

**AMANDA CAROLINA MATHIAS**

**MUDANÇAS NA DINÂMICA DE SISTEMAS A TEMPO CONTÍNUO SOB  
FORÇAMENTO EXTERNO**

Dissertação apresentada para obtenção do título  
de mestre em Física da Universidade do Estado  
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológi-  
cas - CCT.

Orientador: Prof. Paulo Cesar Rech

Joinville, SC

2013

**AMANDA CAROLINA MATHIAS**

**“MUDANÇAS NA DINÂMICA DE SISTEMAS A TEMPOS CONTÍNUO SOB  
FORÇAMENTO EXTERNO”**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

Área de concentração em “Dinâmica Não Linear” e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

**Banca Examinadora:**

Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC (Orientador)

Dr. Holokx Abreu Albuquerque - CCT/UDESC

Dr. Edson Denis Leonel - UNESP

Joinville, 19/08/2013.

## FICHA CATALOGRÁFICA

M431m

Mathias, Amanda Carolina.

Mudanças na Dinâmica de Sistemas a Tempo Contínuo sob Forçamento Externo.  
/ Amanda Carolina Mathias - Joinville, 2013;

59f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestra-  
do em Física, Joinville, 2013.

Orientador: Prof. Paulo Cesar Rech - Joinville-SC

1. Dinâmica Não-Linear. 2. Caos.
3. Sistemas Dinâmicos. 4. Planos de Parâmetro
5. Espaços de Fase. I. Rech, Paulo C.

CDD 531.1

Dedico esta Dissertação de Mestrado a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu realizasse mais um sonho da minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que colaboraram de forma decisiva para o fim desta etapa da minha vida, e que me ajudaram a ser quem eu sou hoje.

Especialmente,

- A Deus, pelo dom da vida e que sempre me deu forças para nunca desistir;
- Aos meus pais e à minha irmã, os mais profundos agradecimentos pelo imenso incentivo nesta jornada;
- Ao meu marido, pelo apoio, segurança e dedicação durante todo nosso convívio;
- Ao meu orientador, pelo carinho, colaboração, e conhecimentos transmitidos no decorrer destes 3 últimos anos em que trabalhamos juntos;
- Ao Grupo de Dinâmica Não Linear;
- A todos os professores da graduação e da pós-graduação que participaram na minha formação acadêmica;
- Aos colegas da pós-graduação, em especial a turma de 2012/01 a qual faço parte, pelas nossas distrações, brincadeiras, e os momentos de estudo. O meu muito obrigado a todos sem exceção, nunca esquecerei de vocês;
- As minhas amigas de coração, Ana Carolina e Karla, que ajudaram-me, apoiaram-me e que estiveram sempre ao meu lado;
- A agência financiadora Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo suporte financeiro.

*"A persistência é o menor caminho  
do êxito"*

---

**Charles Chaplin**

## RESUMO

Mathias, Amanda Carolina **Mudanças na Dinâmica de Sistemas a Tempo Contínuo sob Forçamento Externo.** 2013. 59f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2013.

Janelas de periodicidade são comuns em regiões caóticas de sistemas dinâmicos não lineares a tempo contínuo e discreto. Por exemplo, elas aparecem como regiões periódicas separadas e imersas em uma grande região caótica nos planos de parâmetros. Neste trabalho examinamos a mudança na dinâmica de alguns sistemas conhecidos (Lorenz, Rössler e Chua) através da adição de um forçamento senoidal externo, onde cada sistema é composto por um conjunto de três equações diferenciais autônomas não lineares de primeira ordem. Num primeiro momento, pela variação da amplitude  $d$  e mantendo fixo a frequência angular  $\omega$  do forçamento, nós mostramos através de simulações numéricas, incluindo planos de parâmetros, trajetórias do espaço de fase e o maior expoente de Lyapunov, que o forçamento senoidal pode produzir transições de ordem-caos. Num segundo momento, com a variação dos dois parâmetros de controle do forçamento ( $d, \omega$ ), utilizamos a construção de planos de parâmetros para mostrar que o forçamento pode produzir transições de ordem-caos e também transições de caos-ordem. Finalmente pressupomos que, para um sistema composto de três equações diferenciais autônomas não lineares de primeira ordem é possível manipular a dinâmica do sistema, com a adição do forçamento senoidal externo em uma das equações do sistema.

**Palavras-chave:** Dinâmica Não Linear. Caos. Sistemas Dinâmicos. Planos de Parâmetro. Espaços de Fase.

## ABSTRACT

Mathias, Amanda Carolina **Changes in the Dynamics of continuous-time Systems on External Forcing.** 2013. 59f. Dissertation (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2013.

Windows of periodicity are common in chaotic regions of discrete- and continuous-time nonlinear dynamical systems. For example, they appear as disconnected periodic regions embedded in a large chaotic region, in parameter planes. In this work we examined the changes in the dynamics in some known systems (Lorenz, Rössler and Chua) by the addition of an external sinusoidal forcing, where each system comprises a set of three first-order nonlinear autonomous differential equations. Initially, by variation of the amplitude  $d$  and keeping fixed the angular frequency  $\omega$  of forcing, we show through numerical simulations, including parameter planes, phase-space trajectories and the largest Lyapunov exponent, that the sinusoidal forcing can produce order-chaos transitions. And a second time, with the variation in the two control parameters of the forcing ( $d, \omega$ ), we construct parameter planes to show that the forcing can produce order-chaos transitions and also of chaos-order transitions. Finally, assuming that for a system modeled by a set of three first order nonlinear autonomous differential equations it is possible to manipulate the dynamics of the system, with the addition of external sinusoidal forcing in one of equations in the system.

**Key words:** Nonlinear Dynamics. Chaos. Dynamical Systems. Parameter-planes. Phase-spaces.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Destrução da Periodicidade em Sistemas Dinâmicos a Tempo Contínuo sob Forçamento Externo</b>	<b>15</b>
2.1	Sistema tipo Lorenz forçado senoidalmente	16
2.2	Sistema de Rössler forçado senoidalmente	23
2.3	Sistema de Chua forçado senoidalmente	28
<b>3</b>	<b>Mudanças na Dinâmica dos Sistemas de Lorenz, Rössler e Chua sob um Forçamento Externo</b>	<b>34</b>
3.1	Sistema de Lorenz forçado senoidalmente	35
3.2	Sistema de Rössler forçado senoidalmente	41
3.3	Sistema de Chua forçado senoidalmente	48
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>54</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um sistema tridimensional não linear autônomo a tempo contínuo pode ser expresso da seguinte forma

$$\dot{x} = f(x, y, z, p),$$

$$\dot{y} = g(x, y, z, p),$$

$$\dot{z} = h(x, y, z, p),$$

sendo  $f, g, h$  as funções reais, com pelo menos uma não linear,  $x, y, z$  as variáveis dinâmicas e  $p$  representa o conjunto de parâmetros de controle.

O estudo realizado neste trabalho consiste em utilizar sistemas dinâmicos tridimensionais não autônomos a tempo contínuo, obtidos através da adição do termo de forçamento  $F(t) = d \sin(\omega t)$ , do lado direito do sinal de igualdade em qualquer uma das equações acima. O sistema dinâmico tridimensional não autônomo adquirido pela adição do termo senoidal, por exemplo, na primeira equação acima, é equivalente ao sistema dinâmico quadridimensional

autônomo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z, p) + d \sin(v), \\ \dot{y} &= g(x, y, z, p), \\ \dot{z} &= h(x, y, z, p), \\ \dot{v} &= \omega,\end{aligned}$$

onde  $v = \omega t$  é a quarta variável dinâmica, com  $d$  e  $\omega$ , sendo a amplitude e a frequência angular da função forçamento senoidal externa, respectivamente.

O uso de forças senoidais externas tem sido relatado em vários trabalhos [2–7, 10, 11, 15, 17–20, 24, 25, 27, 28]. Em um sistema eletroquímico sob a influência do forçamento externo observou-se que, através da variação da frequência e amplitude do forçamento externo, ou seja, a variação dos parâmetros de controle, ocorreu uma alteração na dinâmica oscilatória do sistema. Para valores apropriados dos parâmetros de controle pode-se alterar o comportamento caótico para estados de período 1, e estados de período 1 foram transformados em estados de maior periodicidade, por exemplo de período 2 [18, 19]. Em uma rede neural analógica assimétrica com atraso de tempo, o controle de caos se deu por meio do forçamento senoidal externo. Nesse trabalho, foram investigados as características quantitativas das saídas da rede neural, tais como, o espectro, a dimensão de correlação e o maior expoente de Lyapunov, em dependência da frequência e amplitude da força externa. E por fim, foi salientado que a força senoidal externa permite controlar o grau de caos e a produção de transições entre caos-ordem, ordem-caos, e caos-caos [6]. A sincronização de fase caótica, foi investigada em um modelo neuronal exibindo um comportamento caótico em resposta a uma força fraca periódica, com baixa amplitude e elevada frequência [2]. A dinâmica da junção de Josephson desviada (RCL) sob a influência de forças externas foi estudada para controlar o caos e sincronizar duas junções idênticas acopladas. A frequência do sinal periódico externo foi utilizada como o parâmetro de controle para destruir caos em uma junção [11]. O modelo de Kuramoto periodicamente forçado consiste de uma população infinita de osciladores de fase com frequências intrínsecas aleatórias, acoplamento global senoidal e forçamento senoidal externo. Esse modelo representa

---

uma idealização de muitos fenômenos da física, química e biologia em que a sincronização mútua compete com a sincronização forçada. Em outras palavras, a população de osciladores tenta sincronizar com outro oscilador ao mesmo tempo que este tenta bloquear uma unidade externa. Para este trabalho apresentou-se uma análise completa de bifurcação para um caso especial em que a dinâmica de dimensão infinita colapsa para um sistema bidimensional [7]. Para um acoplamento de osciladores sujeitos à uma força senoidal externa, os estados estacionários e sua estabilidade foram determinadas. Esse sistema de osciladores foi levado para uma unidade de frequência e produziu ritmos regulares. Se a unidade fosse muito fraca, ou se a frequência fosse muito diferente da frequência média dos osciladores, o forçamento externo poderia deixar de levar o sistema e conduzir a ritmos irregulares [3]. Um sistema de osciladores de fase com acoplamento global repulsivo e forçamento periódico externo passando por uma rotação assíncrona foi considerado. A taxa de sincronização do sistema apresentou flutuações persistentes que depende dos parâmetros e distribuições de fase inicial [5]. Ondas em espiral submetidas a uma força periódica externa exibem uma dinâmica espaço-temporal muito rica, incluindo atratores de ressonância. A modulação periódica da excitabilidade foi diretamente descrita pela dependência temporal dos parâmetros. Além disso, quando se forçou a espiral com uma frequência maior do que a sua frequência intrínseca, outro ramo da espiral sinuoso com propriedades diferentes foi observado qualitativamente [27].

Efeitos de excitação periódica também foram relatados em alguns modelos conhecidos, sendo eles, sistemas de Lorenz, Rössler e Chua. No sistema de Lorenz sob a influência do forçamento senoidal, expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação e seções de Poincaré foram utilizados para analisar hipercaos e controle de hipercaos. Através das simulações numéricas, verificou-se que o forçamento senoidal não só suprime o comportamento original caótico para uma órbita periódica, mas também gera hipercaos em alguns intervalos de parâmetros [25]. Para representar o sistema de Lorenz, um circuito análogo ao sistema foi elaborado para demonstrar experimentalmente que sincronização de fase caótica não pode ser alcançada ao adicionar a função de forçamento senoidal na equação  $z$  do sistema [20]. Para o sistema de Rössler, verificou-se que uma órbita periódica iria conduzir para pulsos periódicos fracos com uma frequência perto da frequência natural de oscilação, ao adicionar uma força agindo sobre a

---

equação  $y$  do sistema. O atrator estranho também foi levado, em média, para pequenos pulsos perto do pico de frequência na banda larga do espectro de potência do atrator [24]. Para o mesmo sistema, o de Rössler, mas agora o termo de forçamento adicionado na equação  $x$  do sistema, pode-se observar novas estruturas de bifurcação. Foi apresentado um estudo especificado dos fenômenos de bifurcação que podem surgir em um sistema multi-dimensional através da interação de um processo de duplicação de período com os mecanismos de sincronização [15, 28]. Para um sistema de Rössler modificado e perante uma força senoidal externa agindo sobre a equação  $y$  do sistema, demonstrou-se numericamente o comportamento de ressonância estocástica semelhante ao de um sistema oscilatório caótico determinístico. Esse comportamento de ressonância estocástica é explicado por uma crise de fronteira que depende de dois parâmetros de bifurcação [4]. Para o sistema de Chua com a implementação de um forçamento externo, verificou-se uma grande mudança do comportamento dinâmico que não são observados no circuito de Chua padrão [10]. Em outro trabalho, sob a ação do forçamento no sistema de Chua, este circuito apresenta uma grande variedade de sequências de bifurcação, incluindo duplicação de período, adição de período e janelas em regime caótico. Além disso, uma classificação de atratores presentes em um dos planos de parâmetro que considera a frequência e a amplitude do forçamento, foram relatados na Ref. [17].

O intuito deste trabalho é averiguar transições de ordem-caos e caos-ordem nos modelos de Lorenz, Rössler e Chua, ao adicionarmos o termo de forçamento senoidal externo em qualquer uma das equações diferenciais desses sistemas. Para analisarmos a mudança na dinâmica dos sistemas foram construídos planos de parâmetros, diagramas de fases e espaços de fase. As simulações numéricas foram computadas com linguagem de programação FORTRAN, e o integrador dotado para apurar tais sistemas foi o Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo. As figuras plotadas foram executadas com o auxílio dos programas Gnuplot e XmGrace.

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos. No Capítulo 1 temos a introdução deste trabalho, na qual apresentamos alguns artigos em que foram empregados um termo de forçamento externo em determinados sistemas. No Capítulo 2 um estudo detalhado dos sistemas Lorenz, Rössler e Chua sob a influência do forçamento senoidal externo é exposto. Os

resultados adquiridos exibem a destruição de periodicidade em regiões consideradas dos planos de parâmetros ao variarmos a amplitude do forçamento senoidal com frequência fixa. Para verificarmos a destruição das janelas periódicas foram escolhidos pontos periódicos de cada sistema não forçado e observamos que conforme variarmos a amplitude do forçamento o atrator periódico torna-se caótico. No Capítulo 3 mostramos a mudança na dinâmica dos sistemas ao variarmos os parâmetros de controle  $\omega$  e  $d$ , a frequência e a amplitude do forçamento, respectivamente. Basicamente escolhemos dois pontos, um periódico e outro caótico, do plano de parâmetro dos sistemas não forçados e plotamos os planos de parâmetros  $(\omega, d)$  para verificarmos as transições de caos-ordem e ordem-caos. Apresentamos também, que o forçamento senoidal pode gerar hipercaos nos sistemas. No Capítulo 4 expomos as discussões dos resultados e as considerações finais da pesquisa.

## **Capítulo 2**

# **Destruição da Periodicidade em Sistemas Dinâmicos a Tempo Contínuo sob Forçamento Externo**

Neste capítulo são apresentados os estudos da dinâmica dos sistemas de Lorenz, Rössler e Chua, com a adição do termo de forçamento senoidal em uma das equações diferenciais dos sistemas. Para cada sistema foram escolhidos dois parâmetros de bifurcação, e que foram adotados para construir os planos de parâmetro para os valores da amplitude do forçamento aumentando a partir do zero. Adicionalmente usamos espaços de fase para a caracterização dos estados destes sistemas.

## 2.1 Sistema tipo Lorenz forçado senoidalmente

O sistema de Lorenz [16], consiste num modelo simplificado do comportamento da atmosfera. Seu sistema de equações é definido por

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - aY, \\ \dot{Z} &= XY + -bZ,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde as variáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são proporcionais a intensidade do fluxo de convecção, a diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes, e a distribuição de temperatura vertical, respectivamente. Os parâmetros  $\sigma$  e  $r$  referem-se aos números de Prandtl e de Rayleigh. E  $a$  e  $b$  são constantes maiores que zero.

Nesta pesquisa trabalhamos com o sistema tipo Lorenz [26], com  $a = 0$  em (2.1) e descrito pelo conjunto de equações diferenciais dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - xz + d \sin(\omega t), \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{2.2}$$

sendo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  as variáveis dinâmicas e  $d \sin(\omega t)$  o forçamento externo aplicado.

O parâmetro  $b$  e a frequência angular  $\omega$  do forçamento senoidal são mantidos fixos em  $b = 1,0$  e  $\omega = 0,5$ , enquanto os parâmetros  $\sigma$  e  $r$  são utilizados como parâmetros de bifurcação. Isto significa que  $\sigma$  e  $r$  são os parâmetros que variam simultaneamente com  $d$  aumentando a partir do zero.

Para analisarmos o comportamento dinâmico de cada ponto no sistema, construímos planos de parâmetros para o expoente de Lyapunov. O plano de parâmetro é uma seção do espaço de parâmetros tridimensional, em que duas dimensões são caracterizadas pela variação

de dois parâmetros, e a terceira dimensão, no nosso caso, é a magnitude do expoente de Lyapunov, representado por um gradiente de cores. A variação de cores permite verificarmos onde o sistema apresenta regiões de pontos fixos, regiões periódicas e regiões caóticas.

Os planos de parâmetros expostos neste trabalho, foram obtidos por meio do cálculo do maior expoente de Lyapunov, em uma malha de  $500 \times 500$  pontos equidistantes para cada par de parâmetros. O integrador empregado foi o Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo de integração igual a  $10^{-3}$ , e foram considerados  $5 \times 10^5$  passos para computar o maior expoente de Lyapunov. As condições iniciais para  $(x_0, y_0, z_0, v_0)$  foram estabelecidas para cada sistema, e para cada incremento do valor dos parâmetros usamos o último valor de  $(x, y, z, v)$  como novas condições iniciais para determinar o próximo expoente. Para a construção dos planos de parâmetros foi utilizado o Gnuplot.

O expoente de Lyapunov trata-se de uma grandeza pela qual podemos quantificar a existência de uma taxa de divergência entre trajetórias que sofreram dependência de forma sensível nas condições iniciais aplicadas [12]. Desta forma, considerando um sistema  $n$  dimensional, em que existe uma hiperesfera de condições iniciais centrada num ponto  $\vec{x}(t_0)$ . Conforme a evolução do tempo, o volume de condições iniciais se altera. Assumindo que, ao longo da  $j$ -ésima dimensão ( $j = 1, \dots, n$ ), o raio inicial  $d_j(t_0)$  tem variado exponencialmente com o tempo, de maneira que a relação entre  $d_j(t_0)$  e o valor correspondente no instante  $t$ , dado por  $d_j(t)$ , temos que

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq t_0$$

assim podemos escrever que

$$\lambda_j = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0},$$

onde os  $\lambda_j$  são chamados de expoentes de Lyapunov.

Para um instante  $t > t_0$ , o volume  $V(t)$  da hiperesfera deve ser proporcional ao produto das distâncias  $d_j(t)$ , ou seja:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t) = V(t_0) e^{t-t_0 \sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

sendo  $V(t_0)$  o volume inicial em  $t_0$ .

Para uma órbita periódica, a distância entre duas condições iniciais vizinhas se mantém em média invariável, dessa maneira o expoente de Lyapunov agregado a esta direção é nulo. Já nas direções perpendiculares ao atrator periódico, há contração de volume no espaço de fase, assim os expoentes de Lyapunov correspondentes a essas direções são negativos.

O comportamento caótico é caracterizado pelo afastamento exponencial das trajetórias vizinhas. Neste caso, há ao menos um expoente de Lyapunov maior que zero, o que implica dependência sensível nas condições iniciais e a existência de um atrator caótico, no espaço de fase [1].

Para um sistema de  $N$  dimensões existem  $N$  expoentes de Lyapunov ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ), aos quais podemos associar os seguintes tipos de atratores:

- ponto de equilíbrio: tem-se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$ , já que o volume de condições iniciais deve se contrair ao longo das  $N$  direções do espaço de fases, a fim de que a trajetória converja para o ponto;
- ponto periódico ou ciclo-limite: tem-se necessariamente um expoente nulo e os outros negativos, ou seja,  $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$  sendo que o expoente nulo corresponde à

direção ao longo da órbita fechada;

- torus: tem-se pelo menos dois expoentes nulos e os outros negativos, ou seja,  $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3, \dots, \lambda_N < 0$  de modo que a trajetória atratora situa-se sobre uma superfície, no qual podemos encontrar um comportamento quase periódico;
- atrator caótico ou estranho: tem-se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3, \dots, \lambda_N < 0$ . Um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensível nas condições iniciais, o outro deve ser nulo, e o restante deve ser negativo. Nos casos onde temos pelo menos dois expoentes positivos, existe a ocorrência de regiões hipercaóticas.

Os planos de parâmetros  $(\sigma, r)$  do sistema (2.2) são mostrados na Fig. 2.1. Para cada uma das possíveis combinações de  $\sigma$  e  $r$ , consideramos a condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ . As cores nos painéis da Fig. 2.1 estão associadas à magnitude do maior expoente de Lyapunov: branco para expoentes negativos, preto para os expoentes nulos, e vermelho para expoentes mais positivos.

Como mostrado na Fig. 2.1, o plano de parâmetros do sistema tipo Lorenz não forçado ( $d = 0$ ), contém várias janelas periódicas em preto, imersas na região caótica amarelo-vermelho. Essas janelas são usualmente exibidas em um diagrama de bifurcação como mostrado na Fig. 2.2, que considera o máximo local da variável  $x$ , representada por  $x_m$ , em função do parâmetro  $\sigma$ . A Fig. 2.2 apresenta as janelas periódicas com dois diferentes períodos, onde duas dessas janelas tem comportamento de período 2, e enquanto uma janela tem comportamento de período 3. Em todas as janelas periódicas a rota para o caos é via bifurcações de duplicação de período, ambos para o lado direito e para o lado esquerdo. O diagrama de bifurcações foi construído considerando pontos ao longo da diagonal secundária  $r = -28, 6\sigma + 1836, 8$  do painel  $d = 0$  relacionado com o sistema tipo Lorenz não forçado da Fig. 2.1. Para a construção do diagrama utilizamos como condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ , e dividimos o eixo do parâmetro  $\sigma$  em  $10^3$  intervalos iguais. Para esse diagrama de bifurcação foram plotados 50 pontos para cada valor do parâmetro  $\sigma$ .

O diagrama de bifurcação é um técnica para estudar que modificação pode ocasionar

no sistema, a variação de um parâmetro de controle por uma de suas variáveis. Representa de forma gráfica, o comportamento qualitativo das órbitas, onde são plotados os pontos de máximo para os quais o sistema converge após determinado tempo com a variação do parâmetro. Estes pontos podem ser pontos fixos, órbitas periódicas ou órbitas caóticas para o qual o sistema é atraído [13].

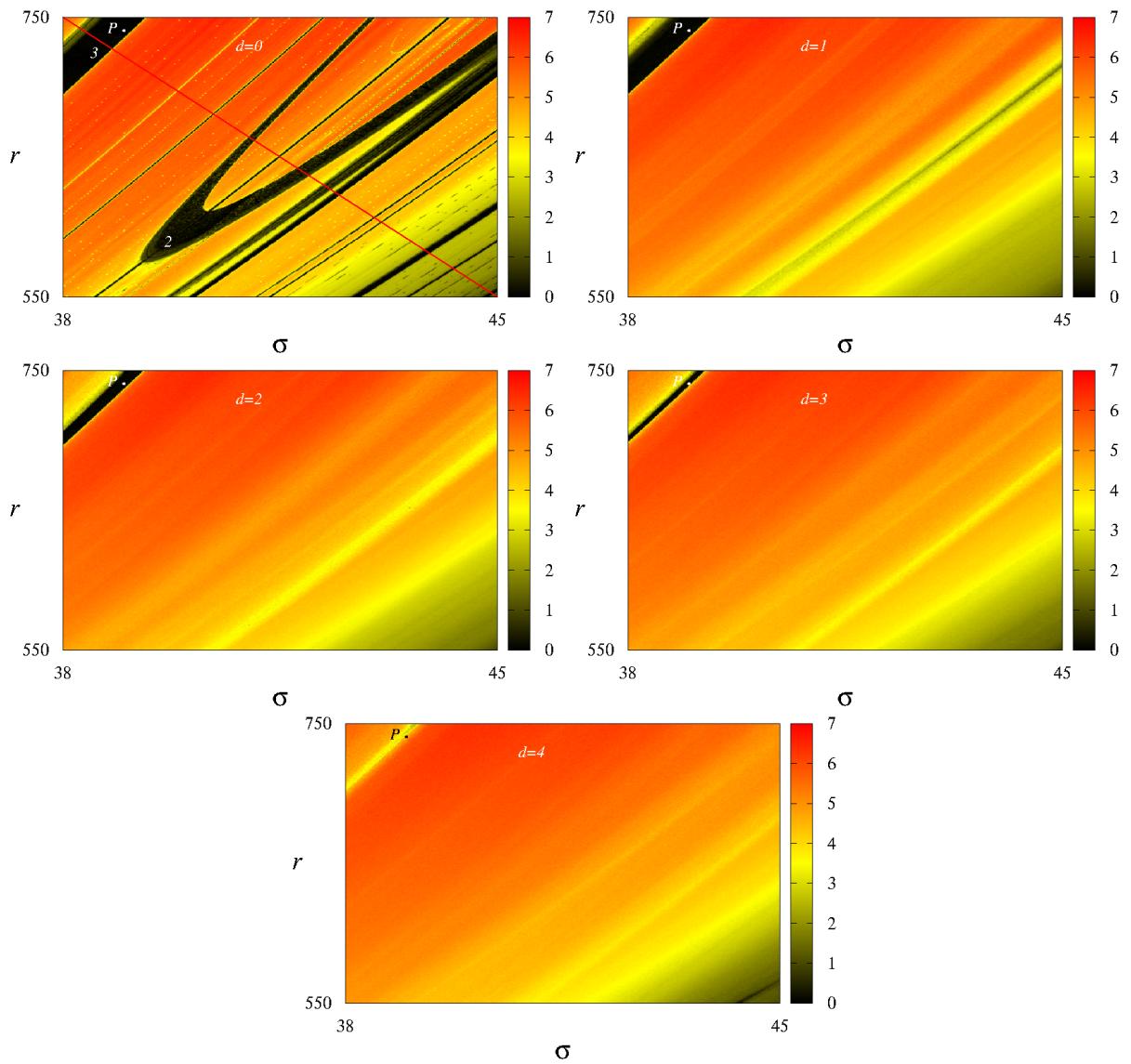


Figura 2.1: Planos de parâmetro  $(\sigma, r)$  do sistema (2.2), para  $b = 1, 0, \omega = 0, 5$ , e cinco valores da amplitude  $d$ , escritos em cada painel. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

Os painéis da Fig. 2.1 fornecem uma visão geral da dinâmica do sistema (2.2) no plano

de parâmetros  $(\sigma, r)$ , como uma função da amplitude do forçamento  $d$ , para  $d = 0, 1, 2, 3, 4$ . Desta forma, pode ser visto o efeito do forçamento periódico externo sobre o sistema tipo Lorenz, se olharmos ao todo o conjunto de painéis. Para  $d = 0$ , o caso não forçado, várias janelas de periodicidade estão presentes na região caótica, sendo as mais notáveis numeradas. Conforme  $d$  é aumentado a partir de zero, as figuras começam a mudar com a ação da perturbação senoidal, que atua como um agente capaz de fazer acontecer uma transição de ordem-caos no sistema. Isto pode ser visto quando  $d = 1$  a forma de arco de período 2 em preto do painel  $d = 0$  foi totalmente removido, sendo substituída por uma região caótica em vermelho. Para  $d = 2$ , observa-se o total desaparecimento de algumas listras pretas periódicas, e também, o estreitamento da faixa preta no canto esquerdo superior apresentados no painel  $d = 0$ . E com o aumento da amplitude  $d$ , a lista diminui mais ainda ( $d = 3$ ), até o total desaparecimento para  $d = 4$ .

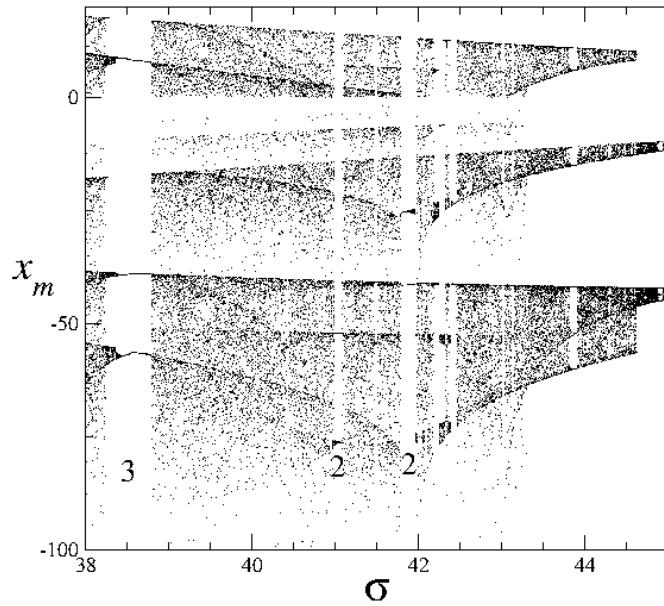


Figura 2.2: Diagrama de bifurcação para pontos ao longo da diagonal secundária  $r = -28, 6\sigma + 1836, 8$  do painel  $d = 0$  da Fig. 2.1.

Para verificarmos o efeito do forçamento periódico externo sobre um atrator periódico do sistema tipo Lorenz não forçado, consideramos o ponto  $P$  apresentado nos planos de parâmetro da Fig. 2.1, cujas coordenadas são  $\sigma = 39$  e  $r = 743$ . As trajetórias do espaço de fase, ou seja os atratores, mostram a evolução do atrator periódico do sistema (2.2) quando a amplitude do forçamento externo aumenta a partir do zero, na Fig. 2.3.

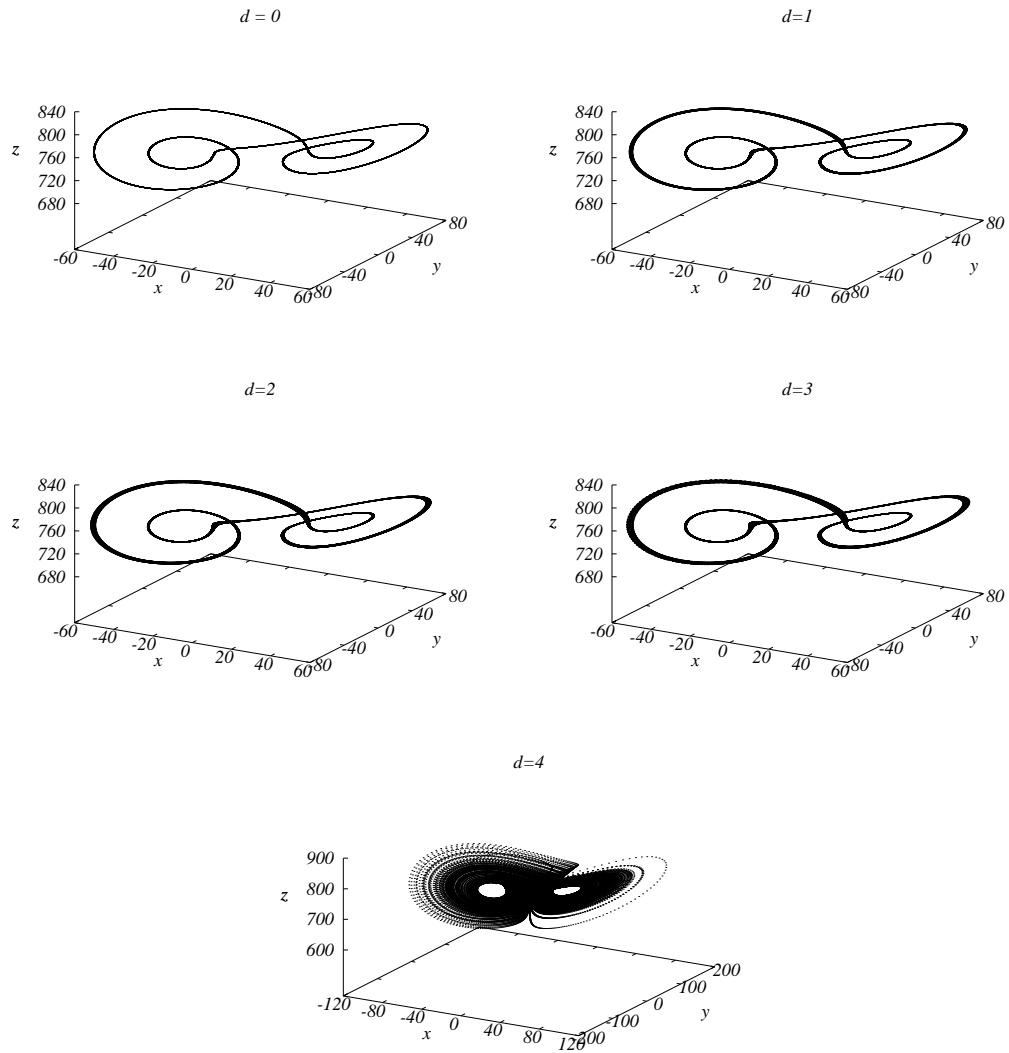


Figura 2.3: Atratores gerados pelo sistema (2.2) com  $(\sigma, r) = (39, 743)$ , para  $b = 1, 0$  e  $\omega = 0, 5$ . (a) Sistema periódico não forçado para  $d = 0$ . (b) Sistema periódico forçado para  $d = 1$ . (c) Sistema periódico forçado para  $d = 2$ . (d) Sistema periódico forçado para  $d = 3$ . (e) Sistema caótico forçado para  $d = 4$ .

Para a construção dos atratores, o sistema (2.2) foi integrado utilizando o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo igual a  $10^{-3}$ , considerando  $5 \times 10^5$  passos, dos quais foram plotados os últimos 65000 pontos, e a condição inicial foi  $(0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ .

Um atrator é um conjunto invariante no espaço de fase, para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. O conjunto completo de condições iniciais que convergem para um dado atrator é sua bacia de atração [13].

Os painéis (b) a (d) da Fig. 2.3, equivalem ao ponto  $P$  do sistema tipo Lorenz periódico forçado para  $d = 1, 2, 3$  da Fig. 2.1, e o painel (e) corresponde ao sistema tipo Lorenz forçado caótico para  $d = 4$ . Com a aplicação do forçamento eliminamos o atrator periódico, cujo maior expoente de Lyapunov era nulo, nos painéis (a) a (d), sendo substituído agora por um atrator caótico, de expoente de Lyapunov igual a 2,60, no painel (e).

Portanto, pela variação da amplitude do forçamento senoidal externo com frequência angular constante, vimos que é possível destruir janelas periódicas embutidas em uma região caótica do plano de parâmetro  $(\sigma, r)$  do sistema tipo Lorenz. Este processo pode ser visto como uma técnica para eliminar janelas periódicas de regiões caóticas em planos de parâmetro  $(\sigma, r)$  do sistema tipo Lorenz, obtido fazendo  $d = 0$  no sistema (2.2).

## 2.2 Sistema de Rössler forçado senoidalmente

O sistema de Rössler [22], é uma simplificação do sistema de Lorenz. Esse modelo, em primeiro momento, foi apresentado com parâmetros fixos, sendo  $a, b = 0, 2$  e  $c = 5, 7$ , e dado pelo conjunto de equações diferenciais representado abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + 0,2y, \\ \dot{z} &= 0,2 + z(x - 5,7),\end{aligned}$$

Neste trabalho consideramos o sistema de Rössler periodicamente forçado dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) + d \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{2.3}$$

sendo  $x, y, z$  as variáveis dinâmicas do modelo de Rössler e  $d \sin(\omega t)$  é o forçamento externo aplicado.

O parâmetro  $b$  e a frequência angular  $\omega$  do forçamento senoidal são mantidos fixos em  $b = 0,4$  e  $\omega = 0,5$ , enquanto os parâmetros  $a$  e  $c$  são utilizados como parâmetros de bifurcação. Isto significa que  $a$  e  $c$  são os parâmetros que variam simultaneamente, e são utilizados para construir os planos de parâmetro para os valores de  $d$  aumentando a partir do zero.

Novamente o comportamento da dinâmica de cada ponto dos planos parâmetros é determinado através de estimativas numéricas do maior expoente de Lyapunov. Os planos de parâmetros  $(a, c)$  do sistema (2.3) são mostrados na Fig. 2.4. Para cada uma das possíveis combinações de  $a$  e  $c$ , consideramos a condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (2, 0, 3, 1, 4, 3, 4, 4)$  e utilizamos procedimentos similares aos usados para gerar os planos de parâmetros da Fig. 2.1.

Na Fig. 2.4, o plano de parâmetros do sistema de Rössler não forçado ( $d = 0$ ), contém várias janelas periódicas em preto, imersas na região caótica amarelo-vermelho. Essas janelas são frequentemente exibidas em um diagrama de bifurcação como mostrado na Fig. 2.5, que considera o máximo local da variável  $x$ , representada por  $x_m$ , em função do parâmetro  $a$ . A Fig. 2.5 apresenta as janelas periódicas com dois diferentes períodos, onde uma dessas janelas tem comportamento de período 2, e enquanto a outra janela tem comportamento de período 3. Nas janelas periódicas a rota para o caos é via bifurcações tangente e de duplicação de período. O diagrama de bifurcação foi construído considerando pontos ao longo da linha horizontal  $c = 29$  do painel  $d = 0$  relacionado com o sistema Rössler não forçado da Fig. 2.4. Para a con-

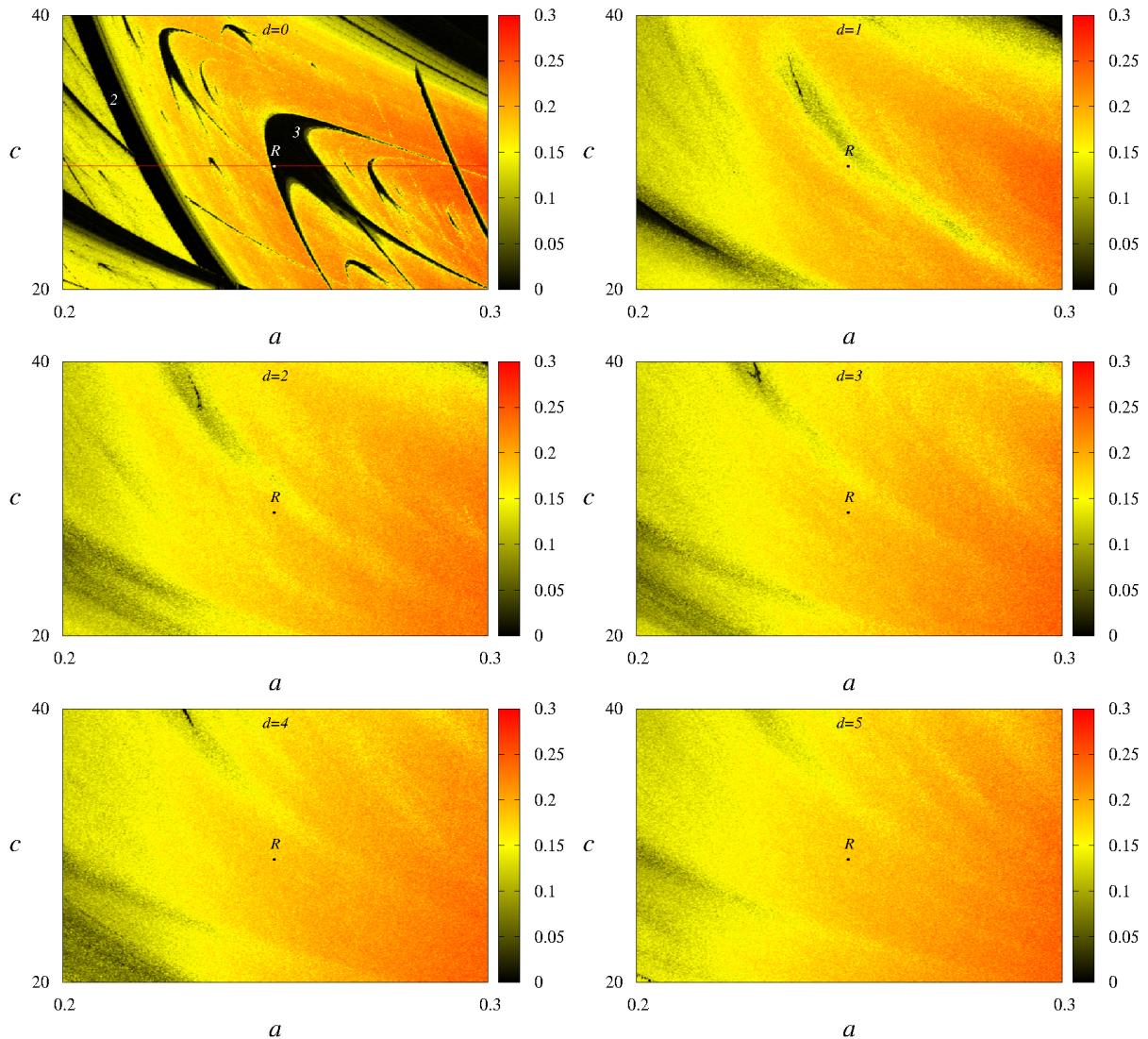


Figura 2.4: Planos de parâmetro  $(a, c)$  do sistema (2.3), para  $b = 0, 4$ ,  $\omega = 0, 5$ , e seis valores da amplitude  $d$ , escritos em cada painel. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

strução deste diagrama utilizamos como condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (2, 0, 3, 1, 4, 3, 4, 4)$ , e dividimos o eixo do parâmetro  $a$  em  $10^3$  intervalos iguais. Para esse diagrama de bifurcação foi plotado 50 pontos para cada valor do parâmetro  $a$ .

Os painéis da Fig. 2.4 fornecem uma visão geral da dinâmica do sistema (2.3) no plano de parâmetro  $(a, c)$ , como uma função da amplitude do forçamento  $d$ , para  $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Desta forma, pode ser visto o efeito do forçamento periódico externo sobre o sistema de Rössler,

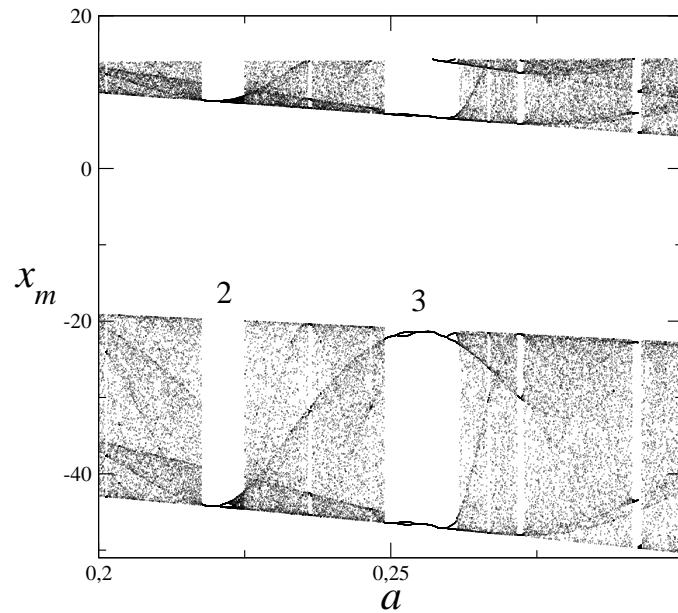


Figura 2.5: Diagrama de bifurcação para pontos ao longo da linha horizontal  $c = 29$  do painel  $d = 0$  da Fig. 2.4.

se olharmos ao todo o conjunto de painéis. Para  $d = 0$ , o caso não forçado, várias janelas de periodicidade estão presentes na região caótica, sendo as mais proeminentes numeradas. Como  $d$  é aumentado a partir de zero, as figuras começam a mudar com a ação da perturbação senoidal, que atua como um agente capaz de fazer acontecer uma transição de ordem-caos no sistema. Isto pode ser visto que quando  $d = 2$  a estrutura de período 3 em preto do painel  $d = 0$  foi totalmente removida, sendo substituída por uma região caótica em vermelho. Como a amplitude  $d$  é aumentada mais ainda, outras estruturas do painel  $d = 0$  vão desaparecendo, até que completamente todas somem ( $d = 5$ ).

Da mesma maneira que na seção anterior, averiguamos o efeito do forçamento periódico externo sobre um atrator periódico do sistema de Rössler não forçado, agora nós consideramos o ponto  $R$  apresentado nos planos de parâmetro da Fig. 2.4, cujas coordenadas são  $a = 0,25$  e  $c = 29$ . As trajetórias do espaço de fase, ou seja os atratores, mostram a evolução do atrator

periódico do sistema (2.3) quando a amplitude do forçamento externo aumenta a partir do zero, na Fig. 2.6.

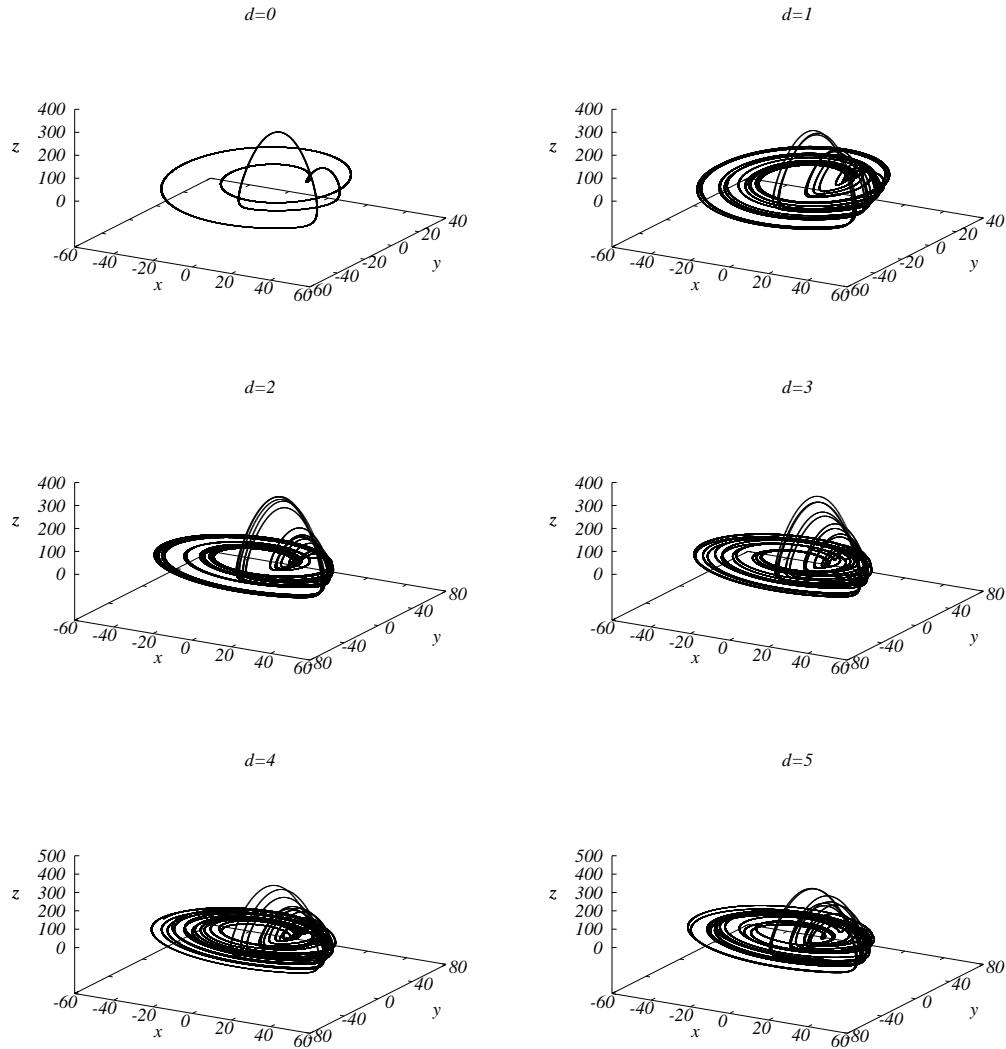


Figura 2.6: Atratores gerados pelo sistema (2.3) com  $(a, c) = (0, 25, 29)$ , para  $b = 0, 4$  e  $\omega = 0, 5$ . (a) Sistema periódico não forçado para  $d = 0$ . (b) Sistema caótico forçado para  $d = 1$ . (c) Sistema caótico forçado para  $d = 2$ . (d) Sistema caótico forçado para  $d = 3$ . (e) Sistema caótico forçado para  $d = 4$ . (f) Sistema caótico forçado para  $d = 5$ .

Para a construção dos atratores do sistema (2.3), utilizamos procedimentos similares aos usados para gerar os atratores do sistema tipo Lorenz, da Fig. 2.3, dos quais foram plotados os últimos 65000 pontos, e a inicialização de  $(x_0, y_0, z_0, v_0)$  foi  $(2, 0, 3, 1, 4, 3, 4, 4)$ .

O painel (a) da Fig. 2.6, corresponde ao ponto  $R$  do sistema de Rössler periódico não forçado para  $d = 0$  da Fig. 2.4, e os painéis de (b) a (f) correspondem ao sistema de Rössler caótico forçado para  $d = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ . Com a aplicação do forçamento eliminamos o atrator periódico, cujo expoente de Lyapunov era nulo, no painel (a), sendo substituído agora por um atrator caótico, de expoente de Lyapunov igual a  $0, 14; 0, 18; 0, 14; 0, 16$  e  $0, 16$ , respectivamente, para  $d = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ . No entanto, pode-se observar que desta vez o forçamento não produziu uma mudança na aparência geral do atrator caótico do sistema de Rössler não forçado.

Assim, como mostrado na Seç. 2.1 para o sistema tipo Lorenz, nesta seção nós mostramos que janelas periódicas imersas na região caótica do plano de parâmetro  $(a, c)$  do sistema de Rössler podem ser destruídas usando uma excitação periódica externa. E como consequência, uma região contínua de caos emerge no plano de parâmetro  $(a, c)$  do sistema (2.3) sem ausência de janelas periódicas.

## 2.3 Sistema de Chua forçado senoidalmente

O sistema de Chua é muito conhecido, principalmente por se tratar do primeiro sistema dinâmico real, um circuito elétrico, capaz de produzir fenômenos caóticos em laboratório. Este circuito é composto por 4 componentes lineares, sendo 2 capacitores, 1 indutor, 1 resistor e 1 componente não-linear chamado de diodo de Chua, sendo este responsável pela não linearidade. As equações que conduzem o sistema são

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - g(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z + d \sin(\omega t),\end{aligned}$$

sendo as variáveis  $x$  e  $y$  as tensões dos capacitores, a variável  $z$  a corrente através do indutor, e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os parâmetros deste sistema. A não linearidade do diodo de Chua é representada pelo polinômio cúbico  $g(x) = ax^3 + (1 + c)x$ , onde  $a$  e  $c$  são constantes [14].

Neste trabalho utilizamos o sistema de Chua periodicamente forçado [8] representado pelas seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - (1 + c)x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z + d \sin(\omega t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde  $x, y, z$  são as variáveis dinâmicas do modelo de Chua e  $d \sin(\omega t)$  é o forçamento externo aplicado.

O parâmetro  $\gamma$  e a frequência angular  $\omega$  do forçamento senoidal são mantidos fixos em  $\gamma = 0,4$  e  $\omega = 0,5$ , e as constantes são fixadas em  $a = 0,03$  e  $c = -1,2$ , enquanto os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são utilizados como parâmetros de bifurcação. Isto significa que  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros que variam simultaneamente, e são usados para construir os planos de parâmetro para os valores de  $d$  aumentando a partir do zero.

O comportamento da dinâmica de cada ponto dos planos de parâmetros é determinado novamente através de estimativas numéricas do maior expoente de Lyapunov. Os planos de parâmetros  $(\alpha, \beta)$  do sistema (2.4) são mostrados na Fig. 2.7. Para cada uma das possíveis combinações de  $\alpha$  e  $\beta$ , consideramos a condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$  e utilizamos procedimentos similares aos usados para gerar os planos de parâmetros das Figs. 2.1 e 2.4.

Na Fig. 2.7, o plano de parâmetro do sistema de Chua não forçado ( $d = 0$ ), contém várias janelas periódicas em preto, imersas na região caótica amarelo-vermelho. Desta vez, diferentemente dos sistemas das Seç. 2.1 e 2.2, as estruturas periódicas estão alinhadas ao longo da linha vermelha  $\beta = 2,7\alpha - 26,5$  sobre o painel  $d = 0$  da Fig. 2.7. Estas estruturas se organizam em cascata de bifurcação por adição de período 2, sendo  $\dots \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 19 \rightarrow \dots$  [23]. Este comportamento pode ser confirmado pelo diagrama de bifurcação

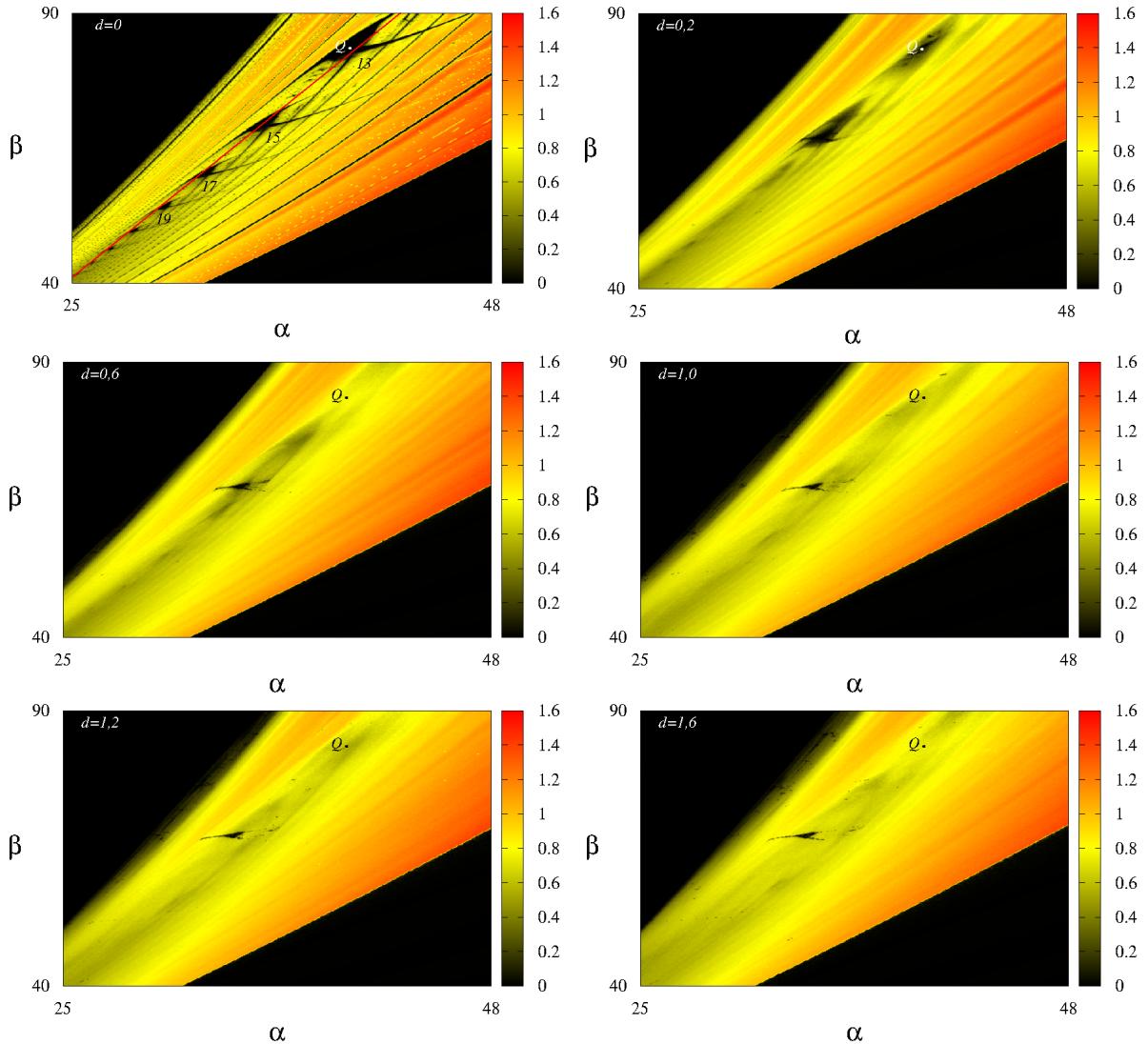


Figura 2.7: Planos de parâmetro  $(\alpha, \beta)$  do sistema (2.4), para  $\alpha = 0, 4, \omega = 0, 5, a = 0, 03$  e  $c = -1, 2$  e seis valores da amplitude  $d$ , escritos em cada painel. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

da Fig. 2.8, que considera pontos ao longo da linha  $\beta = 2, 7\alpha - 26, 5$  sobre o painel  $d = 0$  da Fig. 2.7, e como pode ser visto as janelas periódicas correspondem a formação do tipo adição de período. E desta vez foi preferível construir o diagrama de bifurcação considerando o número do máximo local da variável  $y$ , representada por  $y_m$ , em função do parâmetro  $\alpha$ , em vez do máximo local da variável  $x$ . Para a construção deste diagrama utilizamos como condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ , e dividimos o eixo do parâmetro  $\alpha$  em  $10^3$  intervalos iguais. Para esse diagrama de bifurcação foram plotado 50 pontos para cada valor do parâmetro

$\alpha$ .

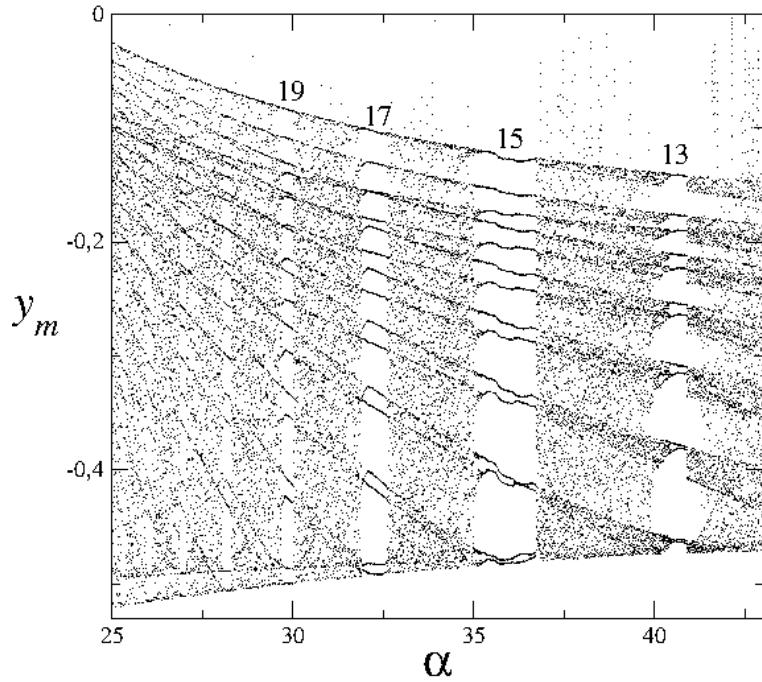


Figura 2.8: Diagrama de bifurcação para pontos ao longo da linha vermelha  $\beta = 2, 7\alpha - 26, 5$  do painel  $d = 0$  da Fig. 2.7.

Os painéis da Fig. 2.7 fornecem uma visão geral da dinâmica do sistema (2.4) no plano de parâmetro  $(\alpha, \beta)$ , como uma função da amplitude do forçamento  $d$ , para  $d = 0; 0, 2; 0, 6; 1, 0; 1, 2$  e  $1, 6$ . Desta forma, pode ser visto o efeito do forçamento periódico externo sobre o sistema de Chua. Para  $d = 0$ , que corresponde ao caso não forçado, nós podemos observar várias listras periódicas em preto embutidas na mesma região caótica que as estruturas auto-organizadas. Como  $d$  é aumentado a partir do zero, uma transição de ordem-caos ocorre no sistema de Chua forçado. Quando  $d = 0, 2$  as listras periódicas do painel  $d = 0$  foram totalmente removidas, mas ainda restam vestígios das estruturas periódicas auto-organizadas. Como a amplitude  $d$  é aumentada mais ainda, esses vestígios são cada vez menos notáveis, como pode ser visto nos painéis  $d = 0, 6; 1, 0$  e  $1, 2$  na Fig. 2.7. Finalmente, quando  $d = 1, 6$  as estruturas periódicas auto-organizadas desapareceram quase interiramente. De fato, continua a aparecer uma estrutura periódica na parte central do painel  $d = 1, 6$  da Fig. 2.7.

Finalmente, seguindo as Seçs. 2.1 e 2.2, respectivamente, para os sistemas tipo Lorenz e

o sistema de Rössler, também neste caso nós investigamos a influência do forçamento periódico externo sobre um atrator periódico do sistema de Chua não forçado. Com este propósito, nós consideramos o ponto  $Q$  apresentado nos planos de parâmetro da Fig. 2.7, cujas coordenadas são  $\alpha = 40,3034$  e  $\beta = 84,1534$ . As trajetórias do espaço de fase, ou seja os atratores, mostram a evolução do atrator periódico do sistema (2.4) quando a amplitude do forçamento externo aumenta a partir do zero, na Fig. 2.9.

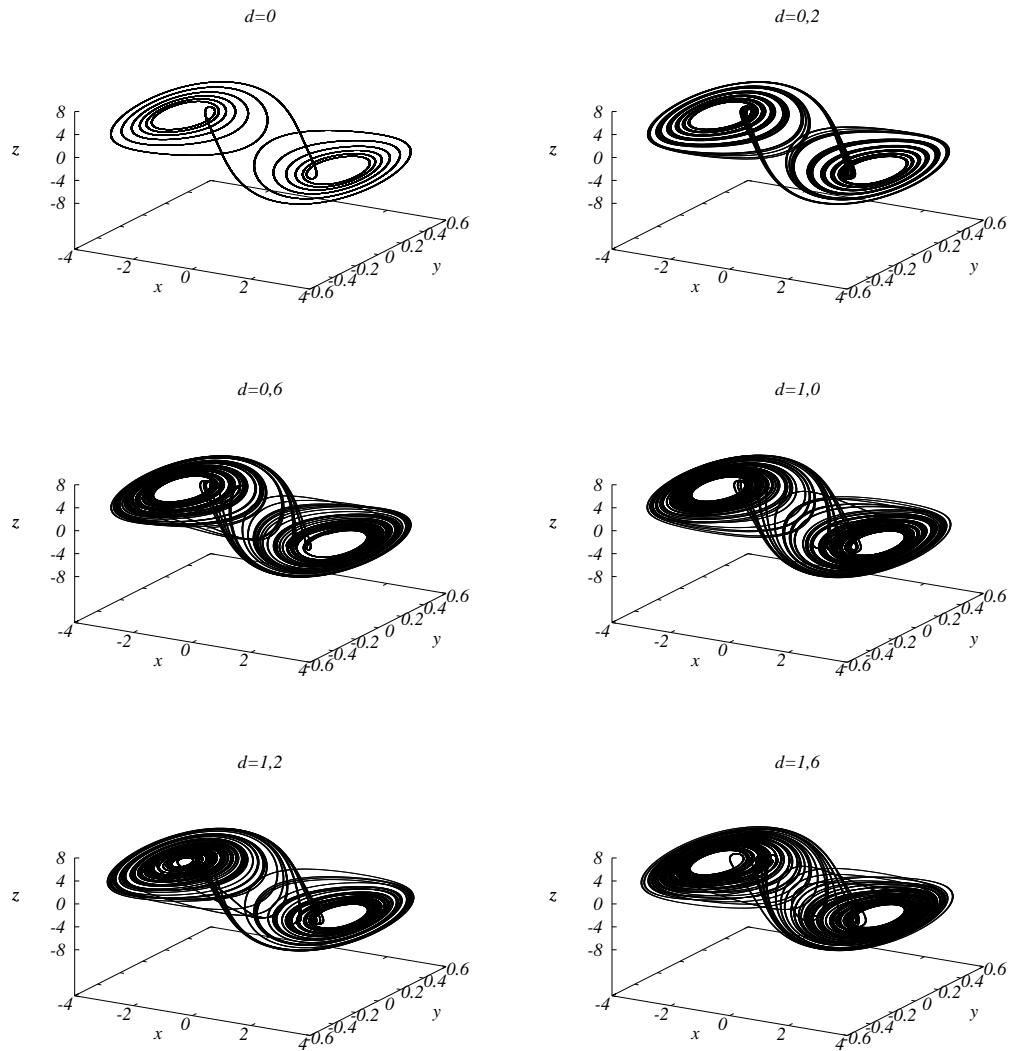


Figura 2.9: Atratores gerados pelo sistema (2.4) com  $(\alpha = 40,3034, \beta = 84,1534)$ , para  $\gamma = 0,4$ ,  $\omega = 0,5$ ,  $a = 0,03$  e  $c = -1,2$ . (a) Sistema periódico não forçado para  $d = 0$ . (b) Sistema periódico forçado para  $d = 0,2$ . (c) Sistema caótico forçado para  $d = 0,6$ . (d) Sistema caótico forçado para  $d = 1,0$ . (e) Sistema caótico forçado para  $d = 1,2$ . (f) Sistema caótico forçado para  $d = 1,6$ .

Para a construção dos atratores do sistema (2.4), utilizamos procedimentos similares aos usados para gerar os atratores dos sistemas tipo Lorenz e Rössler, 2.3 e 2.6 respectivamente, dos quais foram plotados os últimos 65000 pontos, e a inicialização de  $(x_0, y_0, z_0, v_0)$  foi  $(0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ .

O painel (b) da Fig. 2.9, corresponde ao ponto  $Q$  do sistema de Chua periódico forçado para  $d = 0, 2$  da Fig. 2.7, e os painéis de (c) a (f) correspondem ao sistema de Chua caótico forçado para  $d = 0, 6; 1, 0; 1, 2$  e  $1, 6$ . Com a aplicação do forçamento eliminamos o atrator periódico, cujo expoente de Lyapunov era nulo, nos painéis (a) e (b), sendo substituído agora por um atrator caótico, de expoente de Lyapunov igual a  $0, 76; 0, 65; 0, 50$  e  $0, 73$ , respectivamente, para  $d = 0, 6; 1, 0; 1, 2$  e  $1, 6$ . Desta vez, pode ser visto que o forçamento não produziu uma mudança na aparência geral do atrator caótico do sistema de Chua não forçado, uma vez que todos os atratores caóticos do sistema de Chua forçados nos painéis (c) a (f) da Fig. 2.9 lembram o atrator caótico de dupla volta do sistema de Chua.

Este é um terceiro exemplo de sistema, em que as estruturas periódicas imersas em uma região caótica do plano de parâmetro, são substituídas por estruturas caóticas, quando a amplitude de um forçamento senoidal com frequência angular fixa é variada. Portanto, como mostrado nas Seç 2.1 para um sistema tipo Lorenz, e na Seç. 2.2 para o Sistema de Rössler, na seção presente mostrou-se que as janelas periódicas imersas numa região caótica do plano de parâmetro do sistema de Chua podem ser destruídas utilizando uma força externa periódica, resultando assim, uma região contínua de caos.

## Capítulo 3

# Mudanças na Dinâmica dos Sistemas de Lorenz, Rössler e Chua sob um Forçamento Externo

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos através de métodos computacionais para os sistemas de Lorenz, Rössler e Chua sob ação do forçamento senoidal externo nos sistemas originalmente periódicos e caóticos, com a variação da amplitude e da frequência angular. O comportamento dinâmico dos sistemas são estudados com o uso das ferramentas de planos de parâmetro, diagrama de bifurcação e transformadas de Fourier.

A construção das figuras dos planos de parâmetros foi obtida pela combinação das variações dos parâmetros de controle  $\omega$  e  $d$  e a representação gráfica do maior expoente de Lyapunov. Para cada plano de parâmetro os expoentes de Lyapunov foram obtidos considerando a discretização destes em uma malha de  $500 \times 500$  pontos equidistantes. O integrador numérico utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo igual a  $10^{-3}$  e um tempo de integração de  $5 \times 10^5$  iterações para o cálculo dos expoentes de Lyapunov. As condições iniciais de  $(x_0, y_0, z_0, v_0)$  foram estabelecidas para cada sistema, e para cada incremento do valor dos parâmetros usamos o último valor de  $(x, y, z, v)$  como novas condições iniciais para determinar o próximo expoente, isso significa que seguimos o atrator.

O gradiente de cores usado em cada figura está associado à magnitude do maior expoente de Lyapunov. Para os planos de parâmetro do maior expoente de Lyapunov a cor branco está associado a expoentes negativos (regiões de ponto fixo), preto aos expoentes nulos (regiões periódicas), e o vermelho aos expoentes mais positivos (regiões caóticas). Nos sistemas em que encontramos regiões de hipercaos, e construímos planos de parâmetros do segundo maior expoente de Lyapunov, o gradiente de cores utilizados será branco para expoentes negativos, preto para expoentes nulos e a variação de vermelho para expoentes positivos.

Os diagramas de bifurcação foram plotados da observação do valor máximo de algumas variáveis em função de seus parâmetros. O integrador numérico também foi o Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo de  $10^{-3}$  e sobre as mesmas condições iniciais de cada sistema, utilizadas nos planos de parâmetros.

### 3.1 Sistema de Lorenz forçado senoidalmente

Para análise do comportamento dinâmico do sistema de Lorenz para os parâmetros  $\omega \times d$ , utilizamos o mesmo conjunto de equações do sistema (2.2) do Cap. 2. Desta vez estivemos interessados em investigar a dinâmica do modelo com  $\omega$  e  $d$  como parâmetros de bifurcação. Desta forma, construímos os planos de parâmetros, diagramas de bifurcação e a transformada de Fourier, utilizando como condições iniciais  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ .

O plano de parâmetro da Fig. 3.1 mostra uma visão geral do comportamento dinâmico do sistema em função do parâmetro  $r$  pelo parâmetro  $\sigma$ , com  $b = 1, 0$ ,  $\omega = 0, 5$  e  $d = 0$ . Podemos observar nesse plano de parâmetro várias regiões de periodicidade (em preto), imersas em uma região caótica (em amarelo-vermelho).

Para verificarmos o efeito do forçamento senoidal externo sobre o sistema de Lorenz caótico, nós consideramos agora o ponto  $T$  da Fig. 3.1, para  $\sigma = 39, 0$  e  $r = 700, 0$ . A Fig. 3.2 mostra um plano de parâmetro  $(\omega, d)$  desse sistema. Como pode ser visto claramente no painel, ao variarmos simultaneamente a frequência angular e a amplitude do forçamento, estados caóti-

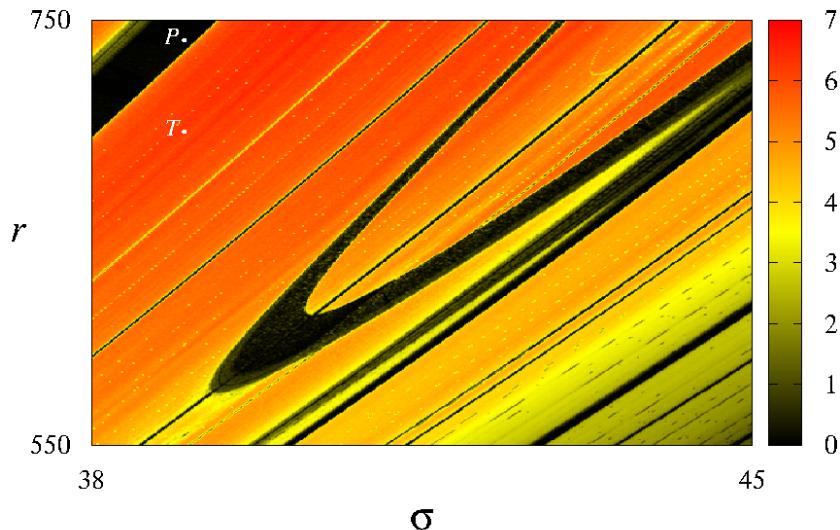


Figura 3.1: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\sigma, r)$  do sistema (2.2), para  $b = 1, 0$ ,  $\omega = 0, 5$  e  $d = 0$ , correspondem ao sistema de Lorenz não forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

cos foram convertidos em estados periódicos. Assim, um forçamento periódico externo com parâmetros de controle  $\omega$  e  $d$  adequados permitiu-nos alcançar destruição de caos em um sistema de Lorenz caótico, produzindo várias transições de caos-ordem no plano de parâmetro  $(\omega, d)$ .

A Fig. 3.2 tem uma linha reta em vermelho sobre a qual construímos um diagrama de bifurcação, apresentado na Fig. 3.3, para a variável  $x$  entre os valores de  $0 \leq \omega \leq 40$ . Esse diagrama de bifurcação foi construído considerando pontos ao longo da linha  $d = 20$ , que leva em conta o máximo local da variável  $x$ , representada por  $x_m$ , em função do parâmetro  $\omega$ . A fim de determinarmos o menor período em cada uma das janelas de periodicidade que aparecem nas Figs. 3.2 e 3.3, nós produzimos um número maior de ampliações em determinadas regiões, que incluem as janelas de periodicidade da Fig. 3.3. Através dessas ampliações pudemos citar o número do menor período detectado nas janelas de periodicidade. E então podemos observar que no sistema de Lorenz caótico forçado, existem três estruturas com comportamento de

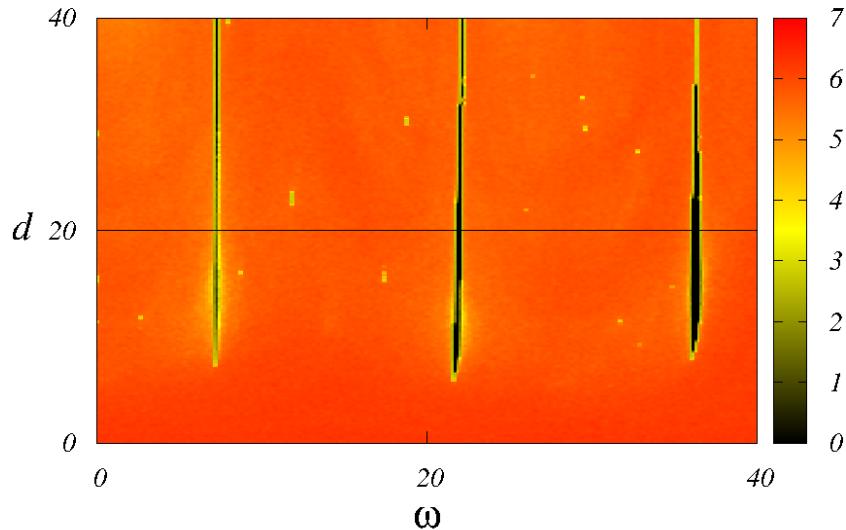


Figura 3.2: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema (2.2), para  $\sigma = 39,0$  e  $r = 700,0$ , correspondem ao sistema de Lorenz caótico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

período 3, sendo que cada estrutura periódica está separada da outra pela região caótica.

Em seguida, nós investigamos o efeito do forçamento senoidal externo sobre um sistema de Lorenz periódico, cujas coordenadas são  $\sigma = 39,0$  e  $r = 743,0$ , que correspondem ao ponto  $P$ , no plano de parâmetro da Fig. 3.1. A Fig. 3.4 mostra o plano de parâmetro  $(\omega, d)$  desse sistema, indicando que sob a influência do forçamento senoidal externo, mudanças do estado periódico para o estado caótico podem ser alcançadas. Como a amplitude  $d$  é aumentada a partir do zero, independentemente do valor da frequência angular  $\omega$ , o efeito do forçamento senoidal externo começa a ser notado, persistindo até em  $\omega \approx 96$ . Existe uma frequência angular em torno de  $\omega \approx 96$ , a partir do qual o efeito da ação do forçamento não é mais sentido, e o sistema forçado permanece no seu estado original, ou seja, de período 3.

Analisamos também a evolução temporal da variável  $y$  e a distribuição da frequência para o sistema de Lorenz, caracterizado pelos parâmetros  $\sigma = 39,0$  e  $r = 743,0$ , correspon-

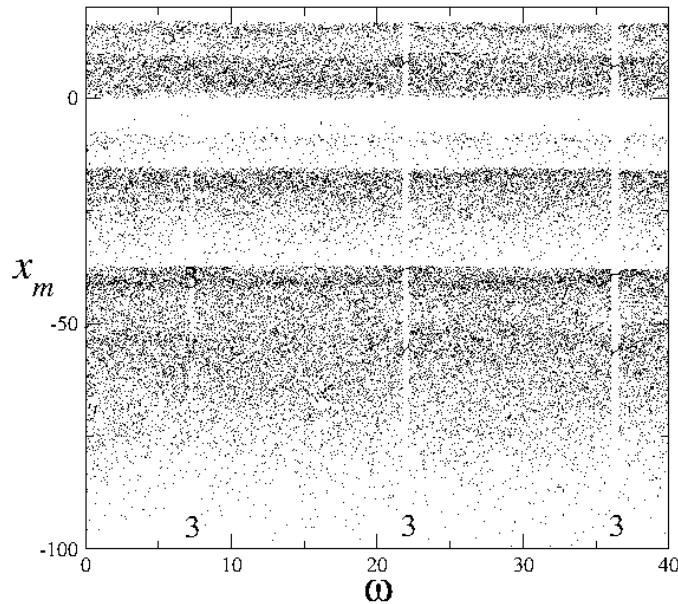


Figura 3.3: Diagrama de bifurcação para pontos ao longo da linha reta em vermelho ( $d = 20$ ) no painel da Fig. 3.2. Os números referem-se ao menor período de cada janela de periodicidade.

dendo ao ponto  $P$  da Fig. 3.1. Na Fig. 3.5(a) podemos observar que os máximos da variável  $y$  se repetem no intervalo de tempo  $T \approx 0,85$ , onde  $T$  entende-se como sendo o tempo para uma órbita completa sobre o atrator. Já na Fig. 3.5(b) podemos ver a frequência fundamental  $f_0$  desse sistema e seus harmônicos. Notemos a concordância nos resultados ou seja,  $T \approx 0,85$ , e  $f_0 = 1/T = 1/0,85 \approx 1,18$ .

As Figs. 3.4 e 3.5, quando consideradas juntas, permitem-nos concluir que as frequências do forçamento  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ) perto da frequência fundamental, o efeito do forçamento (transição de ordem-caos) é mais marcante para valores de amplitude perto de zero. A medida em que a frequência do forçamento aumenta, afastando-se da frequência fundamental, o efeito do forçamento torna-se menos perceptível no sistema. No entanto, para valores da frequência do forçamento muito maiores que  $15,3$  ( $96/2\pi$ ), o efeito do forçamento é nulo.

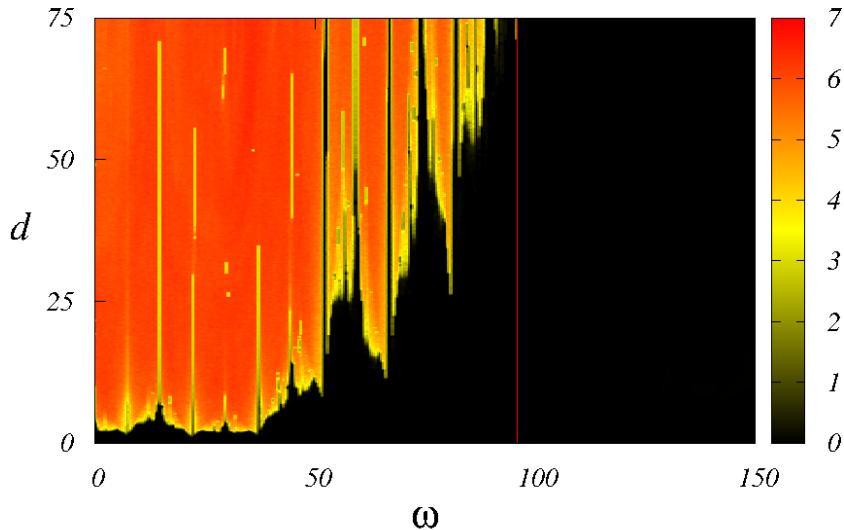


Figura 3.4: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema (2.2), para  $\sigma = 39,0$  e  $r = 743,0$ , correspondem ao sistema de Lorenz periódico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

No presente estudo, nós lidamos com um sistema autônomo quadridimensional, e estamos interessados em descobrir se há regiões hipercaóticas nesse sistema. Como é conhecido, a única possibilidade de se obter hipercaos é com dois expoentes de Lyapunov positivo. Na Fig. 3.6 mostramos o plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema de Lorenz caótico forçado para  $\sigma = 40,0$  e  $r = 650,0$ . As Figs. 3.6(a) e 3.6(b) levam em conta o maior expoente de Lyapunov e o segundo maior expoente, respectivamente. Uma vez que um atrator caótico tem um maior expoente de Lyapunov positivo, existem apenas duas possibilidades para o segundo maior expoente de Lyapunov (para um sistema autônomo quadridimensional o terceiro maior expoente de Lyapunov é nulo, e o menor expoente de Lyapunov é negativo): um valor positivo indicando movimento hipercaótico, e um valor zero que indica movimento caótico. Portanto, as regiões pintadas em amarelo na Fig. 3.6(b) estão relacionadas aos estados hipercaóticos, uma vez que estas regiões são subconjuntos da região pintada em amarelo-vermelho em Fig. 3.6(a) [9, 21, 23].

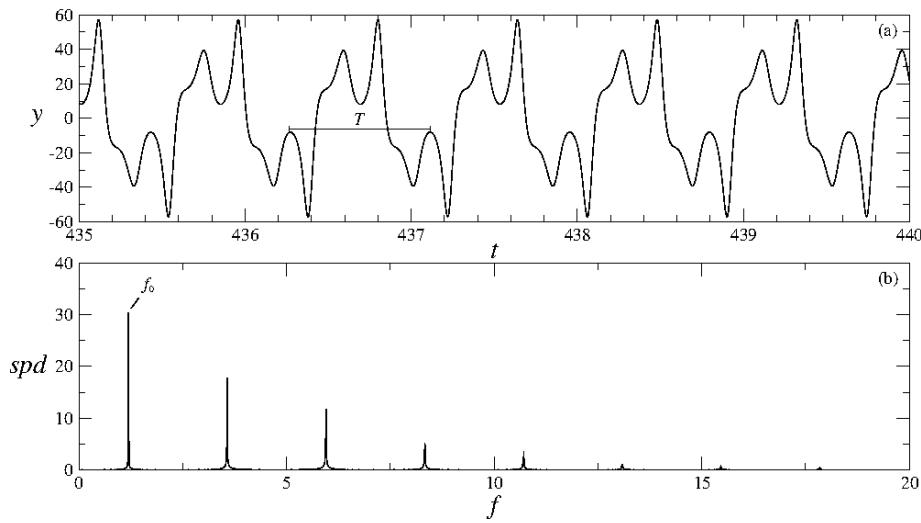


Figura 3.5: (a) A evolução temporal da variável  $y$  do sistema de Lorenz não forçado para  $\sigma = 39,0$  e  $r = 743,0$ , ou seja, o ponto  $P$  da estrutura de período 3 da Fig. 3.1. (b) A distribuição de potência espectral correspondente (spd).

Em síntese, nós investigamos o efeito do forçamento senoidal externo sobre a dinâmica do sistema de Lorenz trabalhando em ambos os regimes, periódico e caótico. Os planos de parâmetro considerando os parâmetros de forçamento externo (amplitude e frequência) são adotados para mostrar que não apenas estados periódicos do sistema de Lorenz são convertidos em estados caóticos, mas também estados caóticos podem ser convertidos em estados periódicos. Por fim, para valores adequados dos parâmetros de controle do forçamento externo, e dependendo da natureza do estado (periódico ou caótico) de um sistema de Lorenz, um estado final periódico ou caótico pode ser alcançado para o sistema forçado.

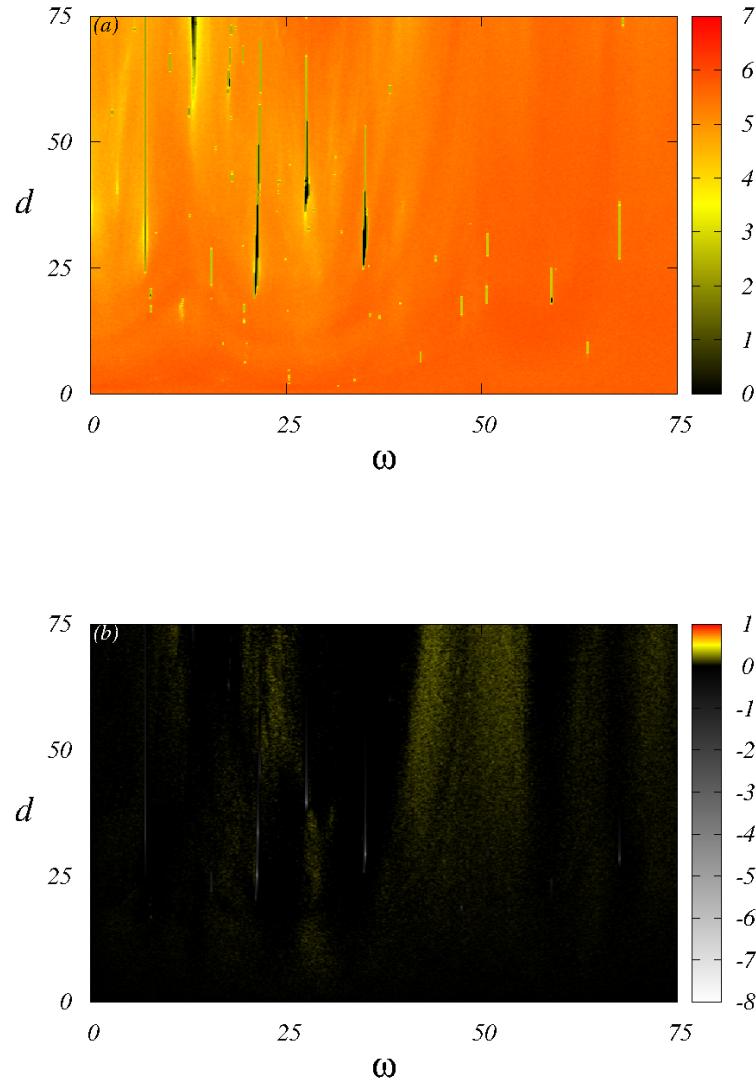


Figura 3.6: Plano de parâmetro do sistema (2.2), para  $\sigma = 40,0$  e  $r = 650,0$ , correspondem ao sistema de Lorenz caótico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov em (a), e para o segundo maior expoente de Lyapunov em (b).

## 3.2 Sistema de Rössler forçado senoidalmente

Em um segundo momento foi estudado o comportamento dinâmico do sistema de Rössler para os parâmetros  $\omega \times d$ , usando o mesmo conjunto de equações do sistema (2.3) do Cap. 2. Mas, agora investigando a dinâmica do modelo com  $\omega$  e  $d$  como parâmetros de controle. Para gerar os planos de parâmetros, diagramas de bifurcação e a transformada de Fourier, utilizamos

como condições iniciais  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (2, 0, 3, 1, 4, 3, 4, 4)$ .

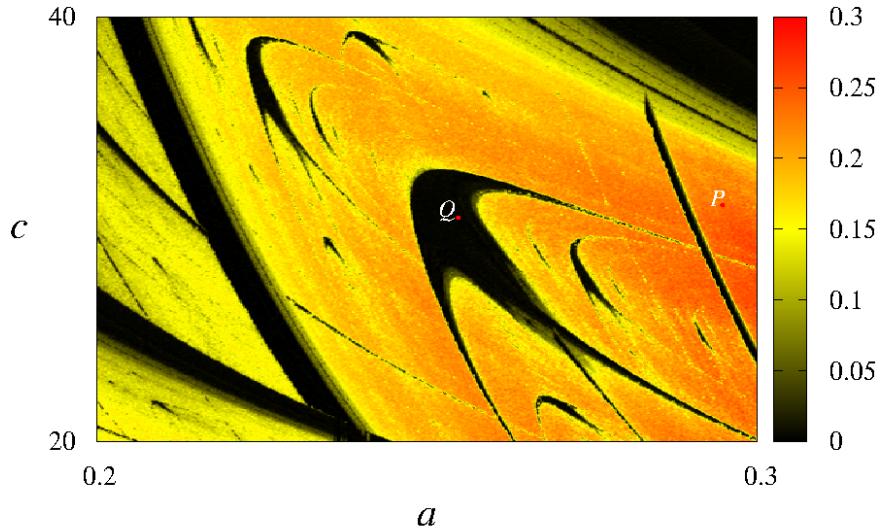


Figura 3.7: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(a, c)$  do sistema (2.3), para  $b = 0, 4$ ,  $\omega = 0, 5$  e  $d = 0$ , correspondem ao oscilador de Rössler não forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

O comportamento dinâmico é apresentado na Fig. 3.7, resultado da combinação do parâmetro  $c$  pelo parâmetro  $a$ , com  $b = 0, 4$ ,  $\omega = 0, 5$  e  $d = 0$ . Assim observamos no plano de parâmetro várias regiões de periodicidade (em preto), embutidas em uma região caótica (em amarelo-vermelho).

Para a verificação do efeito do forçamento senoidal externo sobre o oscilador de Rössler caótico, nós consideramos agora o ponto  $P$  da Fig. 3.7, para  $a = 0, 295$  e  $c = 31, 5$ . A Fig. 3.8 mostra o plano de parâmetro  $(\omega, d)$  desse sistema. Comparando a Fig. 3.2 com a Fig. 3.8, observamos também que ao variarmos simultaneamente a frequência angular e a amplitude do forçamento, estados caóticos foram convertidos em estados periódicos. Logo, um forçamento periódico externo com parâmetros de controle  $\omega$  e  $d$  adequados nos permitiu alcançar destruição de caos em um sistema de Rössler caótico, produzindo então várias transições de caos-ordem

no plano de parâmetro  $(\omega, d)$ .

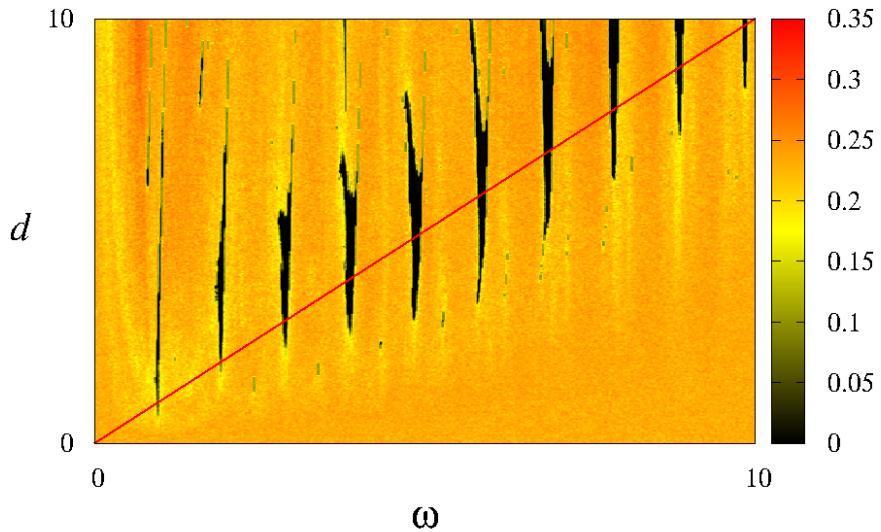


Figura 3.8: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema (2.3), para  $a = 0,295$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 31,5$ , correspondem ao oscilador de Rössler caótico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

Para termos uma ideia da organização dos períodos das estruturas presentes no plano de parâmetro da Fig. 3.8, construímos um diagrama de bifurcação sobre a linha reta em vermelho, mostrado na Fig. 3.9, para a variável  $y$  entre os valores de  $0 \leq \omega \leq 10$ . Esse diagrama de bifurcação foi construído considerando pontos ao longo da linha  $d = \omega$ , que leva em conta o máximo local da variável  $y$ , representada por  $y_m$ , em função do parâmetro  $\omega$ . A fim de determinarmos o menor período em cada uma das janelas de periodicidade que aparecem nas Figs. 3.8 e 3.9, nós produzimos um número maior de ampliações em determinadas regiões, que incluem as janelas de periodicidade da Fig. 3.9. Através dessas ampliações pudemos escrever o número do menor período detectado nas janelas de periodicidade. E assim podemos observar que no oscilador de Rössler caótico forçado, existem dois diferentes períodos menores, em três deles tendo comportamento de período 2, e sete que apresentam comportamento de período 1. Em todas as janelas de periodicidade a rota para o caos é via bifurcações de duplicação de período, ambos para o

lado direito (para  $\omega$  e  $d$  aumentando) e para o lado esquerdo (para  $\omega$  e  $d$  diminuindo).

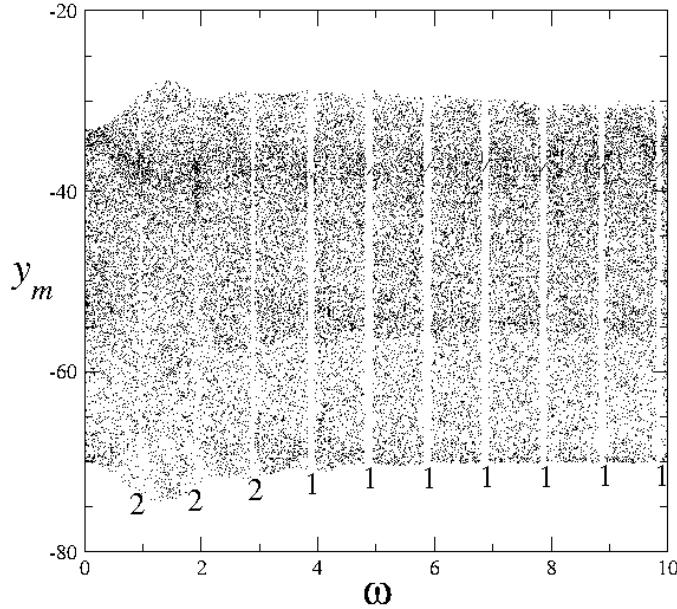


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação para pontos ao longo da diagonal principal  $d = \omega$  no painel da Fig. 3.8. Os números referem-se ao menor período de cada janela de periodicidade.

Posteriormente, nós investigamos o efeito do forçamento senoidal externo sobre um oscilador de Rössler periódico, cujas coordenadas são  $a = 0,255$  e  $c = 31,0$ , que corresponde ao ponto  $Q$ , pertencente a estrutura em forma de camarão de período 3 no plano de parâmetro da Fig. 3.7. A Fig. 3.10 mostra o plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do oscilador de Rössler periódico forçado, indicando que sob a influência do forçamento senoidal externo, mudanças do estado periódico para o estado caótico podem ser alcançadas. No fundo do painel, onde a amplitude  $d$  do forçamento é desprezível e a frequência angular assume qualquer valor maior que zero, o efeito do forçamento não é notado, correspondendo aos valores de parâmetro  $(\omega, d)$  para os quais o sistema é periódico, sendo predominante, portanto, a cor preta. Conforme a amplitude  $d$  é aumentada a partir do zero, independentemente do valor da frequência angular  $\omega$ , o efeito do forçamento senoidal externo começa a ser notado, persistindo até em  $\omega \approx 17$ . Existe uma

frequência angular em torno de  $\omega \approx 17$ , a partir do qual o efeito da ação do forçamento não é mais sentido, e o sistema forçado permanece no seu estado original, ou seja, de período 3.

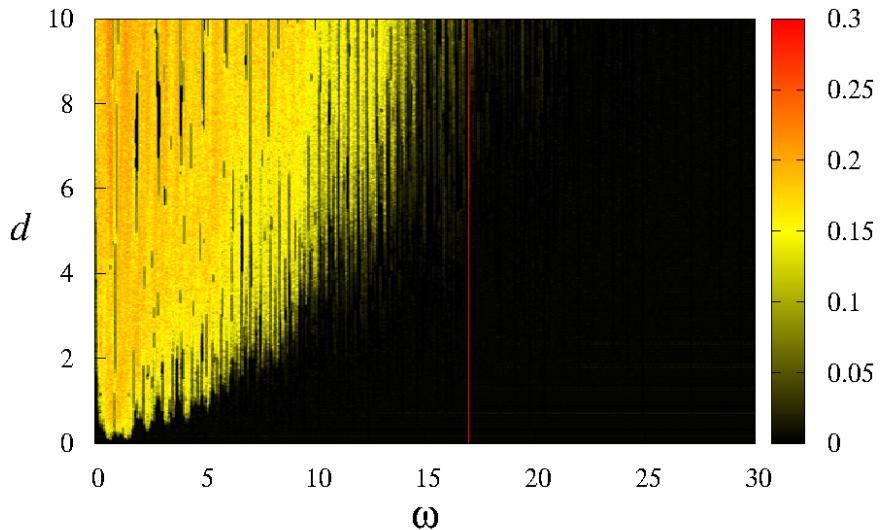


Figura 3.10: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema (2.3), para  $a = 0,255$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 31,0$ , correspondem ao oscilador de Rössler periódico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

Investigamos também a evolução temporal da variável  $x$  e a distribuição da frequência para o oscilador de Rössler, caracterizado pelos parâmetros  $a = 0,255$  e  $c = 31,0$ , correspondendo ao ponto  $Q$  da Fig. 3.7. Os três máximos locais da variável  $x$  são claramente visíveis no intervalo de tempo  $T \approx 14$ , na Fig. 3.11(a), onde  $T$  entende-se como sendo o tempo para uma órbita completa sobre o atrator. E na Fig. 3.11(b) podemos ver a frequência fundamental  $f_0$  desse sistema e seus harmônicos. Constatamos também a concordância nos resultados ou seja,  $T \approx 14$ , e  $f_0 = 1/T = 1/14 \approx 0,07$ .

As Figs. 3.10 e 3.11, quando consideradas juntas, nos possibilitam concluir que as frequências do forçamento  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ) perto da frequência fundamental, o efeito do forçamento (transição de ordem-caos) é mais marcante para valores de amplitude perto de zero. A medida

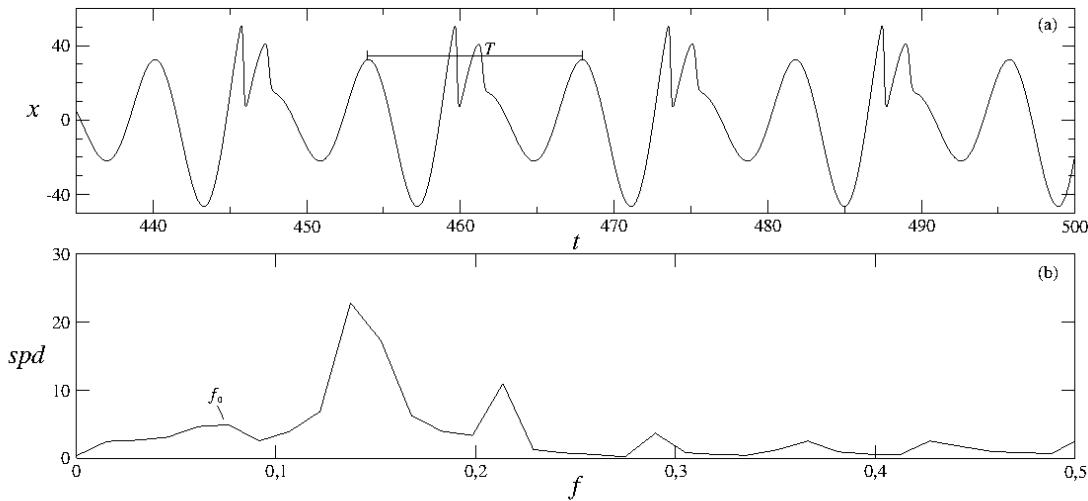


Figura 3.11: (a) A evolução temporal da variável  $x$  do oscilador de Rössler não forçado para  $a = 0, 255$  e  $c = 31, 0$ , ou seja, do ponto  $Q$  da estrutura de período 3 da Fig. 3.7. (b) A distribuição de potência espectral correspondente (spd).

em que a frequência do forçamento aumenta, afastando-se da frequência fundamental, o efeito do forçamento torna-se menos perceptível para o oscilador. Para valores da frequência do forçamento muito maiores que  $2, 7$  ( $17/2\pi$ ), o efeito do forçamento é nulo.

Novamente estamos interessados em descobrir se há regiões hipercaóticas para esse sistema. Como citado anteriormente, a única possibilidade de haver hipercaos é com dois expoentes de Lyapunov positivo. Na Fig. 3.12 mostramos o plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do oscilador de Rössler caótico forçado para  $a = 0, 25$  e  $c = 25, 0$ . As Figs. 3.12(a) e 3.12(b) consideram o maior expoente de Lyapunov e o segundo maior expoente de Lyapunov, respectivamente. Assim, as regiões pintadas em amarelo na Fig. 3.12(b) estão relacionadas aos estados hipercaóticos, uma vez que estas regiões são subconjuntos da região pintada em amarelo-vermelho em Fig. 3.12(a).

Resumidamente, nós investigamos o efeito do forçamento senoidal externo sobre a dinâmica do sistema de Rössler trabalhando em ambos os regimes, periódico e caótico. Expõ-

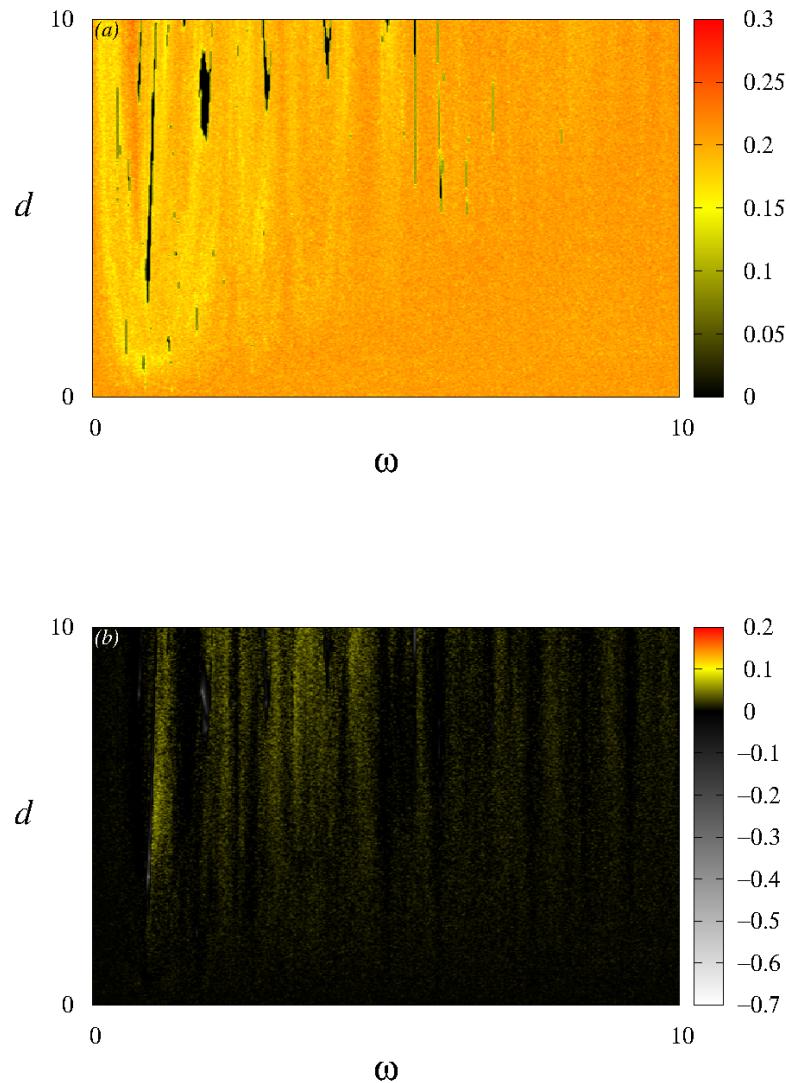


Figura 3.12: Plano de parâmetro do sistema (2.3), para  $a = 0, 25$  e  $c = 25, 0$ , correspondem ao oscilador de Rössler caótico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov em (a), e para o segundo maior expoente de Lyapunov.

mos através dos planos de parâmetro que não apenas estados periódicos do sistema de Rössler são convertidos em estados caóticos, mas também estados caóticos podem ser convertidos em estados periódicos. Contudo, para valores adequados dos parâmetros de controle do forçamento externo, e dependendo da natureza do estado (periódico ou caótico) de um oscilador de Rössler, um estado final periódico ou caótico pode ser alcançado para o sistema forçado.

### 3.3 Sistema de Chua forçado senoidalmente

Para nosso terceiro caso estudado, nós analisamos o comportamento dinâmico do sistema de Chua forçado periodicamente com parâmetros de controle  $\omega$  e  $d$ , cujo conjunto de equações diferenciais são dadas pelo sistema (2.4) do Cap. 2. Para analisar a dinâmica desse sistema nós geramos planos de parâmetro, diagramas de bifurcação e a transformada de Fourier, utilizando como condições iniciais  $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4)$ .

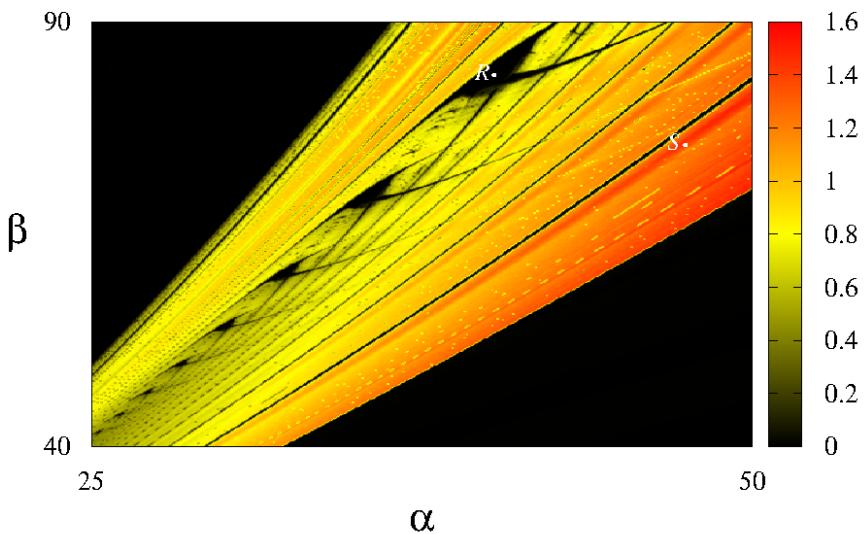


Figura 3.13: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\alpha, \beta)$  do sistema (2.4), para  $a = 0,03$ ,  $c = -1, 2$ ,  $\gamma = 0, 4$ ,  $\omega = 0, 5$  e  $d = 0$ , correspondem ao sistema de Chua não forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

Iniciando a análise pelos resultados da combinação  $\alpha \times \beta$ , o plano de parâmetro mostrado na Fig. 3.13 é visão geral do comportamento dinâmico do sistema de Chua, do qual o resultado é combinação do parâmetro  $\beta$  pelo parâmetro  $\alpha$ , com  $a = 0,03$ ,  $c = -1, 2$ ,  $\gamma = 0, 4$ ,  $\omega = 0, 5$  e  $d = 0$ . Este plano de parâmetro, como podemos ver, possui várias estruturas de periodicidade (em preto), dentro de uma região caótica (em amarelo-vermelho).

Para averiguar o efeito do forçamento senoidal externo sobre o sistema de Chua caótico, foi considerado o ponto  $S$  da Fig. 3.13, para  $\alpha = 47,526$  e  $\beta = 75,963$ . A Fig. 3.14 mostra o plano de parâmetro  $\omega \times d$  desse sistema. Num primeiro olhar à esta figura não identificamos estruturas periódicas, mas na área mais preta, existem faixas caóticas e entre essas faixas existem pequenas estruturas periódicas que são muito difíceis de se notar. De acordo com os resultados anteriores para o sistema de Lorenz e de Rössler, o mesmo efeito ocorreu neste caso, mesmo não sendo tão perceptível. Ou seja, o forçamento periódico externo com determinados valores dos parâmetros de controle  $\omega$  e  $d$  permitiu-nos alcançar destruição de caos em determinadas regiões de um sistema de Chua caótico.

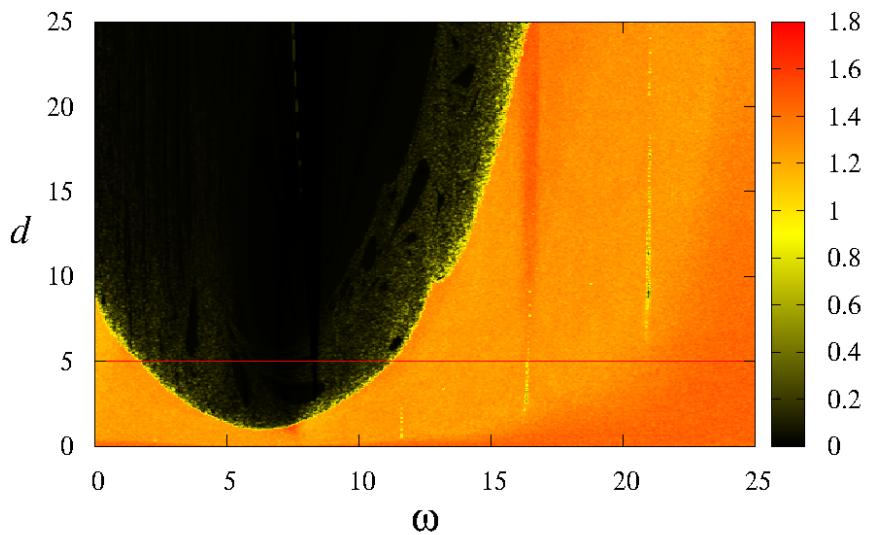


Figura 3.14: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema (2.4), para  $\alpha = 47,526$  e  $\beta = 75,963$ , correspondem ao sistema de Chua caótico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

Para constatarmos o efeito do forçamento senoidal externo, construímos um diagrama de bifurcação sobre a linha reta em vermelho, mostrado na Fig. 3.15, para a variável  $y$  entre os valores de  $8,0 \leq \omega \leq 8,5$ . Este diagrama de bifurcação foi construído considerando pontos ao longo da linha  $d = 5$ , que leva em conta o máximo local da variável  $y$ , representada por  $y_m$ ,

em função do parâmetro  $\omega$ . De acordo com o diagrama, a estrutura mais visível para a faixa de valores já citados possui período 1.

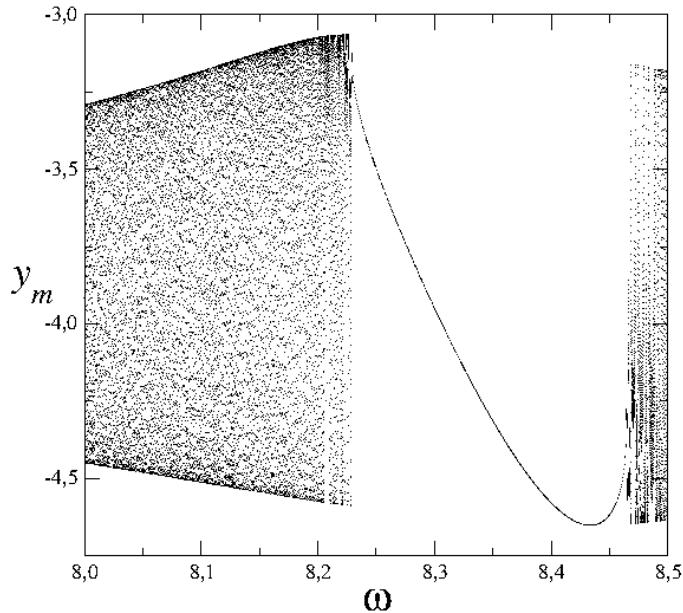


Figura 3.15: Diagrama de bifurcação para pontos ao longo da linha em vermelho  $d = 5$  no painel da Fig. 3.14.

Nós também investigamos o efeito do forçamento senoidal externo sobre um sistema de Chua periódico, cujas coordenadas são  $\alpha = 40,303$  e  $\beta = 84,153$ , que corresponde ao ponto  $R$ , pertencente a estrutura de período 13 no plano de parâmetro da Fig. 3.13. A Fig. 3.16 mostra o plano de parâmetro  $\omega \times d$  do sistema de Chua periódico forçado, indicando que sob a influência do forçamento senoidal externo, mudanças do estado periódico para o estado caótico podem ser alcançadas. Como podemos reparar no painel, a medida que a amplitude  $d$  é aumentada a partir do zero, independentemente do valor da frequência angular  $\omega$ , o efeito do forçamento senoidal externo começa a ser notado, persistindo até em  $\omega \approx 25$ . Ou seja, existe uma frequência angular em torno de  $\omega \approx 25$ , a partir do qual o efeito da ação do forçamento não é mais sentido, e o sistema forçado permanece no seu estado original, ou seja, de período 13.

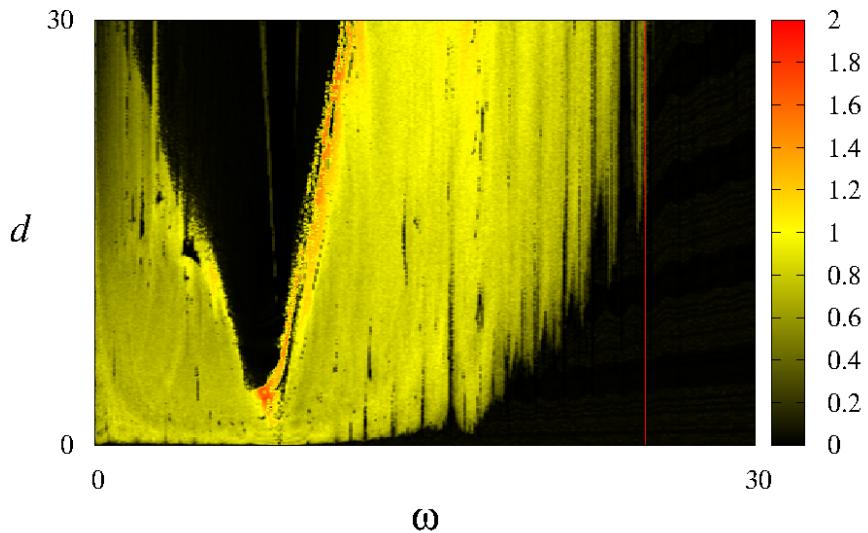


Figura 3.16: Regiões e cores do plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema (2.4), para  $\alpha = 40,303$  e  $\beta = 84,153$ , correspondem ao sistema de Chua periódico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, preto para zero e vermelho para o mais positivo.

Considerando a evolução temporal da variável  $x$  e a distribuição da frequência para o sistema de Chua, caracterizado pelos parâmetros  $\alpha = 40,303$  e  $\beta = 84,153$ , correspondendo ao ponto  $R$  da Fig. 3.13. Os máximos locais da variável  $x$  são claramente visíveis no intervalo de tempo  $T \approx 9,7$ , na Fig. 3.17(a), onde  $T$  entende-se como sendo o tempo para uma órbita completa sobre o atrator. E na Fig. 3.17(b) podemos ver a frequência fundamental  $f_0$  desse sistema e seus harmônicos. Constatamos também a concordância nos resultados ou seja,  $T \approx 9,7$ , e  $f_0 = 1/T = 1/9,7 \approx 0,10$ .

De acordo com as Figs. 3.16 e 3.17, concluímos que as frequências do forçamento  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ) perto da frequência fundamental, o efeito do forçamento (transição de ordem-chaos) é mais marcante para valores de amplitude perto de zero. A medida em que a frequência do forçamento aumenta, afastando-se da frequência fundamental, o efeito do forçamento torna-se menos perceptível para o sistema. Para valores da frequência do forçamento muito maiores que

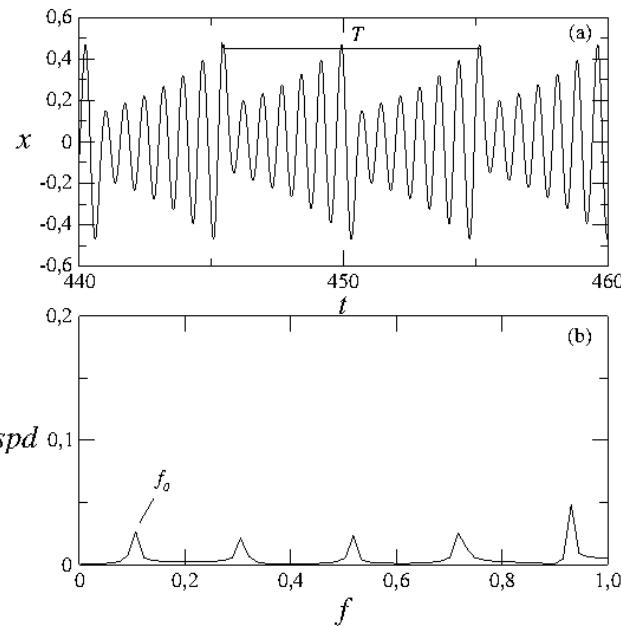


Figura 3.17: (a) A evolução temporal da variável  $x$  do sistema de Chua não forçado para  $\alpha = 40, 303$  e  $\beta = 84, 153$ , ou seja, do ponto  $R$  da estrutura de período 13 da Fig. 3.13. (b) A distribuição de potência espectral correspondente (spd).

4, 0 ( $25/2\pi$ ), o efeito do forçamento é nulo.

Para o sistema de Chua verificamos também a existência de regiões hipercaóticas. Na Fig. 3.18 mostramos o plano de parâmetro  $(\omega, d)$  do sistema de Chua caótico forçado para  $\alpha = 37, 5$  e  $\beta = 50, 0$ . As Figs. 3.18(a) e 3.18(b) consideram o maior expoente de Lyapunov e o segundo maior expoente de Lyapunov, respectivamente. Assim, as regiões pintadas em amarelo na Fig. 3.18(b) estão relacionadas aos estados hipercaóticos, uma vez que estas regiões são subconjuntos da região pintada em amarelo-vermelho em Fig. 3.18(a).

Por fim, o estudo da dinâmica do sistema de Chua foi o último caso em que estudamos o efeito do forçamento senoidal externo nos regimes periódico e caótico. Através de planos de parâmetro podemos observar que não apenas estados periódicos do sistema de Chua foram transformados em estados caóticos, mas também estados caóticos foram transformados em es-

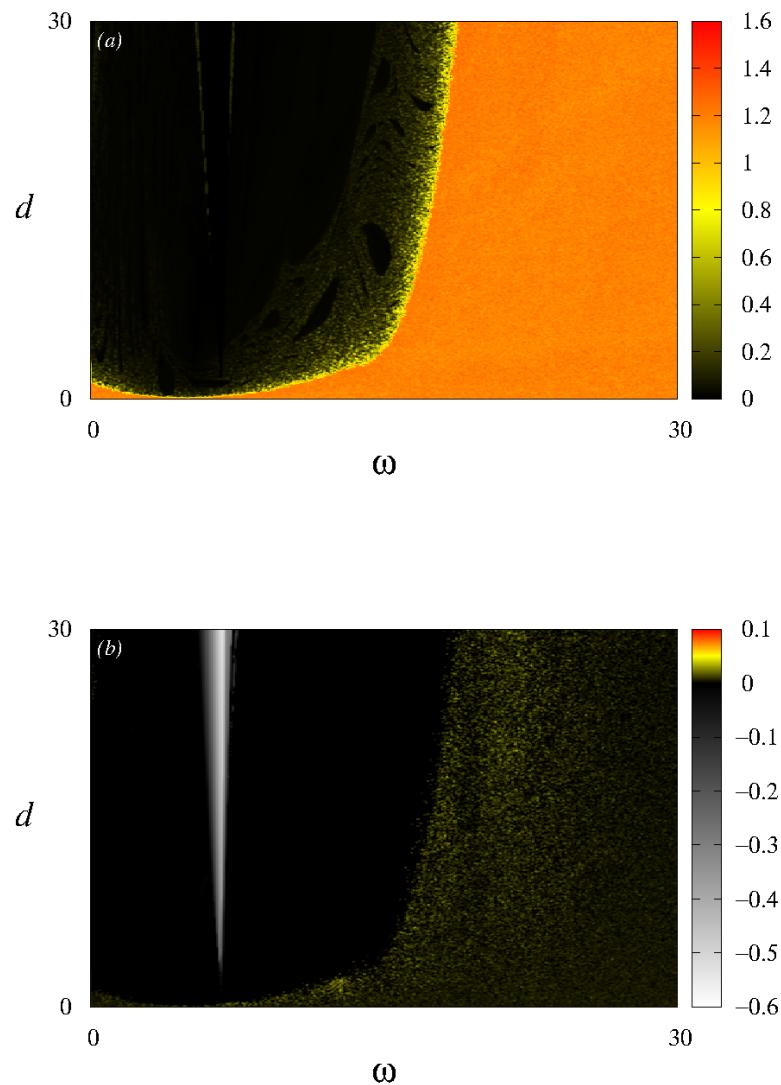


Figura 3.18: Plano de parâmetro do sistema (2.4), para  $\alpha = 37,5$  e  $\beta = 50,0$ , correspondem ao sistema de Chua caótico forçado. As cores nos painéis estão associadas com a magnitude do maior expoente de Lyapunov em (a), e para o segundo maior expoente de Lyapunov.

tados periódicos. Assim, para valores adequados dos parâmetros de controle do forçamento externo, e dependendo da natureza do estado (periódico ou caótico) do sistema de Chua, um estado final periódico ou caótico pode ser alcançado para o sistema forçado.

# Capítulo 4

## Conclusões

Neste trabalho investigamos o efeito do forçamento senoidal externo, sobre a dinâmica de alguns fluxos, sendo eles, um sistema tipo Lorenz, um sistema de Rössler e um sistema de Chua. Os sistemas utilizados são modelados por um conjunto de três equações diferenciais autônomas, de primeira ordem e não lineares. Um dos objetivos desse trabalho consiste em investigar as transições de ordem-caos nesses modelos, manifestados pela destruição de janelas de periodicidade imersas em regiões caóticas, quando a amplitude  $d$  do forçamento varia. Para a análise da dinâmica dos sistemas, geramos planos de parâmetros variando sempre a amplitude e mantendo fixa a frequência angular do forçamento. Dessa forma, construímos diagramas de bifurcação para distinguir o período das estruturas periódicas dos planos de parâmetros nos sistemas não forçados. Para verificarmos a influência do forçamento externo, construímos algumas trajetórias do espaço de fase para cada sistema, mostrando assim a evolução de um atrator periódico do sistema não forçado quando a amplitude  $d$  aumenta a partir do zero. Um outro objetivo dessa pesquisa baseia-se em analisar as transições de ordem-caos e caos-ordem nos modelos mencionados, ou seja, sobre a influência do forçamento externo caos ou periodicidade nos sistemas não forçados podem ser destruídos quando a amplitude  $d$  e a frequência angular  $\omega$  variar simultaneamente. Assim, geramos planos de parâmetros variando ambos os parâmetros de controle do forçamento ( $d$  e  $\omega$ ). E analisamos a evolução temporal de algumas variáveis e a distribuição de frequência dos sistemas não forçados. Além disso, com a adição do forçamento senoidal vimos que podem aparecer regiões hipercaóticas nos sistemas estudados.

Os resultados numéricos foram alcançados, essencialmente, por meio de planos de parâmetros, diagramas de bifurcação e atratores. Os planos de parâmetros foram obtidos por meio do cálculo do maior expoente de Lyapunov, em uma malha de  $500 \times 500$  pontos equidistantes para cada par de parâmetros. O integrador empregado foi o Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo de integração igual a  $10^{-3}$ , e foram considerados  $5 \times 10^5$  passos para computar o maior expoente de Lyapunov. As condições iniciais para  $(x_0, y_0, z_0, v_0)$  foram estabelecidas para cada sistema, e para cada incremento do valor dos parâmetros usamos o último valor de  $(x, y, z, v)$  como novas condições iniciais para determinar o próximo expoente de Lyapunov. Para a construção dos diagramas de bifurcação dividimos o eixo do parâmetro de interesse em  $10^3$  intervalos iguais e plotamos 50 pontos para cada valor desse parâmetro. As trajetórias do espaço de fase foram construídas utilizando o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo igual a  $10^{-3}$ , considerando  $5 \times 10^5$  passos, dos quais foram plotados os últimos 65000 pontos.

Os planos de parâmetros apresentados no Cap. 2, mostram a existência de regiões caóticas e também de estruturas periódicas quando o valor da amplitude  $d$  é igual a zero. Quando  $d$  é aumentado, as figuras dos planos de parâmetro começam a mudar com a ação da perturbação senoidal, que atua como um agente capaz de fazer acontecer uma transição de ordem-caos nos sistemas. E para verificarmos a influência do forçamento senoidal sobre um atrator periódico de cada sistema foram construídos trajetórias do espaço de fase. De acordo com os resultados obtidos o forçamento eliminou o atrator periódico, sendo este substituído por um atrator caótico.

No Cap. 3, os planos de parâmetros confirmam mais uma vez que o forçamento senoidal externo pode produzir transições de caos-ordem ou ordem-caos, ou seja, sobre a influência do forçamento externo caos ou periodicidade em sistemas originais podem ser destruídos. Quando a amplitude  $d$  é aumentada a partir do zero, independente de qualquer valor da frequência angular  $\omega$ , o efeito do forçamento (mudanças do estado periódico para o estado caótico ou vice-versa) começa a ser notado persistindo até um determinado valor para  $\omega$ . A partir desse valor  $\omega$  o efeito do forçamento não é mais notado, e o sistema retorna ao estado original. Outro fato observado é o aparecimento de regiões hipercaóticas nos sistemas estudados. Como é conhecido,

um sistema hipercaótico é caracterizado como um sistema caótico com mais de um expoente de Lyapunov positivo.

Como conclusão da aplicação de um forçamento senoidal externo para sistemas dinâmicos não lineares de alguns modelos obtivemos um sucesso nos resultados numéricos. Os resultados indicam que sobre a influência do forçamento externo, destruição de periodicidade e caos em determinadas regiões dos planos de parâmetros podem ser alcançadas. De fato, o forçamento externo é um método viável para manipular sistemas dinâmicos não lineares, conduzindo a destruição de periodicidade ou caos, assim, aumentando ou diminuindo a complexidade do sistema não forçado. Neste trabalho foram estudados três sistemas, o sistema tipo Lorenz, o Rössler e o Chua, mas presumimos que o comportamento observado nos sistemas forçados pode ser comum a todos os outros sistemas modelados por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias autônomas não lineares de primeira ordem. Como possíveis propostas de trabalhos futuros, pode-se investigar a dinâmica desses mesmos sistemas considerando agora o atraso no tempo, que é assiduamente constatado em vários sistemas práticos, como na biologia, em processos químicos, e na engenharia.

Os resultados numéricos apresentados no Cap. 2 foram publicados em **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 22, p. 043147, 2012. "Periodicity suppression in continuous-time dynamical systems by external forcing". E parte dos resultados mostrados no Cap. 3 estão disponíveis no periódico **Chinese Physics Letters**, v. 30, n. 3, p. 030502, 2013. "Changes in the Dynamics of a Rössler Oscillator by an External Forcing".

# Referências

- [1] ALVES MONTEIRO, L. H. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [2] ANDO, H., et al. Chaotic phase synchronization in bursting-neuron models driven by a weak periodic force. **Physical Review E**, v. 86, p. 016205, 2012.
- [3] ANTONSEN JR, T. M., et al. External periodic driving of large systems of globally coupled phase oscillators. **Chaos**, v. 18, p. 037112, 2008.
- [4] ARAI, K.; YOSHIMURA, K.; MIZUTANI, S. Dynamical origin of deterministic stochastic resonance. **Physical Review E**, v. 65, p. 015202, 2001.
- [5] ATSUMI, Y.; NAKAO, H. Persistent fluctuations in synchronization rate in globally coupled oscillators with periodic external forcing. **Physical Review E**, v. 85, p. 056207, 2012.
- [6] BONDARENKO, V. E. High-dimensional chaotic neural network under external sinusoidal force. **Physics Letters A**, v. 236, p. 513, 1997.
- [7] CHILDS, L. M.; STROGATZ, S.H. Stability diagram for the forced Kuramoto model. **Chaos**, v. 18, p. 043128, 2008.
- [8] CHUA, L. O. Chua's Circuit: An Overview Ten Years Later. **Journal of Circuits, Systems and Computers**, v. 4, p. 117, 1994.
- [9] CORREIA, M. J.; RECH, P. C. Hyperchaotic states in the parameter-space. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, p. 6711, 2011.
- [10] D'AMORE CARDOSO, J. C. Estudo Numérico da Dinâmica de Osciladores Forçados no Espaço de Parâmetros. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2012. Dissertação de Mestrado.

[11] DANA, S. K. et al. Taming of chaos and synchronisation in RCL-shunted Josephson junctions by external forcing. **IEEE Proceedings - Circuits, Devices and Systems**, v. 153, p. 453, 2006.

[12] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, v. 57, p. 617, 1985.

[13] FERRARA, N.; PRADO, C. **Caos: Uma Introdução**. São Paulo: Edgard Blöcher Ltda, 1995.

[14] HUANG, A. et al. Chua's Equation with Cubic Nonlinearity. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 6, p. 2175, 1996.

[15] LAUGESEN, J. L.; MOSEKILDE, E.; ZHUSUBALIYEV, Z. Bifurcation structure of the CC-type period-doubling transition. **Physica D**, v. 241, p. 488, 2012.

[16] LORENZ, N. Deterministic Nonperiodic Flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130, 1963.

[17] MURALI, K.; LAKSHMANAN, M. Effect of sinusoidal excitation on the Chua's circuit. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 39, p. 264, 1992.

[18] PARMANANDA, P. et al. Controlling complexity using forcing: simulations and experiments. **Applied Mathematics and Computation**, v. 164, p. 467, 2005.

[19] PARMANANDA, P.; RIVERA, M.; MADRIGAL, R. Altering oscillatory dynamics of an electrochemical system using external forcing **Electrochimica Acta**, v. 44, p. 4677, 1999.

[20] PUJOL PERÉ, A. et al. Experimental study of imperfect phase synchronization in the forced Lorenz system. **Chaos**, v. 13, p. 319, 2003.

[21] RECH, P. C. Chaos and hyperchaos in a Hopfield neural network. **Neurocomputing**, v. 74, p. 3361, 2011.

[22] RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, p. 397, 1976.

[23] STEGEMANN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Some two-dimensional parameter spaces of a Chua system with cubic nonlinearity. **Chaos**, v. 20, p. 023103, 2010.

[24] STONE, E. F. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. **Physics Letters A**, v. 163, p. 367, 1992.

[25] SUN, K. et al. Hyperchaos and hyperchaos control of the sinusoidally forced simplified Lorenz system. **Nonlinear Dynamics**, v. 69, p. 1383, 2012.

[26] TESTONI, G. E.; RECH, P. C. Dynamics of a Particular Lorenz Type System. **International Journal of Modern Physics C**, v. 21, p. 973, 2010.

[27] XU, L. et al. Resonance drifts of spiral waves on media of periodic excitability. **Physical Review E**, v. 85, p. 046216, 2012.

[28] ZHUSUBALIYEV, Z. T.; LAUGESEN, J. L.; MOSEKILDE, E. From multi-layered resonance tori to period-doubled ergodic tori. **Physics Letters A**, v. 374, p. 2534, 2010.