam um ponto P na cor verde nas Figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(c), respectivamente. Os atratores caóticos estão

nas Figuras 3.4(b), 3.4(d) e 3.4(f), para os quais foram utilizados os parâmetros  $(b, r, \sigma) = (8/3; 250; 20)$ ,  $(b, r, \sigma) = (1, 9; 250; 10)$  e  $(b, r, \sigma) = (4, 4; 100; 45)$ , respectivamente. Cada conjunto de parâmetros desses atratores caóticos localiza um ponto na região entre as cores amarela e vermelha (maior expoente de Lyapunov positivo) da Figura 3.2, assim os conjuntos de parâmetros para os atratores das Figuras 3.4(b), 3.4(d) e 3.4(f) localizam um ponto C na cor azul nas Figuras 3.2(a), 3.2(b) e 3.2(c), respectivamente.

Nesta seção dedicamo-nos a apresentar brevemente o sistema de Lorenz [2], uma vez que este modelo é um dos sistemas mais estudados na área de dinâmica não-linear. Nosso objetivo é comparar os planos de parâmetros dos modelos de Lorenz 5D e 6D, com aqueles do modelo de Lorenz original (3.1). Por este motivo, as Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 foram construídas e apresentadas. Para um estudo aprofundado sobre o sistema (3.1) temos o livro de Sparrow [27], e mais resumidamente encontramos em Dullin [26].

## 3.2 Lorenz 5D

O sistema proposto por Shen [3] em 2013, dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= rx - y - xz, \\
 \dot{z} &= xy - bz - xv, \\
 \dot{v} &= xz - 2xu - (1 + 2b)v, \\
 \dot{u} &= 2xv - 4bu,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

é um sistema autônomo com cinco equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Em comparação com o sistema (3.1) vemos duas novas variáveis,  $v$  e  $u$ . Conforme mencionamos no capítulo anterior, a origem do caos está nas não-linearidades presentes nos sistemas e, notando que há duas não-linearidades a mais,  $xv$  nas equações para  $\dot{z}$  e  $\dot{u}$  e,  $xu$  na equação para  $\dot{v}$ , podemos sugerir que as soluções para este sistema serão mais caóticas do que aquelas encontradas para o sistema (3.1). O sistema de Lorenz original é

facilmente recuperado se fizermos  $v = u = 0$ .

Para este sistema foram obtidos planos de parâmetros com os mesmos intervalos e valores de parâmetros fixos que aqueles construídos para o sistema (3.1). Também obtivemos diagramas de bifurcações e atratores. Estes são apresentados no capítulo seguinte.

### 3.3 Lorenz 6D

O sistema proposto por Shen [4] em 2015 é um sistema autônomo com seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Este sistema é dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= rx - y - xz + zv - 2vw, \\
 \dot{z} &= xy - bz - xu - yv, \\
 \dot{v} &= -(1 + 2b)\sigma v + \frac{\sigma}{(1 + 2b)}u, \\
 \dot{u} &= xz - 2xw + rv - (1 + 2b)u, \\
 \dot{w} &= 2xu + 2yv - 4bw.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Olhando para o sistema (3.3) notamos a presença de uma nova variável,  $w$  em comparação ao sistema (3.2). Também encontramos duas novas não-linearidades neste modelo:  $yv$  nas equações para  $\dot{z}$  e  $\dot{w}$  e;  $xw$  na equação para  $\dot{u}$ . Novamente podemos retornar ao sistema original de Lorenz fazendo, agora,  $v = u = w = 0$ , porém não conseguimos retornar ao sistema (3.2) fazendo  $w = 0$ . Construímos planos de parâmetros para este sistema com os mesmos intervalos e valores de parâmetros fixos que aqueles construídos para o sistema (3.1). Também obtivemos diagramas de bifurcações e atratores. Estes são apresentados no capítulo seguinte.

Nosso estudo não tem foco na forma como foram obtidos os modelos de Lorenz 5D e Lorenz 6D, para discussões sobre isto recomendamos a leitura dos artigos de Shen [3, 4] e para outros modelos generalizados do Lorenz, sugerimos Roy [28, 29].

# Capítulo 4

## RESULTADOS

Neste capítulo expomos os resultados obtidos para os sistemas (3.2) e (3.3). Para o processo de integração, utilizamos nos programas o método de Runge-Kutta de quarta ordem [30], com passo fixo igual a  $10^{-4}$ . Para as condições iniciais, utilizamos  $(x_0, y_0, z_0, v_0, u_0) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5)$  para o Lorenz 5D e  $(x_0, y_0, z_0, v_0, u_0, w_0) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6)$  para o Lorenz 6D. A fim de comparar os modelos de diferentes dimensões construímos planos de parâmetros, diagramas de bifurcações e atratores, sendo estes apresentados a seguir.

### 4.1 Lorenz 5D

Os planos de parâmetros obtidos para o modelo de Lorenz 5D são apresentados na Figura 4.1, estes foram obtidos da mesma maneira que os planos de parâmetros da Figura 3.2. Na Figura 4.1(a) temos o plano de parâmetros  $(r, \sigma)$  para  $b = 8/3$ , em (b) o plano de parâmetros  $(r, b)$  para  $\sigma = 10$  e em (c) o plano de parâmetros  $(\sigma, b)$  para  $r = 100$ . Assim como nos planos de parâmetros para o sistema (3.1), as cores estão relacionadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov.

As Figuras 3.2 e 4.1 tem aparência similar. Porém, a área coberta pelo caos é maior para o sistema (3.2) do que para o Lorenz 3D. Também notamos que algumas faixas pretas, onde temos o comportamento periódico, presentes no sistema 3D, não se encontram nos

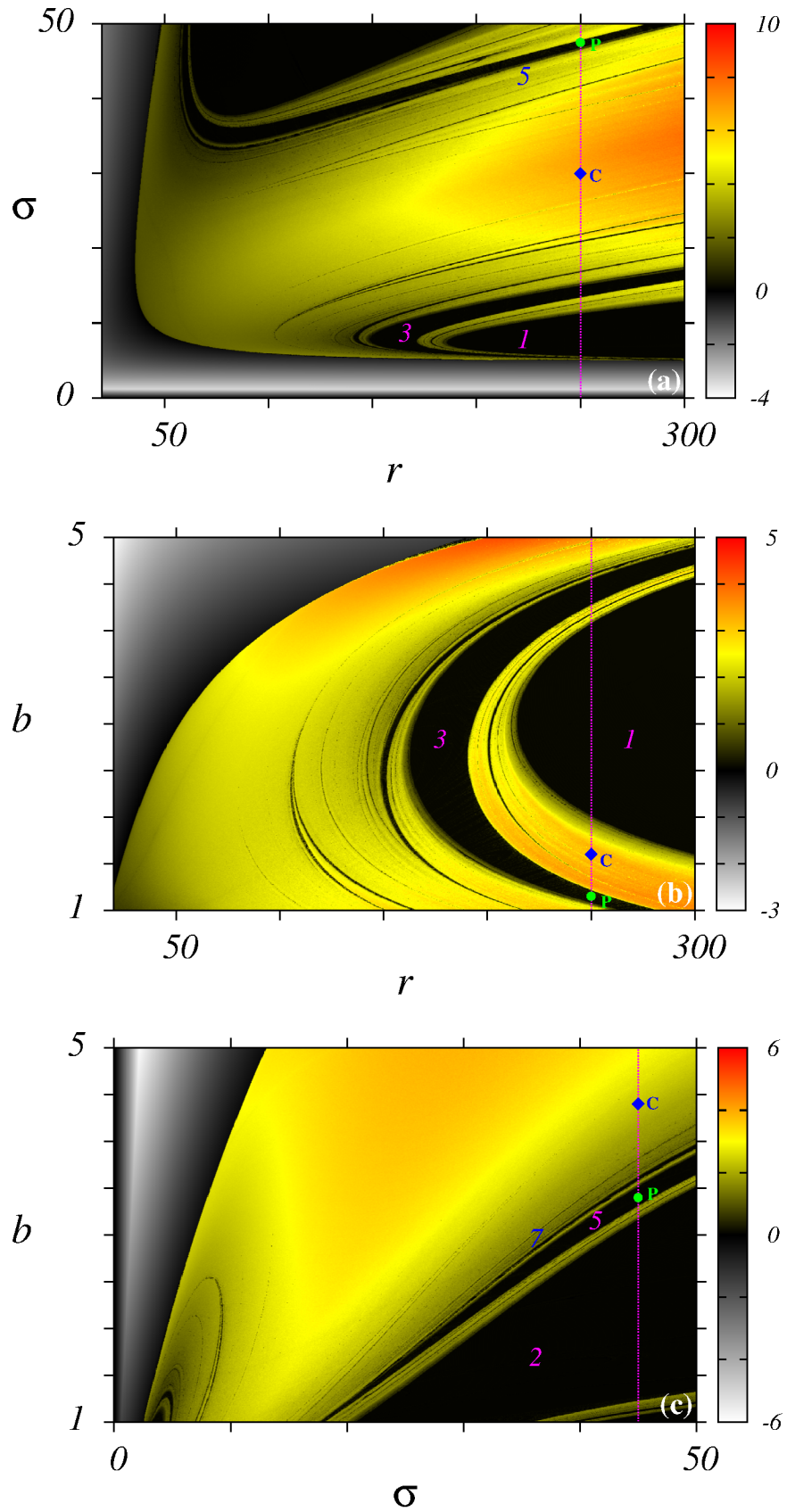


Figura 4.1 – Planos de parâmetros para o sistema 3.2. (a) Plano de parâmetros  $(r, \sigma)$ , para  $b = 8/3$ . (b) Plano de parâmetros  $(r, b)$  para  $\sigma = 10$ . (c) Plano de parâmetros  $(\sigma, b)$  para  $r = 100$ .

planos de parâmetros para o sistema 5D, como é o caso das faixas de período 6 e 3 que aparecem nitidamente na Figura 3.2(c) e não na Figura 4.1(c). Ainda, notamos que a faixa de período 3 mais acima na Figura 3.2(a), tem período 5 na Figura 4.1(a). O intervalo de valores para o maior expoente de Lyapunov é aumentado para o sistema (3.2), assim como o valor do limite superior do intervalo, exceto para o caso envolvendo os parâmetros  $(r, b)$ , por exemplo, para a Figura 3.2(a) o valor mais alto para o maior expoente de Lyapunov é 8, já para a Figura 4.1 o valor é 10.

O início do comportamento caótico nas Figuras 4.1(a) e 4.1(b) necessita de um valor maior para o parâmetro  $r$  em comparação ao modelo 3D. Na Figura 3.2(a) temos início do caos para  $\sigma = 50$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 46,08$ , já para a Figura 4.1(a) temos que o caos inicia em  $\sigma = 50$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 49,18$ . Isto também ocorre nas Figuras 3.2(b), onde encontramos comportamento periódico em  $\sigma = 10$ ,  $b = 5$  e  $r = 39,29$  e para a Figura 4.1(b), tal comportamento inicia em  $r = 197,52$ . Para os planos de parâmetros em (c) nas Figuras 3.2 e 4.1 observamos que para o início do comportamento caótico, é necessário um valor maior para o parâmetro  $\sigma$  no sistema 5D em comparação ao sistema 3D. Desta forma, vemos que na Figura 3.2(c) o caos tem início em  $b = 5$ ,  $r = 100$  e  $\sigma = 5,88$  enquanto que na Figura 4.1 este comportamento começa em  $b = 5$ ,  $r = 100$  e  $\sigma = 12,96$ .

Na Figura 4.2 são apresentados os diagramas de bifurcações para o sistema (3.2). O diagrama da Figura 4.2(a) foi obtido variando  $\sigma$  ao longo da linha tracejada rosa  $r = 250$  na Figura 4.1(a). Na Figura 4.2(b) variamos  $b$  ao longo da linha tracejada rosa  $r = 250$  na Figura 4.1(b) e na Figura 4.2(c) consideramos a variação de  $b$  ao longo da linha tracejada rosa  $\sigma = 45$  na Figura 4.1(c). Os períodos indicados nas Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(c) são corroborados pelos diagramas da Figura 4.2.

Notamos que os diagramas associados ao modelo de Lorenz 5D são deslocados para a direita em comparação aos diagramas para o modelo de Lorenz 3D, contudo eles são similares. Também, observamos que, independente do qual seja o parâmetro considerado na Figura 4.2, o início do comportamento caótico é atrasado para o modelo de Lorenz 5D em comparação ao modelo 3D.

Os atratores para o sistema (3.2) estão na Figura 4.3. Para obtermos cada trajetória periódica foram considerados  $20 \times 10^3$  passos de integração, após um transiente adequado



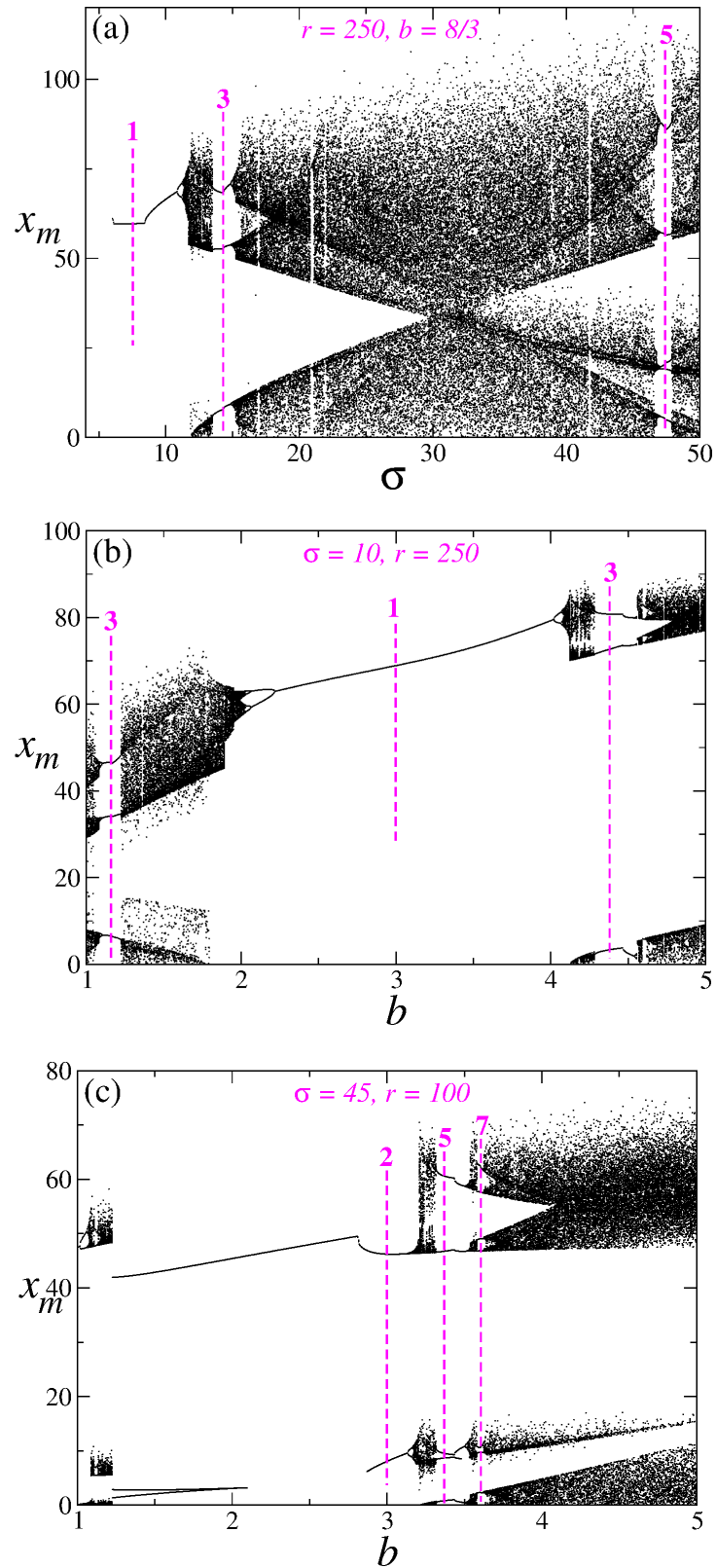


Figura 4.2 – Diagramas de bifurcações para o sistema 3.2. (a) foram considerados os pontos ao longo de  $r = 250$ , com  $b = 8/3$  na Figura 4.1(a). (b) foram considerados os pontos ao longo de  $r = 250$ , com  $\sigma = 10$  na Figura 4.1(b). (c) foram considerados os pontos ao longo de  $\sigma = 10$ , com  $r = 100$  na Figura 4.1(c).

e para as trajetórias caóticas foram considerados  $10 \times 10^4$  passos de integração.

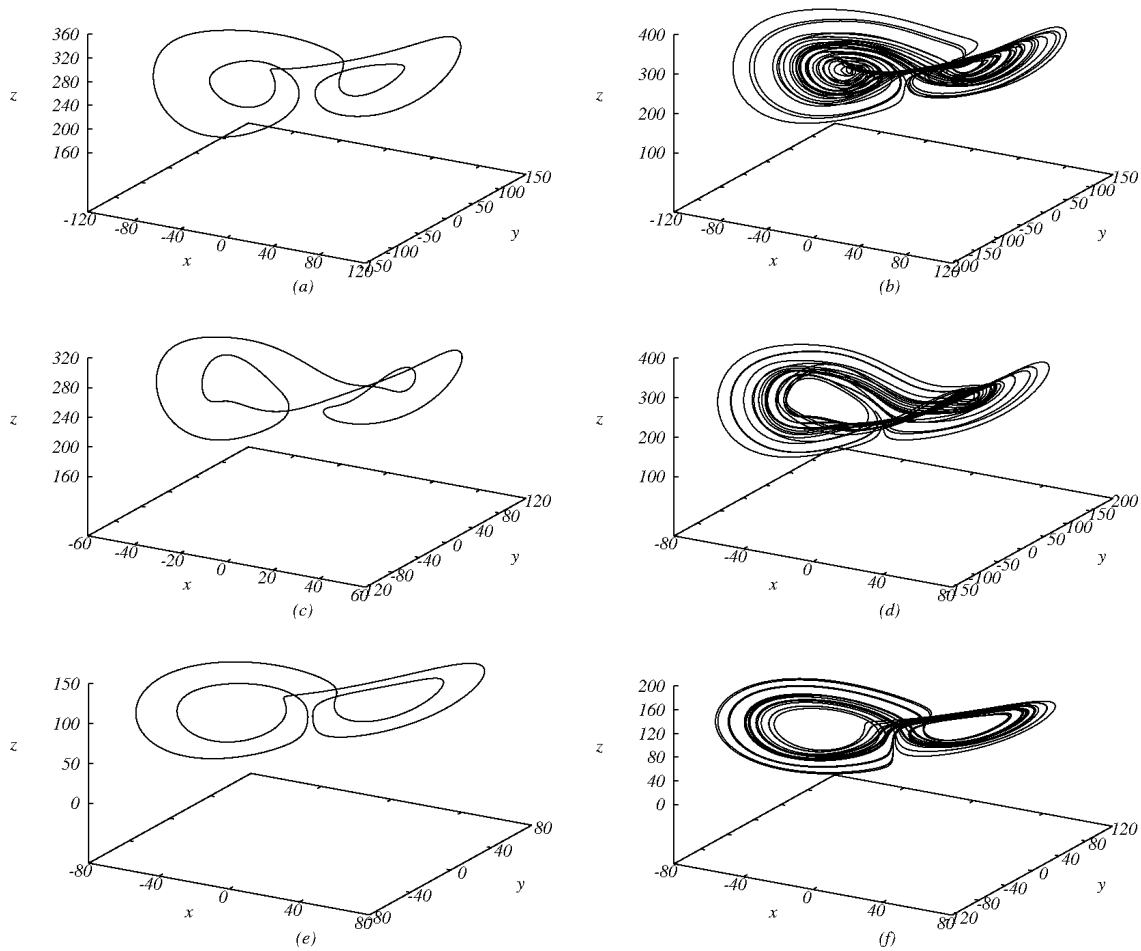


Figura 4.3 – Atratores do sistema 3.2. (a), (c) e (e) são trajetórias periódicas correspondentes a pontos nas estruturas periódicas das Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(b). (b), (d) e (f) são trajetórias caóticas correspondentes a pontos na região entre as cores amarela e vermelha das Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(b).

Os atratores periódicos estão nas Figuras 4.3(a), 4.3(c) e 4.3(e), para os quais foram utilizados os parâmetros  $(b, r, \sigma) = (8/3; 250; 47,5)$ ,  $(b, r, \sigma) = (1,15; 250; 10)$  e  $(b, r, \sigma) = (3,4; 100; 45)$ , respectivamente. Cada conjunto de parâmetros desses atratores periódicos localiza um ponto em uma das faixas pretas da Figura 4.1, assim os conjuntos de parâmetros para os atratores das Figuras 4.3(a), 4.3(c) e 4.3(e) localizam um ponto P na cor verde nas Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(c), respectivamente. Os atratores caóticos estão nas Figuras 4.3(b), 4.3(d) e 4.3(f), para os quais foram utilizados os parâmetros  $(b, r, \sigma) = (8/3; 250; 30)$ ,  $(b, r, \sigma) = (1,6; 250; 10)$  e  $(b, r, \sigma) = (4,4; 100; 45)$ , respectivamente. Cada conjunto de parâmetros desses atratores caóticos localiza um ponto na

região amarela a vermelha (maior expoente de Lyapunov positivo) da Figura 4.1, assim os conjuntos de parâmetros para os atratores das Figuras 4.3(b), 4.3(d) e 4.3(f) localizam um ponto P na cor verde nas Figuras 4.1(a), 4.1(b) e 4.1(c), respectivamente.. Percebemos que a forma dos atratores é preservada ao compararmos os atratores obtidos para o sistema 5D, na Figura 4.3 com aqueles obtidos para o sistema 3D, na Figura 3.4.

## 4.2 Lorenz 6D

Na Figura 4.4 são apresentados os planos de parâmetros para o sistema (3.3). Estas figuras foram obtidas pelo mesmo procedimento adotado para os outros modelos, porém com uma condição inicial a mais, para a variável  $w$ . A Figura 4.4(a) mostra o plano de parâmetros  $(r, \sigma)$  para  $b = 8/3$ , em (b) o plano de parâmetros  $(r, b)$  para  $\sigma = 10$  e em (c) o plano de parâmetros  $(\sigma, b)$  para  $r = 100$ . As cores estão relacionadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, tal qual foi indicado para os modelos 3D e 5D.

Assim como verificou-se para o caso 5D, a área coberta pelo caos é maior nos planos de parâmetros da Figura 4.4 em comparação aos planos de parâmetros das Figuras 4.1 e 3.2. Novamente, temos o intervalo de valores para o maior expoente de Lyapunov aumentado, assim como o valor do limite superior, exceto o caso envolvendo os parâmetros  $(r, \sigma)$ . Nota-se que o aumento é mais expressivo neste sistema do que o aumento para o sistema (3.2), por exemplo, nos planos de parâmetros em (b), nas Figuras 4.1 e 4.4, vemos que o limite superior passou de 5 (modelo 5D) para 20 (modelo 6D). Igualmente ocorre para os planos de parâmetros em (c) nas Figuras 4.1 e 4.4, onde o limite superior para o valor do maior expoente de Lyapunov muda de 6 para 14.

Para o início do comportamento caótico na Figura 4.4(a) é necessário um valor maior para o parâmetro  $r$  em comparação aos modelos 3D e 5D. Na Figura 3.2(a) temos início do caos para  $\sigma = 50$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 46,08$ , e na Figura 4.1(a) temos  $\sigma = 50$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 49,18$ , já para a Figura 4.4(a) temos que o caos inicia em  $\sigma = 50$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 52,51$ . Para a Figura 4.4(b) observamos que também é preciso um valor maior para o parâmetro

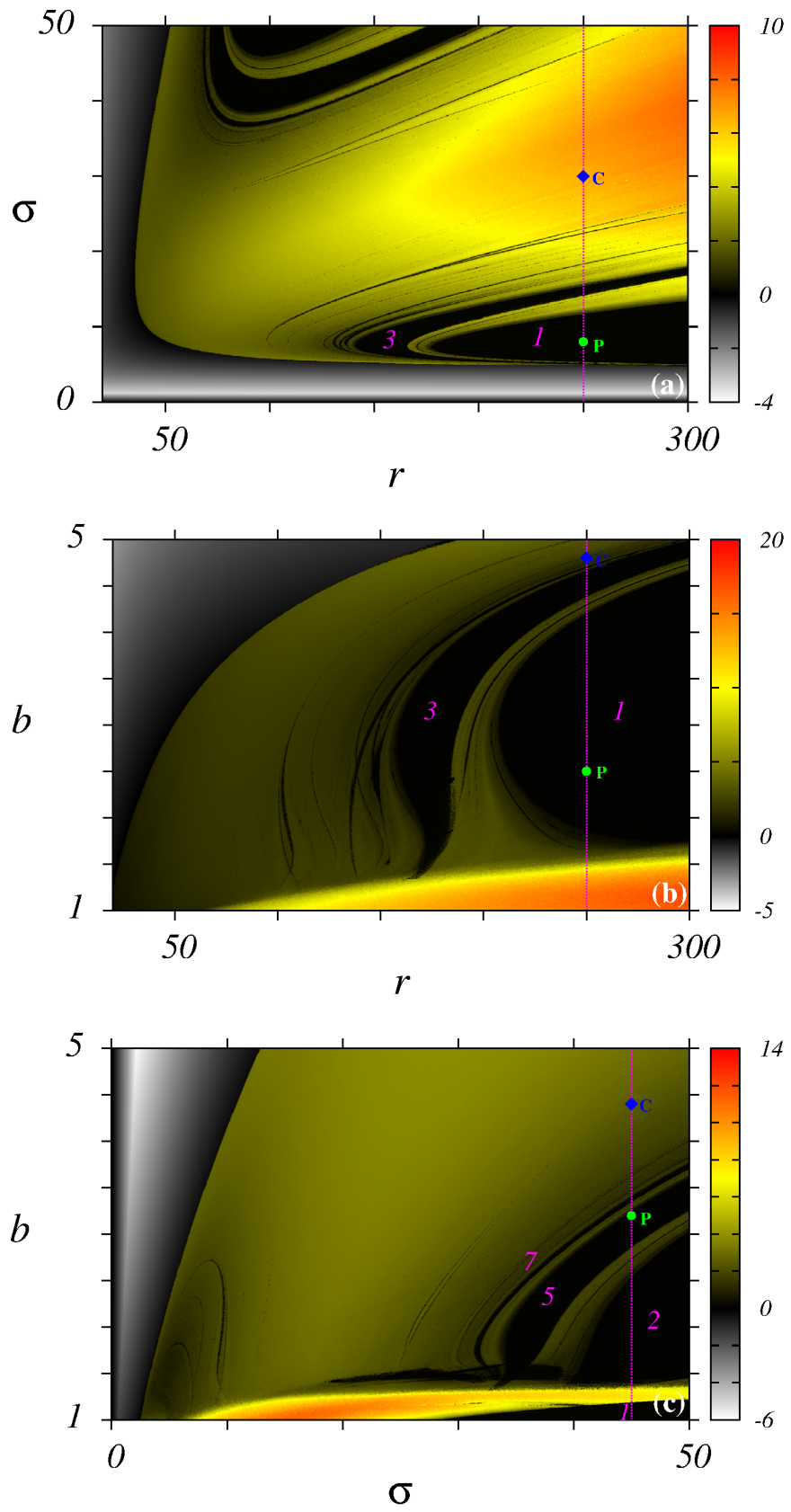


Figura 4.4 – Planos de parâmetros para o sistema 3.3. (a) Plano de parâmetros  $(r, \sigma)$ , para  $b = 8/3$ . (b) Plano de parâmetros  $(r, b)$  para  $\sigma = 10$ . (c) Plano de parâmetros  $(\sigma, b)$  para  $r = 100$ .

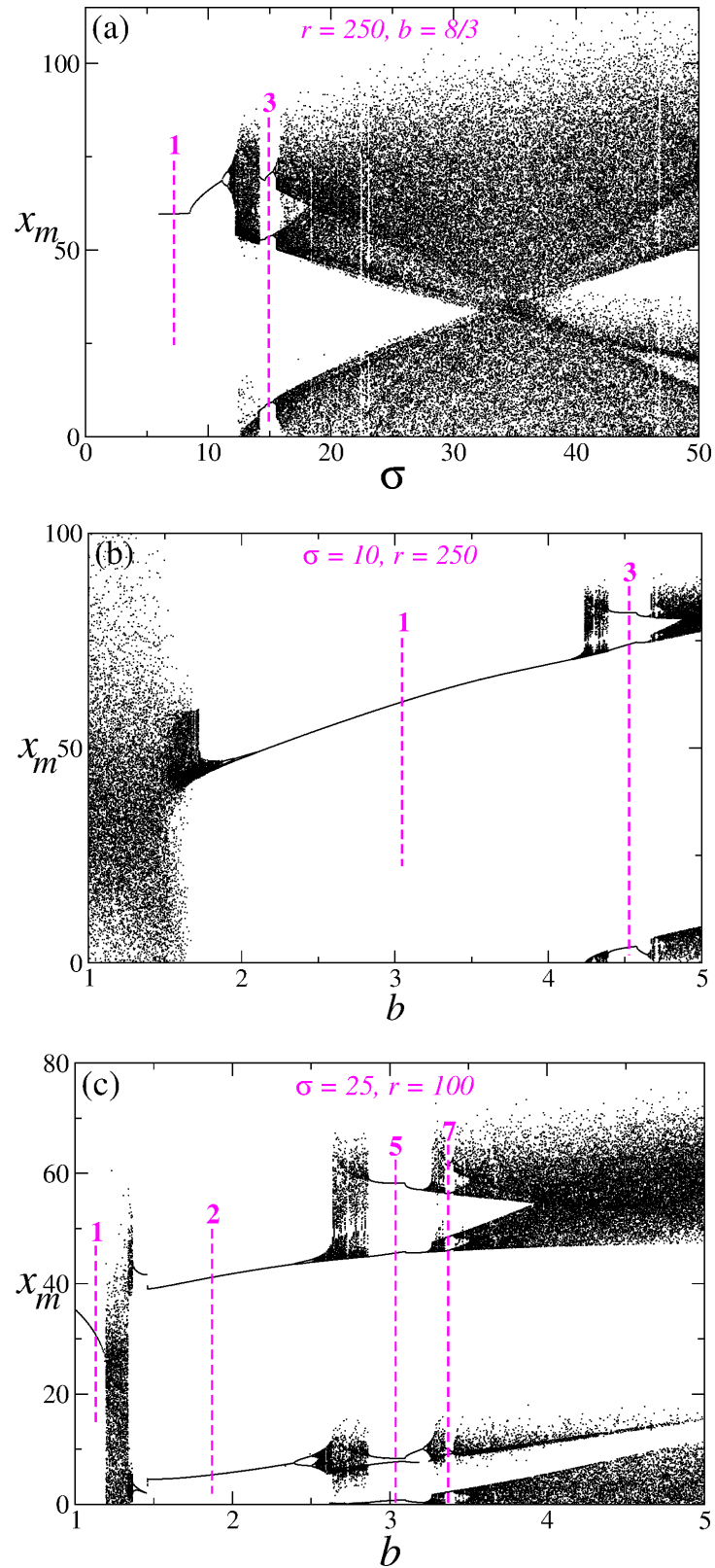


Figura 4.5 – Diagramas de bifurcações para o sistema 3.3. (a) foram considerados os pontos ao longo de  $r = 250$ , com  $b = 8/3$  na Figura 4.4(a). (b) foram considerados os pontos ao longo de  $r = 250$ , com  $\sigma = 10$  na Figura 4.4(b). (c) foram considerados os pontos ao longo de  $\sigma = 10$ , com  $r = 100$  na Figura 4.4(c).

$r$ , porém somente em comparação ao modelo 3D, pois para o modelo 6D temos que o caos inicia em  $\sigma = 10$ ,  $b = 5$  e  $r = 188,17$ , enquanto que para o 5D, temos  $r = 197,52$  e para o modelo 3D,  $r = 39,29$ . Isto também ocorre para o caso em (c). Se compararmos, o comportamento caótico é estabelecido em  $b = 5$ ,  $r = 100$  e  $\sigma = 12,81$  na Figura 4.4(c), enquanto que para a Figura 4.1(c) tal comportamento começa em  $\sigma = 12,96$  e para a Figura 3.2(c), em  $\sigma = 5,88$ .

Apresentamos na Figura 4.5 os diagramas de bifurcações para o sistema (3.3). Para obtermos a Figura 4.5(a) variamos  $\sigma$  ao longo da linha tracejada rosa  $r = 250$ , na Figura 4.4(a). Em (b) variamos  $b$  ao longo da linha tracejada rosa  $r = 250$  na Figura 4.4(b) e na Figura 4.5(c) consideramos a variação de  $b$  ao longo da linha tracejada rosa  $\sigma = 45$  na Figura 4.4(c). Podemos observar que os períodos indicados nos planos de parâmetros para o sistema (3.3) são confirmados nos diagramas de bifurcações apresentados.

Podemos observar que existem semelhanças entre os diagramas da Figura 4.5 e 4.2, porém para as regiões com altos valores do maior expoente de Lyapunov, nas Figuras 4.5(b) e 4.5(c), podemos observar que os diagramas para o modelo 6D e 5D se diferenciam. A região que possui período 3 na Figura 4.2(b) e a região de período 1 na Figura 4.2(c) aparecem como regiões de comportamento caótico nas Figuras 4.5(b) e 4.5(c), respectivamente.

Apresentamos na Figura 4.6 os atratores para o modelo de Lorenz 6D. Novamente, vemos que a forma dos atratores não muda, independentemente dele ser periódico ou caótico. Os atratores periódicos estão nas Figuras 4.6(a), 4.6(c) e 4.6(e), para os quais foram utilizados os parâmetros  $(b, r, \sigma) = (8/3; 250; 8)$ ,  $(b, r, \sigma) = (2,5; 250; 10)$  e  $(b, r, \sigma) = (3,2; 100; 45)$ , respectivamente. Cada conjunto de parâmetros desses atratores periódicos localiza um ponto em uma das faixas pretas da Figura 4.4, assim os conjuntos de parâmetros para os atratores das Figuras 4.6(a), 4.6(c) e 4.6(e) localizam um ponto P na cor verde nas Figuras 4.4(a), 4.4(b) e 4.4(c), respectivamente. Os atratores caóticos estão nas Figuras 4.6(b), 4.6(d) e 4.6(f), para os quais foram utilizados os parâmetros  $(b, r, \sigma) = (8/3; 250; 30)$ ,  $(b, r, \sigma) = (4,8; 250; 10)$  e  $(b, r, \sigma) = (4,4; 100; 45)$ , respectivamente. Cada conjunto de parâmetros desses atratores caóticos localiza um ponto na região amarela a vermelha (maior expoente de Lyapunov positivo) da Figura 4.4, assim

os conjuntos de parâmetros para os atratores das Figuras 4.6(b), 4.6(d) e 4.6(f) localizam um ponto P na cor verde nas Figuras 4.4(a), 4.4(b) e 4.4(c), respectivamente. Da mesma maneira que fizemos para os atratores dos sistemas (3.1) e (3.2), na construção de cada trajetória periódica foram considerados  $20 \times 10^3$  passos de integração, após um transiente adequado e para as trajetórias caóticas foram considerados  $10 \times 10^4$  passos de integração.

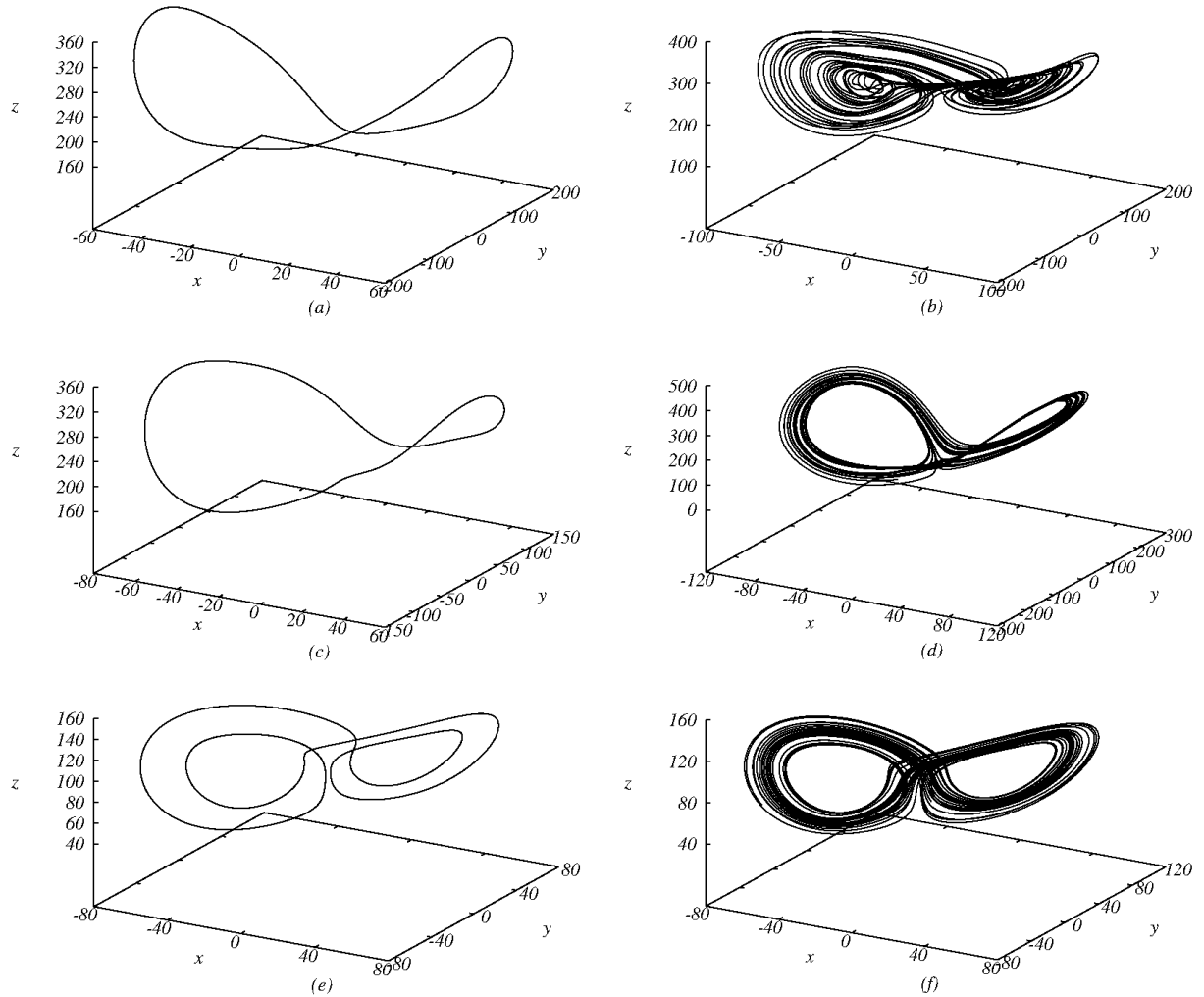


Figura 4.6 – Atratores do sistema 3.3. (a), (c) e (e) são trajetórias periódicas. (b), (d) e (f) são trajetórias caóticas.

### 4.3 Hipercaos

Uma vez que os sistemas estudados neste trabalho são de cinco e seis dimensões e com a compreensão de um sistema hipercaótico como um sistema caótico com pelo menos

dois expoentes de Lyapunov positivos, investigamos nesta seção a existência de regiões hipercaóticas nos modelos de Lorenz 5D e 6D.

Para estes modelos, quando o maior expoente de Lyapunov é maior que zero, ainda existe a possibilidade de termos mais dois expoentes de Lyapunov positivos para o caso 5D e mais três expoente de Lyapunov positivos para o caso 6D. Assim, verificamos a possibilidade de um sistema hipercaótico com até três expoentes positivos para o sistema (3.2) e com até quatro expoentes positivos para o sistema (3.3). Para isso, utilizamos o método [31, 32] que considera formas alternativas para caracterizar numericamente regiões com comportamento hipercaótico, em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos modelados por um conjunto de pelo menos quatro equações diferenciais ordinárias não lineares autônomas de primeira ordem.

Para os planos de parâmetros para o Lorenz 5D, levamos em consideração os três maiores expoentes de Lyapunov, para construir três conjuntos de planos de parâmetros, um para cada um dos três expoentes de Lyapunov. Para o caso 6D, tomamos os quatro maiores expoentes de Lyapunov para a construção de quatro conjuntos de plano de parâmetros, novamente, um para cada expoente. Estes conjuntos de planos de parâmetros nada mais são que os planos de parâmetros para  $(\sigma, r)$ ,  $(b, r)$  e  $(b, \sigma)$  considerando cada um dos três (quatro) maiores expoentes de Lyapunov para o modelo 5D (6D).

A Figura 4.7 apresenta os planos de parâmetros para o modelo 5D, onde em (a), (c) e (e) utilizamos os segundos maiores expoentes de Lyapunov e em (b), (d) e (f) os terceiros. Uma região hipercaótica com dois expoentes de Lyapunov positivos estaria associada a uma região em comum às Figuras 4.1(a) e 4.7(a) ou 4.1(b) e 4.7(c) ou 4.1(c) e 4.7(e), sendo estas regiões coloridas de amarelo a vermelho, enquanto que uma região hipercaótica com três expoentes de Lyapunov positivos estaria associada a uma região em comum às Figuras 4.1(a) e 4.7(b) ou 4.1(b) e 4.7(d) ou 4.1(c) e 4.7(f), sendo estas regiões coloridas de amarelo a vermelho. Vemos que não há regiões coloridas comuns às figuras citadas acima e não existem regiões pintadas de amarelo a vermelho na Figura 4.7, logo não há comportamento hipercaótico para o modelo 5D com estas variações para os parâmetros.



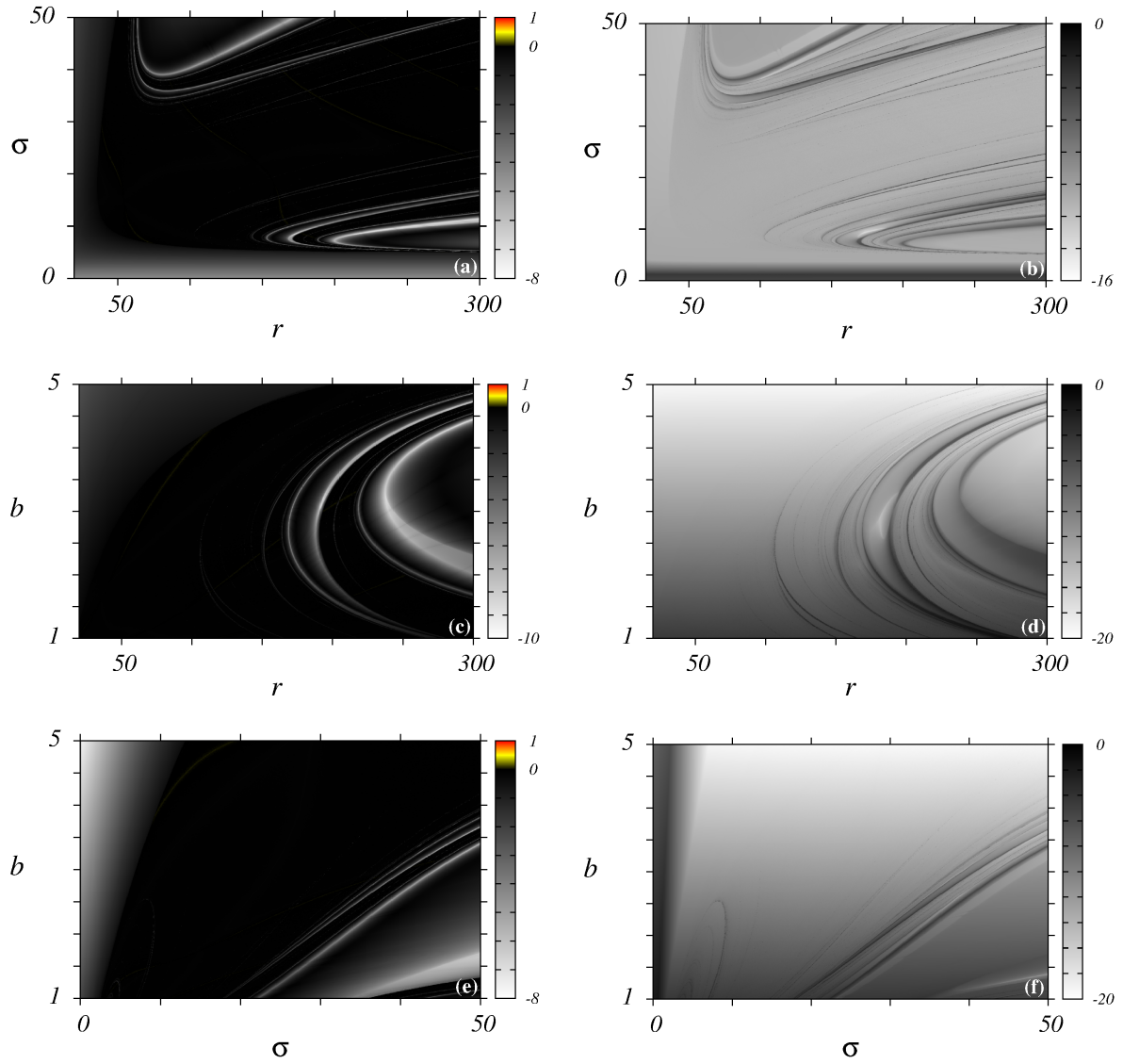


Figura 4.7 – Regiões com comportamentos dinâmicos diferentes. (a), (c), (e) O segundo maior expoente de Lyapunov para o modelo 5D. (b), (d), (f) O terceiro maior expoente de Lyapunov para o modelo 5D.

Já a Figura 4.8 mostra os planos de parâmetros para o modelo 6D onde consideramos o segundo maior expoente de Lyapunov. Analisando as Figura 4.4 e Figura 4.8 podemos ver que há regiões comuns coloridas de amarelo a vermelho nos planos de parâmetros para  $(b, r)$  e  $(b, \sigma)$ , desta maneira concluímos que para os parâmetros associados à região colorida de amarelo a vermelho nas Figuras 4.8(b) e 4.8(c) o comportamento dinâmico do sistema é dito hipercaótico com dois expoentes de Lyapunov positivos.

Verificamos ainda se há comportamento hipercaótico com três e quatro expoentes de Lyapunov positivos para o modelo 6D. Apresentamos na Figura 4.9 os planos de parâ-

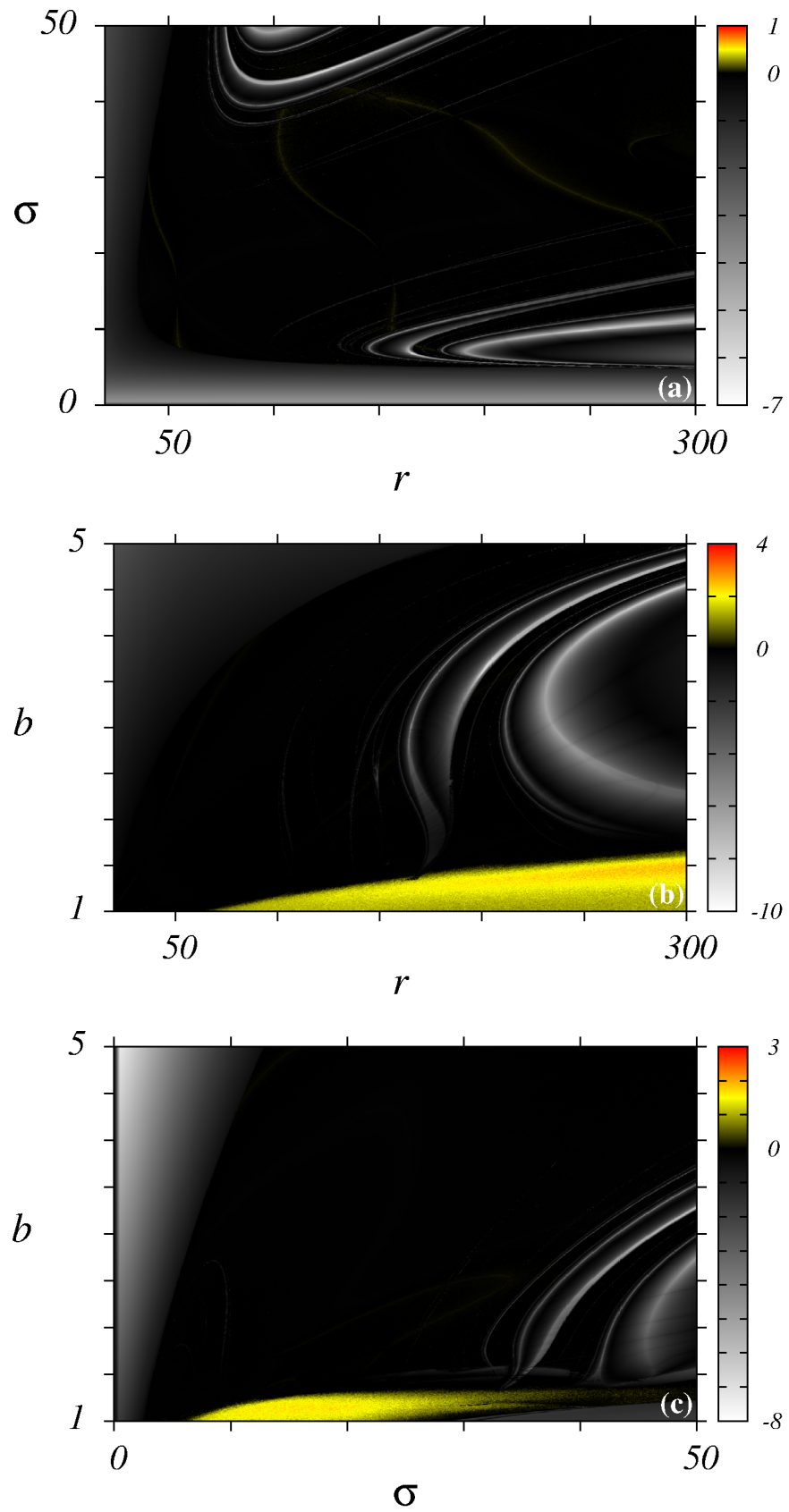


Figura 4.8 – Regiões com comportamentos dinâmicos diferentes. (a), (b), (c) O segundo maior expoente de Lyapunov para o modelo 6D.

tros para o modelo 6D, onde em (a), (c) e (e) utilizamos os terceiros maiores expoentes de Lyapunov e em (b), (d) e (f) os quartos maiores. Conforme observamos a Figura 4.9 vemos que não existem regiões com expoentes de Lyapunov positivos, as quais seriam coloridas de amarelo a vermelho nos planos de parâmetros. Assim não encontramos comportamento hipercaótico com três ou quatro expoentes de Lyapunov positivos para o modelo 6D com estas variações de parâmetros.

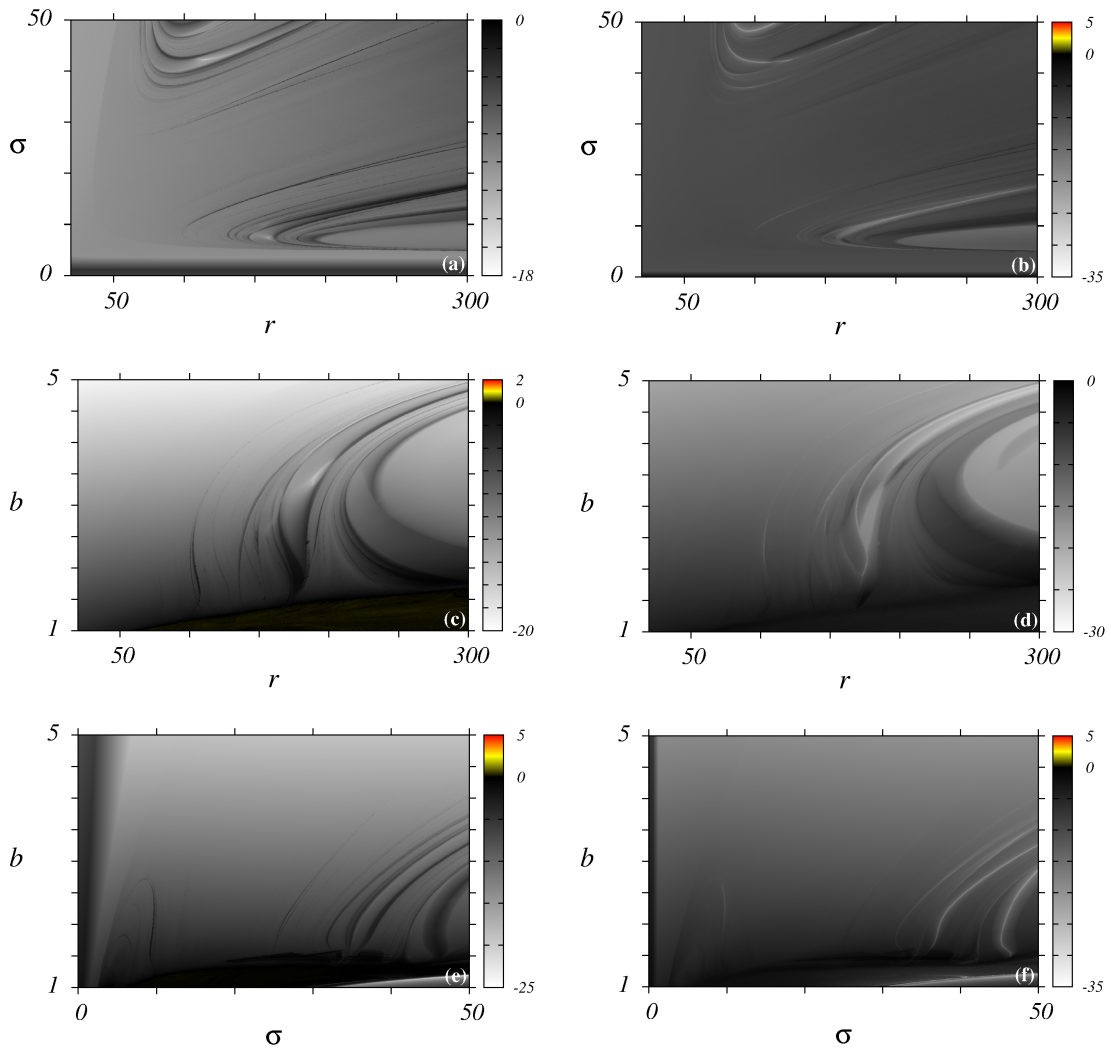


Figura 4.9 – Regiões com comportamentos dinâmicos diferentes. (a), (c), (e) O terceiro maior expoente de Lyapunov para o modelo 6D. (b), (d), (f) O quarto maior expoente de Lyapunov para o modelo 6D.

# Capítulo 5

## CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho concentrou-se na investigação de diferenças entre modelos generalizados de Lorenz. O modelo de Lorenz 5D é um conjunto de cinco equações diferenciais ordinárias não-lineares autônomas e de primeira ordem e o modelo de Lorenz 6D possui seis equações diferenciais ordinárias não-lineares autônomas e de primeira ordem, ambos com três parâmetros de controle. Para estudarmos estes modelos utilizamos simulações numéricas para obtermos planos de parâmetros, diagramas de bifurcações e atratores. Os resultados para os modelos de Lorenz 5D e 6D foram comparados com os planos de parâmetros, diagramas de bifurcações e atratores do modelo de Lorenz clássico, resultados estes já conhecidos nas literaturas existentes.

Com relação aos planos de parâmetros, a área caracterizada pelo comportamento caótico aumenta quando consideramos ambos os modelos Lorenz generalizados. Ainda, o intervalo dos valores dos maiores expoentes de Lyapunov é aumentado, bem como seu limite superior, exceto no caso envolvendo os parâmetros  $(r, b)$  para o modelo de Lorenz 5D e os parâmetros  $(r, \sigma)$  para o modelo de Lorenz 6D. Para o início do comportamento caótico nas Figuras 4.1(a), 4.1(b), 4.4(a) e 4.4(b) é necessário um valor maior para o parâmetro  $r$  em comparação ao valor deste mesmo parâmetro no caso 3D. Em (c) nas Figuras 4.1 e 4.4 observamos que o comportamento caótico inicia para um maior valor para o parâmetro  $\sigma$  em comparação ao valor deste mesmo parâmetro no caso para o Lorenz clássico. Se a comparação for feita entre os dois modelos investigados neste trabalho, caso 5D e caso 6D, vemos que o comportamento caótico inicia com um valor de  $r$  maior

quando fixados  $b$  e  $\sigma$  para o caso 6D. Porém, quando fixamos  $r$  e  $b$ , vemos que o início do caos requer um maior valor para o parâmetro  $\sigma$  para o caso 5D. Os atratores caóticos e periódicos têm suas formas geométricas preservadas, assim como a forma dos diagramas de bifurcações.

Estudamos também a possibilidade de regiões hipercaóticas para os modelos 5D e 6D. Para os modelos estudados, quando o maior expoente de Lyapunov é maior que zero, ainda existe a possibilidade de termos mais dois expoentes de Lyapunov positivos para o caso 5D e mais três expoente de Lyapunov positivos para o caso 6D. Para estudar a presença de comportamento hipercaótico, utilizamos planos de parâmetros, nos quais construímos considerando os segundos e terceiros maiores expoentes de Lyapunov no caso 5D e considerando os segundos, terceiros e quartos maiores expoentes de Lyapunov para o caso 6D. A existência de uma região hipercaótica com dois expoentes de Lyapunov positivos nesses modelos é caracterizada pela presença de uma região comum aos planos de parâmetros para o maior expoente e para o segundo maior expoente de Lyapunov, sendo esta colorida de amarelo a vermelho. Uma região de comportamento hipercaótico com três expoentes de Lyapunov é caracterizada por uma região comum aos planos de parâmetros para o maior expoente, para o segundo maior e para o terceiro maior expoente de Lyapunov, sendo esta colorida de amarelo a vermelho nestes planos de parâmetros. Para hipercaos com quatro expoentes de Lyapunov, deveríamos encontrar no plano de parâmetros construído considerando o quarto maior expoente de Lyapunov, uma região colorida de amarelo a vermelho. Verificamos que para o modelo 5D não há hipercaos, pelo menos para os intervalos de parâmetros aqui estudados. Já nos planos de parâmetros  $(r, b)$  e  $(\sigma, b)$  construídos para o segundo maior expoente de Lyapunov para o caso 6D encontramos regiões coloridas de amarelo a vermelho, caracterizando regiões de comportamento hipercaótico. Para os planos de parâmetros construídos considerando o terceiro e o quarto maior expoente de Lyapunov não observamos regiões hipercaóticas.

O estudo destes modelos generalizados do Lorenz e a comparação feita dos resultados obtidos com aqueles já conhecidos para o modelo clássico de Lorenz proporcionou-nos a elaboração e publicação de um artigo intitulado *On the dynamics of five- and six-dimensional Lorenz models* [33].

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 MONTEIRO, L.H.A. **Sistemas Dinâmicos**. 3ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- 2 LORENZ, E.N. **Deterministic Nonperiodic Flow**. Journal of the Atmospheric Sciences, v. 20, 1963.
- 3 SHEN, B.W. **Nonlinear Feedback in a Five-Dimensional Lorenz Model**. Journal of the Atmospheric Sciences, v. 71, 2013.
- 4 SHEN, B.W. **Nonlinear Feedback in a Six-Dimensional Lorenz Model: Impact of an additional heating term**. Nonlinear Processes in Geophysics, v. 22, 2015.
- 5 OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. Nova York: Cambridge University Press, 2000.
- 6 ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. **Chaos An Introduction to Dynamical Systems**. Nova York: Springer, 1996.
- 7 GALLAS, J.A.C. **The Structure of Infinite Periodic and Chaotic Hub Cascades in Phase Diagrams of Simple Autonomous Flows**. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 20, 2010.

- 
- 8 ALBUQUERQUE, H.A.; RECH, P.C. **Spiral Periodic Structure Inside Chaotic Region in Parameter-Space of Chua Circuit**. International Journal of Circuit Theory and Applications, v. 40, 2012.
  - 9 FELICIO, C.C.; RECH, P.C. **Arnold Tongues and the Devil's Staircase in a Discrete-Time Hindmarsh-Rose Neuron Model**. Physics Letters A, v. 379, 2015.
  - 10 PRANTS, F.G.; RECH, P.C. **Organization of Periodic Structures in a Damped-Forced Oscillator**. European Physical Journal B, v. 87, 2014.
  - 11 DEVANEY, R.L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
  - 12 ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. **Ergodic theory of chaos and strange attractors**. Reviews of Modern Physics, v. 57, p. 617, 1985.
  - 13 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3ª edição. San Francisco: Addison-Wesley Publishing Company, 2002.
  - 14 MARION, J. B.; THORNTON, S.T. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 4ª edição. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2005.
  - 15 KUZNETSOV, I. **Elements of applied bifurcation theory**. New York: Springer, 1998.
  - 16 ALBUQUERQUE, J.; RUBINGER, R.M.; RECH, P.C. **Self-Similar Structures in a 2D Parameter-Space of an Inductorless Chua's Circuit**. Physics Letters A, v. 372, 2008.
  - 17 BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. **Periodicity Hub and Nested Spirals in the Phase Diagram of a Simple Resistive Circuit**. Physical Review Letters, v. 101, 2008.
  - 18 BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. **Accumulation Horizons and Period Adding in Optically Injected Lasers**. Physical Review E, v. 75, 2007.

- 
- 19 KRÜGER, T.S.; RECH, P.C. **Dynamics of an Erbium-Doped Fiber Dual-Ring Laser**. European Physical Journal D, v. 66(1), 2012..
- 20 LI, X-F.; ANDREW, Y.-T.L.; CHU, Y-D. **Symmetry and Period-Adding Windows in a Modified Optical Injection Semiconductor Laser Model**. Chinese Physics Letters, v. 29, 2012.
- 21 STEGEMANN, C.; RECH, P.C. **Organization of Chaos and Periodicity in a Three-Dimensional Cancer Model**. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 24(2), 2014.
- 22 RECH, P.C. **How to embed shrimps in parameter planes of the Lorenz system**. Physica Scripta, v. 92(4), 2017.
- 23 SALTZMAN, B. **Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem - I**. Journal of the Atmospheric Sciences, v. 19, 1962.
- 24 RAYLEIGH, L. **On the Convective Currents in a Horizontal Layer of Fluid When the Higher Temperatures is on the Under Side**. Philosophical Magazine, v. 32, 1916.
- 25 BÉNARD, H. **Les Tourbillons Cellulaires dans une nappe liquide**. Revue Générale des Sciences pures et appliquées, v. 11, 1900.
- 26 DULLIN, H.R.; SCHMIDT, S.; RICHTER, P.H.; GROSSMANN, S.K. **Extended Phase Diagram of the Lorenz Model**. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 17, 2007.
- 27 SPARROW, C. **The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors**. New York: Springer Verlag, 1982.
- 28 ROY, D.; MUSIELAK, Z.E. **Generalized Lorenz Models and their Routes to Chaos. I. Energy-conserving Vertical Mode Truncations**. Chaos, Solitons and Fractals, v. 32, 2007.



- 
- 29 ROY, D.; MUSIELAK, Z.E. **Generalized Lorenz Models and their Routes to Chaos. II. Energy-conserving Horizontal Mode Truncations.** Chaos, Solitons and Fractals, v. 31, 2007.
- 30 BUTCHER, J.C. **Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.** 2<sup>a</sup> edição. New Zealand: University of Auckland, 2008.
- 31 CORREIA, M.J.; RECH, P.C. **Numerical Characterization of Hyperchaos States in a Parameter-Space.** Applied Mathematics and Computation, v. 218, 2012.
- 32 RECH, P.C. **Delimiting Hyperchaotic Regions in Parameter Planes of Continuous-Time Dynamical Systems.** Applied Mathematics and Computation, v. 247, 2014.
- 33 FELICIO, C.C.; RECH, P.C. **On the Dynamics of Five- and Six-Dimensional Lorenz Models.** Journal of Physics Communications, v. 2, 2018.