

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF
MESTRADO EM FÍSICA**

ANTÔNIO JOÃO FIDÉLIS

DINÂMICA DO MAPA LOGÍSTICO VIA SUPERTRACKS

Joinville / SC

2013

ANTÔNIO JOÃO FIDÉLIS

DINÂMICA DO MAPA LOGÍSTICO VIA SUPERTRACKS

Dissertação apresentada para a obtenção
do título de mestre em Física da Universi-
dade do Estado de Santa Catarina, Centro
de Ciências Tecnológicas – CCT.

Orientador: Luciano Camargo Martins, Dr.

Joinville / SC

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

F451d

Fidélis, Antônio João

Dinâmica do Mapa Logístico via *Supertracks* / Antônio João Fidélis; orientador: Luciano Camargo Martins. Joinville – 2013.

69 f. : il; 30 cm.

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2013.

1. Mapa logístico.
 2. Exponente de Lyapunov.
 3. Medida Invariante.
 4. Resultados algébricos.
 5. Período 3.
- I. Martins, Luciano Camargo.

CDD 531.1

“DINÂMICA DO MAPA LOGÍSTICO VIA SUPERTRACKS”

por

ANTÔNIO JOÃO FIDÉLIS

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

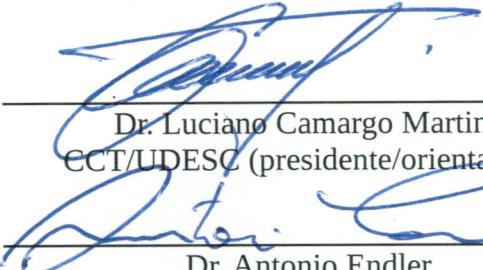
MESTRE EM FÍSICA

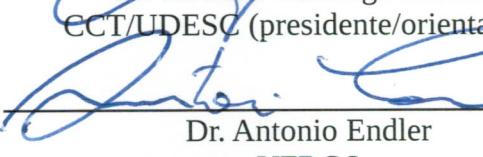
área de concentração em “Física”, e aprovada em sua forma final pelo

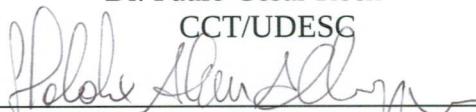
CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

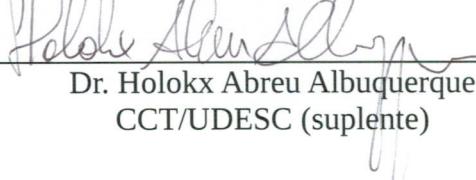
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.


Dr. Luciano Camargo Martins
CCT/UDESC (presidente/orientador)


Dr. Antonio Endler
UFRGS


Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC


Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC (suplente)

Banca Examinadora:

Joinville, 08 de março de 2013.

“As pessoas grandes adoram os números.”

Antoine de Saint-Exupéry em O Pequeno Príncipe

Agradecimentos

- Àquele que construiu o universo, por tê-lo feito não-linear;
- Aos meus pais, por todo amor, carinho, educação e dedicação;
- À minha namorada pelo apoio diário, amor, força e carinho demonstrados ininterruptamente, principalmente nos instantes mais difíceis;
- Ao meu orientador, pelo aceite da orientação, pelas conversas e discussões frutíferas e infrutíferas porém proveitosas, e pelas sugestões e críticas ao trabalho e às coisas da vida, além do mate diário;
- Aos amigos próximos e afastados, em especial ao Carlos, pela ajuda na docência, permitindo-me ter tempo para desenvolver este trabalho;
- Aos professores da pós-graduação, que muito me ensinaram: Paulo, pela competência e por apresentar materiais essenciais para desenvolvimento deste trabalho; Edgar – pelo incentivo; e Holokx – principalmente pelas decisões como Coordenador do Laboratório de Dinâmica Não Linear e do Programa de Pós-Graduação, assim como pela postura tomada à época do falecimento de nosso amigo João (*in memoriam*);
- Aos colegas de pós-graduação, que se ajudavam mostrando que a situação do outro era quase sempre pior que a nossa;
- Aos colegas do CAFI, do CAMAT, do caos e da UDESC, pela distração muitas vezes necessária;
- Aos meus colegas de trabalho na UDESC e no IFC-Araquari;

- Aos meus alunos, que mesmo que somente por educação mostravam interesse na minha dissertação; e
- À CAPES e aos meus pais pelo aporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo do mapa logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ através do formalismo de *supertracks*, um conjunto de funções contínuas do parâmetro fixo r geradas recursivamente a partir do ponto crítico do mapa $x_{\max} = 1/2$. Essas funções determinam algumas fronteiras internas e externas no diagrama de bifurcação do mapa e fornecem informações sobre a dinâmica das órbitas. As interseções dessas funções podem ser pontos periódicos ou pontos de Misiurewicz. Analisamos a dinâmica da órbita num ponto de Misiurewicz em particular, originado da primeira colisão do ponto fixo instável com o atrator caótico. Como resultados inéditos, apresentamos de forma algébrica o expoente de Lyapunov e a medida invariante para este valor do parâmetro r . As órbitas algébricas do nascimento e da morte da famosa janela de período 3 são também ineditamente apresentados.

Palavras-chave: **mapa logístico, expoente de Lyapunov, medida invariante, resultados algébricos, período 3.**

Abstract

In this work we present a study of the logistic map $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ based on the *supertracks*, a set of continuous functions of the fixed parameter r recursively generated from the map's critical point $x_{\max} = 1/2$. These functions determine some internal and external boundaries of the orbit diagram of the map and provide information about the dynamics of the orbits. The intersections of these functions can be periodic points or Misiurewicz points. We analyze the dynamics of the orbit in a particular Misiurewicz point, originated from the first collision between the unstable fixed point and the chaotic attractor. As inedited results, we present algebraically the Lyapunov exponent and the invariant measure for this fixed parameter's value r . Algebraical orbits from the birth and the death of the famous period 3 window are presented as inedited result too.

Key words: **logistic map, Lyapunov exponent, invariant measure, algebraic results, period 3.**

Listas de Figuras

1.1	Gráfico da Equação (1.6) para $r = 3, 9$.	6
1.2	Primeiros pontos da órbita para $r = 3, 9$ e $x_0 = 0, 4$.	6
1.3	Diagrama de bifurcação do mapa logístico, $r \in [0, 0, 4, 0]$.	9
1.4	Diagrama de bifurcação do mapa logístico, $r \in [3, 5, 4, 0]$.	10
1.5	Contribuição de cada ponto do mapa para o expoente de Lyapunov.	11
2.1	Comportamento das oito primeiras <i>supertracks</i> sobre o diagrama de bifurcação.	17
2.2	As 8 primeiras <i>supertracks</i> sobre o diagrama de bifurcação para $r \in [3, 5, 4, 0]$.	17
2.3	Diagrama de bifurcação e $s_n(r), n = 1..8$, para $r \in [0, 1]$.	22
2.4	Derivada das $s_n(r), s'_n(r), n = 1..8$ para $r \in [0, 1]$.	23
2.5	Diagrama de bifurcação e $s_n(r), n = 1..8$ para $r \in [1, 2]$.	25
2.6	Derivada das $s_n(r), s'_n(r), n = 1..8$ e do ponto fixo $x' = \frac{1}{r^2}$ para $r \in [1, 2]$.	25
2.7	Diagrama de bifurcação e $s_n(r), n = 1..8$ para $r \in [2, 3]$.	27
2.8	Derivada das $s_n(r), s'_n(r), n = 1..8$ e do ponto fixo $x' = \frac{1}{r^2}$ para $r \in [2, 3]$.	28
2.9	$s_{50}(r), s_{50}'(r)$ e $s_{52}(r)$ para $r \in [0, 4]$.	32
2.10	$s_{50}(r), s_{50}'(r)$ e $s_{52}(r)$ para $r \in [3, 5, 4]$.	33
2.11	Diagrama de bifurcação do mapa logístico com <i>supertracks</i> , $s_n(r), n = 1...10$ para $r \in [3, 5, 4]$ e $n = 11...16$ para $r \in [3, 5, 3, 83]$.	35

3.1	Encontro - tangência ou interseção - entre <i>supertracks</i> , $s_n(r)$, $n = 0..12$.	37
3.2	Pontos fixos (instáveis) no mapa logístico, segundo interseções das <i>supertracks</i> , e a curva do ponto fixo instável $x = 1 - 1/r$.	38
3.3	Pontos de período 2 instáveis no mapa logístico, segundo interseções das <i>supertracks</i> , e as curvas de período 2 $x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right) \pm \frac{\sqrt{(r-3)(r+1)}}{r} \right]$.	38
3.4	Pontos de período 3.	39
3.5	Pontos de período 4.	39
3.6	Pontos de período 5.	39
3.7	Pontos de período 6.	39
3.8	Pontos de período 7.	39
3.9	Pontos de período 8.	39
3.10	Pontos de período 9.	39
3.11	Pontos de período 10.	39
3.12	Pontos de período 11.	40
3.13	Pontos de período 12.	40
3.14	Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/2$ sem descarte de transiente.	43
3.15	Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/2$ e 1000 iteradas de transiente.	43
3.16	Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/2$ e 2000 iteradas de transiente.	44
3.17	Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ sem descarte de transiente.	44
3.18	Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ e transiente de 1000 iteradas.	45
3.19	Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ e transiente de 2000 iteradas.	45

3.20	Sobreposição da evolução do expoente de Lyapunov para $x_0 = 1/2$ (linhas inclinadas) e $x_0 = 1/4$ (linhas horizontais), e a função $\lambda(r_3^*, \frac{1}{2}, D, 2000, O)$, com transiente de 2000 iteradas, em função da precisão.	46
3.21	Mapa iterado em quádrupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{2}$	48
3.22	Mapa iterado em dupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{2}$	48
3.23	Mapa iterado em simples precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{2}$	49
3.24	Mapa iterado em quádrupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{4}$	49
3.25	Mapa iterado em dupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{4}$	50
3.26	Mapa iterado em simples precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{4}$	50
4.1	Medida invariante numérica, percentual acumulada e algébrica para $r = 4$. .	54
4.2	Medida invariante numérica, percentual acumulada e algébrica para $r = r_3^*$. .	55
4.3	Medida invariante numérica, percentual acumulada e algébrica para $r = r_4^*$. .	57
4.4	Medida invariante numérica, percentual acumulada e algébrica para $r = r_5^*$. .	57
5.1	Valores de a , $Re(b)$, $Im(b)$, $ b $, $\theta^* = \theta/\pi$ e x_n , com $n = 1, 2, 3$, para toda a janela de período 3.	64

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos e definições	4
1.1 Mapa Logístico	4
1.2 Órbita	5
1.3 Transiente	6
1.3.1 Comportamento Assintótico do Mapa	7
1.4 Períodos ou Órbitas Periódicas	7
1.4.1 Estabilidade de Órbitas Periódicas	7
1.5 Atrator e Bacia de Atração	8
1.6 Diagrama de Bifurcação	8
1.7 Rotas para o Caos	9
1.8 Exponente de Lyapunov	10
1.9 Medida Invariante	12
1.10 Crise	12
1.11 Pontos de Misiurewicz	12
1.12 Propriedades Gerais do Mapa Logístico	13
2 Supertracks	15
2.1 Definição das <i>Supertracks</i>	15
2.2 Construção das <i>supertracks</i> ($s_n(r)$)	16

2.3	Propriedades das <i>supertracks</i>	18
2.4	A derivada das <i>Supertracks</i>	20
2.5	Análise do Comportamento das Funções <i>Supertracks</i>	21
2.5.1	Ponto fixo $x = 0$ e $s_n(r), n > 0$ para $r \in [0, 1]$	22
2.5.2	Ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{r}$ e $s_n(r), n > 0$ para $r \in [1, 3]$	25
2.5.3	<i>Supertracks</i> e suas derivadas em $r = 4$ ($s_n(4)$ e $s'_n(4)$)	29
2.6	$s'_n(r)$ em Órbitas Superestáveis	30
2.7	Contribuição de $s_{50}(r)$, $s_{51}(r)$ e $s_{52}(r)$ na Construção do Diagrama de Bifurcação	30
2.8	<i>Supertracks</i> sobre o Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico	31
3	Intersecção das <i>Supertracks</i>	36
3.1	Pontos Periódicos e Pontos de Misiurewicz	36
3.1.1	Pontos Periódicos Estáveis e Instáveis	37
3.1.2	Pontos de Misiurewicz ($\mathcal{M}_{n,p}$)	38
3.2	$\mathcal{M}_{3,1}$ ou $s_3(r_3^*)$	41
3.3	Comportamento das derivadas $s'_n(r_3^*)$	51
4	Medida Invariante $\mu(x)$	53
4.1	Medidas Invariantes conhecidas no Mapa Logístico	53
4.2	Proposta de Medida Invariante para $r = r_3^*$	54
4.3	Medida Invariante Generalizada para $\mathcal{M}_{n,1}^{\text{ord}}$	56
5	Resultados Exatos na Janela de Período 3	59
5.1	Resultados	60
5.1.1	A órbita do nascimento do período 3	60
5.1.2	A órbita superestável do período 3	61
5.1.3	O fim da órbita de período 3 estável	63

Introdução

Uma grande quantidade de resultados sobre sistemas dinâmicos tem sido obtido durante as últimas décadas. Tais resultados constituem-se em manifestações claras do imenso impacto dos computadores modernos na física e na matemática: problemas que não puderam ser explorados ao longo do século XX por demandarem cálculos proibitivos, puderam vir a ser mais e mais estudados. Várias questões fundamentais, cujas respostas não podem ser obtidas teoricamente devido à complexidade envolvida, podem ser simuladas em equipamentos com processadores modernos. Até recentemente, entretanto, a ênfase maior era apenas nos comportamentos observados (numericamente) no espaço de fase, inicialmente usando-se seções de Poincaré para estudar fluxos, depois a computação de indicadores macroscópicos tais como expoentes de Lyapunov, dimensões, entropias, etc.

Como base para este estudo foi tomado o mapa logístico, já estudado há mais de um século, originado de uma correção de Verhulst para a teoria do crescimento populacional proposta inicialmente por Malthus, abordada de forma abrangente por Robert May em 1976 [1]. O presente trabalho tem por objetivo estudar o espaço de parâmetro de sistemas dinâmicos modelados pelo mapa logístico. Este mapa tem sido usado no estudo de ciclos econômicos [2], potenciais [3], números randômicos [4, 5], caos [6, 7], na eletrônica [8], criptografia [9, 10], análise do espectro de energia [11], análise numérica [12, 13, 14], na obtenção de resultados analíticos [15, 16, 17, 18, 19], no estudo de polinômios [20, 21], entre inúmeros outros.

Como exemplo de resultado algébrico, Strogatz em 1995 [19] apresentou uma solução algébrica para o valor do parâmetro fixo r em que ocorre nascimento da janela de período 3 no mapa logístico. A origem deste trabalho está no estudo deste período, devido o famoso trabalho de Li e Yorke de 1975 [22], intitulado “Período 3 implica caos”,

possivelmente influenciado pelo trabalho de Sharkovskii [23] e seu famoso ordenamento.

As definições básicas e conceitos iniciais necessários ao entendimento deste trabalho são apresentados brevemente no Capítulo 1.

O estudo proposto neste trabalho será feito com base nas *supertracks* do mapa logístico, um conjunto de funções polinomiais contínuas do parâmetro fixo do mesmo, conforme a definição original de Oblow [24], de 1988. Tal conjunto de funções pode ser usado para reconstruir o diagrama de bifurcações do mapa logístico e na obtenção de alguns resultados exatos ou algébricos, que podem ser realizados em baixas ordens de iteração. A existência de janelas periódicas em meio ao comportamento caótico é facilmente perceptível no diagrama dessas funções.

As formalizações e definições necessárias para a compreensão das *supertracks* são objetos de estudo do Capítulo 2.

Utilizamos as *supertracks* como ferramenta que permite a fácil obtenção de pontos superestáveis de órbitas periódicas, bastando para isso verificar o ponto de tangência entre duas *supertracks*, assim como a obtenção de pontos de Misiurewicz, verificando o ponto de cruzamento entre elas.

A seguir, no Capítulo 3, usaremos estas funções para obter alguns resultados no mapa logístico, principalmente no que tange a pontos periódicos, tanto estáveis quanto instáveis, usando como apoio as teorias apresentadas nas Referências [25, 26, 27, 28, 29]. Outros trabalhos que utilizam as *supertracks* como ferramentas podem ser obtidos nas Referências [30, 31, 32]. Tomamos um ponto de Misiurewicz para analisar o seu expoente de Lyapunov e sua medida invariante. Para o expoente de Lyapunov verificaremos que o seu valor numérico depende das grandezas transiente, tamanho da órbita e precisão utilizada nas iterações, podendo a dinâmica do mapa para este valor do parâmetro fixo se comportar como um ponto fixo – mesmo este sendo instável – ou caótico, como usualmente considerado. A dominância do ponto fixo instável nesta órbita fica clara quando comparamos o afastamento exponencial da órbita para ambos os valores do expoente de Lyapunov obtidos numérica e algebricamente.

No Capítulo 4 utilizamos a forma da medida invariante para $r = 4$, apresentada em 1947 por Ulam e Neumann [33], e o formalismo das *supertracks* para propor uma

maneira de obter analiticamente a medida invariante para uma classe de pontos de Misiurewicz. Essa solução apresenta características que não foram totalmente exploradas neste trabalho e que podem contribuir para a análise e obtenção da medida invariante para outros valores do parâmetro r que também são caóticos.

Juntando trabalhos que apresentam resultados algébricos para a janela de período 3, Referências [17, 18, 19, 34], no Capítulo 5 expomos um complemento a estes estudos. Com manipulações algébricas e um pouco de conhecimento sobre números complexos, apresentamos algebricamente de forma inédita as órbitas para o nascimento e o fim da janela de período 3. Estas órbitas são pontos na forma $x = a + b + \bar{b}$, com a sendo um número real, b um número complexo e \bar{b} seu complexo conjugado. Os pontos da órbita são obtidos através da rotação dos termos b e \bar{b} em torno de a por ângulos $2\pi/3$ no plano complexo.

Por último, finalmente, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

Capítulo 1

Conceitos e definições

Introduzimos aqui os conceitos e definições utilizados neste trabalho necessários à compreensão e desenvolvimento das ideias e justificativas apresentadas nos capítulos e seções seguintes.

1.1 Mapa Logístico

Em 1798 Thomas Malthus [35] propôs um modelo para o crescimento populacional dado por

$$\frac{dN(t)}{dt} = n N(t) - m N(t), \quad (1.1)$$

no qual as constantes n e m referem-se, respectivamente, às taxas de nascimento e de morte da população e $N(t)$ é a população de indivíduos no tempo t , que pode ser discretizado, referindo-se então à t -ésima geração, com $t \geq 0$. Definindo $q \equiv n - m$ e considerando que a população inicial é $N(0)$ no instante $t = 0$, a Equação (1.1) tem como solução

$$N(t) = N(0) e^{qt}. \quad (1.2)$$

Com este modelo, apenas três comportamentos são possíveis na dinâmica da população:

- Explosão populacional: para $q > 0$, quando a população cresce infinitamente,
- Extinção: para $q < 0$, quando a população extingue-se, e
- Invariância: para $q = 0$, quando a população não apresenta variação.

O modelo de Malthus não é realista pois não permite oscilação da população. Em 1838 Pierre Verhulst [36] propôs uma correção ao modelo de crescimento populacional de Malthus que leva em consideração a quantidade máxima de indivíduos num ambiente. Este modelo, conhecido como Equação Logística, é dado por

$$\frac{dN(t)}{dt} = q N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \quad (1.3)$$

com $k > 0$, em que k é a capacidade máxima de indivíduos que o ambiente suporta. O modelo populacional de Verhulst pode ser discretizado, apresentado-se sob a forma

$$N_{j+1} = N_j + q N_j \left(1 - \frac{N_j}{k}\right). \quad (1.4)$$

Definindo $x_n \equiv \left[\frac{qN_j}{k(q+1)}\right]$ e $r \equiv (1+q)$, obtemos a equação logística

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad (1.5)$$

que é a forma do Mapa Logístico analisada neste trabalho.

O termo mapa é usado como sinônimo de função. O mapa logístico é uma transformação recursiva do intervalo real unitário I em si mesmo, dado pela função real $f : I \rightarrow I$ definida por

$$f(x) = r x (1 - x), \quad (1.6)$$

com $r \in [0, 4]$ sendo chamado de parâmetro fixo, pois não varia com o tempo, e x , a variável, representando a quantidade de indivíduos da população máxima. A Figura (1.1) mostra o gráfico da Equação (1.6) para $r = 3, 9$.

1.2 Órbita

O primeiro valor da variável x , representado por x_0 , é chamado de condição inicial. Para cada escolha da condição inicial x_0 e do parâmetro fixo r , as sucessivas iteradas da Equação (1.6) geram uma órbita do mapa, ou seja, uma sequência infinita de valores $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ tais que $x_{i+1} = f(x_i)$, com $i \geq 0$, já que o mapeamento é recursivo.

A Figura (1.2) mostra os primeiros pontos da órbita para $r = 3, 9$ e $x_0 = 0, 4$ como condição inicial.

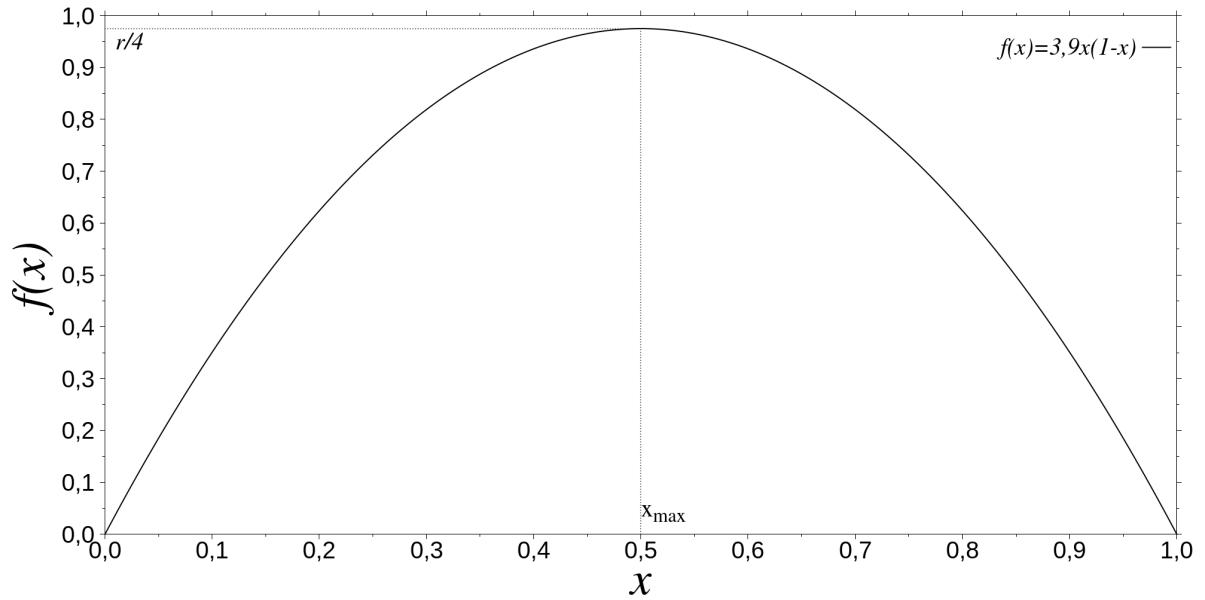


Figura 1.1: Gráfico da Equação (1.6) para $r = 3,9$.

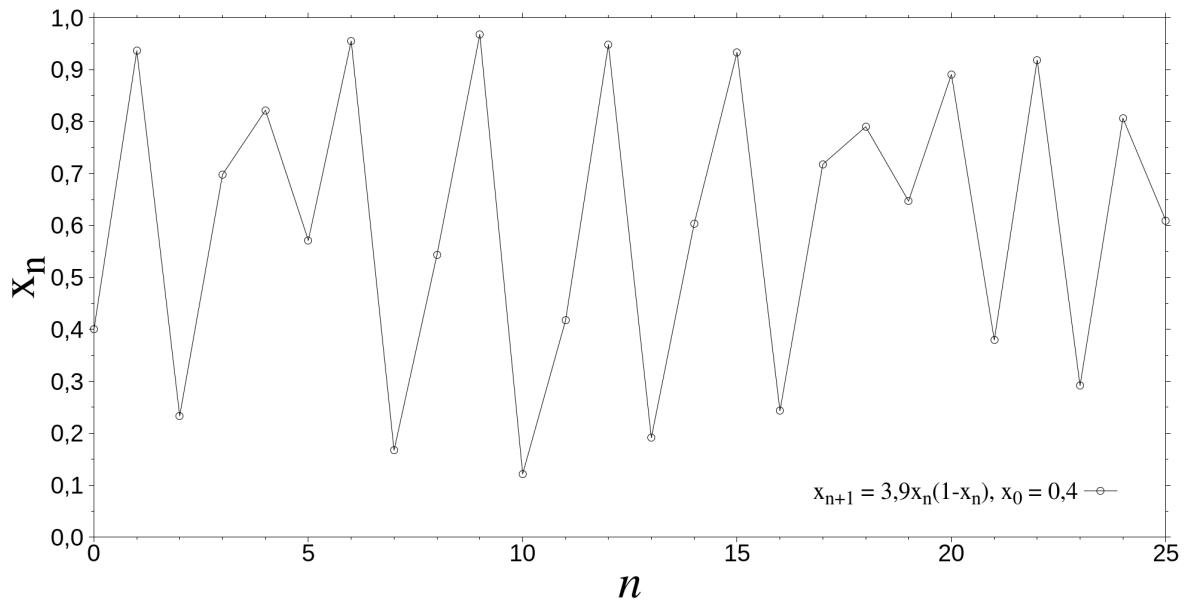


Figura 1.2: Primeiros pontos da órbita para $r = 3,9$ e $x_0 = 0,4$.

1.3 Transiente

Os primeiros pontos de uma órbita caracterizam o seu comportamento inicial. Este comportamento inicial é chamado de transiente. Uma órbita, em geral, necessita de uma quantidade grande de iteradas para cair no atrator. Como normalmente estamos interessados no comportamento assintótico da dinâmica do mapa, este transiente é descartado para a posterior análise da órbita.

1.3.1 Comportamento Assintótico do Mapa

Após o transiente, observam-se algumas dinâmicas típicas assumidas pelas órbitas do mapa:

- Periodicidade, quando assintoticamente $x_{i+p} = x_i$ para $i \gg 1$ e $p \geq 1$, e diz-se que a órbita assume período p . Quando a órbita assume período 1, diz-se que a órbita é um ponto fixo,
- Divergência, quando $x_i \rightarrow \pm\infty$, para $i \rightarrow \infty$,
- Caoticidade, quando a série não diverge e também não apresenta periodicidade, sendo que a sequência de valores obtidos forma um conjunto infinito e denso de pontos sobre o intervalo unitário.

1.4 Períodos ou Órbitas Periódicas

Diz-se que uma órbita é periódica e tem período p quando, descartado o transiente, para algum x , vale a igualdade

$$f^{(p)}(x) = x, \quad (1.7)$$

em que $f^{(p)}$ significa p vezes a composição da função f .

1.4.1 Estabilidade de Órbitas Periódicas

A estabilidade de uma órbita periódica no mapa logístico é determinada através do módulo da derivada do mapa em relação ao primeiro ponto da órbita considerado. Através da regra da cadeia, observa-se que todos os pontos da órbita são utilizados na avaliação de sua estabilidade:

$$\begin{aligned} \left| \frac{df^p}{dx_i} \right| &= \left| \frac{dx_{p+1}}{dx_i} \right| = \left| \frac{df(x_p)}{dx_i} \right| = \left| \frac{df^{(p)}(x_i)}{dx_i} \right| \\ &= \left| \frac{df(x_p)}{dx_{p-1}} \frac{dx_{p-1}}{dx_{p-2}} \dots \frac{dx_1}{dx_i} \right| = \prod_{j=0}^n |r(1 - 2x_j)|, \end{aligned} \quad (1.8)$$

com x_i sendo o primeiro ponto da órbita periódica após o descarte do transiente.

Para uma dada órbita periódica, temos que:

- para $\left| \frac{df(x_p)}{dx_i} \right| = 0$, a órbita periódica é superestável,
- para $\left| \frac{df(x_p)}{dx_i} \right| < 1$, a órbita periódica é estável,
- para $\left| \frac{df(x_p)}{dx_i} \right| = 1$, ocorre bifurcação,
- para $\left| \frac{df(x_p)}{dx_i} \right| > 1$, a órbita periódica é instável.

Com o incremento do parâmetro r , uma órbita periódica pode surgir a partir de uma bifurcação, tornando-se imediatamente estável, depois torna-se superestável, volta a ser estável e, finalmente, bifurca, tornam-se instáveis. Se a órbita é estável ou superestável, significa que os pontos da órbita são atraídos pelos pontos periódicos desta órbita. Se a órbita é instável, os pontos desta órbita não são atraídos pelos pontos periódicos desta órbita. Numa região caótica, todas as órbitas periódicas são instáveis.

1.5 Atrator e Bacia de Atração

Quando a órbita não diverge, esta é atraída por um atrator A , que pode ser periódico ou caótico, e tem como características, segundo a Referência [37]:

1. A é um conjunto fechado de pontos que é invariante,
2. A atrai um conjunto aberto B de condições iniciais que contém o próprio A ,
3. A é mínimo, ou seja, não existe um subconjunto de A que satisfaça as duas condições anteriores.

O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz a condição do Item (2) é chamado de bacia de atração de A

1.6 Diagrama de Bifurcação

O termo bifurcação foi introduzido por Poincaré em 1885 e está relacionado a uma mudança qualitativa no retrato de fases de um sistema dinâmico conforme o parâmetro

fixo do sistema passa por um valor crítico. Trata-se de uma mudança qualitativa no retrato de fase do mapa, conforme Referência [37]. Assim, o diagrama de bifurcação consiste no comportamento assintótico das órbitas do mapa para uma malha de valores do parâmetro fixo $r \in [0, 4]$, dispostos lado a lado, conforme a Figura (1.3).

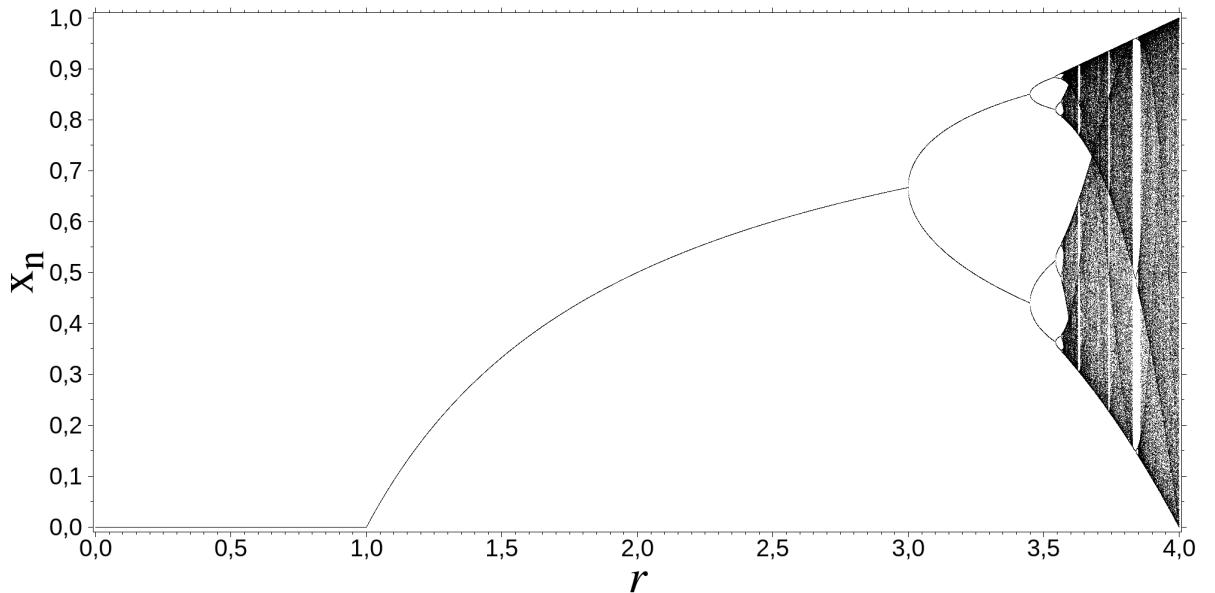


Figura 1.3: Diagrama de bifurcação do mapa logístico, $r \in [0, 0 , 4, 0]$.

O estudo detalhado desse diagrama revela muitas das propriedades dinâmicas fundamentais do mapa logístico, usado como um paradigma para o entendimento de toda uma classe de universalidade observada no estudo de sistemas dinâmicos, a classe dos mapas unimodais. Dá-se maior atenção à região $3,5 \leq r \leq 4$ deste diagrama, conforme a Figura (1.4), pois nela ocorrem praticamente todas as dinâmicas possíveis de ser encontradas no mapa, excetuando a presença dos pontos fixos estáveis, da órbita de período 2 estável e de um intervalo da primeira órbita estável de período 4. Próximo de $r = 3,5$ encontra-se o fim da cascata de duplicação de períodos e a consequente ocorrência da primeira região caótica no mapa. A primeira separação entre o regime periódico e o caótico dá-se em $r = r_\infty \approx 3,56994567$, conforme a Referência [37].

1.7 Rotas para o Caos

O caos em um sistema dinâmico determinista ocorre quando há sensibilidade às condições iniciais, ou seja, um afastamento de órbitas que foram iniciadas muito

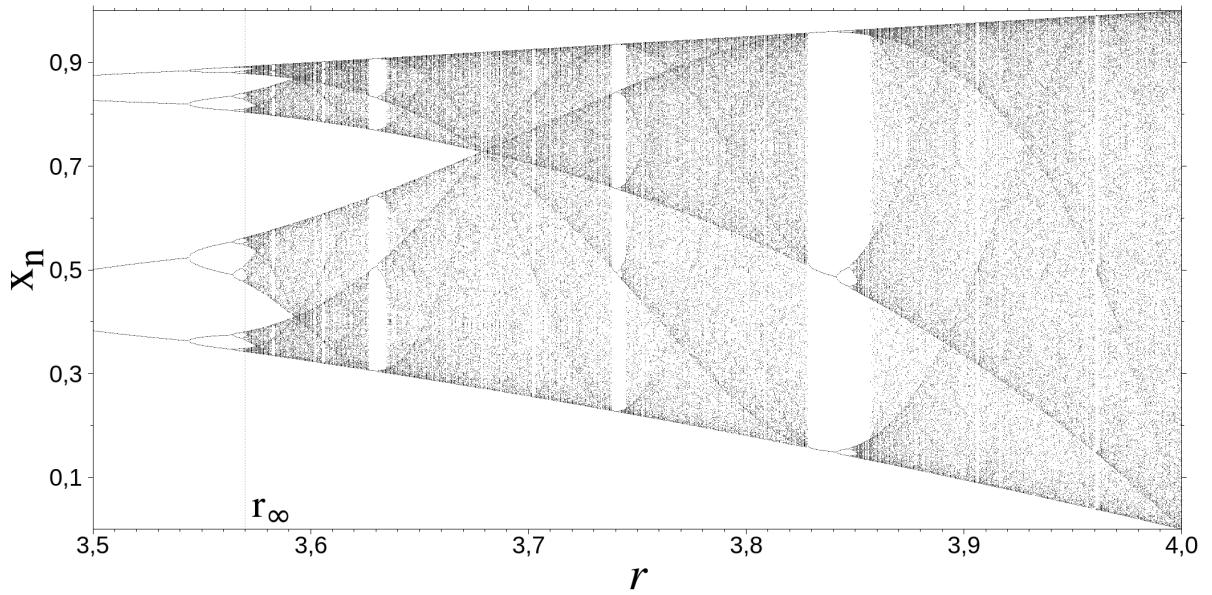


Figura 1.4: Diagrama de bifurcação do mapa logístico, $r \in [3,5, 4,0]$.

próximas, fazendo com que a dinâmica do sistema apresente um comportamento que é aperiódico, conforme as Referências [37, 38].

Um dos mecanismos para se obter caos é pela famosa rota para o caos de Feigenbaum [39]. Trata-se de cascatas de duplicações de período que explicam a transição da regularidade para o caos e definem uma classe de universalidade.

O comportamento intermitente é a segunda rota para o caos. Ocorre quando a órbita é regular – periódica ou quase-periódica – e evolui para produzir “estouros” (“bursts”), geralmente caóticos, de curta duração, voltando ao comportamento regular, conforme a Referência [40].

A quasi-periodicidade é a terceira e última rota para o caos conhecida. Surge da competição de duas periodicidades no mapa, cuja razão entre elas é um número irracional, conforme a Referência [41], fazendo com que a órbita percorra um subconjunto denso do espaço de fase sem passar duas vezes pelo mesmo ponto.

1.8 Exponente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov é a medida mais simples e precisa da caoticidade de uma órbita. Este é obtido como uma média sobre uma longa órbita do mapa, uma amostragem

do atrator. Originalmente ele mede o afastamento ou aproximação exponencial médio de duas órbitas que foram iniciadas muito próximas. Se as órbitas se afastam, a órbita pode ser caótica. Para o mapa logístico é definido como

$$\lambda(r) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)|, \quad (1.9)$$

e é função do parâmetro r e, consequentemente, da órbita analisada. O expoente de Lyapunov do mapa logístico é obtido substituindo a derivada da função do mapa, dada pela Equação (1.6), na Equação (1.9):

$$\lambda(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |r(1 - 2x_n)|. \quad (1.10)$$

Quando $\lambda(r) > 0$ a órbita apresenta caos [42]. A contribuição para o expoente de Lyapunov de cada ponto do mapa, descartado o transiente, pode ser determinada através de $\lambda^*(r, x) = \ln |r(1 - 2x)|$, com $\lambda^*(r, x)$ sendo a contribuição do ponto (r, x) para o expoente de Lyapunov da órbita em r . Estas contribuições são apresentadas na Figura (1.5), com a cor indicando o valor de $\lambda^*(r, x)$.

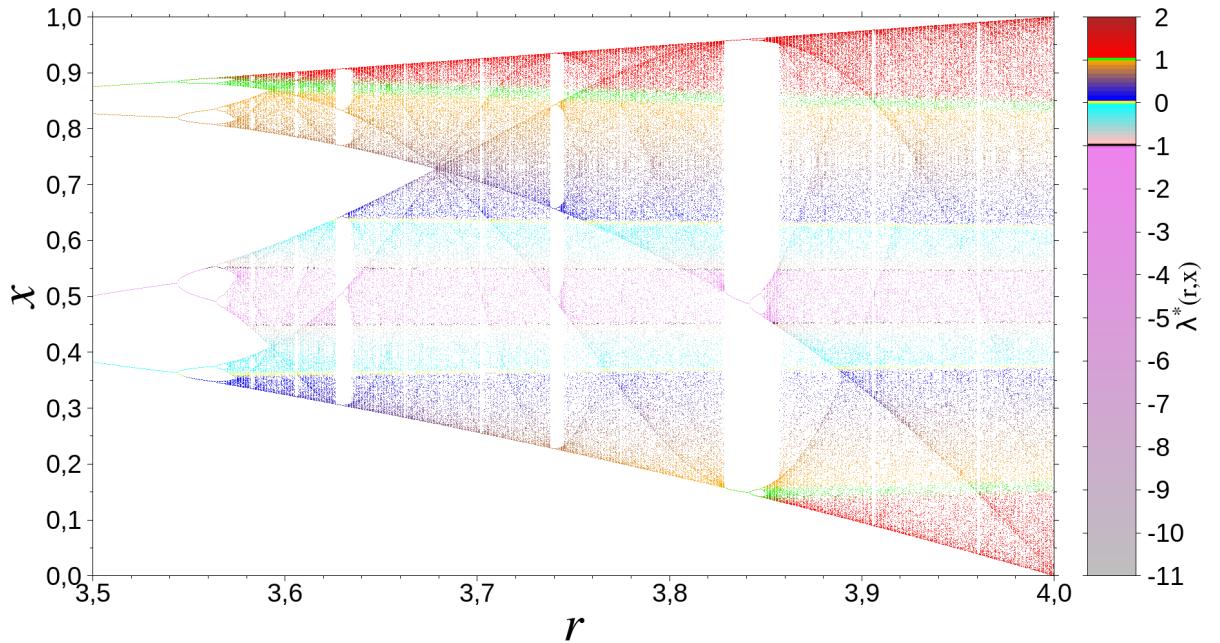


Figura 1.5: Contribuição de cada ponto do mapa para o expoente de Lyapunov.

1.9 Medida Invariante

A medida invariante determina a densidade das iteradas do mapa logístico sobre o intervalo unitário I , e é definida, segundo a Referência [42], por:

$$\mu(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \delta[x - f^{(i)}(x)]. \quad (1.11)$$

Ou seja, a medida invariante $\mu(x)$ mede a frequência com que os pontos de uma órbita longa $\{x_n\}$, com $n \rightarrow \infty$, estão distribuídos no intervalo I .

Para regiões periódicas de período- p , a medida invariante $\mu(x)$ é formado por um conjunto de p funções delta de Dirac, cada uma delas situada na correspondente coordenada x da órbita periódica.

1.10 Crise

O aparecimento ou desaparecimento de um atrator caótico, ou a variação descontínua no seu tamanho é definido como crise [37]. Quando ocorre crise, um atrator caótico é destruído ou criado, conforme a mudança do parâmetro r . Possui duas classificações:

- Crise de Fronteira: ocorre quando o atrator caótico colide com um ponto fixo instável que está na fronteira da bacia de atração. No mapa logístico esta crise acontece em $r = 4$, conforme a Referência [37],
- Crise Interior: ocorre quando há colisão entre um atrator caótico com uma órbita instável. Esta colisão ocorre dentro da bacia de atração dos atratores caóticos originais. No mapa logístico este crise acontece, por exemplo, no fim da maior região aberta do mapa logístico, em $r \approx 3,6785735$, conforme a Referência [37].

1.11 Pontos de Misiurewicz

Um valor do parâmetro fixo r é chamado de Ponto de Misiurewicz se a órbita do ponto crítico do mapa é pré-periódica mas não estável para este r , ou seja, a órbita tem de percorrer um pré-período antes de chegar à órbita periódica [29]. Este pontos

são identificados como $\mathcal{M}_{n,p}$, com n sendo o pré-período e p o tamanho do período da órbita.

Para o mapa logístico, partimos do ponto crítico do mapa $x_0 = 1/2$ como condição inicial. O ponto de Misiurewicz $\mathcal{M}_{n,p}$ é aquele que apresenta a órbita:

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots \mapsto x_{n-1} \mapsto x_n \mapsto x_{n+1} \mapsto \dots \mapsto x_{n+p} \mapsto x_n \mapsto x_{n+1} \dots \quad (1.12)$$

em que $x_0 = 1/2$ e a órbita leva n passos para chegar à órbita periódica de período p .

1.12 Propriedades Gerais do Mapa Logístico

O mapa $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) = f(x_n)$ tem as seguintes propriedades:

1. É contínuo, derivável, e estritamente positivo no intervalo $(0, 1)$, e $f(0) = f(1) = 0$,
2. Tem um único máximo no intervalo $(0, 1)$, e neste máximo, que ocorre em $x = x_{\max}$, $f'(x_{\max}) = 0$. Este ponto crítico é $x = x_{\max} = 1/2$.

O comportamento transiente depende da condição inicial, já os regimes caóticos e periódicos não, pois o atrator é invariante e único. No diagrama de bifurcação do mapa logístico apresentado nas Figuras (1.3) e (1.4), podemos perceber que o intervalo unitário I no mapa é, segundo a Referência [25]:

- contraído para $r < 4$,
- levado em si para $r = 4$,

pois seus pontos são mapeados dentro do intervalo $[f(r/4), r/4] \subseteq I$. Tanto no regime caótico quanto no periódico, para qualquer $r \geq 2$, o mapa tem uma fronteira externa bem definida, determinada pelas duas primeiras imagens do ponto crítico $x_{\max} = 1/2$. As subsequentes imagens do ponto crítico determinam curvas sombreadas que dão a forma do diagrama de bifurcação.

Podemos identificar o valor do parâmetro fixo r em que o comportamento do mapa deixa de ser periódico e a duplicação de períodos leva a quantidade de pontos periódicos tender a infinito, marcando o início do regime caótico no mapa em $r = r_{\infty}$.

Além disso, a universalidade de Feigenbaum rege o mapa, estando presente em toda cascata de duplicação de período existente neste mapa, que é renormalizável, conforme a Referência [27], para $r \rightarrow 4$.

Órbitas superestáveis aparecem em cada sucessiva bifurcação na cascata de duplicação de períodos, até obter-se novamente o regime caótico. Quando as órbitas periódicas perdem estabilidade, estas passam a agir como repulsores, podendo levar as órbitas para o regime caótico caso não exista uma outra órbita periódica estável.

Capítulo 2

Supertracks

Além do estudo numérico tradicional usado para inspeção dos atratores do mapa logístico, ou seja, do seu diagrama de bifurcação, uma ferramenta alternativa é o estudo baseado em *supertracks*. Constrói-se um conjunto infinito $s_n(r)$ de funções polinomiais recursivas a partir do mapa logístico, ou outro mapa unidimensional que se queira estudar, já que a técnica é geral. Essas funções ditas *supertracks* são obtidas pela iteração recursiva da função $f(x)$ do mapa, avaliada no seu ponto de máximo, ou, de forma mais geral, no ponto cuja derivada é nula. Como o mapa logístico trata-se de uma função quadrática e esta condição ocorre no seu ponto de máximo $x_{\max} = 1/2$, estas funções dependem apenas do parâmetro fixo r .

2.1 Definição das *Supertracks*

Conforme Oblow [24], a metodologia computacional necessária para desenvolver o estudo do mapa logístico, via *supertracks*, parte da análise das derivadas das iteradas do mapa, como função da condição inicial x_0 . Via regra da cadeia, temos:

$$\frac{df^{(n+1)}(x_0)}{dx_0} = \frac{df(x_n)}{dx_0} = \frac{df(x_n)}{dx_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{dx_0} = \frac{df(x_n)}{dx_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}} \dots \frac{dx_1}{dx_0}. \quad (2.1)$$

Se durante as iterações a condição

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} = r(1 - 2x_n) = 0 \quad (2.2)$$

ocorrer, a órbita é dita superestável. Quando esta condição ocorre, a órbita para este valor do parâmetro fixo r perde a dependência da órbita existente, consequentemente

perdendo a dependência da condição inicial x_0 , pois a Equação (2.1) torna-se nula a partir de então, não importando a quantidade de iteradas até a condição da Equação (2.2) acontecer. Como a derivada é nula, a órbita passou por $x = 1/2$ e toda a informação dos pontos da órbita anterior a este evento é perdida. Isso pode ser entendido como um término do transiente, pois, o que ocorre daqui em diante perde toda correlação com a condição inicial x_0 . Este é um ponto de partida para entender o comportamento caótico de forma convencional segundo Oblow [24].

Assim fica claro o papel do ponto de máximo do sistema, obtido da Equação (2.2), ou simplesmente, o ponto em que a derivada anula-se. Durante a iteração, uma órbita que passe pelo ponto crítico define o começo de uma *supertrack*. A evolução destas *supertracks* mostra diferenças qualitativas entre os comportamentos caótico e periódico.

Um fator importante é que as *supertracks* eliminam a dependência funcional da condição inicial na Equação (1.6). As trajetórias passam a ser função somente do parâmetro fixo r do sistema, fazendo com que cada iterada seja também uma função contínua deste parâmetro. Todo o processo de iteração, começando cada um deles no valor de máximo – ou no ponto de derivada nula, se este for o caso – dá às funções *supertracks* sua importância em caracterizar o caos e os regimes periódicos.

Esta análise torna claro que o comportamento das *supertracks* pode ser facilmente investigado garantindo que a condição da equação (2.2) seja cumprida desde o início do processo de iteração, ou seja, todas as *supertracks* podem ser geradas iterando a Equação (1.6), com $x_0 = 1/2$ como condição inicial. Podemos então estudar trajetórias caóticas e periódicas em baixas ordens de iteração, sem a necessidade de usar o limite de quantidade de iteradas indo para infinito, ou seja, para altas ordens.

2.2 Construção das *supertracks* ($s_n(r)$)

As conjecturas feitas na seção anterior podem ser testadas estudando o comportamento das *supertracks* no mapa logístico. Isto será feito construindo um conjunto de funções em r , a partir da condição inicial $x_0 = 1/2$, valor de máximo para este mapa. Estas funções *supertracks*, $s_n(r)$, são polinômios contínuos gerados recursivamente por

$$s_{n+1}(r) = r s_n(r) [1 - s_n(r)] \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, s_0(r) = 1/2. \quad (2.3)$$

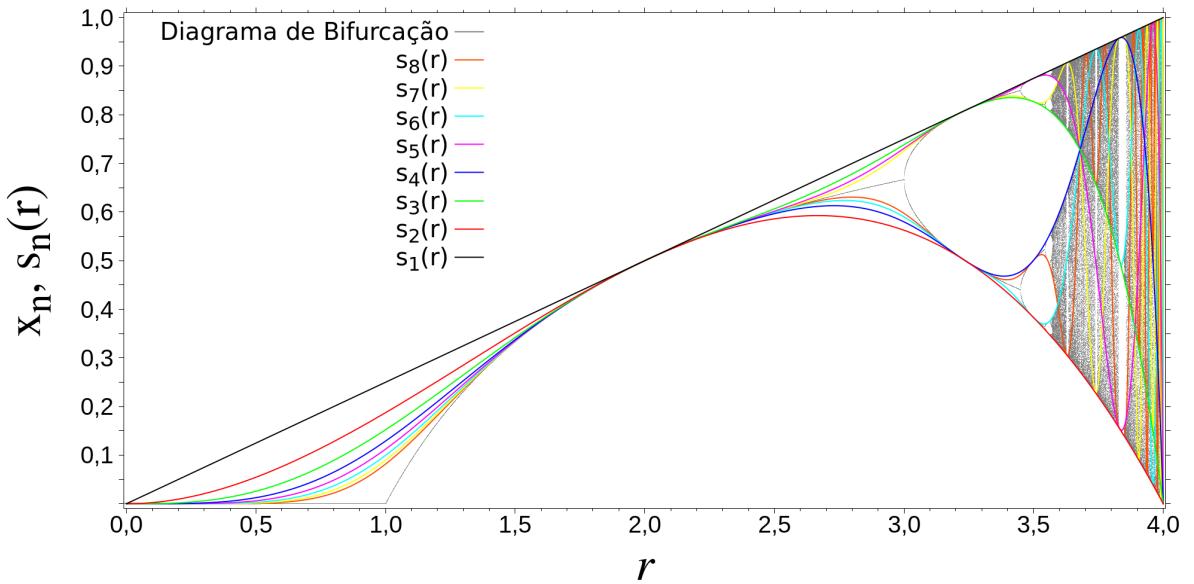


Figura 2.1: Comportamento das oito primeiras *supertracks* sobre o diagrama de bifurcação.

Estas funções representam a dependência funcional das *supertracks* em uma dada ordem de iteração n do parâmetro fixo r . A Figura (2.1) ilustra as oito primeiras *supertracks* para o mapa logístico e a Figura (2.2) amplia a região $3,5 \leq r \leq 4$ da figura anterior.

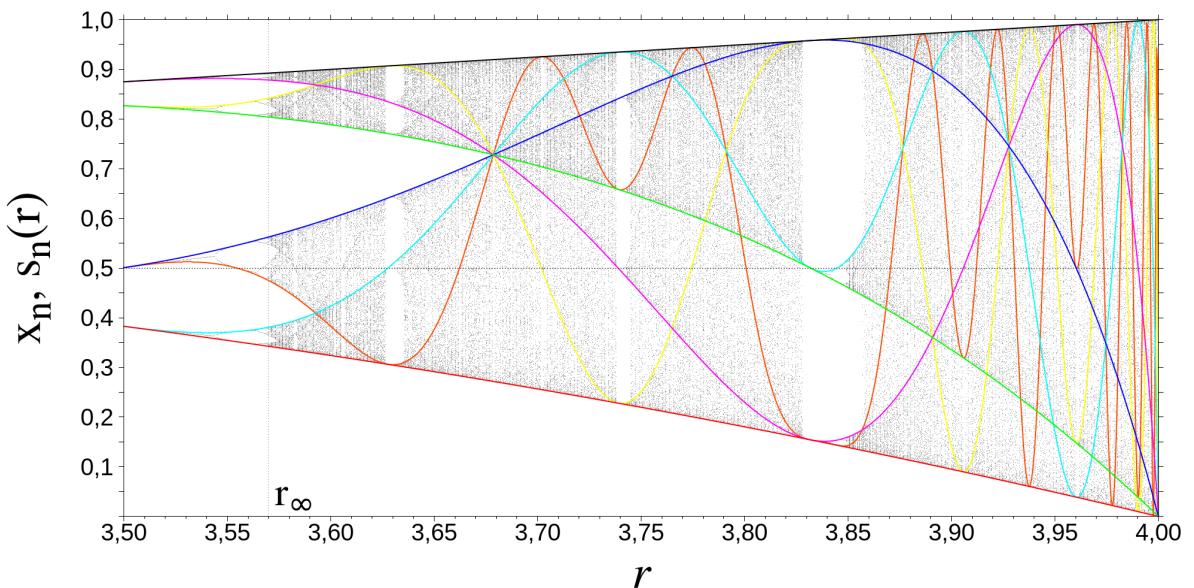


Figura 2.2: As 8 primeiras *supertracks* sobre o diagrama de bifurcação para $r \in [3,5, 4,0]$.

Da Equação (2.3), obtemos o seguinte conjunto de funções *supertracks* $s_n(r)$, polinômios de grau $2^n - 1$ em r :

$$\begin{aligned}
s_0(r) &= \frac{1}{2}, \\
s_1(r) &= \frac{r}{4}, \\
s_2(r) &= \frac{r^2}{16} (4 - r), \\
s_3(r) &= \frac{r^3}{256} (4 - r) (16 - 4r^2 + r^3), \\
s_4(r) &= \frac{r^4}{65536} (4 - r) (16 - 4r^2 + r^3) (256 - 64r^3 + 16r^4 + 16r^5 - 8r^6 + r^7), \\
s_5(r) &= \dots \\
&\vdots \quad \ddots \\
s_n(r) &= \frac{r^n}{2^{2^n}} (4 - r) (16 - 4r^2 + r^3) (256 - 64r^3 + 16r^4 + 16r^5 - 8r^6 + r^7) \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

O conjunto de funções *supertracks* acima (2.4) apresenta uma regra de construção em que cada função depende da função anterior devido à recursividade das *supertracks*, via Equação (2.3).

2.3 Propriedades das *supertracks*

Nas Figuras (2.1) e (2.2), as mesmas cores representam as mesmas *supertracks*. Nestas, é possível perceber que há cruzamentos e tangenciamentos de *supertracks*. A tangência significa a existência de um ponto fixo ou de órbita periódica estável. Os cruzamentos identificam pontos de Misiurewicz, que são pontos periódicos instáveis, indicando que o mapa é caótico para este valor do parâmetro fixo r , conforme a Referência [25].

No diagrama de bifurcação do mapa logístico há um lado das *supertracks* que é sombreado. Este lado pode ser determinado pelo sinal da derivada segunda de $f^{(n)}(1/2) = s_n(r)$, conforme apresentado na Referência [26]. As funções $s_1(r)$ e $s_2(r)$ determinam completamente o contorno exterior do mapa desde $r = 2$, passando pelo início do regime caótico em $r = r_\infty$, até $r = r_{\max} = 4$. A maior região aberta e as curvas sombreadas mais fortes no regime caótico são as determinadas pelas funções $s_3(r)$ e $s_4(r)$. Para $n \geq 2$, $s_n(r_{\max}) = 0$, pois $s_1(r_{\max}) = 1$,

Órbitas superestáveis de período p ocorrem em r_p quando $s_p(r)$ intercepta $s_0(r)$, ou seja, quando

$$s_{n+p}(r_p) = s_n(r_p) \quad \forall r_p \mid s_n(r_p) = s_0(r) \quad (2.5)$$

e

$$\frac{d}{dr}(s_{n+p}(r_p)) = \frac{d}{dr}(s_n(r_p)) \quad \forall r_p \mid s_n(r_p) = s_0(r), \quad (2.6)$$

que significa que as *supertracks* passam pelo mesmo ponto e com o mesmo sinal de derivada. O mesmo pode ser dito se

$$\frac{d}{dr}(s_{n+p}(r_p)) \frac{d}{dr}(s_n(r_p)) > 0 \quad (2.7)$$

nas mesmas condições da Equação (2.5).

Um Ponto de Misiurewicz ocorre quando pelo menos duas *supertracks* com inclinações diferentes se cruzam, e representam uma singularidade instável no regime caótico. Ou seja, quando

$$s_n(r_{n,p}) = s_{n+p}(r_{n,p}) \quad (2.8)$$

e

$$\frac{d}{dr}(s_n(r_{n,p})) \frac{d}{dr}(s_{n+p}(r_{n,p})) < 0, \quad (2.9)$$

temos o(s) ponto(s) de Misiurewicz em $r_{n,p} = \mathcal{M}_{n,p}$, pois pode corresponder a uma órbita periódica instável de período $p \geq 1$. O valor de n nesta notação corresponde ao pré-período.

A interseção de $s_3(r)$ com $s_4(r)$ dá origem ao Ponto de Misiurewicz $\mathcal{M}_{3,1}$, que surge na curva $x = 1 - 1/r$ e representa o comportamento extendido do ponto fixo como função de r no regime caótico. Este ponto dá origem ao começo dos períodos ímpares no mapa logístico, conforme Oblow [24].

Em *supertracks* de ordem elevada, seus tangenciamentos dão origem a órbitas superestáveis e a pontos de Misiurewicz, de acordo com suas inclinações, que tornam-se combinatorialmente mais densos e aparecem em todo o regime caótico. Como interceptam $s_0(r)$, a sucessão dos r_p pode ser usada para calcular a constante de Feigenbaum σ e a sua constante de escala universal α .

2.4 A derivada das *Supertracks*

As funções $s'_n(r)$ definidas como a derivada das $s_n(r)$ em relação ao parâmetro r , $s'_n(r) = \frac{ds_n(r)}{dr}$, são obtidas recursivamente em função de $s_n(r)$ e de $s'_{n-1}(r)$, ou seja, as derivadas das funções *supertracks* dependem da função anterior e da derivada da função anterior, como segue:

$$\begin{aligned} s'_n(r) &= \frac{ds_n(r)}{dr} = \frac{d(r s_{n-1}(r)[1 - s_{n-1}(r)])}{dr} \\ &= s_{n-1}(r)[1 - s_{n-1}(r)] + r s'_{n-1}(r)[1 - s_{n-1}(r)] - r s_{n-1}(r)s'_{n-1}(r) \\ &= s_{n-1}(r)[1 - s_{n-1}(r)] + r s'_{n-1}(r)[1 - 2s_{n-1}(r)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

o que nos leva às derivadas na forma explícita

$$\begin{aligned} s'_0(r) &= 0, \\ s'_1(r) &= \frac{1}{4}, \\ s'_2(r) &= \frac{r}{16}(8 - 3r), \\ s'_3(r) &= \frac{r^2}{256}(192 - 64r - 80r^2 + 48r^3 - 7r^4), \\ s'_4(r) &= \dots \\ &\vdots \quad \ddots \\ s'_n(r) &= \frac{r^{n-1}}{2^{2^n}}(\dots + (2^{2n} - 2^{n+1})r^{(2^n-n-2)} - (2^n - 1)r^{(2^n-n-1)}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou ainda, de forma geral,

$$\begin{aligned} s'_0(r) &= 0, \\ s'_1(r) &= \frac{r}{4} \cdot \frac{1}{r} + 0 \cdot r \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{4} = \frac{s_1(r)}{r}, \\ s'_2(r) &= \frac{s_2(r)}{r} + \frac{1}{4}r[1 - 2s_1(r)] = \frac{s_2(r)}{r} + s_1(r)[1 - s_1(r)] - s_1^2(r) \\ &= \frac{2s_2(r)}{r} - s_1^2(r), \\ s'_3(r) &= \frac{s_3(r)}{r} + \left(\frac{2s_2(r)}{r} - s_1^2(r) \right) r[1 - 2s_2(r)] \\ &= \frac{s_3(r)}{r} + 2s_2(r) - rs_1^2(r) - 4s_2^2(r) + 2rs_1^2(r)s_2(r) \\ &= \frac{s_3(r)}{r} + 2s_2(r)[1 - s_2(r)] - rs_1^2(r) - 2s_2^2(r) + 2rs_1^2(r)s_2(r) \\ &= \frac{s_3(r)}{r} + \frac{2s_3(r)}{r} - rs_1^2(r)[1 - 2s_2(r)] - 2s_2^2(r) \\ &= \frac{3s_3(r)}{r} - 2s_2^2(r) - rs_1^2(r)[1 - 2s_2(r)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'_4(r) &= \frac{s_4(r)}{r} + \left(\frac{3s_3(r)}{r} - 2s_2^2(r) - rs_1^2(r)[1 - 2s_2(r)] \right) r[1 - 2s_3(r)] \\
&= \frac{s_4(r)}{r} + 3s_3(r)[1 - 2s_3(r)] - 2s_2^2(r)r[1 - 2s_3(r)] + \\
&\quad - rs_1^2(r)[1 - 2s_2(r)]r[1 - 2s_3(r)] \\
&= \frac{s_4(r)}{r} + 3s_3(r)[1 - s_3(r)] - 3s_3^2(r) - 2rs_2^2(r)[1 - 2s_3(r)] + \\
&\quad - r^2s_1^2(r)[1 - 2s_2(r)][1 - 2s_3(r)] \\
&= \frac{s_4(r)}{r} + \frac{3s_4(r)}{r} - 3s_3^2(r) - 2rs_2^2(r)[1 - 2s_3(r)] + \\
&\quad - r^2s_1^2(r)[1 - 2s_2(r)][1 - 2s_3(r)] \\
&= \frac{4s_4(r)}{r} - 3s_3^2(r) - 2rs_2^2(r)[1 - 2s_3(r)] + \\
&\quad - r^2s_1^2(r)[1 - 2s_2(r)][1 - 2s_3(r)],
\end{aligned}$$

⋮ ⋯, ...

$$\begin{aligned}
s'_n(r) &= \frac{ns_n(r)}{r} - (n-1)s_{n-1}^2(r) - (n-2)rs_{n-2}^2(r)[1 - 2s_{n-1}(r)] + \\
&\quad - (n-3)r^2s_{n-3}^2(r)[1 - 2s_{n-2}(r)][1 - 2s_{n-1}(r)] + \\
&\quad + (n-4)r^3s_{n-4}^2(r)[1 - 2s_{n-3}(r)][1 - 2s_{n-2}(r)][1 - 2s_{n-1}(r)] + \\
&\quad + r^{n-2}s_1^2(r)[1 - 2s_2(r)][1 - 2s_3(r)] \dots [1 - 2s_{n-1}(r)] \\
&= \frac{ns_n(r)}{r} - (n-1)s_{n-1}^2(r) + \\
&\quad - \sum_{i=2}^{n-1} (n-i)r^{i-1}s_{n-i}^2(r) \prod_{k=1}^{i-1} [1 - 2s_{n-i+k}(r)], \tag{2.12}
\end{aligned}$$

e serão úteis na análise do comportamento das funções *supertracks*.

2.5 Análise do Comportamento das Funções *Supertracks*

Verificaremos, para intervalos do parâmetro r do mapa logístico, o comportamento das funções *supertracks*.

2.5.1 Ponto fixo $x = 0$ e $s_n(r), n > 0$ para $r \in [0, 1]$

Das Figuras (2.3) e (2.4) e da análise do conjunto de Equações (2.4), (2.10) e (2.11), podemos compreender melhor o comportamento das *supertracks* para $r \in [0, 1]$.

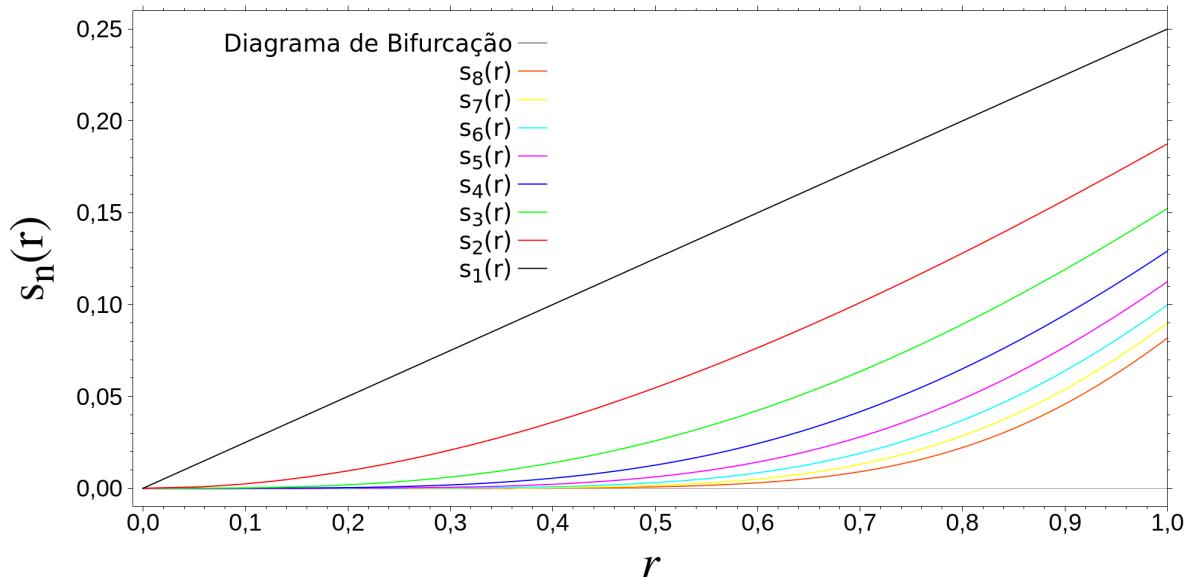


Figura 2.3: Diagrama de bifurcação e $s_n(r), n = 1..8$, para $r \in [0, 1]$.

1. Para $r = 0$, a derivada é indefinida, pois é o extremo do intervalo analisado. Contudo, numericamente temos:
 - (a) Todas as $s_n(0)$ anulam-se, ou seja, 0 é raiz de $s_n(0), n \geq 1$,
 - (b) Excetuando $s'_1(0) = \frac{1}{4}$, todas as outras derivadas $s'_n(0)$, para $n > 1$, tem valor nulo.
2. Para $0 < r < 1$, temos:
 - (a) $r^m < r^{m-1} < \dots < r^3 < r^2 < r$. Sem levar em consideração o valor do coeficiente a_{nm} do termo r^m de $s_n(r) = \sum_{m=1}^{2n-1} a_{nm} r^m$, para $n > 0$, quando $n \rightarrow \infty$, $r^{2n-1} \rightarrow 0$,
 - (b) A sequência de *supertracks* $\left\{ \frac{r}{4}, \frac{r^2}{16}(4-r), \frac{r^3}{256}(4-r)(16-4r^2+r^3), \dots \right\}$ tem como denominador de cada fração o termo 2^{2^n} . Ou seja, para $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{2^{2^n}} \rightarrow 0$,

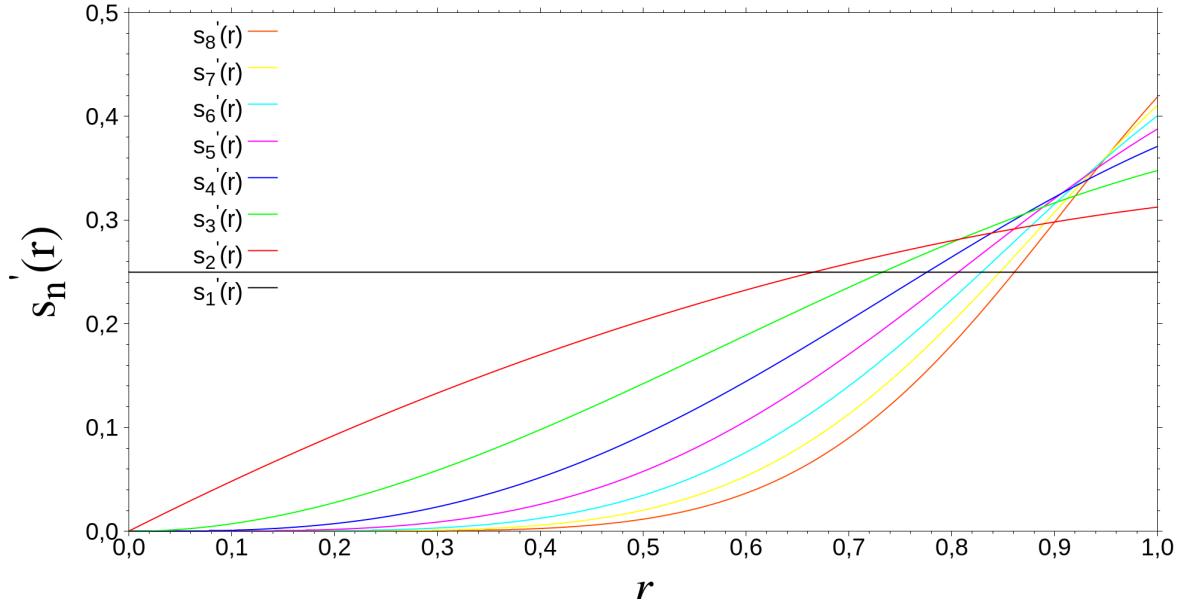


Figura 2.4: Derivada das $s_n(r)$, $s'_n(r)$, $n = 1..8$ para $r \in [0, 1]$.

- (c) A sequência das razões entre uma *supertrack* e a sua anterior é dada por $\frac{s_{n+1}(r)}{s_n(r)}$, para $n > 0$, o que nos leva à sequência de razões dada por $\left\{ \frac{r}{2}, r + \left(-\frac{r^2}{4} \right), r + \left(-\frac{r^3}{4} + \frac{r^4}{16} \right), r + \left(-\frac{r^4}{4} + \frac{r^5}{16} + \frac{r^6}{16} - \frac{r^7}{32} + \frac{r^8}{256} \right), \dots \right\}$. Devido aos argumentos dos Itens (2a) e (2b), os termos entre parênteses tendem a zero quando $n \rightarrow \infty$, assim estas razões partem de $\frac{r}{2}$ e convergem para r , mostrando que $s_{n+1}(r) < s_n(r)$, pois $r < 1$,
- (d) Os argumentos dos Itens (2a) e (2b) também são válidos na análise das derivadas $s'_n(r)$ das *supertracks*, Equações (2.11), que tem a forma $s'_n(r) = \sum_{m=1}^{2n-1} m a_{nm} r^{m-1}$, para $n > 0$. Quando $n \rightarrow \infty$, $s'_n(r) \rightarrow 0$.
- (e) A sequência de razões entre a derivada de uma *supertrack* e a derivada da anterior é dada por $\frac{s'_{n+1}(r)}{s'_n(r)}$, para $n > 0$. Conforme o Item (2c) acima, os termos entre parênteses das razões $\left\{ \frac{r}{4}(8-3r), \frac{r}{16} \left(\frac{-192+64r+80r^2-48r^3+7r^4}{-8+3r} \right), \frac{r}{256} \left(\frac{-65536+20480r+24576r^2+14336r^3-14336r^4-16128r^5+15360r^6}{-192+80r^2-48r^3+64r+7r^4+15360r^6} + \frac{-1408r^7-2688r^8+1248r^9-224r^{10}+15r^{11}}{-192+80r^2-48r^3+64r+7r^4} \right), \dots \right\}$ tendem para zero quando $n \rightarrow \infty$, assim como os termos na frente dos parênteses também convergem para zero no mesmo limite, conforme o Item (2b), mostrando que $s'_{n+1}(r) < s'_n(r)$.

3. Para $r = 1$ a derivada do ponto fixo não está definida por esta ser descontínua, contudo temos:

(a) O valor de $s_n(1)$ é a soma dos coeficientes a_{nm} do Item (2a) acima. Ou seja,

$$s_n(1) = \sum_{m=1}^{2n-1} a_{nm}, \quad n > 0,$$

(b) Temos a órbita $\left\{ \frac{a_n}{c_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{39}{256}, \frac{8463}{65536}, \dots \right\}$, para $n > 0$, em que o termo a_n do numerador é obtido da sequência $a_n = 2^{2^{n-1}} b_n$, $b_1 = 1/2$, $b_{n+1} = b_n - b_n^2$, e o denominador é dado por $c_n = 2^{2^n}$. Como o termo do denominador cresce mais rapidamente que o do numerador, $s_n(r) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,

(c) A sequência de razões entre as *supertracks* $\frac{s_{n+1}(r)}{s_n(r)}$, para $n > 0$, é a mesma do Item (2c) acima. Os termos entre parênteses também tendem a zero (numa taxa de convergência menor do que no caso anterior) quando $n \rightarrow \infty$, levando a sequência das razões de $1/2$, quando $n = 1$, até 1 no limite assintótico,

(d) O argumento do Item (3a) é válido para a análise das derivadas $s'_n(r)$, pois $s'_n(1) = \sum_{m=1}^{2n-1} m a_{nm}$, para $n > 0$. Assim, $\left\{ \frac{d_n}{c_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{89}{256}, \frac{24305}{65536}, \dots \right\}$, para $n > 0$, no qual os termos d_n são os numeradores da sequência dada por $d'_1 = 1/2$, $d'_{n+1} = \frac{d_n^2 + 1}{2}$, e $c_n = 2^{2^n}$. Fazendo $s'_{n+1}(r) = s'_n(r)$ e resolvendo para $s_n(r)$, obtemos $s'_{n+1}(1) = \frac{1}{2} \frac{3s_n^2(1) - 3s_n(1) + 1}{1 - 2s_n(1)}$, que assintoticamente converge para $1/2$,

(e) A razão entre as derivadas $\frac{s'_{n+1}(r)}{s'_n(r)}$, para $n > 0$, conforme os Itens (2e) e (3a), tem os termos entre parênteses convergindo para a unidade, segundo a sequência $\left\{ \frac{d_{n+1}}{e_n} \right\} = \left\{ \frac{5}{4}, \frac{89}{80}, \frac{24305}{22784}, \frac{1664474849}{1592852480}, \dots \right\}$, para $n > 0$, com d_n sendo o mesmo que o do Item (3d) e $e_n = d_n c_n$, mostrando que assintoticamente as razões das derivadas convergem para a unidade.

Assim, das considerações acima vemos que $s_n(r) \rightarrow 0$ e $s'_n(r) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, mostrando que $x = 0$ é um ponto fixo estável para $r \in [0, 1]$, e $s_n(r) \rightarrow 0$ e $s'_n(r) \rightarrow 1/2$ quando $n \rightarrow \infty$ para $r = 1$.

2.5.2 Ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{r}$ e $s_n(r), n > 0$ para $r \in [1, 3]$

Das Figuras (2.5) e (2.6) e da análise do conjunto de Equações (2.4), (2.10) e (2.11), podemos compreender melhor o comportamento das *supertracks* para $r \in [1, 2]$.

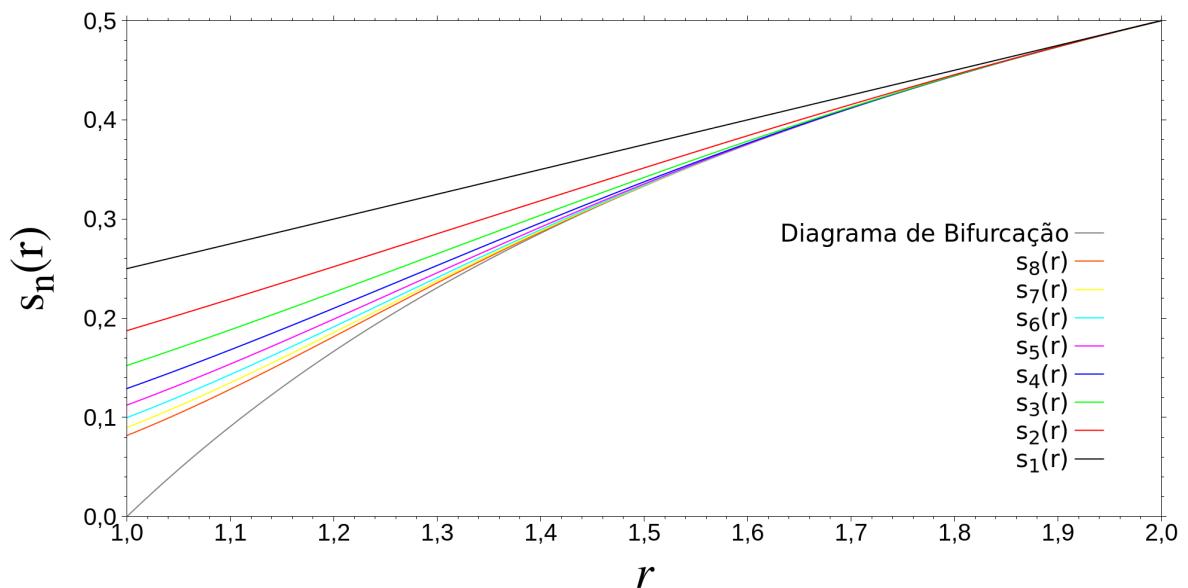


Figura 2.5: Diagrama de bifurcação e $s_n(r), n = 1..8$ para $r \in [1, 2]$.

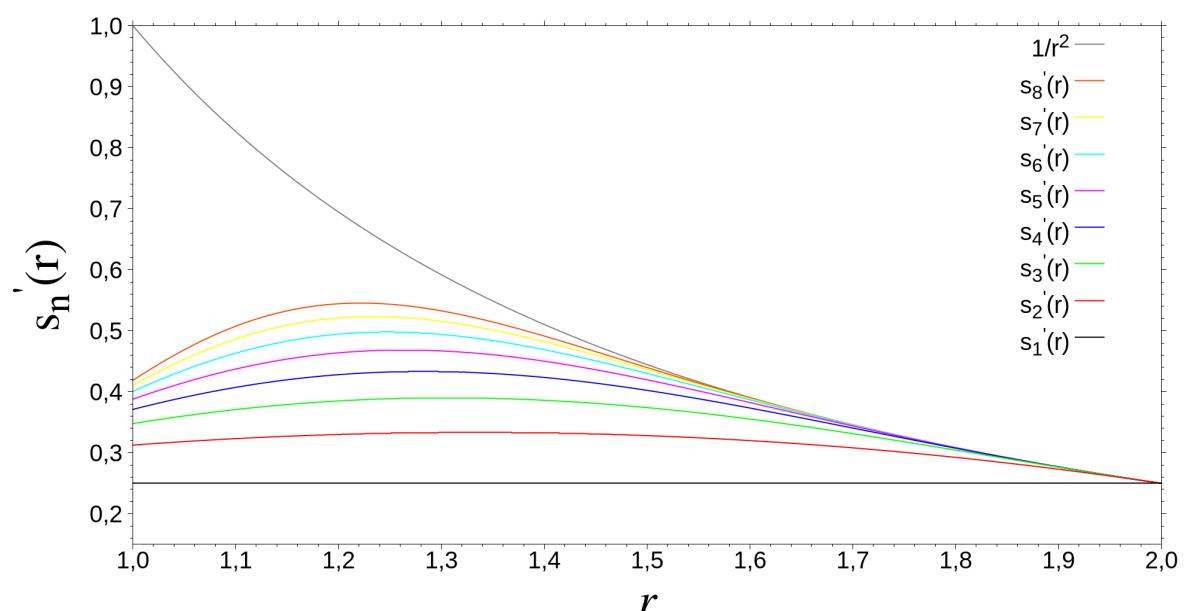


Figura 2.6: Derivada das $s_n(r), s'_n(r), n = 1..8$ e do ponto fixo $x' = \frac{1}{r^2}$ para $r \in [1, 2]$.

1. Para $r = 1$: Já foi visto anteriormente que para $n \rightarrow \infty$, $s_n(r) \rightarrow 0$ e $s'_n(r) \rightarrow 1/2$.

2. Para $1 < r < 2$:

Temos como ponto fixo $x_n = 1 - \frac{1}{r}$ e derivada $x'_n = \frac{1}{r^2}$.

- (a) $s_n(r) > 1 - \frac{1}{r}$, $n > 0$, ou seja, $\frac{1}{r} > 1 - s_n(r)$. Multiplicando ambos os lados por $rs_n(r) > 0$, temos $s_n(r) > s_{n+1}(r)$,
- (b) Se ocorrer $s_n(r) < 1 - \frac{1}{r}$ para algum $n > 0$, temos $\frac{1}{r} < 1 - s_n(r)$. Multiplicando ambos os lados por $rs_n(r)$, temos $s_n(r) < s_{n+1}(r)$.

Assim, pelos dois argumentos acima, usados recursivamente, ou através de indução matemática, é fácil ver que as *supertracks* assintoticamente convergem para o ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{r}$.

3. Para $r = 2$:

Temos como ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ e derivada $x' = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}$.

- (a) Temos uma órbita superestável, com $s_n(2) = 1/2$ para $n > 0$,
- (b) As derivadas, utilizando as Equações (2.12), são:

$$s'_1(2) = \frac{1}{4},$$

$$s'_2(2) = \frac{s_2(2)}{2} + 2s_2(2)[1 - 2s_2(2)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{4},$$

e recursivamente obteremos a mesma derivada para quaisquer $n > 0$.

Assim, temos que o ponto fixo superestável surge com sua posição x constante e com derivada também constante.

4. Para $2 < r < 3$:

Das Figuras (2.7) e (2.8) e da análise do conjunto de Equações (2.4), (2.10) e (2.11) podemos compreender melhor o comportamento das *supertracks* para $r \in (2, 3]$.

Temos como ponto fixo $x_n = 1 - \frac{1}{r}$ e derivada $x'_n = \frac{1}{r^2}$.

- (a) $s_n(r) < 1 - \frac{1}{r}$, $n > 0$, ou seja, $\frac{1}{r} < 1 - s_n(r)$. Multiplicando ambos os lados por $rs_n(r) > 0$, temos $s_n(r) < s_{n+1}(r)$,
- (b) Se ocorrer $s_n(r) > 1 - \frac{1}{r}$ para algum $n > 0$, temos $\frac{1}{r} > 1 - s_n(r)$. Multiplicando ambos os lados por $rs_n(r)$, temos $s_n(r) > s_{n+1}(r)$.

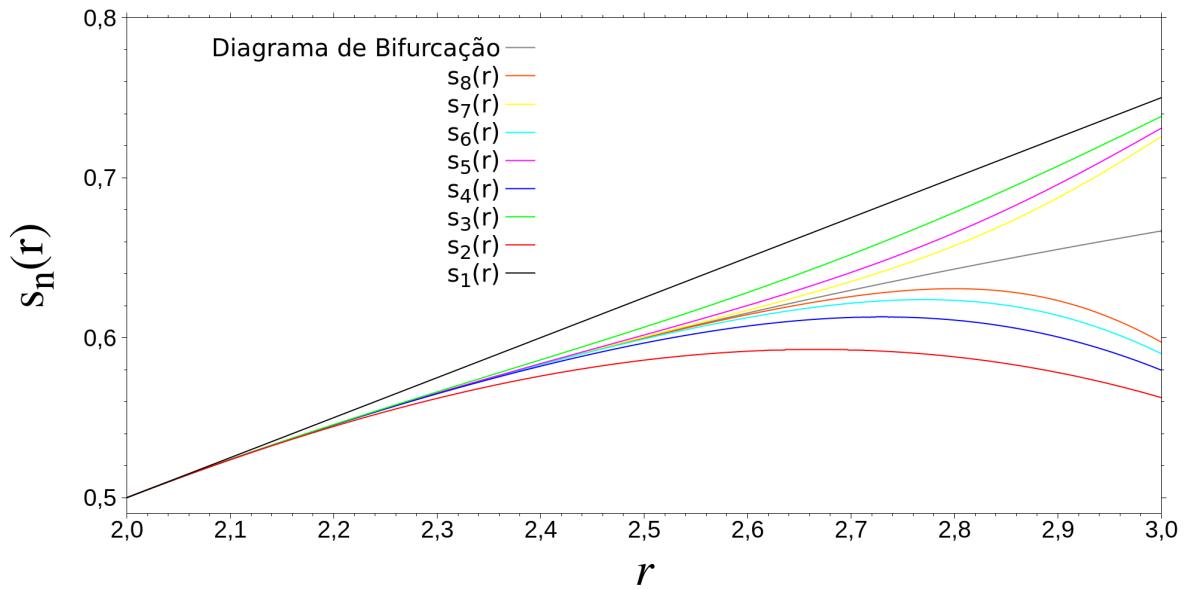


Figura 2.7: Diagrama de bifurcação e $s_n(r)$, $n = 1 \dots 8$ para $r \in [2, 3]$.

Assim, pelos dois argumentos acima, usados recursivamente, ou através de indução matemática, é fácil ver que as *supertracks* assintoticamente convergem para o ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{r}$.

5. Para $r = 3$:

Temos a primeira duplicação de períodos, dando início à órbita de período 2 estável.

- (a) Temos a órbita dada pela sequência $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{189}{256}, \frac{37989}{65536} \dots \right\}$ que assintoticamente converge para $\frac{2}{3}$,

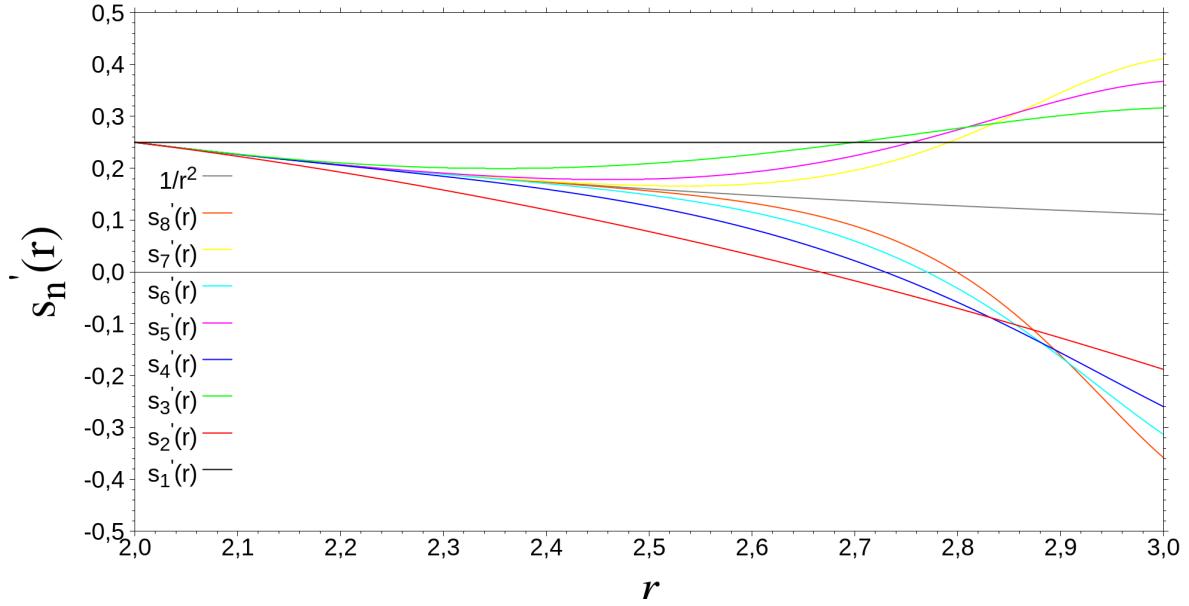


Figura 2.8: Derivada das $s_n(r)$, $s'_n(r)$, $n = 1..8$ e do ponto fixo $x' = \frac{1}{r^2}$ para $r \in [2, 3]$.

(b) A sequência de derivadas é dada por

$$\begin{aligned}
s'_1(3) &= \frac{1}{4} = 0.25, \\
s'_2(3) &= \frac{9}{16(3)} + 3\left(\frac{1}{4}\right)\left[1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)\right] = -\frac{3}{16} = -0.1875, \\
&\vdots \quad \ddots \quad \dots \\
s'_{n-1}(3) &= \frac{s_{n-1}(3)}{3} + 3s'_{n-2}(3)[1 - 2s_{n-2}(3)], \\
s'_n(3) &= \frac{s_n(3)}{3} + 3s'_{n-1}(3)[1 - 2s_{n-1}(3)] = \\
&= \frac{2}{3} + 3s'_{n-1}(3)\left[1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{2}{3} - s'_{n-1}(3), \\
s'_{n+1}(3) &= \frac{2}{3} - s'_n(3) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} - s'_{n-1}(3)\right) = s'_{n-1}(3), \\
s'_{n+2}(3) &= \frac{2}{3} - s'_{n+1}(3) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} - s'_n(3)\right) = s'_n(3),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

(c) As sequências $\left\{\frac{81}{64}, \frac{19487561}{16777216}, \dots\right\}$ e $\left\{\frac{5661}{4096}, \frac{213598796893976709}{177047760351002624}, \dots\right\}$ são a razões das derivadas $\frac{s'_{k+2}(r)}{s'_n(r)}$, com $k > 0$, para k par e ímpar, respectivamente. Ambas as sequências assintoticamente convergem para a unidade assim que $s_n(r) \rightarrow 2/3$ quando $n \rightarrow \infty$,

(d) O valor de $s_{n-1}(3)$ na Equação (2.13) é sempre maior que $1/2$ (assintoticamente convergindo para $2/3$), deixando o termo entre colchetes negativo. O

produto deste termo por $3s'_{n-1}(3)$, quando a derivada é positiva, é, em módulo, maior que $3/4$, e, somado com $\frac{s_n(3)}{3} \leq \frac{3}{4}$, deixa a derivada $s'_{n+1}(3)$ negativa.

Isto leva a uma troca do sinal da derivada $s'_{n+1}(3)$ em relação a $s'_n(3)$. Assim, recursivamente $s'_{n+1}(3)$ tem o sinal oposto de $s'_n(3)$ para $n \geq 2$.

Assim podemos entender melhor a primeira duplicação de períodos através de dois valores de derivada que se repetem alternadamente.

2.5.3 Supertracks e suas derivadas em $r = 4$ ($s_n(4)$ e $s'_n(4)$)

Os valores das derivadas de $s_n(4)$ são apresentados abaixo. Vale lembrar que $s_1(4) = 1$ e $s_n(4) = 0$ para todo $n > 1$.

$$\begin{aligned}
s'_1(4) &= \frac{1}{4}, \\
s'_2(4) &= 0 + \left(\frac{1}{4}\right) 4[1 - 2(1)] = -1, \\
s'_3(4) &= 0 + (-1)4[1 - 2(0)] = -4, \\
s'_4(4) &= 0 + (-4)4[1 - 2(0)] = -16, \\
s'_5(4) &= 0 + (-16)4[1 - 2(0)] = -64, \\
&\vdots \quad \ddots \quad \dots \\
s'_n(4) &= 0 + (-4^{n-3})4[1 - 2(0)] = -4^{n-2},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

o que mostra que a sequência de derivadas $s'_n(4)$ para $n \geq 2$ é dada por uma progressão geométrica de razão 4, conforme a Equação (2.14). Ou seja, $s'_n(4) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

2.6 $s'_n(r)$ em Órbitas Superestáveis

Em uma órbita superestável de período p em $r = r_p^s$, temos:

$$\begin{aligned}
 s_0(r_p^s) &= s_{kp}(r_p^s) = x_0^s = x_p^s = 1/2, \\
 s_1(r_p^s) &= s_{kp+1}(r_p^s) = x_1^s, \\
 s_2(r_p^s) &= s_{kp+2}(r_p^s) = x_2^s, \\
 &\vdots \quad \ddots \quad \dots \\
 s_{n-1}(r_p^s) &= s_{kp+(p-1)}(r_p^s) = x_{p-1}^s,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

e as derivadas

$$\begin{aligned}
 s'_0(r_p^s) &= 0, \\
 s'_1(r_p^s) &= \frac{1}{4}, \\
 s'_2(r_p^s) &= \frac{s_2(r_p^s)}{r_p^s} + \frac{1}{4}r_p^s[1 - 2s_1(r_p^s)], \\
 &\vdots \quad \ddots \quad \dots \\
 s'_p(r_p^s) &= \frac{1}{2r_p^s} + s'_{p-1}(r_p^s)r_p^s[1 - 2s_{p-1}(r_p^s)], \\
 s'_{p+1}(r_p^s) &= \frac{s_1(r_p^s)}{r_p^s} + s'_p(r_p^s)r_p^s \left[1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4} = s'_1(r_p^s), \\
 s'_{p+2}(r_p^s) &= \frac{s_2(r_p^s)}{r_p^s} + \frac{1}{4}r_p^s[1 - 2s_1(r_p^s)] = s'_2(r_p^s),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

o que mostra que, além de ser possível obter analiticamente a posição x_p^s de todos os pontos da órbita, as *supertracks* tem todas a mesma derivada nestes pontos, que também pode ser obtida analiticamente.

2.7 Contribuição de $s_{50}(r)$, $s_{51}(r)$ e $s_{52}(r)$ na Construção do Diagrama de Bifurcação

Para enfatizar a utilidade das *supertracks* em descrever o diagrama de bifurcação do mapa logístico, o conjunto de Figuras (2.9) e (2.10) mostram a contribuição das $s_{50}(r)$, $s_{51}(r)$ e $s_{52}(r)$ para o diagrama de bifurcação do mapa logístico para $r \in [0, 4]$ e

$r \in [3,5 , 4]$, respectivamente. Os pontos foram obtidos por iteração numérica, e não algebricamente como função do parâmetro r .

Para reconstruir o diagrama de bifurcação com as funções *supertracks*, são necessárias tantas funções *supertracks* quantos os períodos que se deseja observar no diagrama de bifurcação. No conjunto de Figuras (2.10), é possível perceber que cada $s_n(r)$ passa pela janela de período 3 em cada ramo diferente. Já a primeira janela de período 4 não é totalmente reconstruída – falta um dos ramos – pois são necessárias 4 funções $s_n(r)$ para reconstruí-la.

De modo geral, em uma janela periódica de período p , temos que

$$s_n(r) = s_{(n \bmod p)}(r), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

o que indica que precisamos de p funções $s_n(r)$ consecutivas para reconstruir as janelas de período p . Assim, o diagrama de bifurcação é obtido através da superposição de famílias de funções *supertracks* que compõem as janelas periódicas do mapa.

2.8 Supertracks sobre o Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico

A Figura (2.11) mostra as *supertracks* sobre o diagrama de bifurcação do mapa logístico com alguns valores do parâmetro fixo r em destaque. Segue a descrição do itens que aparecem na mesma:

- x_1^i - curva do ponto fixo instável $x = 1 - \frac{1}{r}$,
- $x_{2,1}^i$ e $x_{2,2}^i$ - curvas dos pontos instáveis de período 2 $x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{\sqrt{(r-3)(r+1)}}{r} \right]$,
- r_n^p - indica que neste valor do parâmetro r existe um período n já conhecido, com n sendo o valor do período,
- r_∞^p - indica que neste valor do parâmetro r a duplicação de períodos leva quantidade de períodos duplicados ao infinito pela primeira vez no mapa logístico,
- r_n^s - indica que neste valor do parâmetro r existe um período n superestável calculado via *supertracks*, com n sendo o valor do período,

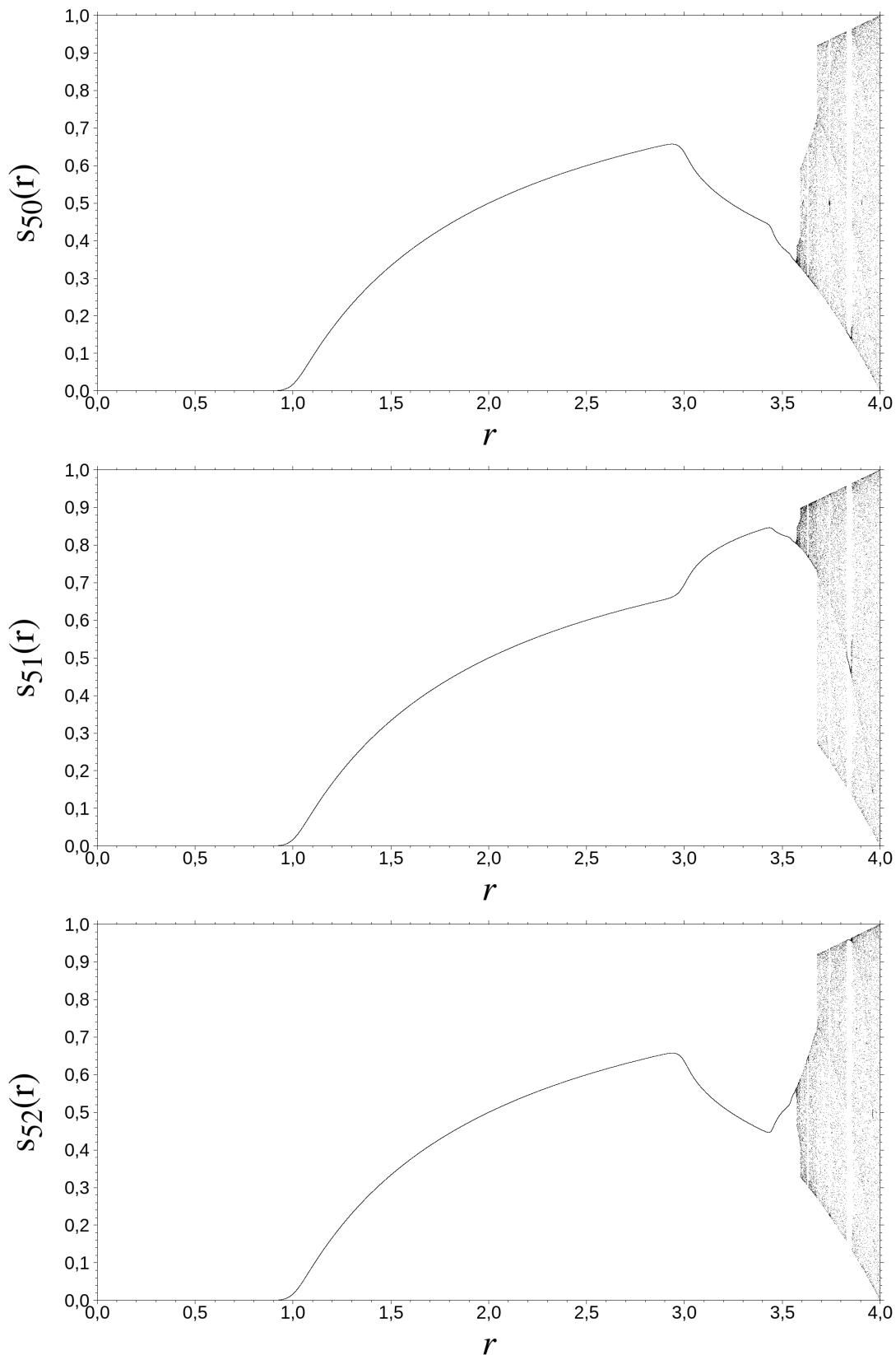


Figura 2.9: $s_{50}(r)$, $s_{51}(r)$ e $s_{52}(r)$ para $r \in [0, 4]$.

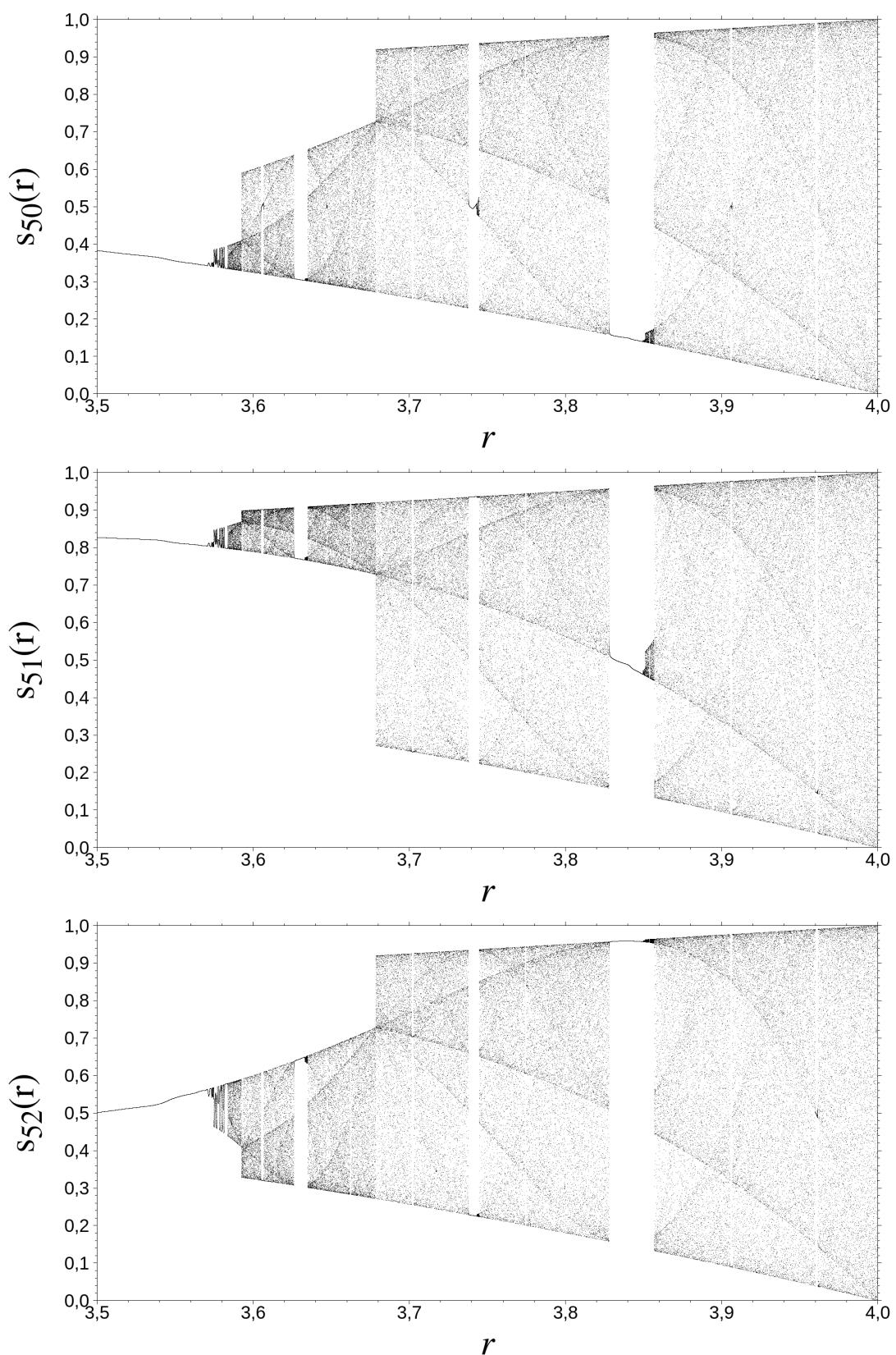


Figura 2.10: $s_{50}(r)$, $s_{51}(r)$ e $s_{52}(r)$ para $r \in [3,5 , 4]$.

- r_3^* - corresponde ao valor do parâmetro fixo r em que encontra-se o ponto de Misiurewicz $\mathcal{M}_{3,1}$.

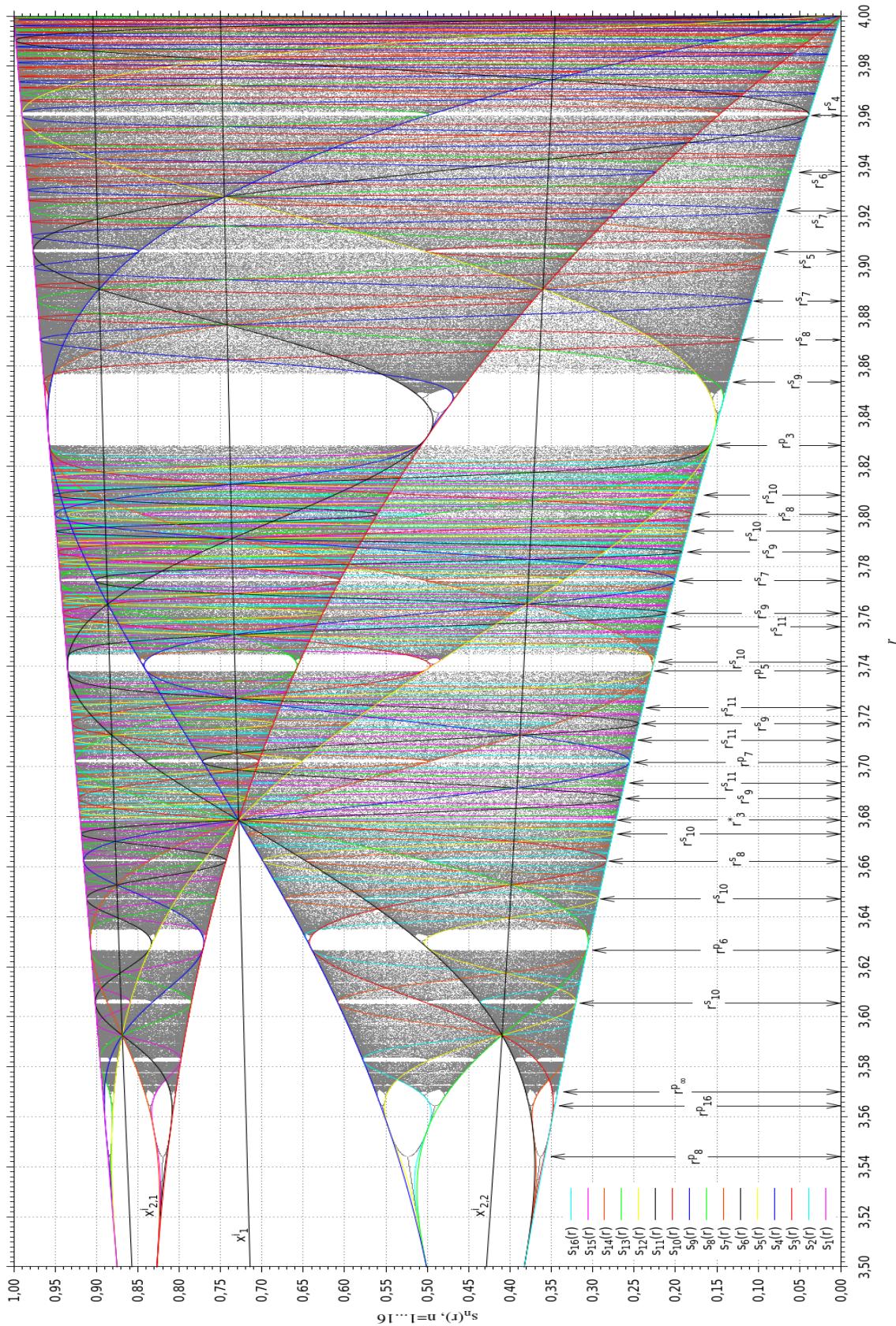


Figura 2.11: Diagrama de bifurcação do mapa logístico com *supertracks*, $s_n(r)$, $n = 1 \dots 10$ para $r \in [3,5 , 4]$ e $n = 11 \dots 16$ para $r \in [3,5 , 3,83]$.

Capítulo 3

Intersecção das *Supertracks*

Igualando as funções *supertracks*, $s_n(r) = s_k(r)$, $n \neq k$, obtemos os pontos de interseção e de tangência destas. Estes pontos podem ser pontos de órbitas periódicas ou pontos de Misiurewicz. A pertinência de um ponto no primeiro ou no segundo caso é dada pelo sinal do produto $s'_n(r)s'_k(r)$, conforme apresentado nas Equações (2.6), (2.7) e (2.9).

3.1 Pontos Periódicos e Pontos de Misiurewicz

Visualizaremos os pontos periódicos e pontos de Misiurewicz de períodos do 1 ao 12. Para tal, usamos a identidade

$$s_n(r) = s_{n+p}(r), \quad (3.1)$$

com $n \in \{0, \dots, 11\}$, $p \in \{1, \dots, 12\}$ e obedecendo à condição $n + p \leq 12$. Naturalmente, para a obtenção destes pontos, a *supertrack* de maior ordem utilizada foi a $s_{12}(r)$. A Figura (3.1) mostra todos os pontos encontrados via Equação (3.1).

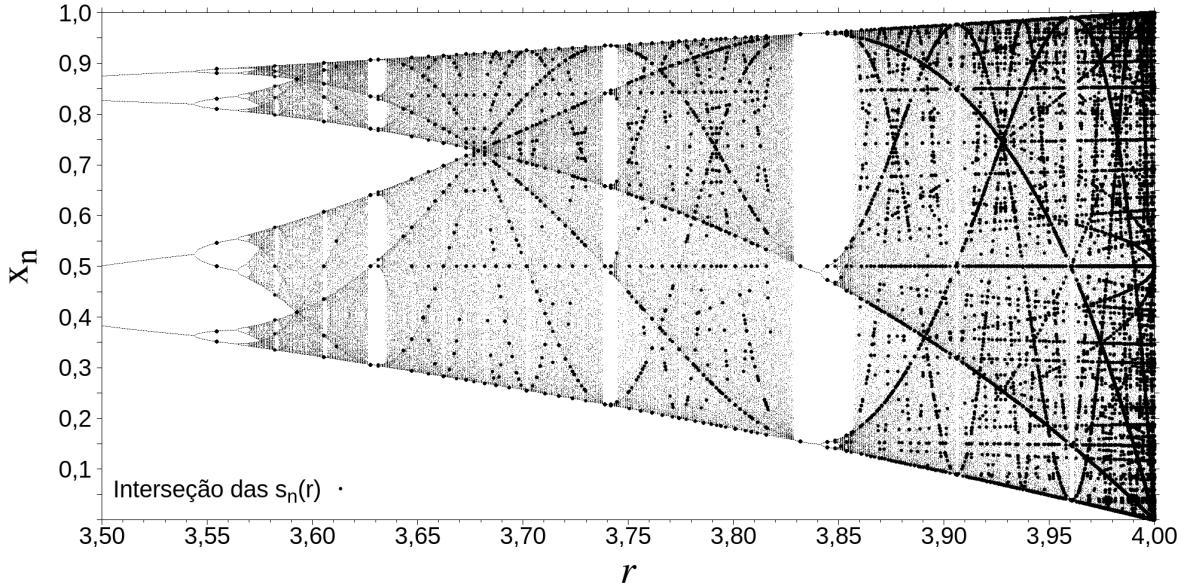


Figura 3.1: Encontro - tangência ou interseção - entre *supertracks*, $s_n(r)$, $n = 0..12$.

3.1.1 Pontos Periódicos Estáveis e Instáveis

As *supertracks* são de maior interesse no mapa a partir de $r_\infty \approx 3,5699457$, quando temos o início da região que apresenta caos. Este interesse reside no contorno (*boundary*) que as *supertracks* apresentam no diagrama de bifurcação em torno das regiões caóticas.

Os pontos periódicos estáveis de período 1 estão fora da região da análise das *supertracks*, que são $x = 0$ para $r \in [0, 1]$ e $x = 1 - 1/r$ para $r \in (1, 3)$. No diagrama das *supertracks*, encontramos alguns pontos fixos instáveis, que pertencem à curva $x = 1 - 1/r$. A Figura (3.2) mostra os pontos fixos das *supertracks* para $3,5 \leq r \leq 4$.

Os pontos periódicos estáveis de período 2 também estão fora da região de análise das *supertracks*. O período 2 estável começa em $r = 3$ e termina em $r = 1 + \sqrt{6} \approx 3,4494897$. Do mesmo modo, os pontos de período 2 são instáveis, pertencendo às curvas $x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right) \pm \frac{\sqrt{(r-3)(r+1)}}{r} \right]$. A Figura (3.3) mostra os pontos de período 2 das *supertracks* para $3,5 \leq r \leq 4$.

Como existem pontos periódicos, tanto estáveis quanto instáveis, de períodos do 3 ao 12, na região de análise das *supertracks*, estes são apresentados nas Figuras de (3.4) a (3.13), respectivamente, com o período aumentando em uma unidade em cada figura.

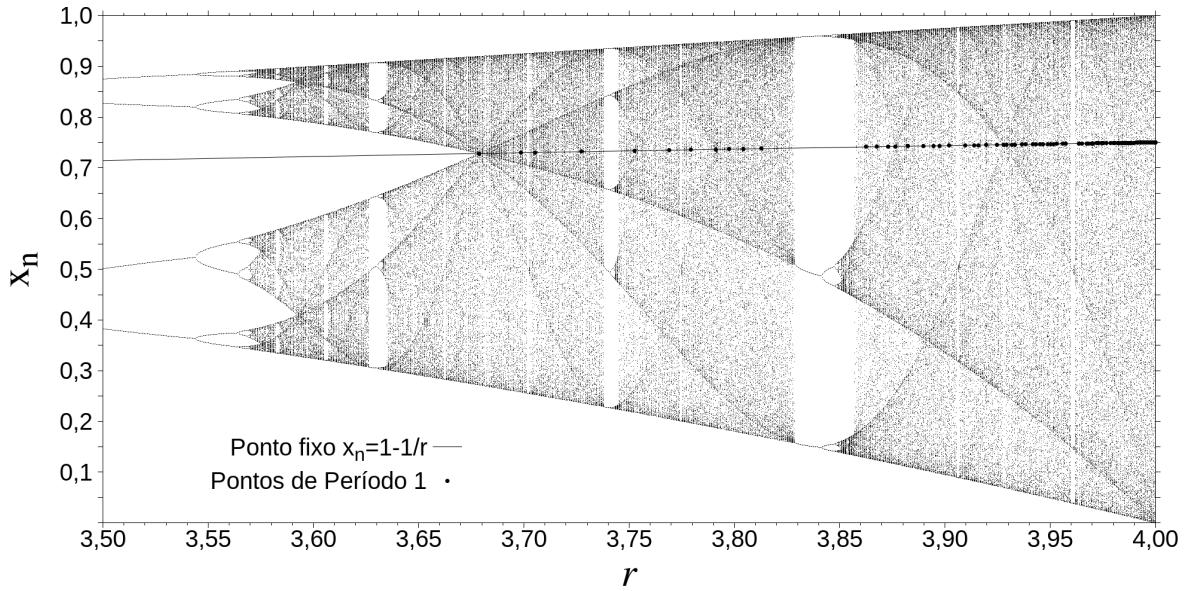


Figura 3.2: Pontos fixos (instáveis) no mapa logístico, segundo intersecções das *supertracks*, e a curva do ponto fixo instável $x = 1 - 1/r$.

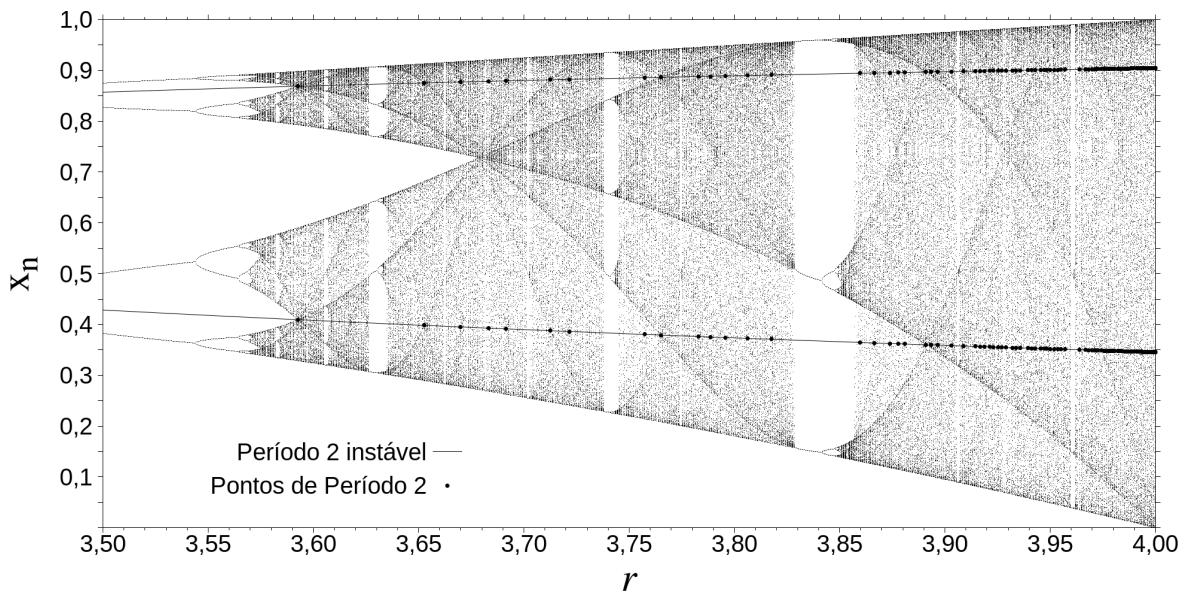


Figura 3.3: Pontos de período 2 instáveis no mapa logístico, segundo intersecções das *supertracks*, e as curvas de período 2 $x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right) \pm \frac{\sqrt{(r-3)(r+1)}}{r} \right]$.

3.1.2 Pontos de Misiurewicz ($\mathcal{M}_{n,p}$)

Assim como os pontos periódicos estáveis, os pontos de Misiurewicz podem ser encontrados pela interseção das *supertracks* $s_n(r) = s_{n+p}(r)$, para $n \geq 0$ e $p > 0$. Contudo, estes pontos são pontos periódicos instáveis, imagens do ponto crítico do mapa

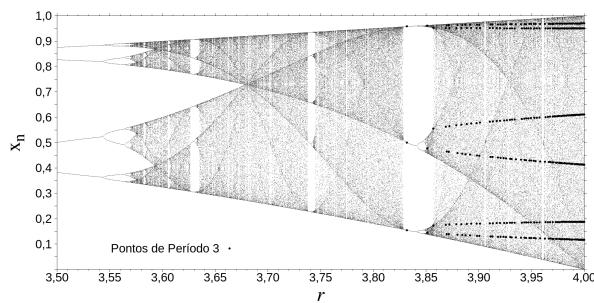


Figura 3.4: Pontos de período 3.

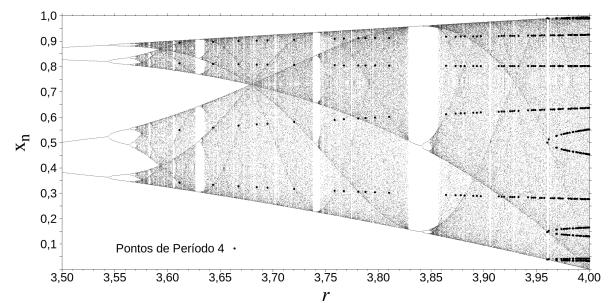


Figura 3.5: Pontos de período 4.

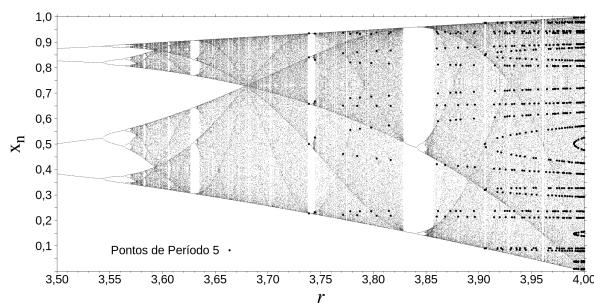


Figura 3.6: Pontos de período 5.

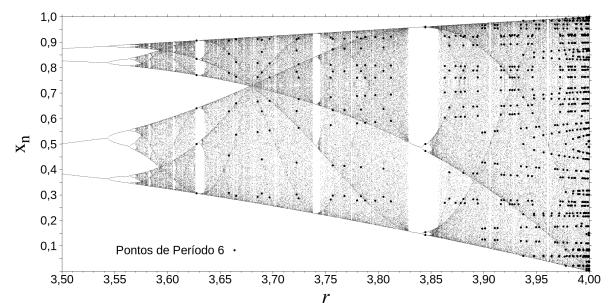


Figura 3.7: Pontos de período 6.

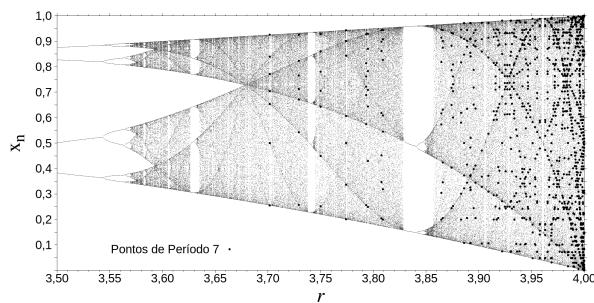


Figura 3.8: Pontos de período 7.

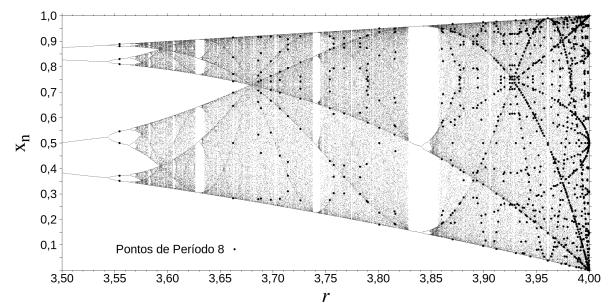


Figura 3.9: Pontos de período 8.

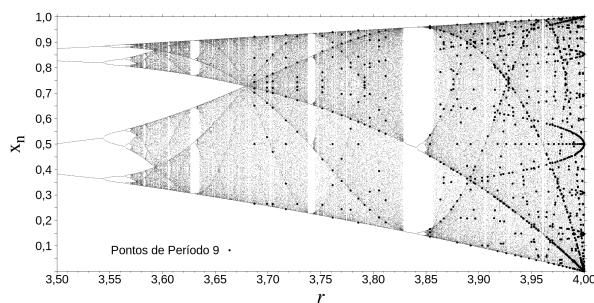


Figura 3.10: Pontos de período 9.

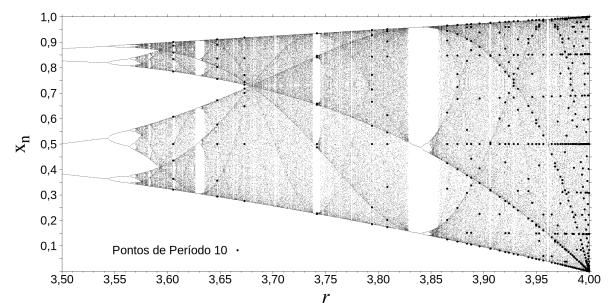


Figura 3.11: Pontos de período 10.

logístico $x = 1/2$.

Como os pontos $\mathcal{M}_{n,p}$ são pontos periódicos instáveis, o ponto de Misiurewicz

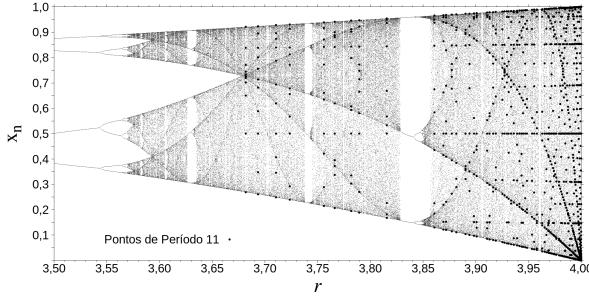


Figura 3.12: Pontos de período 11.

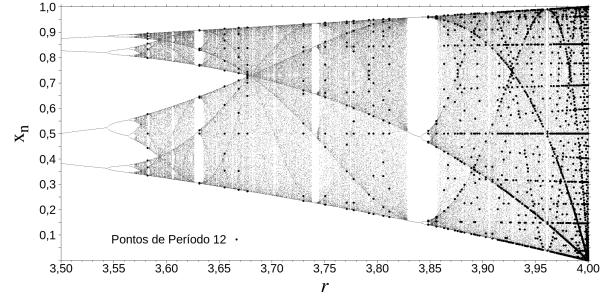


Figura 3.13: Pontos de período 12.

de pré-período 0 e período 1, $\mathcal{M}_{0,1}$, obtido da interseção de $s_0(r)$ com $s_1(r)$ não é um ponto de Misiurewicz, pois este é o ponto fixo superestável ($r = 2, x = 1/2$). Este ponto também será obtido na interseção de quaisquer outros pares de *supertracks*, já que é de período 1.

O próximo ponto obtido da interseção de $s_1(r) = s_2(r)$, tem pré-período 1 e período 1. Este ponto $\mathcal{M}_{1,1}$ é o ponto ($r = 0, x = 0$), que também é um ponto fixo estável, logo não pode ser um ponto de Misiurewicz, e também aparecerá na interseção de todas as outras *supertracks*.

O ponto seguinte é o ponto $\mathcal{M}_{2,1}$. Este é o ponto ($r = 4, x = 0$), que é um ponto de crise de fronteira. Mais sobre este ponto será abordado quando falarmos de medida invariante.

O próximo ponto de Misiurewicz a surgir via *supertracks* é o ponto cuspidal da maior região sem pontos internos, que une os ramos superiores e inferiores do mapa após a primeira duplicação de período ocorrida em $r = 3$. Observando as funções *supertracks* na Figura (2.11), percebemos que todas as $s_n(r)$, para $n \geq 3$, passam por este ponto $\mathcal{M}_{3,1}$, cujo valor do parâmetro fixo será chamado de r_3^* , por $s_3(r)$ ser a primeira *supertrack* a passar por este ponto. Este é um ponto de crise interior, pois, visivelmente no diagrama de bifurcação do mapa logístico, há uma mudança no atrator.

A partir de $s_3(r_3^*)$, este ponto parece comportar-se como um ponto fixo do mapa das funções *supertracks*, pois, aparentemente, para este valor de $r = r_3^*$, temos $s_3(r_3^*) = s_4(r_3^*) = s_5(r_3^*) \dots$, conforme as Figuras (2.1), (2.2) e (2.11). Para sabermos se realmente existe, e em que valor do parâmetro r surge este ponto de Misiurewicz, basta encontrarmos o ponto de intersecção entre $s_a(r_3^*)$ e $s_b(r_3^*)$, e verificar o valor assumido

pelas *supertracks* neste valor do parâmetro. Os cálculos foram realizados com $a = 3$ e $b = 4$, contudo, quaisquer outros pares de índices diferentes entre si e maiores que 2 podem ser usados. A escolha dos dois primeiros foi feita por simplicidade.

Somente a análise detalhada deste último ponto de Misiurewicz será apresentada.

3.2 $\mathcal{M}_{3,1}$ ou $s_3(r_3^*)$

À procura das soluções de

$$s_3(r_3^*) = s_4(r_3^*), \quad (3.2)$$

obtemos a equação

$$\frac{1}{65536} (r+2)(r-4)(r^3 - 2r^2 - 4r - 8)(r^3 - 4r^2 + 16)(r-2)^4 r^3 = 0 \quad (3.3)$$

cujas soluções são pontos de Misiurewicz de período 1, como $\mathcal{M}_{0,1} = (r = 2, x = 1/2)$, $\mathcal{M}_{1,1} = (r = 0, x = 0)$ e $\mathcal{M}_{2,1} = (r = 4, x = 0)$, por exemplo. Contudo, o resultado exato, e algébrico, de interesse, é obtido da equação

$$(r^3 - 2r^2 - 4r - 8) = 0, \quad (3.4)$$

cuja solução é

$$r_3^* = \frac{2}{3} \frac{\phi^2 + \phi + 4}{\phi} \approx 3,6785735, \quad (3.5)$$

com $\phi = (19 + 3\sqrt{33})^{1/3} \approx 3,3090565$. Este valor também foi encontrado algebricamente por Shi em 2007 [7], porém nenhuma análise ulterior foi feita para este valor do parâmetro fixo r .

Encontrado algebricamente o valor do parâmetro fixo r do ponto $\mathcal{M}_{3,1}$, podemos agora calcular os limites superior e inferior do mapa em r_3^* , visto que $s_1(r)$ e $s_2(r)$ são as fronteiras externas do mapa a partir de r_∞ :

$$s_1(r_3^*) = \frac{\phi^2 + \phi + 4}{6\phi} \approx 0,91964338, \quad (3.6)$$

$$s_2(r_3^*) = -\frac{(\phi^2 + \phi + 4)^2 (\phi^2 - 5\phi + 4)}{54\phi} \approx 0,27184451. \quad (3.7)$$

Os próximos pontos da órbita do mapa em r_3^* são os valores assumidos por $s_3(r_3^*)$, $s_4(r_3^*)$ e $s_5(r_3^*)$, como segue:

$$s_3(r_3^*) = \frac{\phi^2(1 - \sqrt{33})}{96} + \frac{\phi(\sqrt{33} - 5)}{24} + \frac{7}{6} \approx 0,72815549, \quad (3.8)$$

$$s_4(r_3^*) = \frac{\phi^2(1 - \sqrt{33})}{96} + \frac{\phi(\sqrt{33} - 5)}{24} + \frac{7}{6} = s_3(r_3^*), \quad (3.9)$$

$$s_5(r_3^*) = \frac{\phi^2(1 - \sqrt{33})}{96} + \frac{\phi(\sqrt{33} - 5)}{24} + \frac{7}{6} = s_4(r_3^*) = s_3(r_3^*). \quad (3.10)$$

Conforme as Equações (3.8), (3.9) e (3.10), $s_3(r_3^*)$ é um ponto fixo no mapa. Os pontos fixos estáveis do mapa são $x = 0$ para $r \in [0, 1)$ e $x = 1 - \frac{1}{r}$ para $r \in (1, 3)$. Como $s_3(r_3^*) \neq 0$, resta a possibilidade de $s_3(r_3^*)$ ser um ponto fixo instável em r_3^* . Temos então que

$$1 - \frac{1}{r_3^*} = s_3(r_3^*), \quad (3.11)$$

que pode ser ratificada algebricamente e numericamente, com $\left(1 - \frac{1}{r_3^*}\right) \approx 0,72815549$, conforme a Equação (3.8).

Iterando algebricamente o mapa logístico, ou via *supertracks*, conforme as Equações (3.8), (3.9) e (3.10), obtemos, usando a notação $\lambda_{\text{tipo de iteração}}(r, x_0)$:

$$\lambda_{\text{algébrica}}\left(r_3^*, \frac{1}{2}\right) = \log |r_3^*(1 - 2s_3(r_3^*))| \approx 0,518, \quad (3.12)$$

que é a contribuição para o expoente de Lyapunov do ponto fixo $s_3(r_3^*) = 1 - 1/r_3^*$. Como nem sempre é possível obter o expoente de Lyapunov com iteração algébrica, usamos a iteração numérica. Iteração algébrica significa precisão virtualmente infinita. Assim, iteramos numericamente o mapa com $x_0 = 1/2$ como condição inicial para vários valores de precisão, obtendo um resultado diferente do obtido na Equação (3.12), conforme apresentado nas Figuras (3.14), (3.15) e (3.16), nas quais as cores representam o tamanho da órbita utilizado para calcular o expoente de Lyapunov.

Quando calculamos o expoente de Lyapunov numericamente, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ como condição inicial, obtemos:

$$\lambda_{\text{numérica}}\left(r_3^*, \neq \frac{1}{2}\right) \approx 0,342. \quad (3.13)$$

As Figuras (3.17), (3.18) e (3.19) mostram a evolução do expoente de Lyapunov para $x_0 \neq 1/2$ com órbitas de 1000 a 7000 iteradas, com passo 1000.

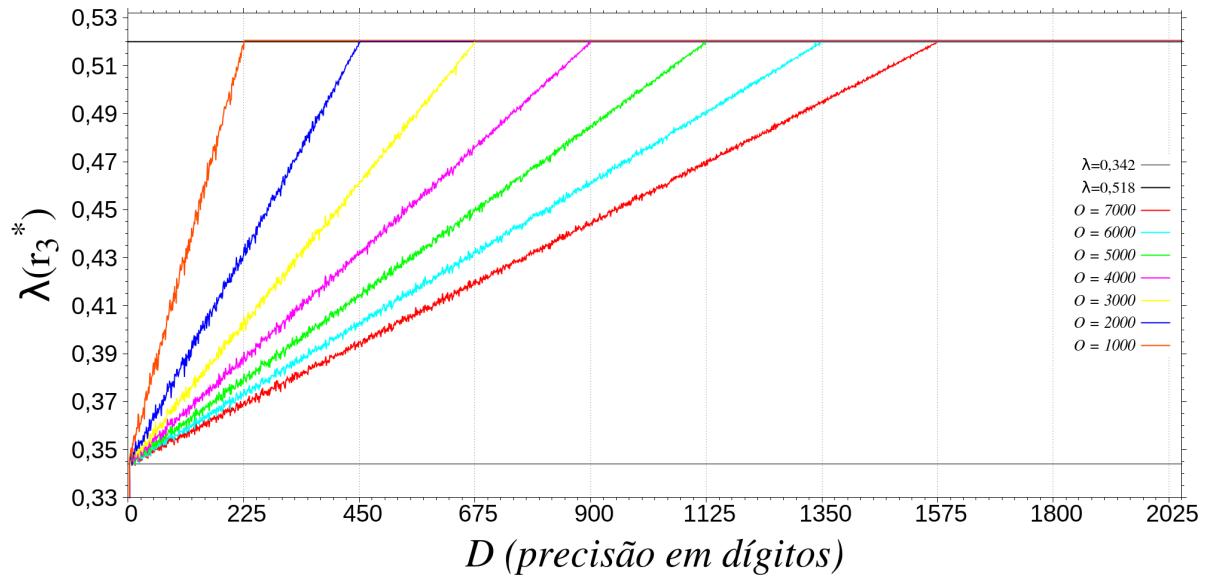


Figura 3.14: Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/2$ sem descarte de transiente.

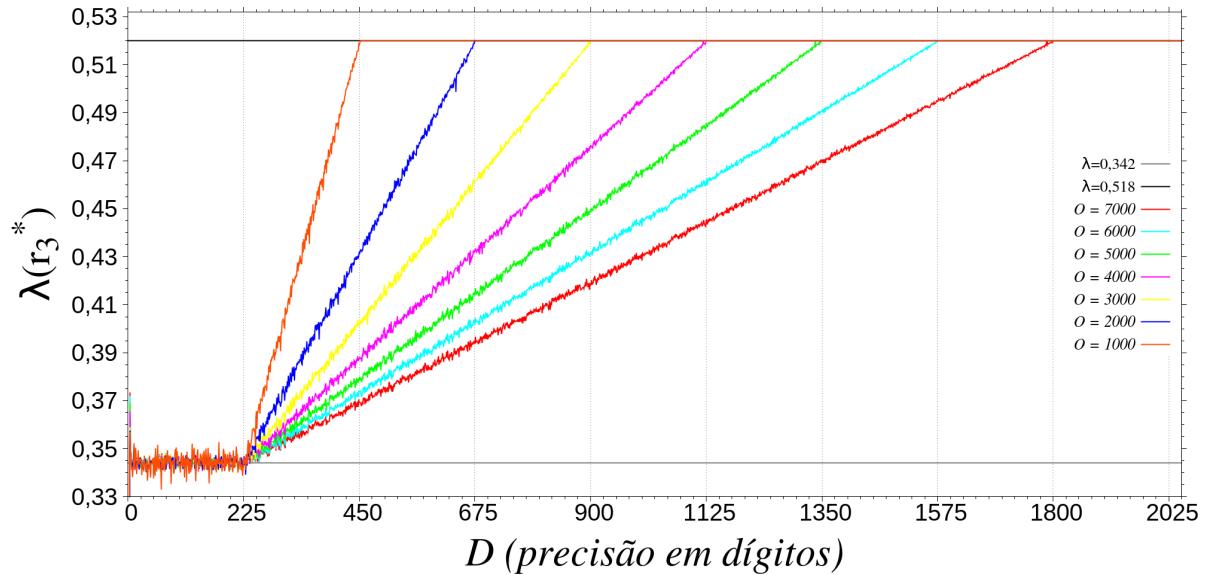


Figura 3.15: Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/2$ e 1000 iteradas de transiente.

Dada uma condição inicial favorecida, como a que gera as *supertracks*, ou alguma outra condição cuja órbita passe por $x = 1/2$, obtemos um comportamento aparentemente anômalo, frente ao comumente observado. Quando iteramos o mapa numericamente com precisão crescente, temos um comportamento assintótico do expoente de

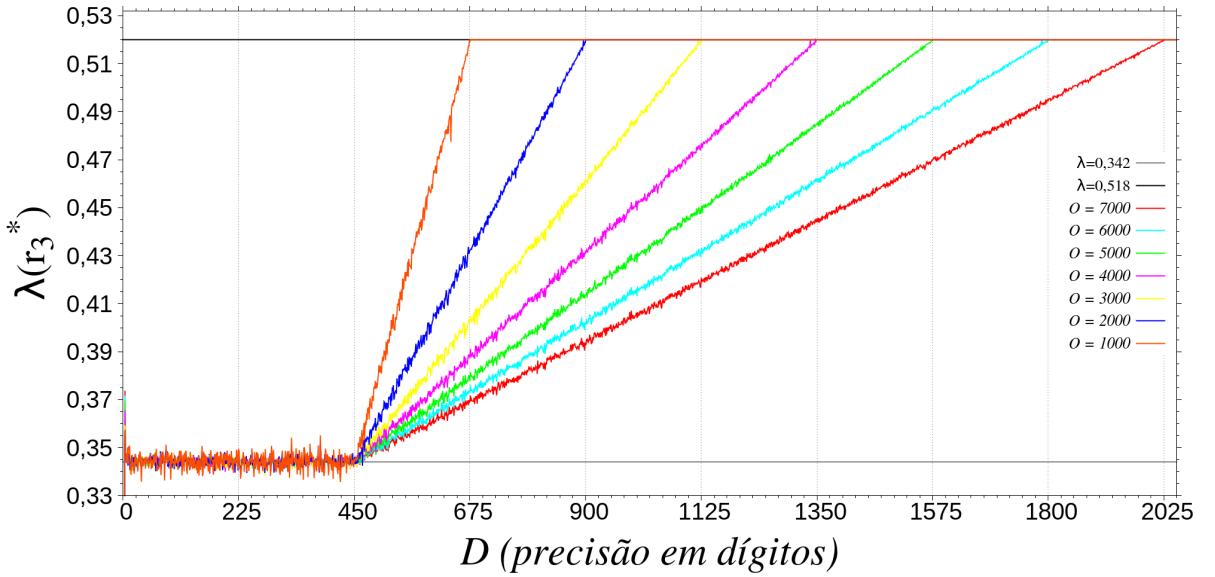


Figura 3.16: Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/2$ e 2000 iteradas de transiente.

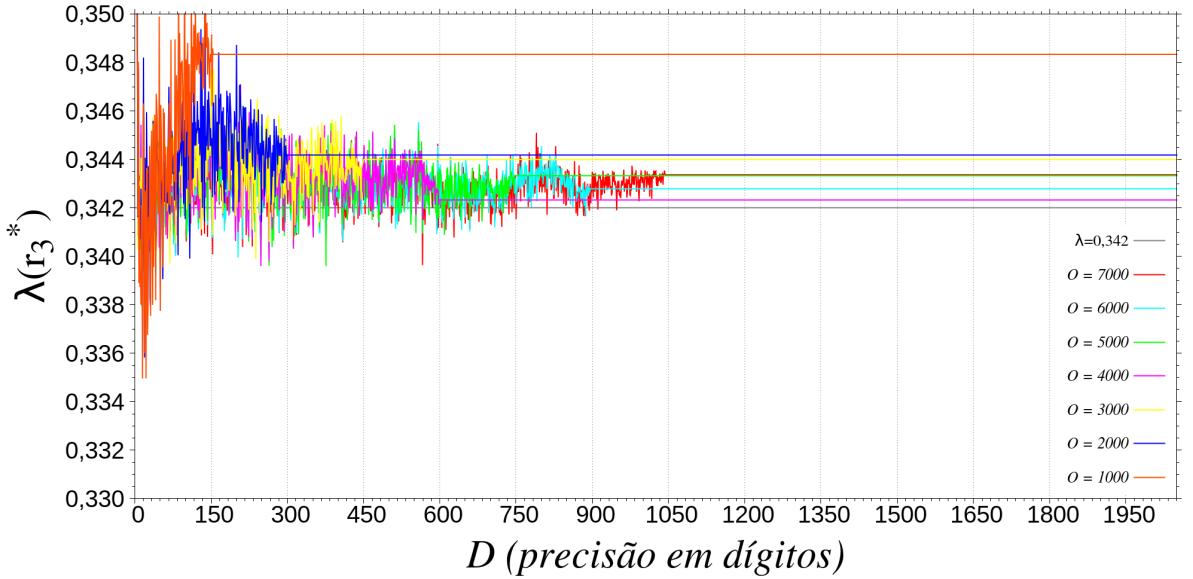


Figura 3.17: Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ sem descarte de transiente.

Lyapunov com o aumento da precisão. Em baixa precisão, obtemos o mesmo resultado da Equação (3.13). Aumentando-se a precisão, há um aumento do valor do expoente de Lyapunov, até o limite dado pela Equação (3.12), conforme as Figuras (3.14), (3.15) e (3.16). Neste caso, o expoente de Lyapunov depende da precisão utilizada D , do

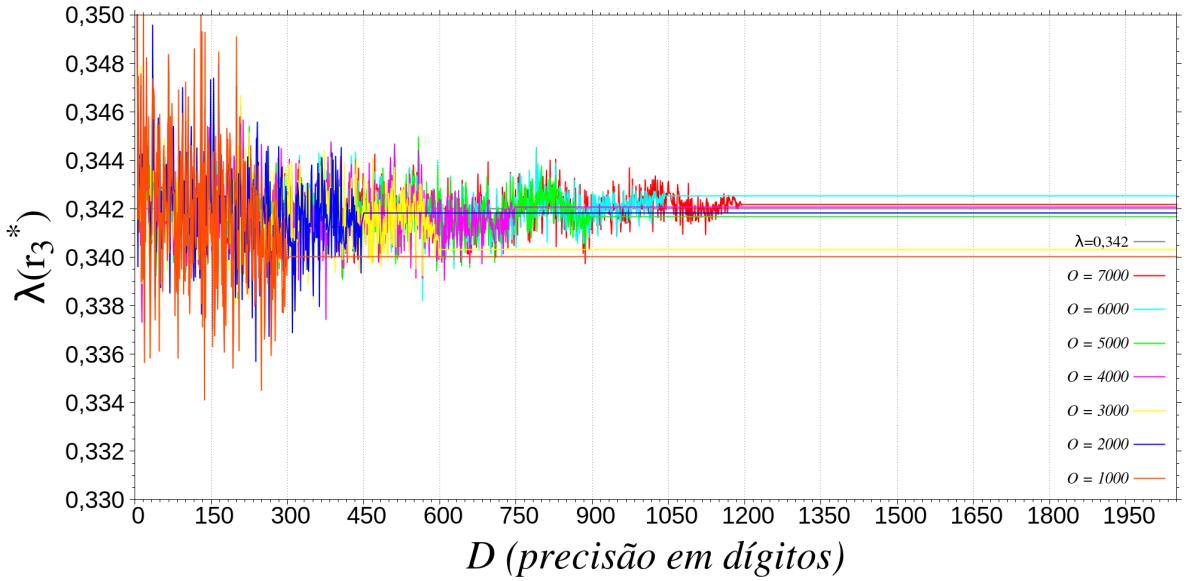


Figura 3.18: Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ e transiente de 1000 iteradas.

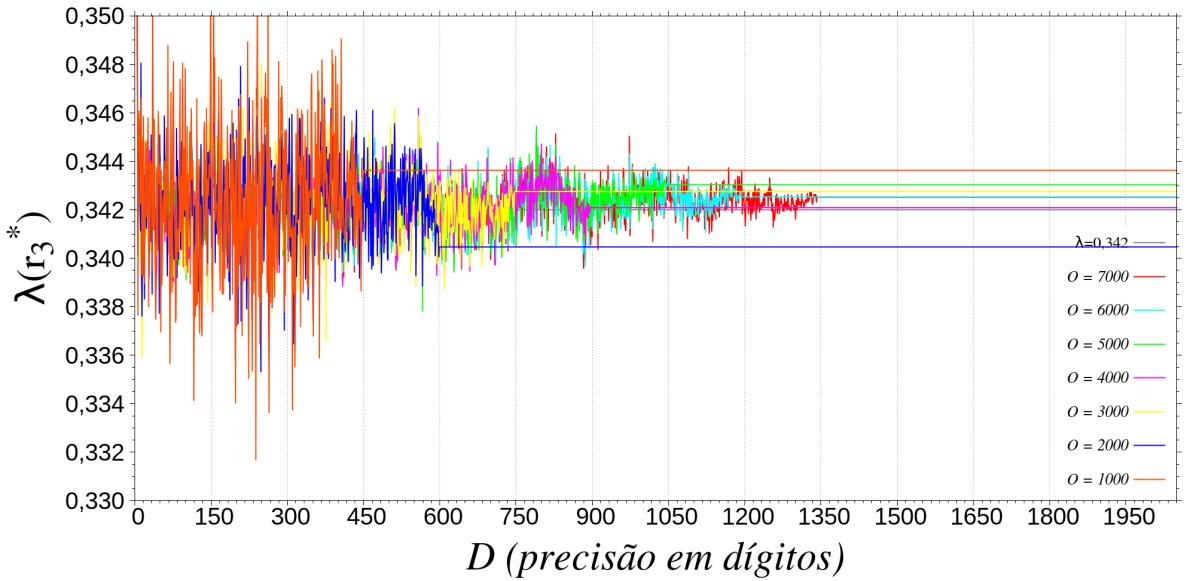


Figura 3.19: Evolução do expoente de Lyapunov com a precisão, em dígitos, com $x_0 = 1/4 \neq 1/2$ e transiente de 2000 iteradas.

tamanho do transiente T e do tamanho da órbita utilizada O , ou seja,

$$\lambda_{\text{numérico}} \left(r_3^*, \frac{1}{2} \right) \equiv \lambda_{\text{numérico}} \left(r_3^*, \frac{1}{2}, D, T, O \right), \quad (3.14)$$

obedecendo à condição

$$\lambda_{\text{numérico}} \left(r_3^*, \frac{1}{2}, D, T, O \right) \approx \begin{cases} 0,342, & \text{se } D < 0,225T, \\ 0,342 + \frac{176}{225} \frac{D - 0,225T}{O}, & \text{se } 0,225T \leq D < 0,225(T+O), \\ 0,518, & \text{se } D \geq 0,225(T+O). \end{cases} \quad (3.15)$$

A Figura (3.20) mostra a sobreposição das Figuras (3.16) e (3.19) com o gráfico da Equação (3.15). O expoente de Lyapunov mede o afastamento exponencial de duas

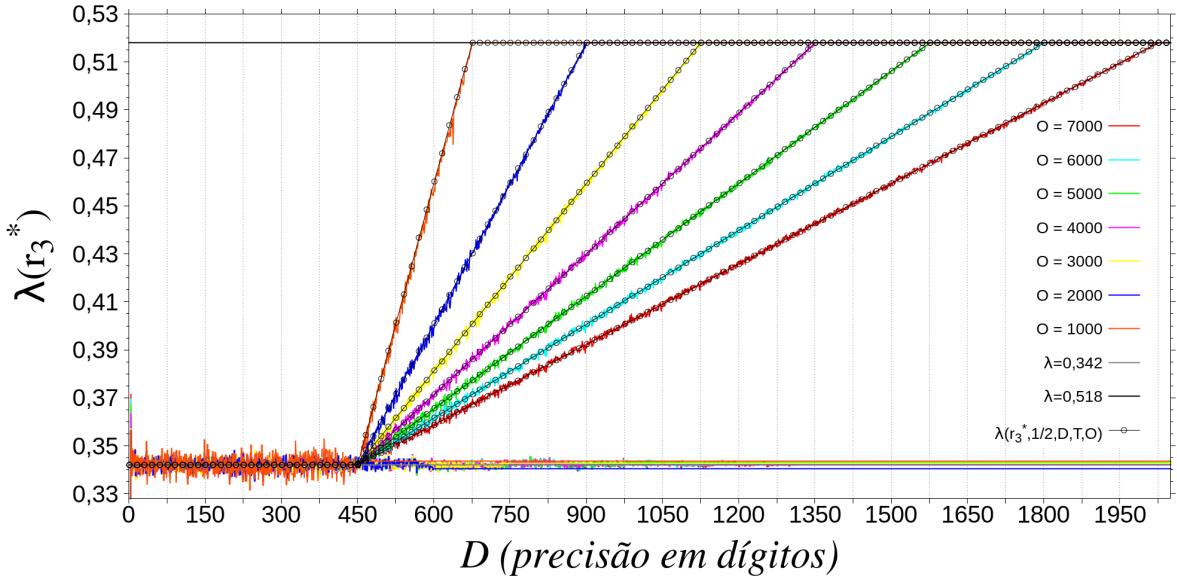


Figura 3.20: Sobreposição da evolução do expoente de Lyapunov para $x_0 = 1/2$ (linhas inclinadas) e $x_0 = 1/4$ (linhas horizontais), e a função $\lambda(r_3^*, \frac{1}{2}, D, 2000, O)$, com transiente de 2000 iteradas, em função da precisão.

órbitas iniciadas muito próximas. Em r_3^* , a maior distância entre dois pontos é

$$d(s_1(r_3^*), s_2(r_3^*)) \approx 0,45631099 < 0,5. \quad (3.16)$$

Desse modo, quando o tamanho da órbita O , sem transiente ($T = 0$), para uma dada precisão D , fazer com que o erro numérico propagado durante as iterações seja maior ou igual que $d(s_1(r_3^*), s_2(r_3^*))$, significa que, pelos arredondamentos feitos durante o processo de iteração, a órbita, a partir de então, contém apenas o erro propagado (somente erro numérico) e mais nenhuma informação sobre a órbita original. Ao tomarmos as órbitas de dois pontos muito próximos, afastadas em 1 na última casa da precisão, ou seja, x_0 e $x_0 + \delta$, com $\delta = 10^{-D}$, com D sendo a precisão em dígitos, e analisarmos a evolução

destas órbitas até que tenhamos um afastamento igual à unidade – que é maior que $d(s_1(r_3^*), s_2(r_3^*))$, obtemos:

$$\begin{aligned}
d_{\lambda,O}(x_0, x_0 + \delta) &= |(x_0 + \delta) - x_0| e^{\lambda O}, \\
1 &= |\delta| e^{\lambda O}, \\
1 &= 10^{-D} e^{\lambda O}, \\
\ln 1 &= \ln(10^{-D} e^{\lambda O}), \\
0 &= -D \ln(10) + \lambda O, \\
D \ln(10) &= \lambda O, \\
D &= \frac{\lambda}{\ln(10)} O,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

no qual $d_{\lambda,O}(x_0, x_0 + \delta)$ é a distância entre as duas órbitas.

A Equação (3.17) mostra que, dada uma órbita de tamanho O sem transiente ($T = 0$), a precisão D necessária para que esta órbita também sem transiente ($T = 0$) não seja totalmente descaracterizada pelo erro numérico, é diretamente proporcional ao expoente de Lyapunov λ e ao tamanho da órbita O . Assim, para uma dada precisão fixa D , o tamanho da órbita O , sem transiente ($T = 0$), para que tenhamos somente erro numérico é dada por

$$O = \frac{\ln(10)}{\lambda} D. \tag{3.18}$$

Com isto, o termo 0,225 que aparece várias vezes na Equação (3.15) é o coeficiente angular da Equação (3.17) com $\lambda = \lambda_{\text{algebrico}}(r_3^*, \frac{1}{2})$, dado por

$$\frac{\lambda}{\ln(10)} = \frac{\lambda_{\text{algebrico}}(r_3^*, \frac{1}{2})}{\ln(10)} \approx \frac{0,518}{\ln(10)} \approx 0,225. \tag{3.19}$$

A forma da Equação (3.15) deve-se ao fato de que, algebricamente, temos um ponto fixo, pois este é um ponto de Misiurewicz. Com precisão finita, porém, o erro numérico faz com que a órbita saia deste ponto e, eventualmente, caia próximo a $s_1(r_3^*)$, $s_1(r_3^*)$ ou $s_2(r_3^*)$, pontos estes que levam a órbita para o ponto $\mathcal{M}_{3,1}$, gerando caos por intermitência, independentemente do tamanho da precisão finita utilizada, bastando ter uma órbita suficientemente grande para que isto ocorra.

O comportamento intermitente da órbita em $r = r_3^*$ é independente da condição inicial x_0 . Nas Figuras (3.21), (3.22) e (3.23) vemos que a órbita é guiada pelo expoente

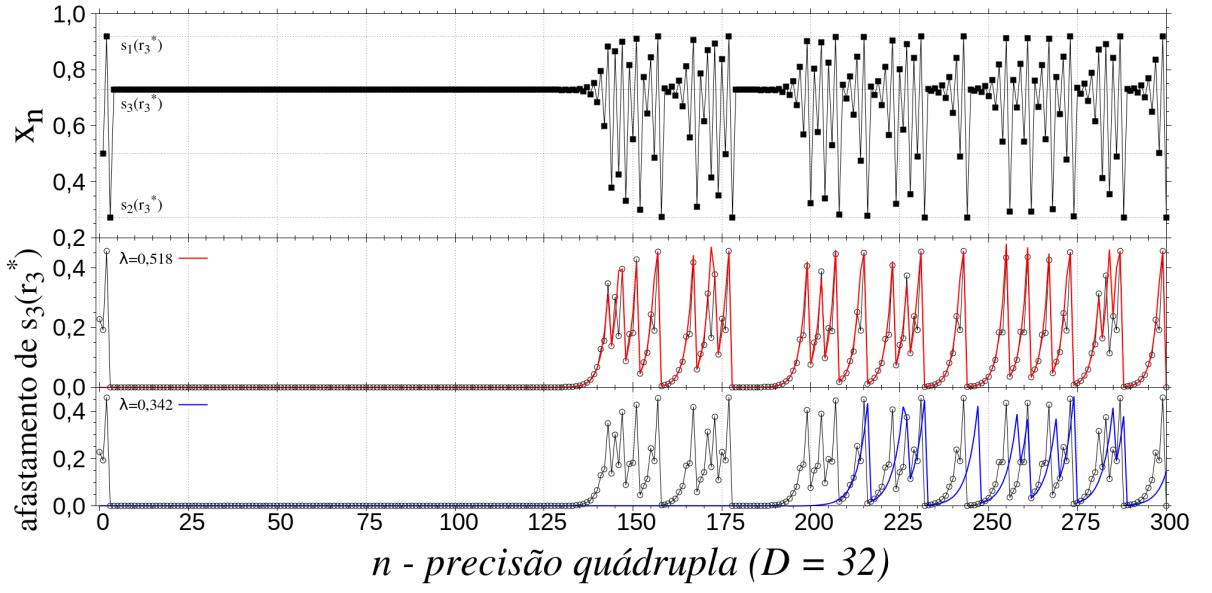


Figura 3.21: Mapa iterado em quádrupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{2}$.

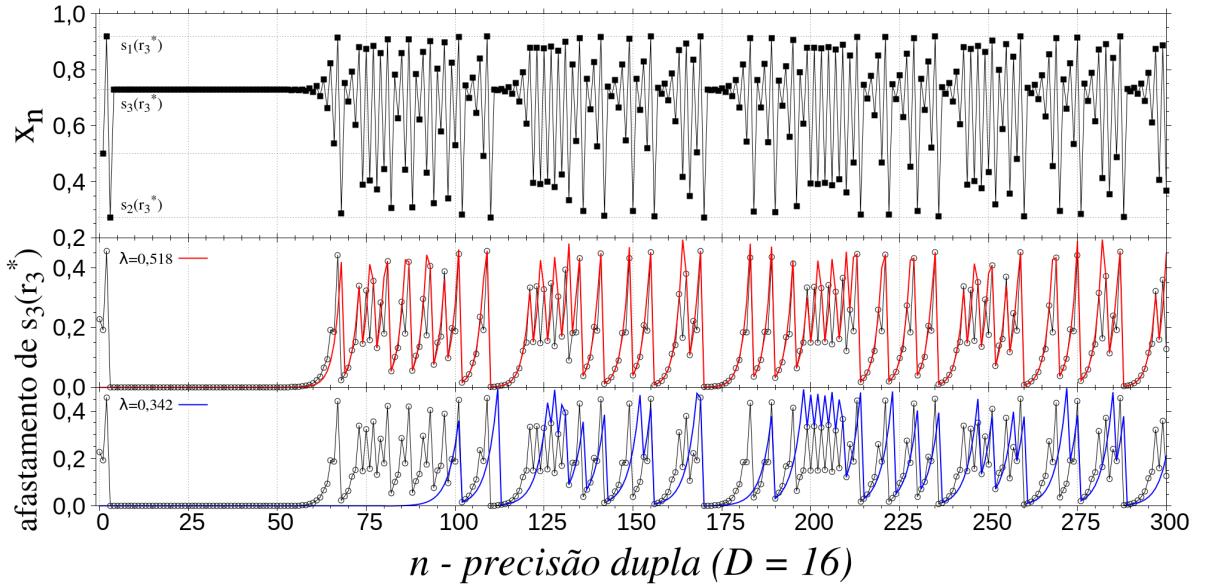


Figura 3.22: Mapa iterado em dupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{2}$.

de Lyapunov $\lambda(r_3^*)_{\text{algebrico}} \approx 0,518$, e que para $\lambda(r_3^*)_{\text{numérico}} \approx 0,342$ a órbita seguida não é tão próxima da observada. As Figuras (3.24), (3.25) e (3.26) mostram que o comportamento a órbita independe da condição inicial, e que a órbita é melhor guiada por $\lambda(r_3^*) = 0,518$ quando comparada com o resultado para o expoente de Lyapunov obtido numericamente.

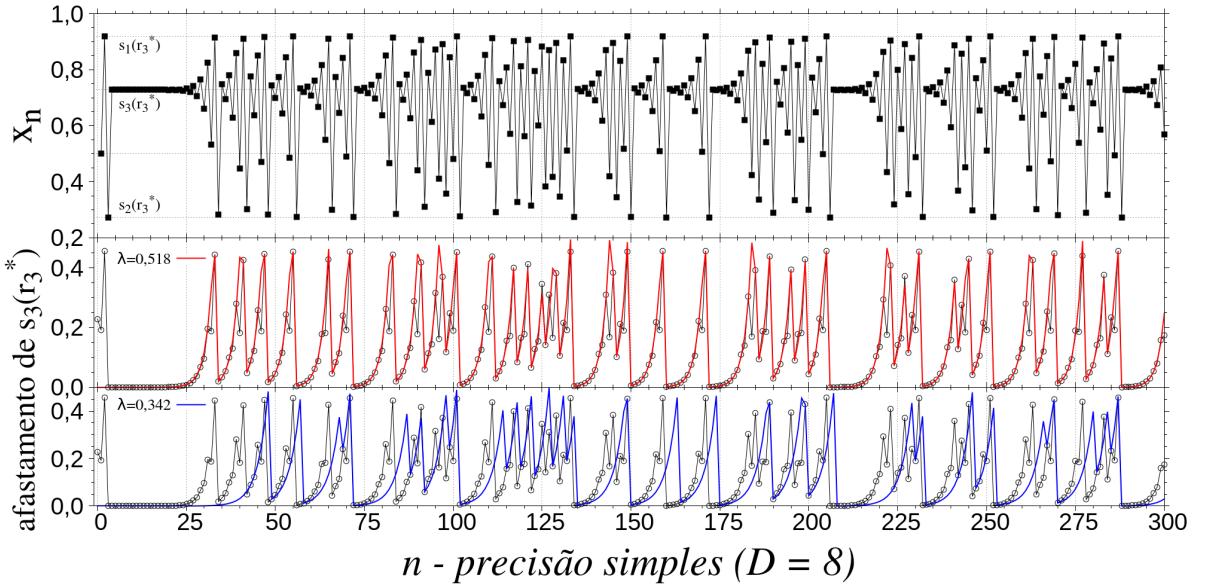


Figura 3.23: Mapa iterado em simples precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{2}$.

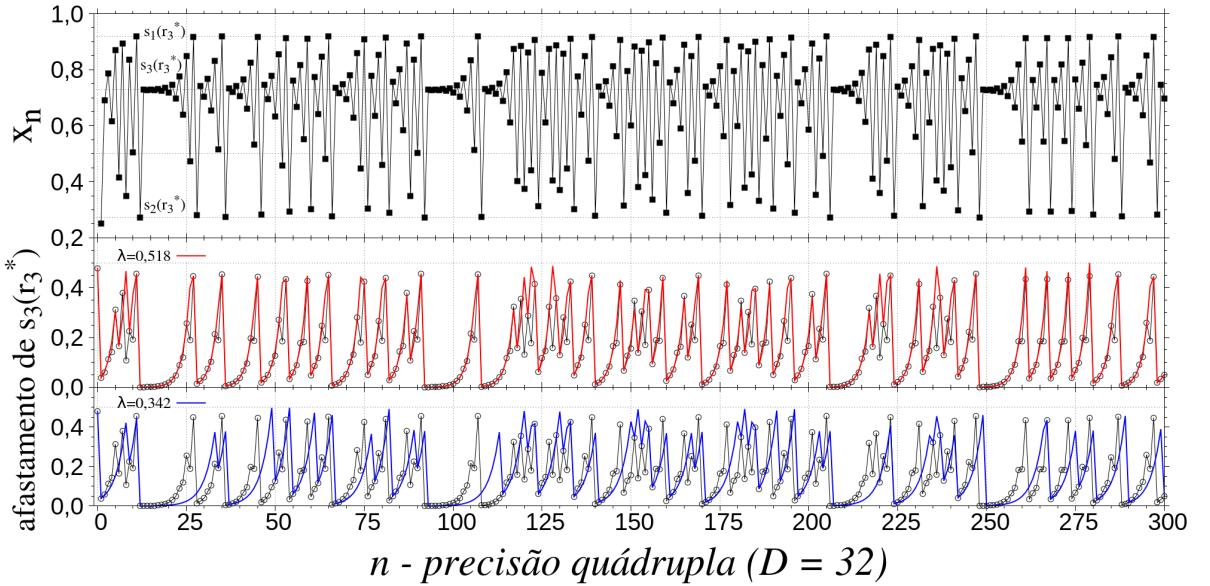


Figura 3.24: Mapa iterado em quádrupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{4}$.

Nas Figuras (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26), o mapa foi iterado em $r = r_3^*$. Podemos ver que os pontos acima do ponto $\mathcal{M}_{3,1} = s_3(r_3^*)$ são mapeados abaixo do mesmo, e vice-versa. No cálculo do expoente de Lyapunov, cada ponto $s_n(r_3^*)$ da órbita tem uma contribuição determinística para o mesmo, conforme a Figura (1.5). Se a órbita for periódica, ou seja, se algum ponto aparecer pelo menos duas vezes na órbita,

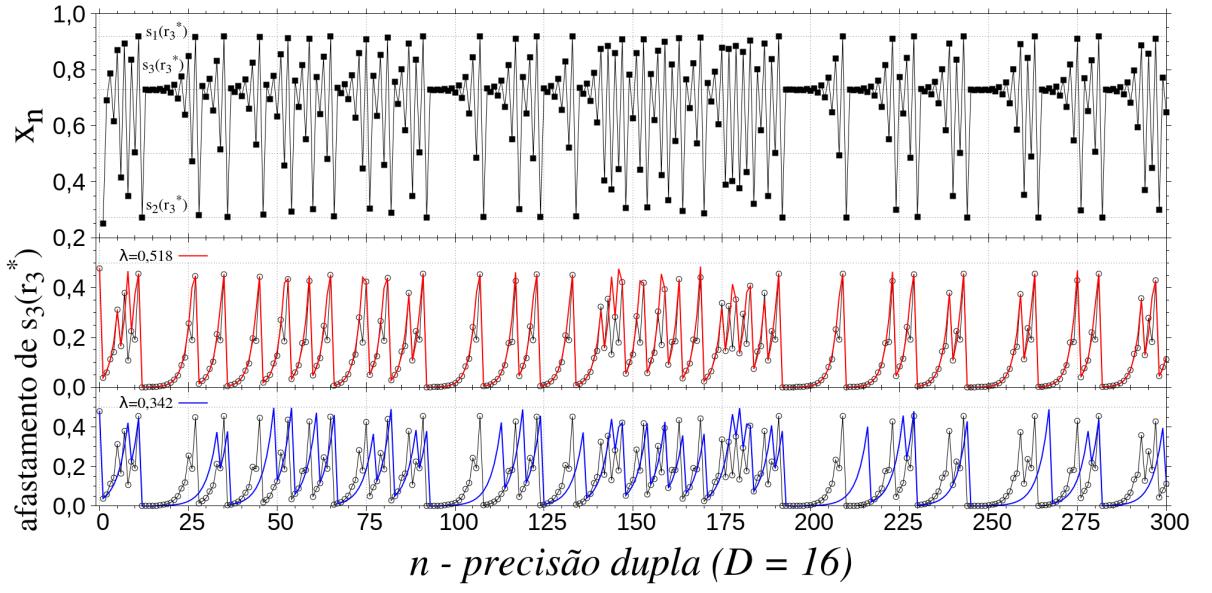


Figura 3.25: Mapa iterado em dupla precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{4}$.

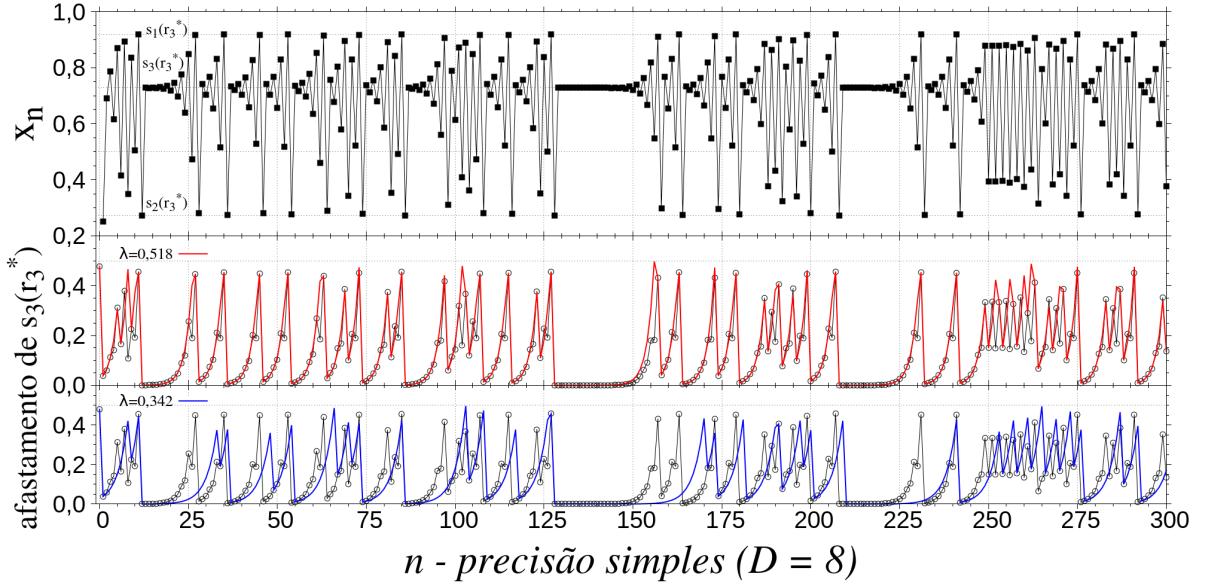


Figura 3.26: Mapa iterado em simples precisão em $r = r_3^*$, com $x_0 = \frac{1}{4}$.

este ponto contribuirá com o mesmo peso para o expoente de Lyapunov cada vez que fizer parte da órbita.

A contribuição do expoente de Lyapunov em $s_3(r_3^*)$ é $\lambda(s_3(r_3^*)) \approx 0,518$ e em $s_2(r_3^*)$ tem também o mesmo valor, pois $\lambda(s_2(r_3^*)) \approx 0,518$. Ou seja, de todos os pontos da órbita, dois pontos dominantes desta órbita contribuem de forma aproximadamente igual

para o expoente de Lyapunov. Todo ponto $x \in (s_2(r_3^*), s_3(r_3^*))$ terá uma contribuição com o expoente de Lyapunov menor do que a destes extremos, tornando-o menor do que o valor obtido de forma algébrica. Para $x \in (0, 36407777, 0, 63592225)$, a contribuição para o expoente de Lyapunov é negativa, fazendo com que diminua o valor do expoente de Lyapunov numérico quando comparado com o valor algébrico.

Contudo, quando iteramos o mapa com condição inicial $x_0 \neq 1/2$, e que não ocorra $x_n = 1/2$ para algum $n > 0$, obtemos como valor do expoente de Lyapunov $\lambda(r_3^*) \approx 0,342$, o mesmo resultado obtido quando iteramos o mapa numericamente com precisão finita.

3.3 Comportamento das derivadas $s'_n(r_3^*)$

Os valores numéricos das derivadas das *supertracks* em $r = r_3^*$ são:

$$\begin{aligned}
s'_0(r_3^*) &= 0, \\
s'_1(r_3^*) &= \frac{1}{4} = 0,25, \\
s'_2(r_3^*) &= \frac{s_2(r_3^*)}{r_3^*} + s'_1(r_3^*)r_3^*[1 - 2s_1(r_3^*)] \\
&\approx 0,25 + s'_1(r_3^*)(-3,0873780) \approx -0,69794507, \\
s'_3(r_3^*) &= \frac{s_3(r_3^*)}{r_3^*} + s'_2(r_3^*)r_3^*[1 - 2s_2(r_3^*)] \\
&\approx 0,073899436 + s'_2(r_3^*)(1,6785735) \approx -0,97360704, \\
s'_4(r_3^*) &= \frac{s_3(r_3^*)}{r_3^*} + s'_3(r_3^*)r_3^*[1 - 2s_3(r_3^*)] \\
&\approx 0,197945071 + s'_3(r_3^*)(-1,6785735) \approx 1,8322161, \\
s'_5(r_3^*) &= \frac{s_3(r_3^*)}{r_3^*} + s'_4(r_3^*)r_3^*[1 - 2s_3(r_3^*)] \\
&\approx 0,197945071 + s'_4(r_3^*)(-1,6785735) \approx -2,8775643, \\
&\vdots \quad \ddots \quad \dots \\
s'_n(r_3^*) &= \frac{s_3(r_3^*)}{r_3^*} + s'_{n-1}(r_3^*)r_3^*[1 - 2s_3(r_3^*)] \\
&\approx 0,197945071 + s'_{n-1}(r_3^*)(-1,6785735), \\
s'_{n+1}(r_3^*) &= \frac{s_3(r_3^*)}{r_3^*} + s'_n(r_3^*)r_3^*[1 - 2s_3(r_3^*)] \\
&\approx 0,197945071 + s'_n(r_3^*)(-1,6785735). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Do conjunto de Equações (3.20) pode-se perceber que, recursivamente, as derivadas $s'_{n+1}(r_3^*)$, para valores de $n \gg 1$, comportam-se aproximadamente como uma progressão geométrica de razão $q = r_3^*[1 - 2s_3(r_3^*)] \approx -1,6785735$, que é a expressão e o valor da derivada do mapa logístico no ponto (fixo) $s_3(r_3^*)$. As derivadas são crescentes, em módulo, com n , e apresentam uma alternância de sinal, mostrando que este é um ponto fixo instável. Vale também lembrar que

$$\ln |q| = \ln |r_3^*[1 - 2s_3(r_3^*)]| = \ln |f'(s_3(r_3^*))| \approx \ln |-1,6785735| \approx 0,518, \quad (3.21)$$

que é o mesmo valor do expoente de Lyapunov $\lambda(r_3^*)$ obtido na Equação (3.12).

Capítulo 4

Medida Invariante $\mu(x)$

A densidade de trajetórias p que são mapeadas próximas a uma vizinhança de algum x é, segundo a Referência [25] dada pela fórmula

$$p(x) = \sum_n \frac{p(x_n)}{|f'(x_n)|}. \quad (4.1)$$

Quando a vizinhança de algum x_n tem derivada, em módulo, menor que a unidade, ou seja, $|f'(x_n)| < 1$, há um aumento da densidade de pontos próximo desta vizinhança. Por outro lado, quando o módulo da derivada é maior que a unidade, $|f'(x_n)| > 1$, diminui a densidade de pontos próximos desta vizinhança. Como o ponto crítico x^* tem derivada nula, sua imagem tem uma distribuição singular, visto que sua densidade invariante não é nula. Segundo a Referência [25], a distribuição de probabilidades próxima do ponto crítico x^* , tem a forma

$$\mu(x) \sim 1/\sqrt{|x - f(x^*)|}, \quad (4.2)$$

cujo lado direito é um termo que faz parte da medida invariante conhecida para $r = 4$.

4.1 Medidas Invariantes conhecidas no Mapa Logístico

Para as regiões não periódicas do mapa logístico, a medida invariante é algebraicamente conhecida somente para $r = 4$, através do trabalho de Ulam e Neumann [33], pois sua órbita pode ser algebraicamente descrita, segundo a Referência [42], pela equação

$$x_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos[2^n \cos^{-1}(1 - 2x_0)] \right\}. \quad (4.3)$$

A medida invariante para $r = 4$ é obtida por *conjugação topológica* segundo a Referência [41], via o mapa da tenda. Esta medida invariante algebraicamente conhecida é dada por

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-0)(1-x)}}, \quad (4.4)$$

com $x = 1$ e $x = 0$ sendo os pólos da função $\mu(x)$.

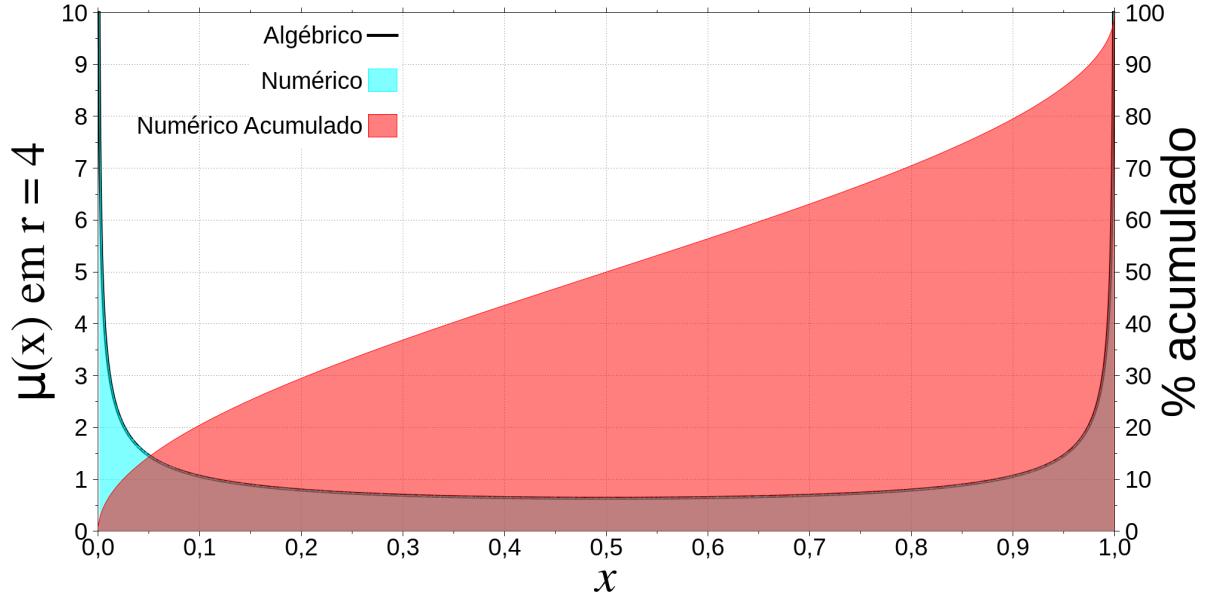


Figura 4.1: Medida invariante numérica, percentual acumulado e algébrica para $r = 4$.

4.2 Proposta de Medida Invariante para $r = r_3^*$

A função $\mu(x)$ para $r = 4$ aparenta ser simples por ter uma distribuição em forma de “U”, simétrica em relação a $x = 1/2$, como pode ser vista na Figura (4.1). Em termos das funções *supertracks* avaliadas em $r = 4$, temos $x = 1 = s_1(4)$ e $x = 0 = s_n(4)$, para $n \geq 2$. Assim, a Equação (4.4) pode ser reescrita em termos de x e das $s_n(4)$, ou, mais especificamente, em termos de x e do parâmetro fixo r , ou seja,

$$\begin{aligned} \mu(r = 4, x) &= \frac{1}{\pi \sqrt{(x - s_2(4))(s_1(4) - x)}} = \frac{1}{\pi} \frac{H(x - s_2(4)) H(s_1(4) - x)}{\sqrt{(x - s_2(4))(s_1(4) - x)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{H((x - s_2(4))(s_1(4) - x))}{\sqrt{(x - s_2(4))(s_1(4) - x)}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com $H(x)$ sendo a função de Heaviside. A Equação (4.5) pode ser escrita de forma mais geral por

$$\mu(r, x) = w \frac{H((x - s_\alpha(r))(s_\beta(r) - x))}{\pi \sqrt{(x - s_\alpha(r))(s_\beta(r) - x)}} = \Xi(\alpha, \beta, r, w, x), \quad (4.6)$$

que para em $r = 4$ fica simplesmente

$$\mu(r = 4, x) = \Xi(1, 2, 4, 1, x), \quad (4.7)$$

com $\Xi(\alpha, \beta, r, w, x)$ sendo uma medida invariante de apoio, função das *supertracks* avaliadas em r , com $s_\alpha(r)$ e $s_\beta(r)$ sendo o menor e maior valor em x , respectivamente, com peso w , cuja variável é x . A função de Heaviside $H(x)$ permite que $\Xi(\alpha, \beta, r, w, x)$ possa ser avaliada em todo o intervalo unitário I , evitando o aparecimento de pólos ou raízes quadradas de termos negativos.

Em $r = 4$ temos a primeira colisão do atrator caótico com o ponto fixo instável $x_{\text{inst.}} = 0$. Esta colisão dá origem ao ponto de Misiurewicz que permite determinar a medida invariante da Equação (4.4). A próxima colisão do atrator caótico com o ponto fixo instável, agora com $x_{\text{inst.}} = 1 - 1/r$, ocorre em $r = r_3^*$. Assim, a forma da medida invariante em $r = r_3^*$ deve ser relativamente parecida com a que ocorre em $r = 4$, como veremos adiante.

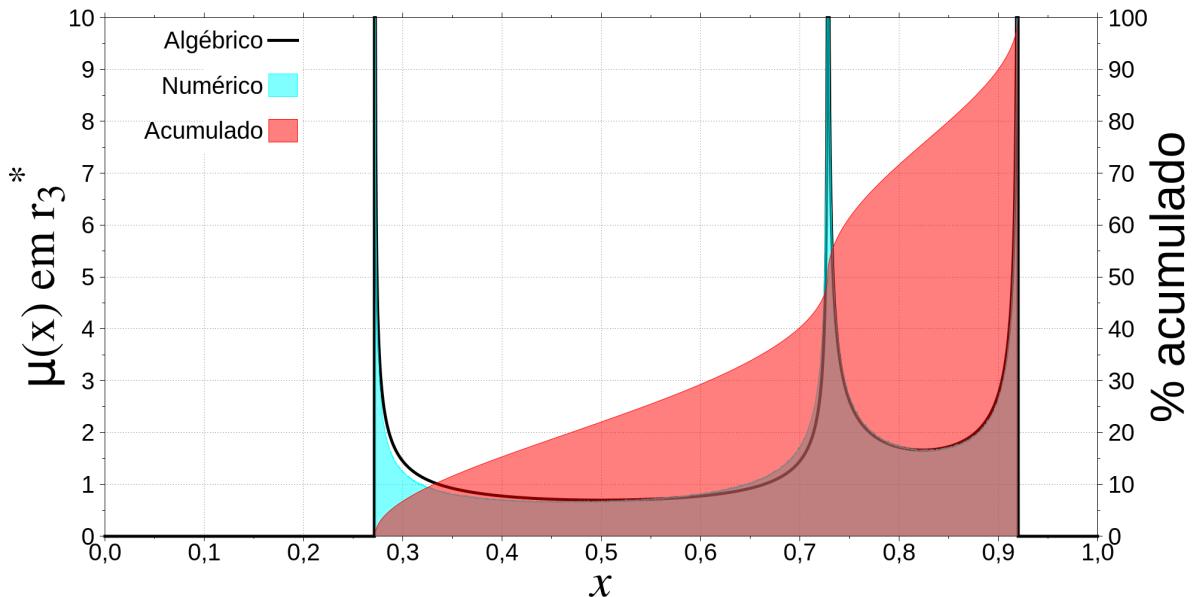


Figura 4.2: Medida invariante numérica, percentual acumulado e algébrica para $r = r_3^*$.

A função densidade de probabilidade em $r = r_3^*$ apresenta três picos, com os pontos sendo distribuídos em forma de um “W”, apresentando apenas um pico a mais

que em $r = 4$. Além disso, em cada “V” do “W” parece existir uma simetria em relação ao próprio meio do intervalo para cada um dos braços do “W”. Como neste ponto há a colisão do atrator caótico com o ponto fixo instável, poderíamos encarar a distribuição de pontos em $r = r_3^*$ como sendo a soma de duas distribuições iguais à de $r = 4$, divididas por dois para normalizá-la, a primeira tendo como limites inferior e superior $s_2(r_3^*)$ e $s_4(r_3^*)$, respectivamente, e a segunda com $s_3(r_3^*) = s_4(r_3^*)$ e $s_1(r_3^*)$, na mesma ordem. Esta ordem é devida às funções limitantes dos ramos inferior [$s_2(r)$ e $s_4(r)$] e superior [$s_3(r)$ e $s_1(r)$] dos braços da duplicação de períodos ocorrida em $r = 3$. Um pico central aparece em $r = r_3^*$ quando os braços internos voltam a se encontrar, ou seja, $s_3(r_3^*) = s_4(r_3^*)$. Temos assim

$$\mu(r_3^*, x) = \Xi(2, 3, r_3^*, 1/2, x) + \Xi(3, 1, r_3^*, 1/2, x). \quad (4.8)$$

O gráfico da Equação (4.8) pode ser comparado com o resultado numérico na Figura (4.2).

4.3 Medida Invariante Generalizada para $\mathcal{M}_{n,1}^{\text{ord}}$

Usando o mesmo raciocínio utilizado para r_3^* , para $\mathcal{M}_{4,1}$, em $r_4^* = 3,92773700$, temos quatro picos de densidade de probabilidade, e a soma de três funções Ξ :

$$\mu(r_4^*, x) = \Xi(2, 1, r_4^*, 1/2, x) + \Xi(3, 4, r_4^*, 1/4, x) + \Xi(4, 1, r_4^*, 1/4, x), \quad (4.9)$$

cujo gráfico pode ser comparado com o resultado numérico na Figura (4.3). Perceba que a medida μ está normalizada, pois a soma dos pesos w das funções Ξ é igual a 1.

O método para criar a medida invariante a partir das funções Ξ é geral e, além de incluir a solução para $r = 4$ já conhecida, vale também para pontos periódicos, nos quais os únicos termos que assintoticamente não anulam-se recaem em funções Delta de Dirac que provêm das funções de Heaviside. Foi verificado que para pontos de Misiurewicz de período 1 que estejam ordenados, $\mathcal{M}_{n,1}^{\text{ord}}$, ou seja, em que vale

$$s_2(\mathcal{M}_{n,1}) < s_3(\mathcal{M}_{n,1}) < s_4(\mathcal{M}_{n,1}) < \dots < s_{n-1}(\mathcal{M}_{n,1}) < s_n(\mathcal{M}_{n,1}) < s_1(\mathcal{M}_{n,1}), \quad (4.10)$$

os pesos w das funções Ξ que geram a função $\mu(x)$ são potências crescentes de $1/2$, com os dois últimos pesos iguais, para que a função fique normalizada, como ocorre em

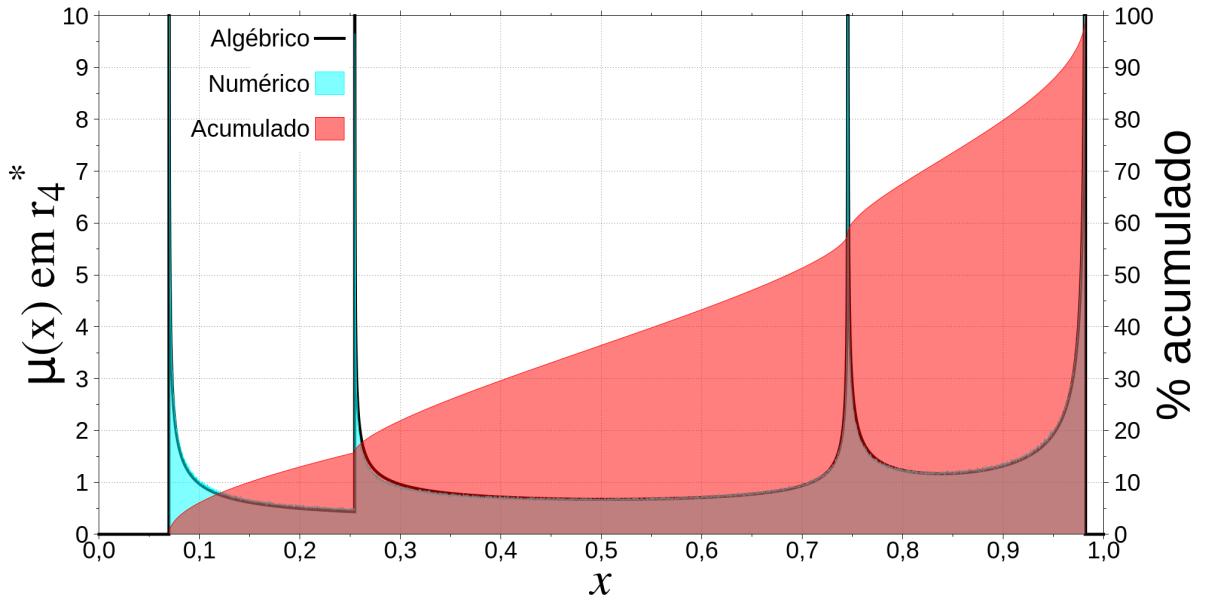


Figura 4.3: Medida invariante numérica, percentual acumulado e algébrica para $r = r_4^*$.

$\mu(r_3^*, x)$ e $\mu(r_4^*, x)$. Como exemplo, tomemos a medida invariante no ponto $M_{5,1}$ em $r_5^* = 3,9825707$, conforme pode ser visto na Figura (4.4). Sua medida invariante é dada por

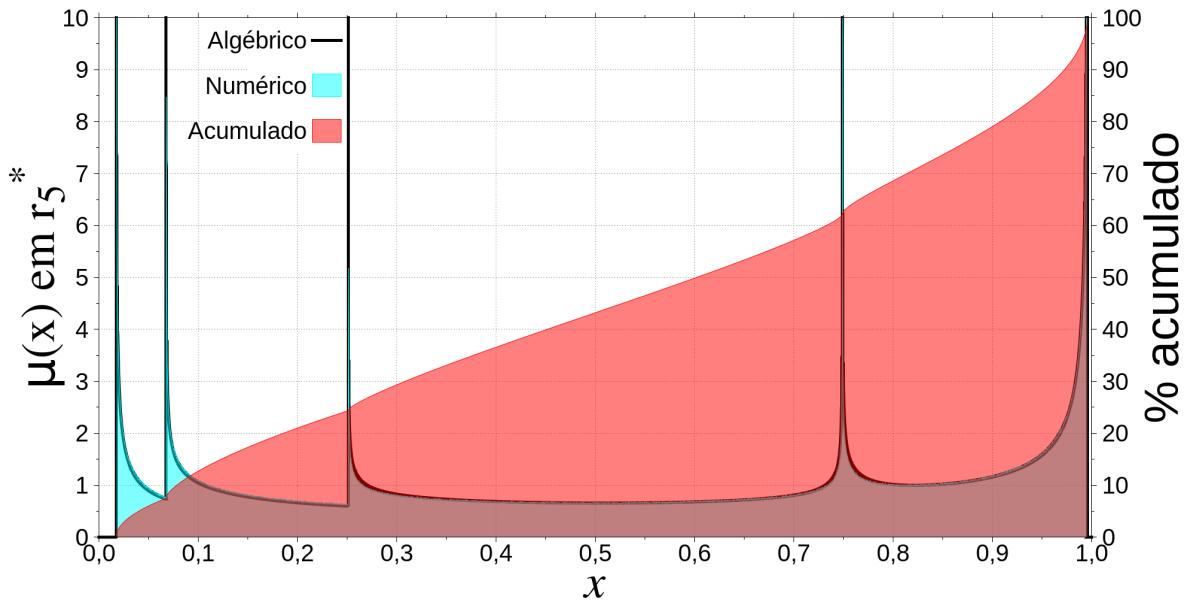


Figura 4.4: Medida invariante numérica, percentual acumulado e algébrica para $r = r_5^*$.

$$\begin{aligned} \mu(r_5^*, x) &= \Xi(2, 1, r_5^*, 1/2, x) + \Xi(3, 5, r_5^*, 1/4, x) + \\ &\quad + \Xi(4, 5, r_5^*, 1/8, x) + \Xi(5, 1, r_5^*, 1/8, x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

De forma geral, para a classe de pontos de Misiurewicz de período 1 ordenados

$\mathcal{M}_{n,1}^{\text{ord}}$, em $r = r_n^*$, temos a medida invariante dada por:

$$\begin{aligned}\mu(r_n^*, x) = & \Xi(2, 1, r_n^*, 1/2, x) + \Xi(3, n, r_n^*, 1/4, x) + \Xi(4, n, r_n^*, 1/8, x) + \cdots + \\ & + \Xi(n-3, n, r_n^*, (1/2)^{n-4}, x) + \Xi(n-2, n, r_n^*, (1/2)^{n-3}, x) + \\ & + \Xi(n-1, n, r_n^*, (1/2)^{n-2}, x) + \Xi(n, 1, r_n^*, (1/2)^{n-2}, x).\end{aligned}\quad (4.12)$$

A forma da medida invariante para pontos de Misiurewicz de período 1 não ordenados não segue a mesma regra do peso w e a quantidade de funções Ξ utilizadas pode ser maior, dificultando a apresentação de sua forma algébrica. Para outros valores do parâmetro r , os máximos da medida invariante coincidem com as *supertracks* de baixa ordem para este parâmetro, porém, novamente, a determinação dos pesos w e a quantidade de funções Ξ usadas dificultam a determinação algébrica das funções $\mu(r, x)$.

Capítulo 5

Resultados Exatos na Janela de Período 3

A janela de período 3 tem sido objeto de estudo principalmente após a publicação do famoso artigo de Li e Yorke [22]. Alguns resultados algébricos para o valor do parâmetro fixo r já foram apresentados desde então, conforme as Referências [17, 18, 19, 34]. Contudo, há mais resultados exatos que podem ser obtidos para a janela período 3.

Os resultados algébricos para órbitas periódicas são obtidos pela solução do polinômio obtido de

$$f^{(p)}(x) - x = 0, \quad (5.1)$$

que é de grau 2^p em x . A dificuldade em resolver este polinômio deve-se ao crescimento exponencial do seu grau, devido à recursividade do mapa. No conjunto solução da Equação (5.1), independente do período analisado, estão as órbitas de período 1: $x = 0$ para $0 \leq r < 1$ e $x = 1 - 1/r$ para $1 < r < 3$.

Para a órbita de período 3, eliminando as soluções que levam aos pontos fixos, o polinômio irredutível $P(x)$ obtido da Equação (5.1) pode ser escrito em função do parâmetro fixo r , como segue:

$$\begin{aligned} P(x) = & r^6 x^6 - (3 r^6 + r^5) x^5 + (3 r^6 + 4 r^5 + r^4) x^4 - (3 r^4 + r^3 + 5 r^5 + r^6) x^3 \\ & + (3 r^3 + r^2 + 2 r^5 + 3 r^4) x^2 - (r + 2 r^3 + 2 r^2 + r^4) x + r^2 + r + 1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

cujas raízes são duas órbitas de período 3, uma estável e outra instável. Vamos apenas apresentar os resultados das órbitas estáveis, visíveis no diagrama de bifurcação do mapa

logístico.

O conhecimento da órbita exata de um período no mapa logístico permite-nos conhecer exatamente algumas propriedades métricas ou estatísticas, como o expoente de Lyapunov, a medida invariante, a entropia de Kolmogorov-Sinai, a dimensão fractal de Hausdorff-Besicovich, etc. Como exemplo, para a janela de período 3, temos $\lambda(r) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \log |f'(x_j)|$ e $\mu(x) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \delta(x - x_j)$, no qual $f'(x)$ é a derivada do mapa e $\delta(x)$ é a função Delta de Dirac.

5.1 Resultados

5.1.1 A órbita do nascimento do período 3

Como apresentado nas Referências [17, 19], o nascimento do período 3 ocorre em $r^N = 1 + \sqrt{8} \approx 3.8284271$. Para este valor do parâmetro fixo, o polinômio obtido da Equação (5.2) é degenerado, tendo a forma $P(x) = N^2(x)$, com

$$N(x) = 343x^3 - (490 + 49\sqrt{2})x^2 + (91 + 112\sqrt{2})x + 31 - 41\sqrt{2}, \quad (5.3)$$

de forma que as raízes de $P(x)$ tem multiplicidade 2. Isso ocorre pois as órbitas de período 3 estáveis e instáveis começam nos mesmos pontos para este valor do parâmetro fixo. As raízes algébricas de $N(x)$ são:

$$x_1^N = a + bc_1 + \bar{b}\bar{c}_1 = a + b\bar{c}_1 + \bar{b}c_1 = a + b + \bar{b}, \quad (5.4)$$

$$x_2^N = a + b\bar{c}_2 + \bar{b}c_2 = a + bc_3 + \bar{b}\bar{c}_3 = a + b\bar{c} + \bar{b}c, \quad (5.5)$$

$$x_3^N = a + bc_3 + \bar{b}\bar{c}_3 = a + bc_2 + \bar{b}\bar{c}_2 = a + bc + \bar{b}\bar{c}, \quad (5.6)$$

com $a = \frac{10+\sqrt{2}}{21}$, $b = [\frac{1}{2646} (22\sqrt{2} - 25) (1 + i3\sqrt{3})]^{1/3}$ e c_j , com $j = 1, 2, 3$, são as raízes cúbicas da unidade, ou seja, $c_1 = \bar{c}_1 = 1$, $c_2 = \bar{c}_3 = c = (-1 - i\sqrt{3})/2$ e $c_3 = \bar{c}_2 = \bar{c} = (-1 + i\sqrt{3})/2$, e, ainda, i é a unidade imaginária e a barra sobre os termos indica que tomamos o seu complexo conjugado. O índice N refere-se ao “Nascimento” da órbita de período 3.

As raízes x_1^N , x_2^N e x_3^N apresentam somas sobre complexos conjugados, anulando a parte imaginária. As constantes complexas b e \bar{b} , e a combinação de seus produtos

com c e \bar{c} , podem ser escritas na forma polar, explicitando as raízes como números reais. Tanto c quanto \bar{c} tem módulo unitário, fazendo com que o seu produto realize rotações de ângulos múltiplos de $2\pi/3$ no plano complexo. Pela fórmula de Euler podemos mostrar que

$$x_j^N = a + 2|b| \cos \left(\frac{\theta + (j-1)2\pi}{3} \right), \quad (5.7)$$

para $j = 1, 2, 3$, no qual $|b| = \left[\frac{(22\sqrt{2}-25)\sqrt{7}}{1323} \right]^{1/3}$ e $\theta = \arctan(3\sqrt{3})$. Finalmente, a órbita de período 3 estável é dada explicitamente pelas raízes

$$x_1^N = \frac{10 + \sqrt{2}}{21} + 2 \left[\frac{(22\sqrt{2}-25)\sqrt{7}}{1323} \right]^{1/3} \cos \left[\frac{\arctan(3\sqrt{3})}{3} \right], \quad (5.8)$$

$$x_2^N = \frac{10 + \sqrt{2}}{21} + 2 \left[\frac{(22\sqrt{2}-25)\sqrt{7}}{1323} \right]^{1/3} \cos \left[\frac{\arctan(3\sqrt{3}) + 2\pi}{3} \right], \quad (5.9)$$

$$x_3^N = \frac{10 + \sqrt{2}}{21} + 2 \left[\frac{(22\sqrt{2}-25)\sqrt{7}}{1323} \right]^{1/3} \cos \left[\frac{\arctan(3\sqrt{3}) - 2\pi}{3} \right], \quad (5.10)$$

cujos valores numéricos são $x_1^N \approx 0,95631784$, $x_2^N \approx 0,15992882$ e $x_3^N \approx 0,51435528$.

5.1.2 A órbita superestável do período 3

A órbita superestável de qualquer mapa unidimensional unimodal contém o máximo da função $f(x)$, que para o mapa logístico ocorre em $x_{\max} = 1/2$. Esta condição extra simplifica o correspondente polinômio $P(x)$. Como apresentado na Referência [34], a órbita de período 3 superestável ocorre em

$$r^S = 1 + \frac{d}{3} \approx 3,83187405, \quad (5.11)$$

com $d = \sqrt{33 + 6p + 6q}$, no qual $p = (100 + 12\sqrt{69})^{1/3}$ e $q = (100 - 12\sqrt{69})^{1/3}$, com o polinômio $P(x)$ dado por:

$$\begin{aligned}
P(x) = & (3 + d) \{ 180 - 1911x + 9714x^2 - 27324x^3 + 41976x^4 - 32496x^5 + 9888x^6 + \\
& + pq [-24x + 312x^2 - 1296x^3 + 2376x^4 - 1992x^5 + 624x^6 + \\
& + d(16x^2 - 88x^3 + 176x^4 - 152x^5 + 48x^6) + \\
& + (p+q)(-24x^3 + 72x^4 - 72x^5 + 24x^6)] + \\
& + (p+q)[18 - 384x + 2580x^2 - 7950x^3 + 12528x^4 - 9768x^5 + 2976x^6 + \\
& + d(-36x + 298x^2 - 982x^3 + 1592x^4 - 1256x^5 + 384x^6)] + \\
& + (p^2 + q^2)[-12x + 156x^2 - 648x^3 + 1188x^4 - 996x^5 + 312x^6 + \\
& + d(8x^2 - 44x^3 + 88x^4 - 76x^5 + 24x^6)] + \\
& + d(+27 - 333x + 1694x^2 - 4484x^3 + 6472x^4 - 4816x^5 + 1440x^6) \}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Os pontos da órbita estável são as seguintes raízes de $P(x)$:

$$x_1^S = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}d, \quad (5.13)$$

$$x_2^S = \frac{1}{432}(3+d)^2(9-d), \quad (5.14)$$

$$x_3^S = \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

O índice S refere-se à órbita de período 3 “superestável”. Escrevendo

$$a = \frac{7}{18} + \frac{d}{27} - \frac{d}{216}(p+q) + \frac{1}{72}(p+q), \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
b = & -\frac{5}{72} + \frac{5}{216}d \left(1 + \frac{p+q}{10}\right) - \frac{1}{144}(p+q) + \\
& + i \frac{\sqrt{3}}{432}[6 - d(2 - p - q) - 3(p+q)], \quad (5.17)
\end{aligned}$$

temos $|b| = \frac{1}{6} \sqrt{36 \left(\frac{1}{36}d - \frac{1}{2592}(3+d)^2(9-d)\right)^2 - 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{432}(3+d)^2(9-d)\right)^2}$ e
 $\theta = \arctan \left[\sqrt{3} \left(1 + \frac{-12}{10+p+q}\right) \right]$, de forma que podemos escrever

$$x_1^S = a + b + \bar{b}, \quad (5.18)$$

$$x_2^S = a + b\bar{c} + \bar{b}c, \quad (5.19)$$

$$x_3^S = a + \bar{b}\bar{c} + bc, \quad (5.20)$$

cujos valores numéricos são $x_1^S \approx 0,95796851$, $x_2^S \approx 0,15428979$ e $x_3^S = 0,5$ e c e \bar{c} são os mesmos valores obtidos em r^N .

5.1.3 O fim da órbita de período 3 estável

De acordo com o resultado apresentado na Referência [18], o fim da órbita de período 3 estável ocorre em

$$r^F = 1 + \sqrt{\frac{11}{3} + \left(\frac{1915}{54} + \frac{5\sqrt{201}}{2} \right)^{1/3} + \left(\frac{1915}{54} - \frac{5\sqrt{201}}{2} \right)^{1/3}} \approx 3,8414990, \quad (5.21)$$

e o polinômio irredutível correspondente $P(x)$ é dado por:

$$\begin{aligned} P(x) = & \{10203 + 18e(4+k)(20+3k) + 9k(496+78k+9gh)\}x^6 \\ & - \{33441 + e[4816 + 3k(628+57k)] + 9k(1628+249k+27gh)\}x^5 \\ & + \{42921 + e[6472 + 6k(398+33k)] + 81k(232+33k+3gh)\}x^4 \\ & - \{27639 + e[4484 + 3k(491+33k)] + 9k(1325+162k+9gh)\}x^3 \\ & + \{9714 + e(121+6k)(14+3k) + 9k(430+39k)\}x^2 \\ & - \{1911 + e(333+54k) + 9k(64+3k)\}x + 180 + 27(e+k), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\text{com } e = \sqrt{33+9k}, g = \left(\frac{1915}{54} + \frac{5\sqrt{201}}{2} \right)^{1/3}, h = \left(\frac{1915}{54} - \frac{5\sqrt{201}}{2} \right)^{1/3} \text{ e } k = g + h.$$

Escrevendo

$$a = \frac{383 + 27\sqrt{201}}{43200} (60 - l)h^2 - \frac{1}{3240} hl + \frac{1}{54} h + \frac{2}{1215} l + \frac{65}{162}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} b = & \frac{1}{1620} \left[256365\sqrt{201}h^2l + 3649185h^2l + 28350\sqrt{201}hl + 528750hl - 22234500\sqrt{201}h^2 \right. \\ & - 318532500h^2 - 309000l - 110943000h - 7047000\sqrt{201}h + 38628000 \\ & + 16200i(-511377\sqrt{201}h^2l - 7307253h^2l - 119870\sqrt{201}hl - 1952910hl \\ & + 73854810\sqrt{201}h^2 + 1057559490h^2 - 527400l + 352935900h + 22309500\sqrt{201}h \\ & \left. + 115318800 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

com $l = \sqrt{13200 + 3600h + (103410 + 7290\sqrt{201})h^2}$, obtemos a órbita

$$x_1^F = a + b + \bar{b}, \quad (5.25)$$

$$x_2^F = a + b\bar{c} + \bar{b}c, \quad (5.26)$$

$$x_3^F = a + \bar{b}\bar{c} + bc, \quad (5.27)$$

cujos valores numéricos são $x_1^F \approx 0,95965837$, $x_2^F \approx 0,14872039$ e $x_3^F \approx 0,48634424$, e c e \bar{c} são os mesmos valores obtidos em r^N . O índice F refere-se ao “fim” da janela de período 3 estável.

Na Figura (5.1) são mostrados os valores de a , $Re(b)$, $Im(b)$, $|b|$, $\theta^* = \theta/\pi$ e x_n , com $n = 1, 2, 3$, para a janela de período 3, ratificando que todos os pontos de todas estas órbitas podem ser escritos na forma $x_n = a + b + \bar{b}$.

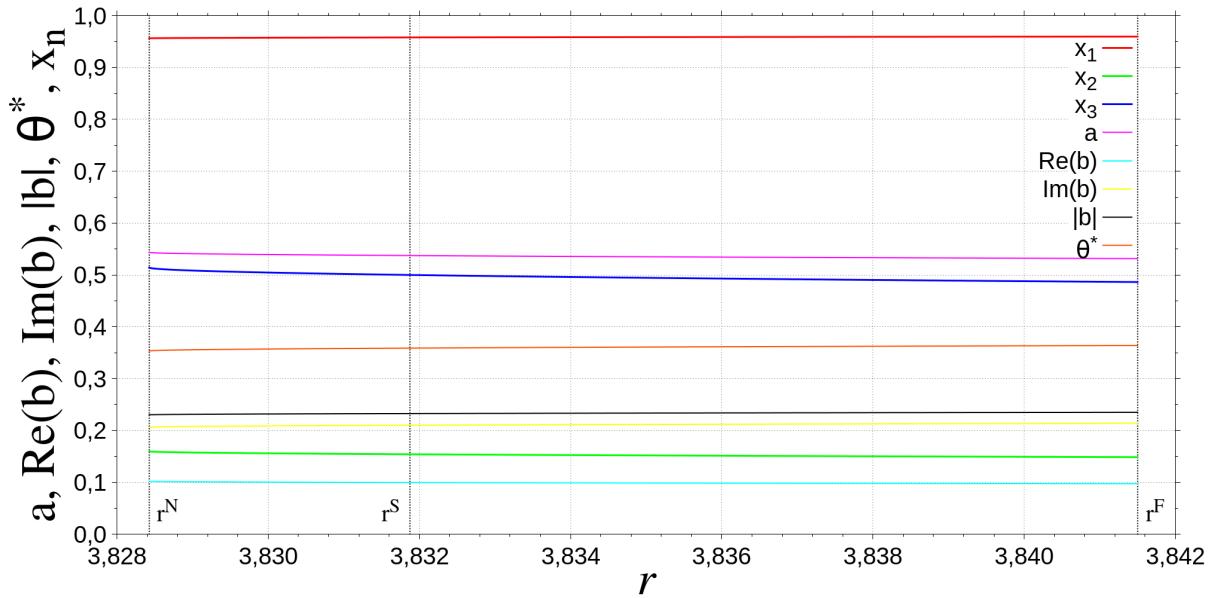


Figura 5.1: Valores de a , $Re(b)$, $Im(b)$, $|b|$, $\theta^* = \theta/\pi$ e x_n , com $n = 1, 2, 3$, para toda a janela de período 3.

Conclusões

Através da interseção de *supertracks* foi determinado o valor do parâmetro fixo $r = r_3^*$ em que ocorre a primeira colisão do ponto fixo instável com o atrator caótico. Esta interseção é um ponto de crise interior e é o ponto de Misiurewicz $\mathcal{M}_{3,1}$. Do estudo da dinâmica da órbita para este valor do parâmetro fixo obtivemos dois resultados algébricos exatos e inéditos:

- O valor do expoente de Lyapunov, que pode ser determinado a partir da precisão, do transiente e do tamanho da órbita utilizados na iteração, e
- A medida invariante exata, obtida a partir da forma da medida invariante conhecida para o valor do parâmetro fixo $r = 4$, através de funções auxiliares Ξ que são contribuições parciais para a medida invariante, construídas de forma similar à medida conhecida para $r = 4$.

Também de forma inédita, a medida invariante algébrica exata para uma classe de pontos de Misiurewicz foi proposta. Em trabalhos futuros podem ser estudadas formas de obtenção da medida invariante para outras classes de pontos de Misiurewicz para o mapa logístico.

Outros resultados inéditos foram obtidos nos pontos de nascimento e fim da janela de período 3, com suas órbitas descritas de forma algébrica. Estes pontos das órbitas podem ser escritos como a soma de um número real com um par de números complexos conjugados que rotacionam $2\pi/3$ no plano complexo.

Referências Bibliográficas

- [1] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(1):459–467, 1976.
- [2] M. Miśkiewicz, J.; Ausloos. A logistic map approach to economic cycles. (i). the best adapted companies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(1):206–214, 2004.
- [3] Andrzej Curtright, Thomas; Veitia. Logistic map potentials. *Physical Letters A*, 375(arXiv:1005.5030. CERN-PH-TH-2010-123. UMTH-15):276–282, May 2010.
- [4] S. C. Phatak; S. Suresh Rao. Logistic map: A possible random number generator. 1993.
- [5] K.J. Persohn; R.J. Povinelli. Analyzing logistic map pseudorandom number generators for periodicity induced by finite precision floating-point representation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(3):238 – 245, 2012.
- [6] Ernesto P. Borges; Constantino Tsallis; Garín F. J. Añaños; Paulo Murilo C. de Oliveira. Nonequilibrium probabilistic dynamics of the logistic map at the edge of chaos. *Physical Review Letters*, 89(25):254103, 2002.
- [7] P. Yu Y. Shi. On chaos of the logistic map. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B*, 14(2):175–195, 2007.
- [8] Madhekar Suneel. Electronic circuit realization of the logistic map. 2006.
- [9] N. K. Pareek; Vinod Patidar; K. K. Sud. Image encryption using chaotic logistic map. *Image and Vision Computing*, 24:926–934, 2006.

- [10] Narendra Singh; Aloka Sinha. Chaos-based secure communication system using logistic map. *Optics and Lasers in Engineering*, 48(3):398 – 404, 2010.
- [11] M. Curado, E.; Rego-Monteiro. Thermodynamic properties of a solid exhibiting the energy spectrum given by the logistic map. *Physical Review E*, 61(6 Pt A):6255–60, 2000.
- [12] Chris L. Bresten; Jae-Hun Jung. A study on the numerical convergence of the discrete logistic map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14:3076–3088, 2009.
- [13] Mamta Rani; Rashi Agarwal. A new experimental approach to study the stability of logistic map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(4):2062 – 2066, 2009.
- [14] J. Oteo, J. A.; Ros. Double precision errors in the logistic map: Statistical study and dynamical interpretation. *Physical Review E*, 76:036214, Sep 2007.
- [15] S. Rabinovich; G. Berkolaiko; S. Buldyrev; A. Shehter; S. Havlin. “logistic map”: an analytical solution. *Physica A*, 218(3):457–460, 1995.
- [16] M. H. Lee. Three-cycle problem in the logistic map and sharkovskii’s theorem. *Acta Physica Polonica B*, 42(5):1071–80, 2011.
- [17] J. Bechhoefer. The birth of period 3, revisited. *Mathematics Magazine*, 69(2):115–8, 1996.
- [18] W. B. Gordon. Period three trajectories of the logistic map. *Mathematics Magazine*, 69:118–120, 1996.
- [19] P. Saha and S. H. Strogatz. The birth of period three. *Mathematics Magazine*, 68(1):42–47, 1995.
- [20] Jonathan Blackhurst. Polynomials of the bifurcation points of the logistic map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(7):1869–1877, 2011.
- [21] Richard D. Neidinger and R. John Annen, III. The road to chaos is filled with polynomial curves. *The American Mathematical Monthly*, 103(8):640–653, oct 1996.

- [22] T. Y. Li and J. A. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [23] A. N. SHARKOVSKII. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 05(05):1263–1273, 1995.
- [24] E. M. Oblow. Supertracks, supertrack functions and chaos in the quadratic map. *Physics Letters A*, 128(8):406 – 412, 1988.
- [25] Christopher R. Myers Roderick V. Jensen. Images of the critical points of nonlinear maps. *Physical Review A*, 32(2):1222–1224, 1985.
- [26] J. Eidson, S. Flynn, C. Holm, D. Weeks, and R. F. Fox. Elementary explanation of boundary shaing in chaotic-attractor plots for the feigenbaum map and the circle map. *Physical Review A*, 33(4):2809–12, 1986.
- [27] I. A. Dorobantu A.-L. Barabasi, L. Nitsch. Supetracks and n th order windows in the chaotic regime. *Physics Letters A*, 139(1,2):53–56, 1989.
- [28] I. A. Dorobantu A.-L. Barabasi, L. Nitsch. On crises and supertracks: an attempt of a unified theory. *Revue Roumaine de Physique*, 34(4):353–357, 1989.
- [29] F. Montoya M. Romera, G. Pastor. Misiurewicz points in one-dimensional quadratic maps. *Physica A*, (232):517–535, 1996.
- [30] B.A. Toledo; M.A.F. Sanjuan; V. Muñoz; J. Rogan; J.A. Valdivia. Non-smooth transitions in a simple city traffic model analyzed through supertracks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(1):81 – 88, 2013.
- [31] R.A. Leo, M.; Leo. Supertrack functions in one-dimensional maps. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 109:229–238, 1994.
- [32] J. Villalobos; B. A. Toledo; D. Pastén; V. Muñoz; J. Rogan; R. Zarama; N. Lam-moglia; J. A. Valdivia. Characterization of the nontrivial and chaotic behavior that occurs in a simple city traffic model. *Chaos*, 20(1), 2010.
- [33] S. M. Ulam; J. von Neumann. On combinations of stochastic and deterministic processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53:1120, 1947.

- [34] M. H. Lee. Analytical study of the superstable -cycle in the logistic map. *Journal of Mathematical Physics*, 50:122702, 2009.
- [35] G. Malthus, T.R.; Gilbert. *An Essay on the Principle of Population*. The world's classics. Oxford University Press, 1999.
- [36] P.-F. Verhulst. *Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population [microform] / par P.-F. Verhulst.* s.n., Belgium :, 1844.
- [37] L.H.A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [38] John Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, 70:133–160, 1979.
- [39] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, July 1978.
- [40] C.P.C. FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO. *CAOS - UMA INTRODUÇÃO*. EDGARD BLUCHER, 1995.
- [41] B.L. Hao. *Elementary Symbolic Dynamics: And Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific, 1989.
- [42] H. G. Schuster and W. Just. *Deterministic Chaos: An Introduction*, volume 1. Wiley-vch, Weinheim, 4 edition, 2005.