

Neste trabalho apresentaram-se os resultados obtidos da investigação da dinâmica do mapa padrão nas formas; conservativa, dissipativa e dissipativa relativística, através de uma abordagem numérica e analítica para o último caso. Para os três casos supracitados, construíram-se e inspecionaram-se os respectivos espaços de fases, espaços de parâmetros e espaços de parâmetros dos períodos, pelos quais constatou-se a coexistência de domínios caóticos e periódicos. Caracterizou-se e discutiu-se ainda a influência dos parâmetros responsáveis pelo amortecimento ou dissipação e por uma componente relativística na dinâmica de uma partícula submetida a pulsos periódicos, assim como a influência do parâmetro responsável pelo ruído no sistema. Os resultados evidenciaram a existência de estruturas periódicas que se organizam do menor para o maior período imersas em regiões caóticas. Finalmente, mostrou-se que as estruturas auto similares foram gradativamente perturbadas pelo ruído, assim como as regiões menos estáveis, também foram atingidas e posteriormente são totalmente destruídas e substituídas por uma estrutura caótica.

Orientador: César Manchein

Coorientador: Holokx Abreu Albuquerque

Joinville, 2014

ANO
2014

ANA CAROLINA DA COSTA HORSTMANN | ESTUDO DA DINÂMICA DO MAPA
PADRÃO DISSIPATIVO RELATIVÍSTICO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTUDO DA DINÂMICA DO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO RELATIVÍSTICO

ANA CAROLINA DA COSTA HORSTMANN

JOINVILLE, 2014

ANA CAROLINA DA COSTA HORSTMANN

**ESTUDO DA DINÂMICA DO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO
RELATIVÍSTICO**

Dissertação apresentada para a
obtenção do título de Mestre em
Física da Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências
Tecnológicas – CCT.

Orientador: César Manchein, doutor.
Coorientador: Holokx Abreu
Albuquerque, doutor.

JOINVILLE

2014

H819e

Horstmann, Ana Carolina da Costa

Estudo da Dinâmica do Mapa Padrão Dissipativo Relativístico / Ana Carolina da Costa Horstmann. - 2014.

77 p. : il. ; 21 cm

Orientador: César Manchein

Coorientador: Holokx Abreu Albuquerque

Bibliografia: p. 75-77.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2014

1. Caos. 2. Dinâmica Não-Linear. 3. Sistemas Dinâmicos. 4. Espaço de fases. 5. Planos de Parâmetro I. Manchein, César. II. Albuquerque, Holokx Abreu. III. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título

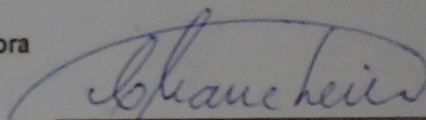
CDD 531.1 - 20.ed.

ANA CAROLINA DA COSTA HORSTMAN
ESTUDO DA DINÂMICA DO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO
RELATIVISTICO

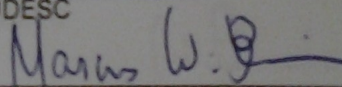
Dissertação apresentada ao Curso de Programa de Pós-Graduação em Física como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração "Física".

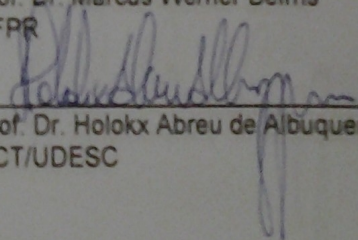
Banca Examinadora

Orientador:


Prof. Dr. César Manchein
CCT/UDESC

Membros


Prof. Dr. Marcus Werner Beims
UFPR


Prof. Dr. Holokx Abreu de Albuquerque
CCT/UDESC

Aos meus pais, ao meu marido e
aos meus dois filhos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, que iluminou o meu caminho durante esta caminhada. Agradeço também ao meu esposo, Robson Luiz Horstmann, que de forma especial e carinhosa me deu forças, incentivo, confiança durante toda nossa convivência e em especial neste período de dedicação ao mestrado. Agradeço aos meus filhos Jonathan e David, que embora não tivessem conhecimento disto, mas iluminaram de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

Agradeço com carinho aos meus pais, pelo exemplo de vida, todo carinho, amor, abnegação e cuidados que contribuíram não apenas a minha formação como cidadã, mas também na minha formação acadêmica. Também a minha irmã pelos momentos de descontração na intenção de me divertir nas horas de cansaço.

Obrigada aos professores do mestrado e ao Grupo de Dinâmica Não-Linear que auxiliaram na minha formação acadêmica e pessoal. Em especial ao meu orientador, professor César Manchein, por toda ajuda, pela confiança, compreensão e por todo conhecimento transmitido a mim neste período e principalmente por incentivar minhas ideias, acreditar nelas, o que acabou por culminar na realização desta dissertação. Agradeço da mesma forma ao meu coorientador professor Holokx Abreu Albuquerque, pelo apoio, conhecimento transmitido e conselhos.

Agradeço aos amigos e colegas do mestrado, em especial a Amanda e Karla, pelo apoio, pelos ensinamentos e bom humor, principalmente nos momentos mais difíceis.

E por fim, agradeço a agência financiadora Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa de estudos.

“A educação é a arma mais poderosa
que você pode usar para mudar o
mundo.” (Nelson Mandela)

RESUMO

HORSTMANN, Ana Carolina da Costa. **Estudo da Dinâmica do Mapa Padrão Dissipativo Relativístico**. 2014. 77 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Física – Área: Dinâmica não-linear) – Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-graduação em Física, Joinville, 2014.

Neste trabalho apresentaram-se os resultados obtidos da investigação da dinâmica do mapa padrão nas formas; conservativa, dissipativa e dissipativa relativística, através de uma abordagem numérica e analítica para o último caso. Para os três casos supracitados, construíram-se e inspecionaram-se os respectivos espaços de fases, espaços de parâmetros e espaços de períodos, pelos quais constatou-se a coexistência de domínios caóticos e periódicos. Caracterizou-se e discutiu-se ainda a influência dos parâmetros responsáveis pelo amortecimento ou dissipação e por uma componente relativística na dinâmica de uma partícula submetida a pulsos periódicos, assim como a influência do parâmetro responsável pelo ruído no sistema. Os resultados evidenciaram a existência de estruturas periódicas que se organizam do menor para o maior período imersas em regiões caóticas. Finalmente, mostrou-se que as estruturas auto similares foram gradativamente perturbadas pelo ruído, assim como as regiões menos estáveis onde há bifurcações, também foram atingidas e posteriormente são totalmente destruídas e substituídas por uma estrutura caótica.

Palavras-chave: Espaço de fases. Dinâmica caótica. Mapa padrão.

ABSTRACT

HORSTMANN, Ana Carolina da Costa. **Study on Dynamics of Relativistic Dissipative Standard Map**. 2014. 77 p. Dissertation (MSc in Physics Academic – Area: Nonlinear dynamics) – University of the State of Santa Catarina. Graduate Program in Physics , Joinville, 2014.

In this work/study, have showed the results of the investigation about dynamics standard map in the forms; conservative, dissipative and dissipative relativistic, through a numerical and analytical approach for the last case. For the three abovementioned cases, have been build and inspected the respective phase spaces, parameter spaces and spaces of periods, by which has been found the coexistence of chaotic and periodic domains. It has still been characterized and discussed the influence of the parameters responsables for the dissipation and damping or by a relativistic component in the dynamics of a particle subjected to periodic pulses, as well as the influence of the parameter responsible for noise in the system. The results showed the existence of periodic structures that are organized from the smallest to highest period immersed in chaotic regions. Finally, it has showed that the self-similar structures were gradually disturbed by the noise, as well as the less stable regions, where there are bifurcations, even were hit and porteriormente are totally destroyed and replaced by a chaotic structure.

Keywords: Phase space. Chaotic dynamics. Standard map.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
2	O MAPA PADRÃO.....	21
2.1	O MAPA PADRÃO CONSERVATIVO.....	21
2.2	O MAPA PADRÃO DISSIPATIVO (MPD).....	26
2.3	O MAPA PADRÃO DISSIPATIVO RELATIVÍSTICO (MPDR).....	31
2.4	INFLUÊNCIA DE γ NAS BACIAS DO MPDR.....	37
3	MEDIDA DA CAOTICIDADE.....	41
3.1	ESTUDO ANALÍTICO DO MPDR.....	41
3.2	ESTUDO NUMÉRICO DO MPDR.....	47
3.2.1	ESPAÇO DE PARÂMETROS PARA O EXPOENTE DE LYAPUNOV.....	47
3.2.2	ESPAÇOS DE PARÂMETROS DOS PERÍODOS.....	48
3.2.3	RESULTADOS PARA $(K \times \beta)$	49
3.2.4	RESULTADOS PARA $(K \times \gamma)$	56
3.2.5	RESULTADOS PARA $(\gamma \times \beta)$	61
4	EFEITO DA TEMPERATURA NA DINÂMICA DO MPDR	65
5	CONCLUSÃO.....	72
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

1 INTRODUÇÃO

Um dos primeiros trabalhos sobre o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos foi realizado pelo matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), que revitalizou o modo de se lidar com equações diferenciais não-lineares. Até o século XIX buscava-se por fórmulas que permitissem realizar previsões precisas, através da integração analítica da equações. Poincaré percebeu que as propriedades qualitativas das soluções poderiam ser investigadas, sem que tais soluções precisassem ser determinadas explicitamente. Assim em vez de procurar por fórmulas, ele partiu de uma abordagem qualitativa, utilizando técnicas geométricas (Monteiro, 2002).

Henri Poincaré provavelmente foi o primeiro a vislumbrar a existência de caos no problema dos três corpos. Neste problema, três corpos, considerados como massas pontuais, sendo a massa de um corpo muito menor que a dos outros dois, ou seja, $M_1 \sim M_2 \gg m$ (por exemplo, o sistema Sol-Terra-Lua), de modo que os efeitos do corpo de massa m sobre os corpos de massa M_1 e M_2 possam ser desprezados. Portanto, os movimentos dos dois corpos mais massivos não são significativamente influenciados pela presença do terceiro corpo, mas o movimento de m é afetado pelos movimentos de M_1 e de M_2 . Assim, analiticamente os movimentos de M_1 e M_2 são calculados e determinados pelo campo gravitacional resultante e, subsequentemente, é calculado o movimento do corpo de massa m , sujeito a esse campo gravitacional dependente do tempo (Monteiro, 2002).

Naquela época não houveram estudos significativos no campo da dinâmica não-linear, até porque as equações utilizadas para modelar alguns sistemas em questão eram muito complexas e normalmente não tinham soluções analíticas. Porém, com o avanço da tecnologia, o matemático americano Edward Norton Lorenz (1917-2008) realizou aplicações dos estudos de Poincaré, sendo um dos precursores da *Teoria do Caos*. Em meados dos anos 60, Lorenz com a finalidade de estudar o problema da previsão meteorológica para tempos longos, selecionou um sistema de equações diferenciais não-lineares associadas a processos físicos envolvendo convecção térmica bidimensional (Ferrara, 1995), e o resolveu, obtendo assim, uma solução numérica para os fenômenos meteorológicos.

A dinâmica não-linear tem se consolidado, nesses últimos anos, como uma importante área da física no que se relaciona as previsões futuras nas mais variadas áreas: Biologia, Medicina, Economia, Física,

Matemática, Engenharia dentre outras. Em outras palavras, a dinâmica não-linear tornou-se bastante eficaz para prever a evolução de fenômenos naturais.

Um sistema dinâmico determinístico é composto por um conjunto de estados possíveis, aos quais são regidos por uma regra ou lei que determina o estado atual do sistema, exclusivamente em termos do estado passado (Alligood, 1996). Um sistema dinâmico pode ser representado por um conjunto de equações que define a evolução do sistema conforme o tempo passa. O tempo pode tanto ser uma variável contínua, quanto uma variável discreta. Um exemplo de sistema dinâmico no qual o tempo t é uma variável contínua, também chamado de fluxo, é um sistema de n equações diferenciais ordinárias, autônomas que podem ser representadas pelas equações

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}),$$

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}),$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx^{(n)}}{dt} = F_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}),$$

enquanto que um sistema discreto, conhecido também como mapa, pode ser escrito como

$$x_{t+1}^{(1)} = M_1(x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}),$$

$$x_{t+1}^{(2)} = M_2(x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}),$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_{t+1}^{(n)} = M_n(x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}),$$

neste caso o tempo assume valores inteiros, ou seja, $t = 0, 1, 2, \dots$. Dado um estado inicial $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)})$, obtemos o estado em $t = 1$ por fazer $\vec{x}_1 = \vec{M}(\vec{x}_0)$, agora escrito na forma vetorial. Tendo determinado \vec{x}_1 podemos determinar \vec{x}_2 e assim sucessivamente.

O estudo realizado neste trabalho consiste em utilizar um sistema dinâmico bidimensional autônomo a tempo discreto, o mapa padrão (Lichtenberg e Lieberman, 1992) que foi um sistema originalmente proposto por Chirikov, (1969). Classicamente ele é um modelo que descreve uma partícula movendo-se livremente sobre um círculo sujeita a uma perturbação periódica com intensidade K . Dependendo do valor do parâmetro K , o regime de movimento pode ser regular ou caótico. Os artigos de Chirikov publicados em 1969 e em 1979, referentes ao mapa padrão, têm sido citados nos últimos anos (Ciubotariu *et al.*, 2002; Lan e Yapp, 2008; Martins e Gallas, 2008; Celestino *et al.*, 2011; Oliveira *et al.*, 2011; Oliveira *et al.*, 2012; Manchein e Beims, 2013; Celestino *et al.*, 2014), pois a dinâmica do seu espaço de fases é muito rica em informações e seus resultados podem ser estendidos a outros modelos.

Assim, esta pesquisa visa essencialmente aplicar as ferramentas da Dinâmica Não-Linear no estudo do comportamento de sistemas de equações que regem o mapa padrão. Sendo assim, iniciamos a nossa investigação analisando o espaço de fases do mapa padrão para os regimes conservativo, dissipativo e ainda dissipativo relativístico. O espaço de fases, ou espaço de estados, consiste do espaço matemático formado pelas variáveis de estado do sistema. Desta maneira, especificar um estado do sistema equivale a localizar um ponto neste espaço. Contudo, depois de uma evolução temporal do sistema, os caminhos descritos por ele no espaço de fases chamamos de órbitas ou trajetória. Os espaços de fases construídos neste trabalho têm o propósito de compreender melhor o modelo proposto e o comportamento das soluções numéricas para um conjunto de parâmetros do sistema de equações que descrevem o mapa padrão, com o objetivo de estudar a dinâmica e complementar os estudos que já existem sobre esse sistema.

Para analisarmos a mudança na dinâmica dos sistemas e averiguar transições de ordem-caos e caos-ordem nos modelos, foram construídos, além dos espaços de fases, os espaços de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e os espaços de parâmetros dos períodos. Definimos, espaços de parâmetros como sendo um gráfico tridimensional, que representa bidimensionalmente a variação de quaisquer dois parâmetros que compõem o sistema, associados à um terceiro valor de interesse, como por exemplo, a magnitude do maior expoente de Lyapunov. Por outro lado, o espaço de parâmetros dos períodos é obtido através da variação de dois parâmetros do sistema e representando os períodos da estruturas periódicas ou não presentes no

intervalo de parâmetros escolhido.

Nos espaços de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e os espaços de parâmetros dos períodos, construídos para o mapa padrão dissipativo relativístico, pretendemos encontrar estruturas periódicas se organizam do menor para o maior período, imersas em regiões caóticas. E ainda, nos espaços de parâmetros construídos para o mapa padrão dissipativo relativístico com a adição de ruídos, esperamos descrever tais perturbações causadas pelo mesmo, havendo assim, a destruição de regiões estáveis e a proliferação do caos pelos espaços de parâmetros. Por fim, nos espaços de parâmetros dos períodos podemos observar o comportamento das bifurcações, compreender como se comportam as estruturas periódicas e se há adição de períodos no sistema estudado.

As simulações numéricas, para a construção dos espaços de fase, espaços de parâmetros para o expoente de Lyapunov e espaços de parâmetros dos períodos, foram computadas com linguagem de programação FORTRAN, em ambiente Linux. As figuras construídas foram executadas com o auxílio do programa Gnuplot.

Desta forma, esta dissertação essencialmente visa aplicar as ferramentas da Dinâmica Não-Linear no estudo do comportamento de sistemas de equações para o mapa padrão dissipativo relativístico. Portanto, organizamos esta dissertação da seguinte maneira: no Capítulo 1 temos a introdução deste trabalho, na qual apresentamos uma breve revisão histórica dos sistemas dinâmicos, no que consistem e uma sucinta definição. Também apresentamos alguns artigos que fazem referências ao sistema aqui estudado. No Capítulo 2, apresentamos o modelo proposto, o mapa padrão, para os três regimes: conservativo, dissipativo e dissipativo relativístico, onde faremos uma discussão sobre a estabilidade do sistema, no Capítulo 3 faremos uma medida da caoticidade do mapa padrão dissipativo relativístico através dos resultados analíticos e numéricos do sistema. No Capítulo 4, apresentamos a medida da caoticidade do mapa padrão dissipativo relativístico mediante a presença de ruído branco ou gaussiano, através dos resultados numéricos do sistema, e no quinto e último Capítulo apresentaremos a conclusão, onde expomos as discussões dos resultados e as considerações finais da pesquisa.

2 O MAPA PADRÃO

Neste Capítulo apresentaremos os resultados do estudo da dinâmica do mapa padrão, nos regimes conservativo, dissipativo e ainda dissipativo relativístico, através de uma abordagem analítica e principalmente numérica. Para estes três regimes, foram construídos os respectivos espaços de fases para analisarmos a existência, organização e eventualmente a coexistência de domínios caóticos e periódicos.

Nesta etapa investigamos a influência do termo relativístico na dinâmica do mapa padrão dissipativo relativístico e analisamos a forma como a dissipação altera a estrutura do espaço de fases. Além disso, caracterizamos a influência da dissipação no tamanho e configurações das bacias de atração de determinados conjuntos de parâmetros.

2.1 O MAPA PADRÃO CONSERVATIVO

Desde os trabalhos pioneiros de Chirikov, (1969; 1979), quando propôs o mapa padrão, que descreve a dinâmica do rotor pulsado (ou quicado), vários trabalhos têm sido publicados na teoria dos sistemas Hamiltonianos conservativos. A principal vantagem em se estudar o mapa padrão de Chirikov, está na riqueza de informações a respeito da dinâmica apresentada em seu espaço de fases, que podem ser estendidas a outros modelos. Tal motivo faz com que ele seja um dos modelos mais estudados da literatura relacionada, pois ele pode ser aplicado em diferentes campos de Física, conforme pode ser constatado nas referências (Lichtenberg e Lieberman, 1992; Ciubotariu *et al.*, 2002; Lan e Yapp, 2008; Martins e Gallas, 2008; Celestino *et al.*, 2011; Oliveira *et al.*, 2011; Oliveira *et al.*, 2012; Manchein e Beims, 2013; Celestino *et al.*, 2014), entre várias outras. Em outras palavras, este mapa pode ser usado para modelar o comportamento de vários sistemas físicos, como por exemplo: o rotor pulsado, o pêndulo forçado, uma partícula em um campo eletromagnético e o confinamento de plasma em tokamaks. Podemos ressaltar ainda que um fator comum em todos os problemas supracitados refere-se a importância da compreensão das principais propriedades inerentes à dinâmica dos mesmos.

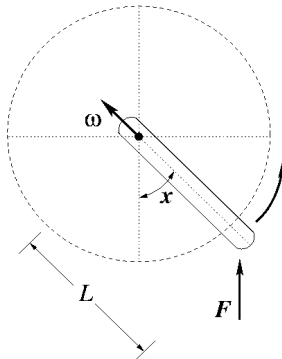
Conforme citado no parágrafo anterior, o mapa padrão pode ser obtido através do rotor pulsado, composto por uma haste (ou barra rígida), fixada em uma das extremidades por um pino, em torno do qual ela rotaciona e cujo movimento pode ser descrito em termos do momento e da posição angulares. O rotor pulsado vem sendo estudado por mais de 40 anos (Chirikov, 1969), devido essencialmente à

possibilidade que existe em se estudar propriedades fundamentais referentes a dinâmica de sistemas cuja energia é uma quantidade conservada. A dinâmica deste tipo de sistemas ainda não está totalmente compreendida, e assim, almeja-se entender e reconhecer padrões, estruturas e comportamentos em seu espaço de fases.

Neste trabalho temos como principais objetivos estudar a dinâmica do mapa padrão, em três diferentes versões: (i) conservativa (quando a energia mecânica do sistema é uma quantidade conservada); (ii) dissipativa (quando energia mecânica for dissipada no tempo) e (iii) o mapa padrão dissipativo relativístico (que modela uma partícula que pode apresentar velocidades relativamente altas) quando adicionada uma certa quantidade de dissipação. Para tanto, analisaremos os espaços de fases, de forma sistemática, a medida que aumentamos o valor do parâmetro que controla a dissipação em cada sistema. Neste cenário, esperamos que a dissipação altere bruscamente a dinâmica do regime em questão, especialmente com o surgimento de atratores no espaço de fases, conforme observado previamente por Martins e Gallas (2008) e suas referências.

Inicialmente apresentaremos uma breve dedução do mapa padrão a partir do rotor pulsado que é essencialmente composto por uma barra rígida de comprimento L e momento de inércia I , sendo uma das extremidades fixada por um pino sem atrito. Essa barra rotaciona em torno do pino, sem a influência da gravidade, com frequência constante ao mesmo tempo em que recebe pulsos (ou quiques) periódicos de intensidade K/L e período τ , sendo K o valor da amplitude do forçamento externo. A representação gráfica do rotor pulsado pode ser vista na Fig. 2.1.

Figura 2.1: Representação esquemática do Rotor Pulsado.



Fonte: A autora, com base em Woellner (2006).

A função Hamiltoniana que descreve a dinâmica do rotor pulsado é a seguinte (Fishman, 1989):

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2I} + K \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (1)$$

O primeiro termo da função Hamiltoniana representa a energia cinética e o segundo energia potencial do rotor pulsado. Sendo que p e x representam o momento e a posição angulares e $\delta(t - n\tau)$ é a função delta de Dirac. Assim, para $t = n\tau$, teremos $\delta(t - n\tau) = 1$ e o sistema encontra-se sob a influência da presença de uma força externa (pulso periódico). Se $t \neq n\tau$, teremos $\delta(t - n\tau) = 0$ e a força externa sobre o sistema será nula. As equações de movimento deste sistema são dadas pelas seguintes equações canônicas (Lemos, 2007) :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{I}, \quad (2)$$

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = K \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (3)$$

Para chegarmos ao mapa padrão, algumas considerações e mudanças de variáveis foram feitas, de acordo com Woellner, (2006), sendo que a partir daqui chamaremos de y a variável relacionada ao momento angular p das equações de movimento acima (2) e (3). Deste modo, pode-se obter então o seguinte mapa (Lichtenberg e Lieberman, 1992):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad (\text{mod } 1), \quad (4)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \quad (\text{mod } 1). \quad (5)$$

sendo x e y a coordenada espacial e o momento canonicamente conjugado, respectivamente, n a variável temporal discreta e K o parâmetro de não-linearidade, responsável pelo nascimento da dinâmica caótica (Manchein e Beims, 2013).

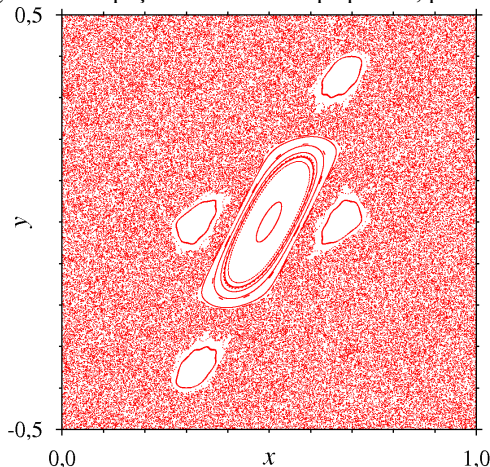
Iniciamos o estudo numérico da dinâmica do mapa padrão, apresentando na Fig. 2.2 o seu espaço de fases para $K=2,5$; construído com 100 condições iniciais (CIs), escolhidas aleatoriamente, no domínio

$(x_0, y_0)=[0,0 ; 1,0] \times [-0,5 ; 0,5]$ e iteradas até $n=1000$. As CIs foram escolhidas de forma aleatória, com o objetivo de respondermos a seguinte pergunta: como se organizam os domínios de dinâmica regular imersos no mar caótico para um valor típico de K ? Pode-se encontrar informações detalhadas a respeito da influência do parâmetro K e dos regimes regulares e caóticos apresentados pelo mapa padrão em Manchein e Beims (2013). Em tal referência, os autores mostraram como ocorre o nascimento da dinâmica caótica, no mapa padrão, através de diagramas de bifurcações generalizados construídos utilizando-se os expoentes de Lyapunov a tempo-finito. Voltando a discussão da Fig. 2.2, ela poderia ser gerada para um número maior de iterações, porém a única diferença será o aumento no número de pontos no espaço de fases. Além disso, podemos visualizar a existência de domínios, cuja dinâmica é regular, chamados de *ilhas de regularidade* (Manchein e Beims, 2013), representadas por regiões brancas onde não há movimento caótico, imersos no mar de caos (hachuras pontilhadas). Em outras palavras, podemos observar uma região de caos e em torno do ponto fixo periódico em $(x, y)=(0,5 ; 0,0)$, chamado de *ressonância* (Lichtenberg e Lieberman, 1992). Em torno deste ponto existe uma considerável região de estabilidade formando a ilha primária cercada por outras quatro ilhas menores. Se iterarmos o mapa padrão por um intervalo de tempo maior, aumentando o número de pontos vermelhos no espaço de fases, podemos realizar ampliações das ilhas menores e perceber que existem várias outras ilhas cada vez menores em torno da ilha ampliada. Este padrão se repete indefinidamente, constituindo a característica autossimilar ou tipo-fractal, inerente aos sistemas deste tipo. As ilhas de regularidade são delimitadas por linhas, denominadas órbitas quase-periódicas (torus), em que a cada iterada o estado do sistema pode ser representado por um ponto muito próximo ao anterior, formando uma linha aparentemente contínua. Analisando o interior das ilhas formadas no espaço de fases, podemos notar que existem várias órbitas quase-periódicas: cada uma delas gerada a partir de um par de CIs de (x_0, y_0) . Se usássemos um conjunto maior de condições iniciais, o número de órbitas quase-periódicas seria ainda maior, e eventualmente, preencheria quase-completamente o interior da ilha principal. Em outras palavras, as regiões brancas localizadas próximo ao centro da ilha e ao redor dela, representam pontos em que nenhuma condição inicial foi escolhida.

Por outro lado, o papel da amplitude do forçamento, representado pelo parâmetro K , é de alterar o tamanho e quantidade de domínios de dinâmica regular (ilhas) e caótica (mar de caos). Este

parâmetro pode ser alterado desde zero até valores muito grandes. No limite de $K \rightarrow 0$ o espaço de fases do mapa padrão é repleto de órbitas periódicas e quase-periódicas, ou seja, o sistema não apresenta regimes caóticos no espaço de fases (Manchein e Beims, 2013).

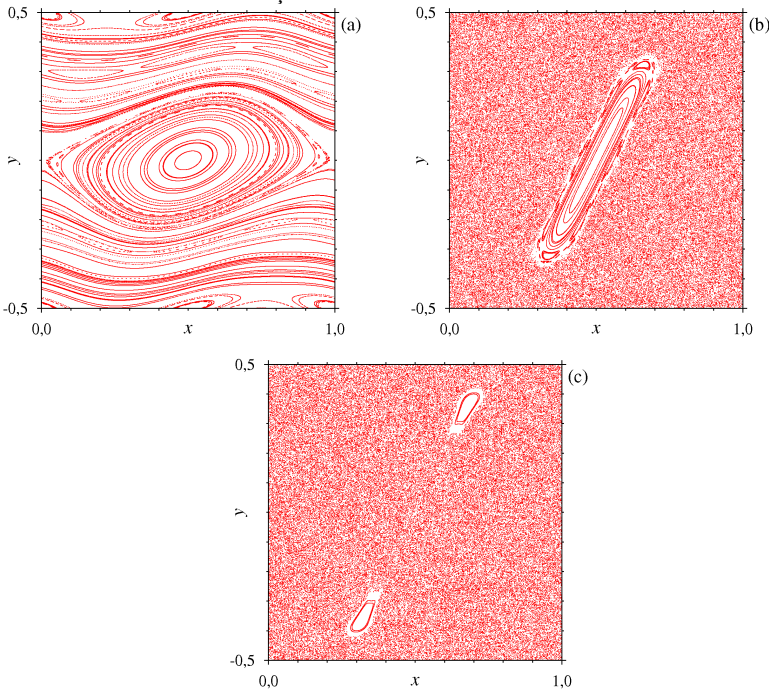
Figura 2.2: Espaço de fases do mapa padrão, para $K=2,5$.



Fonte: A autora.

Neste caso, para verificarmos a influência do parâmetro de não-linearidade na dinâmica do mapa padrão conservativo foram construídas três imagens (veja Fig. 2.3) para três valores diferentes de K . Podemos observar na Fig. 2.3(a), onde consideramos um forçamento relativamente pequeno ($K=0,5$), a existência de trajetórias quase-periódicas e a inexistência de domínios caóticos. Aumentando a amplitude da força externa, para $K=4$, na Fig. 2.3(b), vê-se a presença dominante do mar de caos e uma ilha de regularidade composta por trajetórias quase-periódicas, localizada no centro do espaço de fases. Na Fig. 2.3(c), para $K=5$, existe uma ilha que foi aparentemente “dividida” em duas ilhas menores, aumentando o tamanho do mar de caos. Portanto, conclui-se que, nestes três casos quanto maior for o valor de K “mais caótico” é o sistema. É importante ressaltar que, eventualmente pode-se escolher valores de K , em que o padrão detectado para estes três casos não exista.

Figura 2.3: Espaço de fases do mapa padrão, para (a) $K=0,5$; (b) $K=4$ e (c) $K=5$. As imagens foram geradas para 100 condições iniciais escolhidas aleatoriamente e 1000 iterações.



Fonte: A autora.

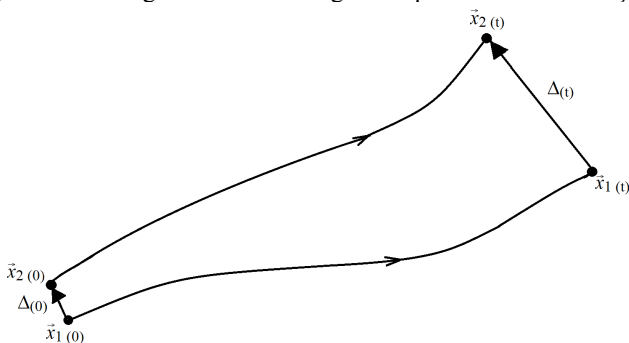
2.2 O MAPA PADRÃO DISSIPATIVO (MPD)

Geralmente em sistemas Físicos, existe pelo menos uma pequena quantidade de amortecimento ou dissipação. Por este motivo, é interessante considerarmos a existência de termos dissipativos em modelos – até então conservativos – utilizados para descrever problemas mais realísticos. Em sistemas dinâmicos conservativos, a energia inicial é exatamente igual a energia final do sistema, ou seja, não há perda de energia. Por outro lado, os sistemas dissipativos perdem energia, surgindo em seu espaço de fases os atratores. Atratores podem ser definidos como sendo um conjunto invariante de pontos para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. Assim, alguns espaços de fases podem ilustrar a existência de estrutura, que é denominado atratores e ainda, algumas bacias de atração, que é o

conjunto de todas as possíveis condições iniciais que convergem para o mesmo atrator. O que não é possível para sistemas conservativos, como consequência do teorema de Liouville (Ferrara, 1995), que afirma, que apesar da translação e a alteração de forma, o (hiper)-volume total desta região permanecerá invariante.

Uma característica fundamental de um sistema dinâmico cuja dinâmica é caótica, é a dependência sensível às escolhas das condições iniciais. Neste caso, duas órbitas inicialmente muito próximas, no espaço de fases, afastam-se exponencialmente uma da outra a medida que o sistema evolui no tempo, como esquematizado na Fig. 2.4.

Figura 2.4: Divergência das órbitas geradas por diferentes condições iniciais.



Fonte: A autora, com base em Ott (2000).

Assim, analisando a Fig. 2.4, pode-se observar que dois pontos quaisquer no espaço de fases, separados por uma distância $\Delta_{(0)}$, conforme iteramos o mapa, afastam-se exponencialmente um do outro, de forma que o valor final de seu afastamento corresponda a $\Delta_{(t)}$, que pode ser determinado através da seguinte relação:

$$\Delta_{(t)} = \Delta_{(0)} e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (6)$$

trocando as variáveis $\Delta_{(0)}$ por $d_j(t_0)$ e $\Delta_{(t)}$ por $d_j(t)$, temos

$$d_j(t) = d_j(t_0) e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (7)$$

onde os λ_j são chamados de expoentes de Lyapunov ou espectro de Lyapunov, com $j=1,2,3,\dots, N$, podem ser determinados por:

$$\lambda_j = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{(t-t_0)}. \quad (8)$$

Os expoentes de Lyapunov são utilizados para medir o afastamento de trajetórias, cujas condições iniciais foram escolhidas infinitesimalmente próximas, ou seja, quantificam a dependência sensível às condições iniciais (Ferrara, 1995). O expoente de Lyapunov é calculado numericamente, exceto quando a derivada de cada equação do sistema é constante e o expoente pode ser calculado algebricamente.

Para sistemas discretos dissipativos bidimensionais, o atrator é dito regular se o maior ou primeiro expoente de Lyapunov do espectro for menor do que zero, quando o maior expoente de Lyapunov for maior do que zero o atrator é caótico. Para esta classe de sistemas, a seguinte relação deve ser obedecida:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j < 0. \quad (9)$$

Por outro lado, no caso de mapas simpléticos ou Hamiltonianos, o espectro de Lyapunov, apresenta uma notável simetria conhecida na literatura científica como ‘regra dos pares’ (*pairing rule*) (Benettin, 1980). Esta simetria é uma consequência direta da estrutura simplética deste tipo de sistema. Ou seja, para um sistema com N graus de liberdade (neste caso com 2N expoentes de Lyapunov), o espectro de Lyapunov apresenta a seguinte forma

$$\lambda_j = -\lambda_j^{2N-j+1}, \quad (10)$$

o que implica em

$$\sum_{j=1}^{2N} \lambda_j = 0. \quad (11)$$

Deste modo, fica evidente que, nesta classe de sistemas, toda a informação que pode ser obtida através do espectro de Lyapunov está contida na metade dele.

Para estudarmos a influência da dissipação na dinâmica do mapa padrão, consideraremos a versão deste sistema estudado por Wenzel *et al.*, (1991). Neste trabalho, os autores apresentam resultados referentes

ao mapa padrão dissipativo, para o regime caótico e não-caótico, utilizando uma técnica numérica que permitiu-lhes encontrar órbitas periódicas estáveis e instáveis (Ciubotariu *et al.*, 2002).

Neste contexto, o rotor pulsado submetido a uma pequena quantidade de amortecimento representado pelo parâmetro γ pode ser descrito pelo seguinte mapa:

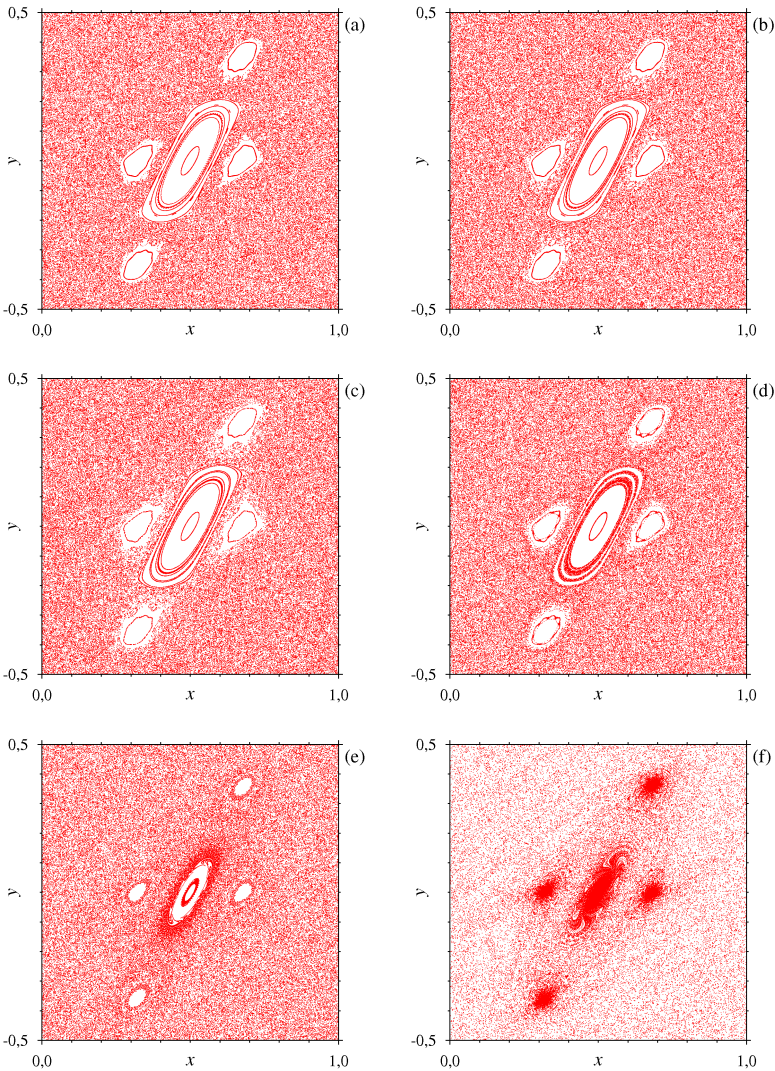
$$y_{n+1} = \gamma y_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) \pmod{1}, \quad (12)$$

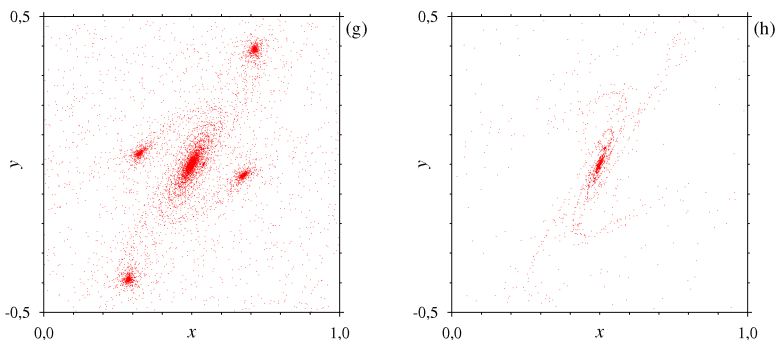
$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{1}, \quad (13)$$

em que x , y e K , têm o mesmo significado físico descrito nas Eqs. (4) e (5) e γ representa a dissipação que foi introduzida no sistema. Para $\gamma=1$, a energia do sistema é conservada e para $\gamma=0$, o sistema estará no limite super-dissipativo. O espaço de fases do mapa padrão dissipativo pode ser analisado na Fig. 2.5, mantendo fixo $K=2,5$.

A Fig. 2.5(a) representa o sistema no limite conservativo, ou seja, sem dissipação (compare com a Fig. 2.2). Nas imagens sequenciais aumentamos gradativamente a dissipação de $\gamma=0,999999$ na Fig. 2.5(b) até $\gamma=0,5$ na Fig. 2.5(h). Na Fig. 2.5(b) observa-se que as órbitas quase-periódicas estão mais espessas devido ao incremento do parâmetro γ com relação a Fig. 2.5(a). Nas Figs. 2.5(c-f), podemos constatar a quebra total das órbitas e a formação de atratores, ocorrendo uma brusca mudança estrutural do espaço de fases. Nas Fig. 2.5(g-h), o sistema evolui para os atratores, que agora estão bem definidos. Portanto concluímos que, a medida que a dissipação aumenta, as órbitas quase-periódicas são quebradas ocasionando o aparecimento de atratores no espaço de fases.

Figura 2.5: Espaço de fases do mapa padrão: (a) conservativo para $\gamma=1$; e dissipativo para (b) $\gamma=0,999999$; (c) $\gamma=0,99999$; (d) $\gamma=0,9999$; (e) $\gamma=0,999$; (f) $\gamma=0,99$; (g) $\gamma=0,9$; (h) $\gamma=0,5$. Todas as figuras foram geradas para $K=2,5$ e 100 condições iniciais escolhidas aleatoriamente e 1000 iterações.





Continuação Fig. 2.5. Fonte: A autora.

2.3 O MAPA PADRÃO DISSIPATIVO RELATIVÍSTICO (MPDR)

Nesta seção, analisamos o comportamento de uma partícula “relativística”, sob o efeito de dissipação. Tal partícula é denominada relativística, pois pode apresentar velocidades comparáveis a velocidade da luz no vácuo, porém inferiores. O é conhecido por mapa padrão dissipativo relativístico (MPDR) e pode ser obtido a partir de uma função Hamiltoniana, que descreve a dinâmica de um uma partícula relativística, que representa um pacote de ondas, conforme proposto inicialmente por Chernikov *et al.* (1989).

Consideramos então o problema de uma partícula em um pacote de onda sob a ação de um campo eléctrico. Neste problema podem existir casos em que o movimento da partícula é tal que as equações de Newton possam ser aplicadas, para velocidades baixas da partícula, ou ainda o caso em que a aceleração das partículas é suficientemente grande, tal que as equações de Newton não possam mais ser aplicadas e as equações relativísticas devam ser levadas em conta. O mapa padrão relativístico pode ser definido considerando-se uma partícula, que representa um pacote de ondas, em que o campo eléctrico $E(x,t)$ é descrito pela seguinte equação:

$$E(x, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E_i \sin(k_i x - \omega_i t), \quad (14)$$

sendo E_i a amplitude do número de componentes de Fourier da função de onda de campo eléctrico, k_i o número de onda, ω_i a frequência angular e i (onde, $i = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) o índice de cada onda.

Supondo que o pacote de ondas tem um espectro largo de tal forma que se possa dizer que $E_i=E_0$, $k_i=k_0$ e $\omega_i=i\omega$, conforme feito por Oliveira *et al.*, (2012), teremos:

$$E(x, t)=E_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \cos(i\omega t), \quad (15)$$

substituindo a decomposição do período de Fourier pela função delta de Dirac chegaremos a seguinte expressão:

$$E(x, t)=E_0 \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\tau), \quad (16)$$

sendo $\tau=2\pi/\omega$. Assim a Hamiltoniana que descreve o movimento de um elétron com massa de repouso m_0 e carga e , em um campo elétrico é:

$$H(p, x, t)=\sqrt{p^2 c^2+m_0^2 c^4}-\frac{eE_0 \tau}{k_0} \cos(k_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\tau), \quad (17)$$

sendo que c representa a velocidade da luz, $p=m_0 v/[1-(v/c)^2]^{1/2}$ e x representam o momento e a posição angulares relativísticos, respectivamente, e $\delta(t-n\tau)$ é a função delta de Dirac. O primeiro termo da função Hamiltoniana representa a energia cinética e o segundo termo a energia potencial do sistema. As equações de movimento do sistema obtidas a partir da função Hamiltoniana, são dadas por:

$$\dot{x}=\frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2+m_0^2 c^4}}, \quad (18)$$

$$\dot{p}=-eE_0 \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\tau), \quad (19)$$

considerando, $x=k_0 x'$, $y=k_0 p/m_0 \omega$ e introduzindo o parâmetro auxiliar $\beta=\omega/Kc$. O efeito de amortecimento ou dissipação pode ser considerado introduzindo-se um termo fenomenológico no mapa padrão relativístico, conforme feito no artigo de Ciubotariu *et al.*, (2002). Deste modo, chegamos à expressão do mapa padrão dissipativo relativístico (MPDR) descrito pelas seguintes equações (Oliveira *et al.*, 2011 e Oliveira *et al.*,

2012):

$$y_{n+1} = \gamma y_n - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) \quad (\text{mod } 1), \quad (20)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} (1 + \beta^2 y_{n+1}^2)^{-1/2} \quad (\text{mod } 1). \quad (21)$$

O MPDR, dado pelas Eqs. (20) e (21), possui três parâmetros de controle: a amplitude K dos pulsos recebidos pela partícula em intervalos discretos de tempo, a dissipação γ e o comportamento relativístico β . Para estudarmos a influência da componente relativística no sistema foram construídos espaços de fases para valores diferentes de β . Quando sistemas, cuja dinâmica da partícula seja modelada pelo MPDR apresentarem baixas velocidades, o que implica em um pequeno valor do parâmetro β , não ocorrem grandes mudanças com relação a Fig. 2.5(a) discutida anteriormente (compare a Fig. 2.5(a) com a Fig. 2.6(a)). Em outras palavras, existem apenas pequenas ilhas no entorno das quatro ilhas menores. Porém aumentando o valor de β , observa-se uma diminuição gradativa da região caótica e o surgimento de vários domínios onde a dinâmica apresenta-se aparentemente regular, conforme pode ser visualizado nas Figs. 2.6(b-e). Neste contexto a Fig. 2.6(f) ilustra o espaço de fases do mapa padrão relativístico para $\beta=1$, ou seja, ocorre o caso de ressonância, para $K=2,5$ (forçamento com amplitude relativamente pequena) e $\gamma=1$ (ausência de dissipação).

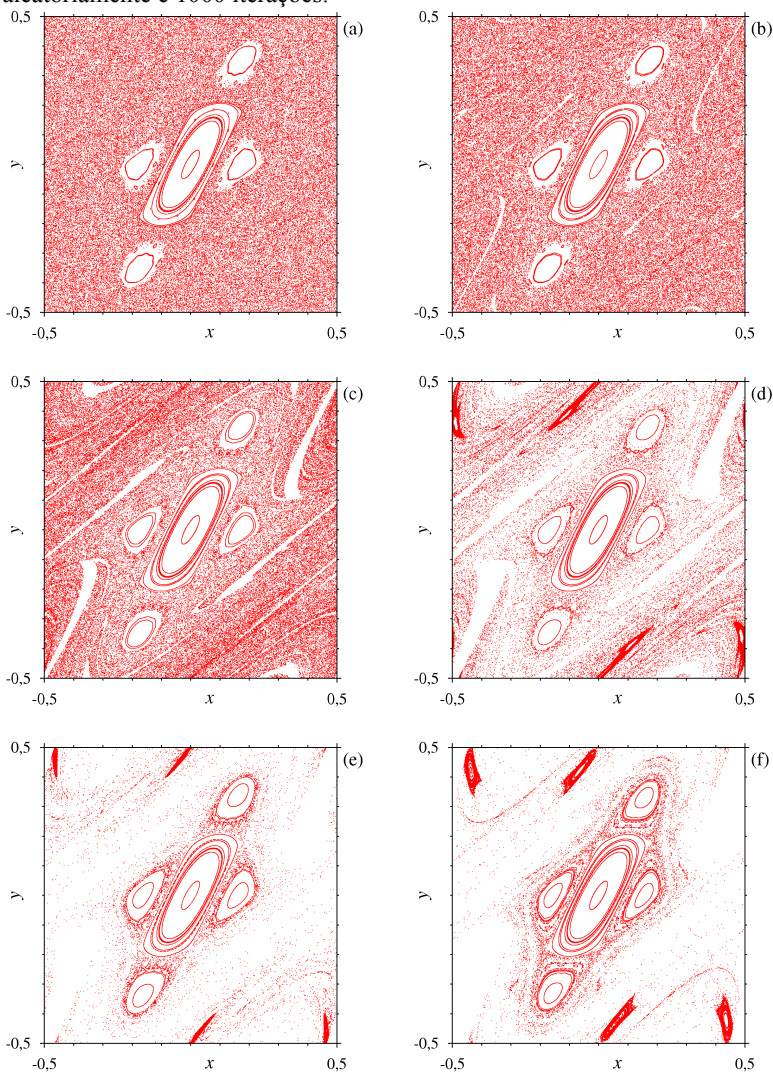
Para analisar a influência da introdução de dissipação no MPDR, diminuimos gradativamente o valor do parâmetro γ , indo em direção ao limite super-amortecido. Assim como no mapa padrão, a dissipação sobre o MPDR, também deve provocar o aparecimento de atratores, regiões no espaço de fases onde ocorre um grande acúmulo de pontos ou uma residência relativamente longa das trajetórias. Partindo da imagem 2.6(d) reproduzida anteriormente, construímos uma sequência de imagens apresentadas a seguir.

Na Fig. 2.7(a) fixamos os parâmetros $\beta=0,6$, $K=2,5$, e $\gamma=0,999999$ (dissipação pequena), onde não percebemos mudanças significativas na estrutura do espaço de fases. Contudo, aumentando a dissipação sobre o sistema (veja Fig. 2.7(b-f)), observamos o aparecimento de efeitos semelhantes aos detectados no mapa padrão dissipativo, ou seja, temos a quebra das órbitas quase-periódicas, ocasionando o aparecimento de atratores no espaço de fases, conforme a dissipação torna-se mais intensa sobre o sistema.

Na Fig. 2.7(b), observamos a “destruição” das linhas que limitam as cinco ilhas de regularidade (os pontos que antes formavam uma linha agora estão espaçados uns dos outros) e uma diminuição sucinta na quantidade dos pontilhados que formam o mar de caos. Nas Figs. 2.7(c-d) observa-se a formação de atratores e uma diminuição significativa na quantidade dos pontilhados que formam o mar de caos. Na sequência para uma dissipação consideravelmente grande, Figs. 2.7(e-f), com $\gamma=0,5$ e $\gamma=0,1$, respectivamente, o sistema evolui para um atrator no espaço de fases, assim aumentando a dissipação no sistema diminui o número de atratores no espaço de fases.

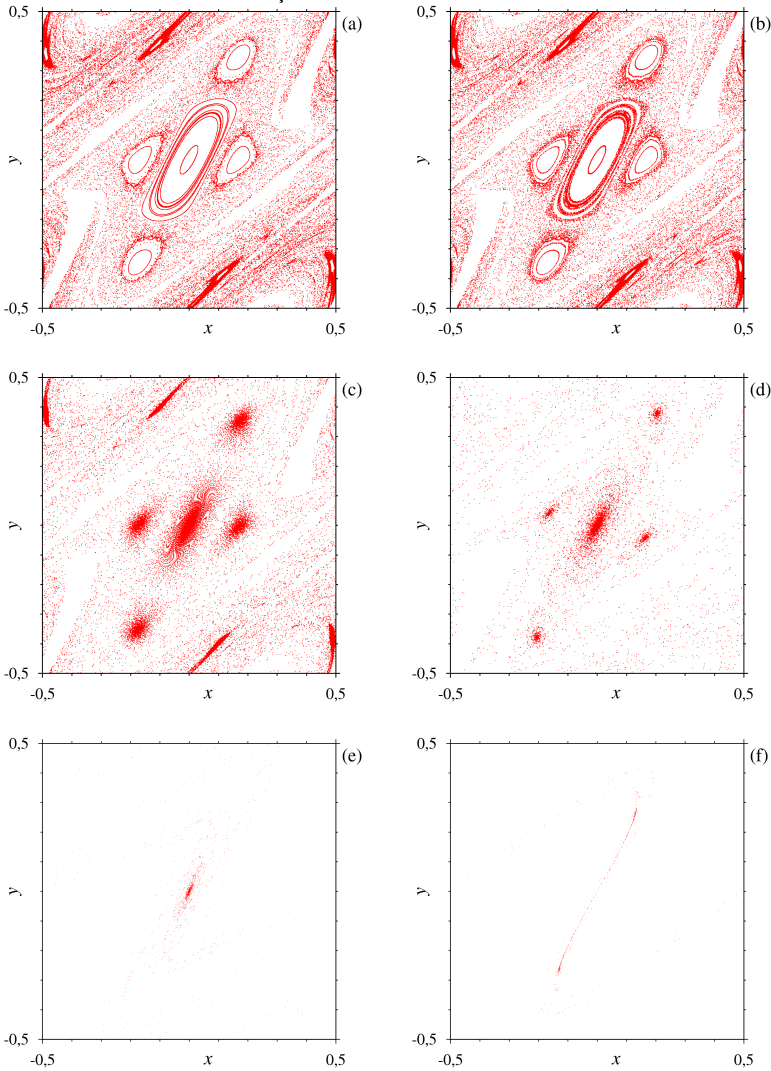
Portanto conforme aumentamos o parâmetro de dissipação do sistema percebemos que a estrutura do espaço de fases sofre grandes mudanças estruturais com o surgimento de vários atratores. Estes por sua vez surgem devido à quebra das trajetórias quase-periódicas que delimitam as ilhas de regularidade, do caso onde a energia é uma quantidade conservada. O número de atratores aumenta conforme nos aproximamos do limite conservativo. Próximo a este limite podem existir uma grande quantidade de atratores neste tipo de sistema, conforme mostrado para o rotor pulsado no artigo de Martins e Gallas, (2008). Além disso, o incremento do parâmetro relativístico mostra-se essencial no aparecimento de domínios de regularidade no espaço de fases quando a energia é conservada.

Figura 2.6: Espaço de fases do mapa padrão dissipativo relativístico: para (a) $\beta=0,1$; (b) $\beta=0,2$; (c) $\beta=0,4$; (d) $\beta=0,6$; (e) $\beta=0,8$; (f) $\beta=1$. Todas as figuras foram geradas para $\gamma=1$, $K=2,5$ e 100 condições iniciais escolhidas aleatoriamente e 1000 iterações.



Fonte: A autora.

Figura 2.7: Espaço de fases do mapa padrão dissipativo relativístico: para (a) $\gamma=0,999999$; (b) $\gamma=0,9999$; (c) $\gamma=0,99$; (d) $\gamma=0,9$; (e) $\gamma=0,5$; (f) $\gamma=0,1$. Todas as figuras foram geradas para $\beta=0,6$; $K=2,5$ e 100 condições iniciais escolhidas aleatoriamente e 1000 iterações.



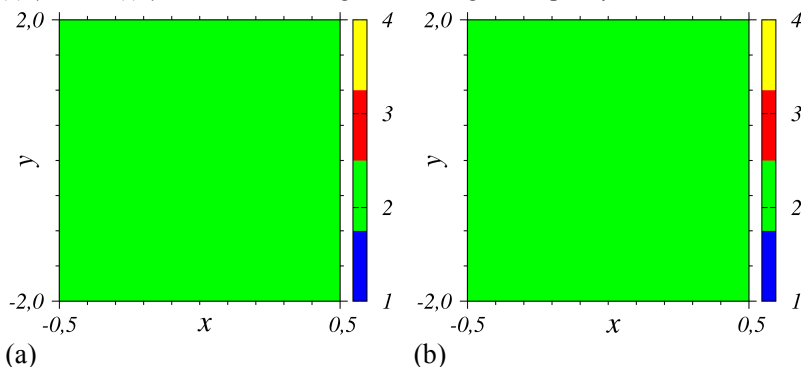
Fonte: A autora.

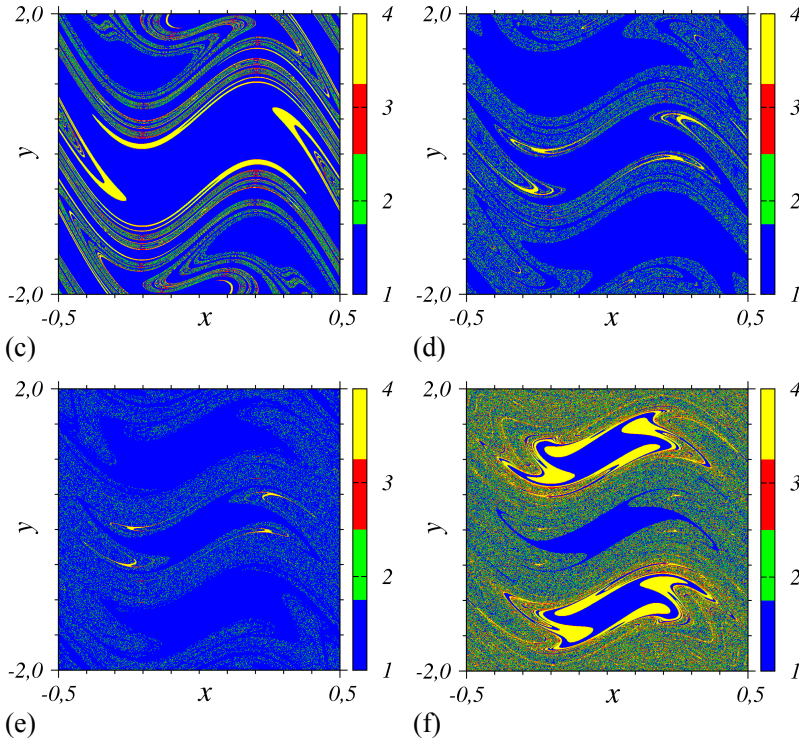
2.4 INFLUÊNCIA DE β E γ NAS BACIAS DO MPDR

Nesta seção, apresentaremos a influência do parâmetro (β) e da dissipação (γ) no tamanho e organização das bacias de períodos de determinados conjuntos de parâmetros. Variando as condições iniciais, como objetivo de identificar os possíveis comportamentos do sistema para diferentes condições iniciais.

Na Fig.2.8 podemos observar, nos planos de coordenadas x e y , o comportamento das bacias de períodos conforme variamos o parâmetro γ no sistema. O número de atratores no espaço de fases aumenta a medida que diminuimos a dissipação no sistema. Assim para um sistema super dissipativo nas Figs.2.8(a-b), O sistema evolui quase que totalmente, para atratores de período 2, diminuindo a dissipação no sistema, Figs.2.8(c-e), temos a predominância de períodos 1, com algumas nuances de período 2, 3 e 4 se mesclando. Para dissipações pequenas, existem muitos atratores periódicos, compreendendo principalmente os atratores de menor período, ou seja, de período um e dois, as Figs.2.8(c-e), caracterizam bem este caso, com predominância de período 1 em seus espaços. O que reafirma, o que vimos nos espaços de fases, que a bacia de atração desses atratores de menor período é significativamente maior em comparação com as bacias dos atratores de maior período (Lan e Yapp, 2006). Na Fig. 2.8(f) temos a presença de três regiões que evoluem para o período 1, sendo que duas delas, estão envoltas por regiões de período 4. Essas três regiões por sua vez, estão imersas em uma região que apresenta multiperíodos (de 1 até 4 mesclados).

Figura 2.8: Bacia de atração para (a) $\gamma=0,05$; (b) $\gamma=0,40$; (c) $\gamma=0,60$; (d) $\gamma=0,80$; (e) $\gamma=0,90$; (f) $\gamma=0,95$. Todas as figuras foram geradas para $\beta=0,4$; $K=3,0$.



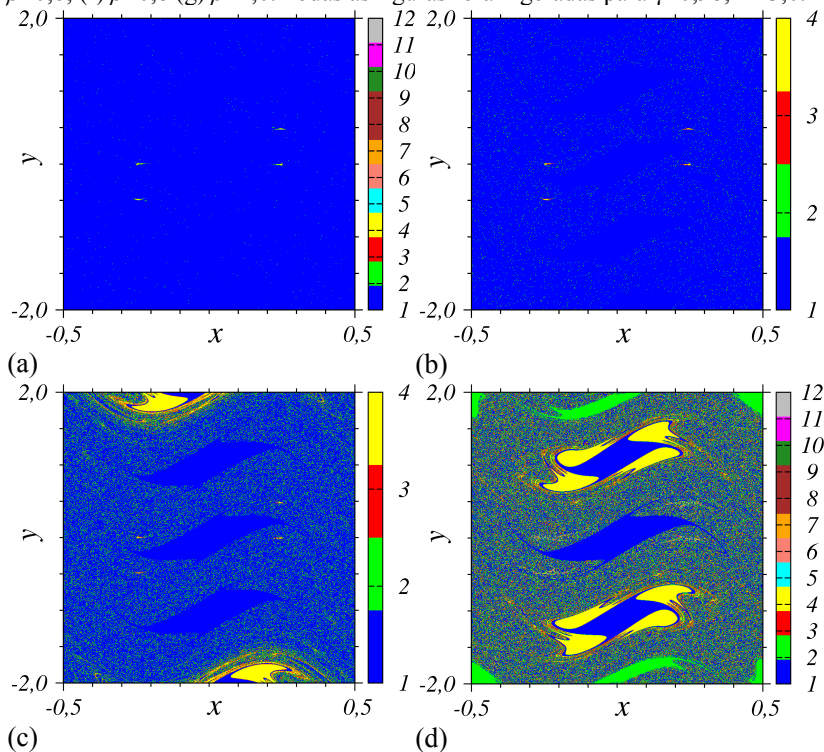


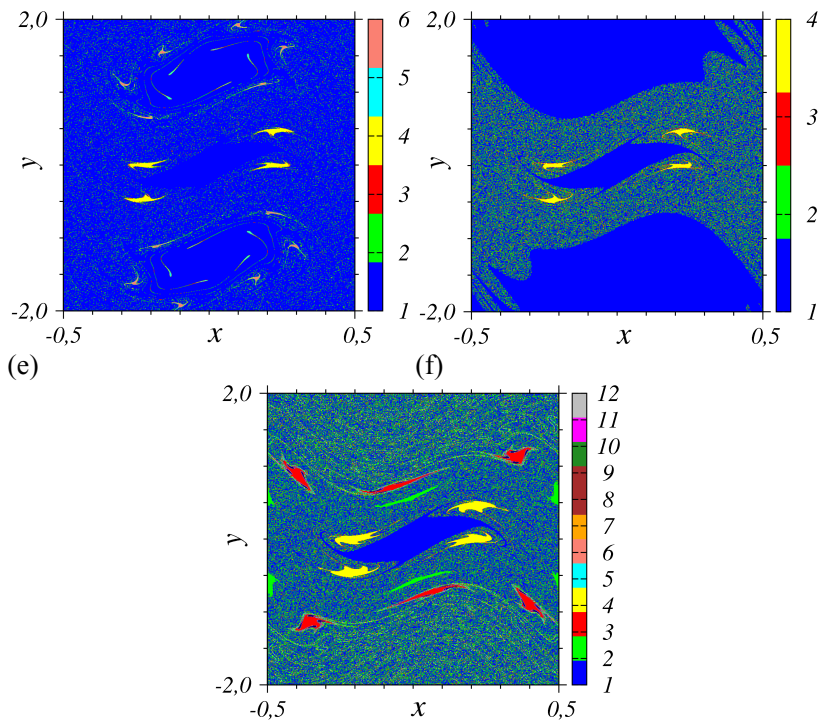
Continuação Fig. 2.8. Fonte: A autora.

Na Fig.2.9 podemos observar, nos planos de coordenadas x e y , o comportamento das bacias de períodos conforme variamos o parâmetro β no sistema. No espaço de fases, o incremento do parâmetro relativístico mostrou-se essencial no aparecimento de domínios de regularidade no espaço de fases, até então quase completamente caótico, para o caso onde a energia é uma quantidade conservada. Nas Figs.2.9(a-b), o sistema evolui quase que totalmente, para atratores de período 1. Na Fig.2.9(c) temos a predominância de períodos 1, com o aparecimento de três bacias de período 1 e outras duas, uma em cada extremidade do espaço, de período 4 e no restante do espaço de parâmetros dos períodos temos alguns nuances de período 2, 3 e 4 se mesclando. Na Fig.2.9(d) temos a presença de três regiões que evoluem para o período 1, sendo que duas delas estão envoltas por regiões de período 4. Essas três regiões por sua vez, estão imersas em uma região que apresenta multiperíodos (de 1 até 12 mesclados). E ainda seis bacias

de período 2 nas extremidades do espaço de parâmetros dos períodos. Nas Figs.2.9(e-f), observamos a predominância de período 1, com nuances de períodos 1 até 4, na Fig.2.9(e) e de 1 a 6, na Fig.2.9(f). Na Fig.2.9(g), caso quase que limite, de ressonância, temos a presença dos períodos de 1 até 12, observamos uma bacia de período 1, no centro do espaço de parâmetros dos períodos e ao redor desta bacia de período 1, temos quatro bacias menores de períodos 4, e ainda no espaço de parâmetros dos períodos observamos outras regiões menores de períodos 2 e 3.

Figura 2.9: Bacia de atração para (a) $\beta=0,0$; (b) $\beta=0,1$; (c) $\beta=0,2$; (d) $\beta=0,4$; (e) $\beta=0,6$; (f) $\beta=0,8$ (g) $\beta=1,0$. Todas as figuras foram geradas para $\gamma=0,98$; $K=3,0$.





(g)

Continuação Fig. 2.9. Fonte: A autora.

3 MEDIDA DA CAOTICIDADE

Neste capítulo apresentaremos uma visão geral do que acontece com a dinâmica do MPDR quando variamos um dos três parâmetros de controle. Para isso, primeiramente apresentamos alguns resultados analíticos, e algumas conclusões interessantes que obtemos por meio deles. Por fim, uma análise do MPDR através dos expoentes de Lyapunov, dos espaços de parâmetros e dos espaços de parâmetros dos períodos.

3.1 ESTUDO ANALÍTICO DO MPDR

O objetivo desta Seção é apresentar alguns resultados analíticos obtidos para o mapa padrão dissipativo relativístico. Em outras palavras, pretendemos calcular a matriz jacobiana, os autovalores e encontrar os seus pontos fixos para estudar algumas de suas propriedades de estabilidade. Pois a estabilidade dos pontos fixos é dada pelos autovalores da matriz jacobiana é calculada em torno do ponto fixo na aproximação linear. O referido mapa é definido de acordo com as equações (20-21).

Para calcular os autovalores usaremos a equação de autovalores, que é definida como: $\det(\mathbf{J} - \sigma \mathbf{I}) = 0$, sendo \mathbf{J} a matriz jacobiana do mapa e \mathbf{I} a matriz identidade e σ o autovalor. A matriz jacobiana do mapa (20-21). é estabelecida como sendo:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{dx_{n+1}}{dx_n} & \frac{dx_{n+1}}{dy_n} \\ \frac{dy_{n+1}}{dx_n} & \frac{dy_{n+1}}{dy_n} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

cujos termos da matriz jacobiana foram determinados, assim:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = \gamma, \quad (23)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dy_n} = -K \cos(2\pi x_n), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{n+1}}{dx_n} = & \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2 \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2}} \\ & - \frac{\gamma \beta^2 \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2}{\left(1 + \beta^2 \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2 \right)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{n+1}}{dy_n} = & 1 - \frac{K \cos(2\pi x_n)}{\sqrt{1 + \beta^2 \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2}} \\ & + \frac{\beta^2 k \cos(2\pi x_n) \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2}{\left(1 + \beta^2 \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2 \right)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

vamos simplificar os termos da matriz \mathbf{J} , definindo:

$$\eta_1 = \cos(2\pi x_n), \quad (27)$$

e ainda:

$$\eta_2 = \beta^2 \left(\gamma y_n - \frac{K \operatorname{sen}(2\pi x_n)}{2\pi} \right)^2. \quad (28)$$

Assim as Eqs. (24-26) podem ser re-escritas como:

$$\frac{dx_{n+1}}{dy_n} = -K\eta_1, \quad (29)$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dx_n} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \eta_2}} - \frac{\gamma \eta_2}{(1 + \eta_2)^{3/2}}, \quad (30)$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dy_n} = 1 - \frac{K\eta_1}{\sqrt{1+\eta_2}} + \frac{K\eta_1\eta_2}{(1+\eta_2)^{3/2}}, \quad (31)$$

para simplificar ainda mais os termos da matriz \mathbf{J} , vamos definir:

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\eta_2}}, \quad (32)$$

$$\eta_4 = \eta_2(\eta_3)^3, \quad (33)$$

Assim os termos (30) e (31) podem ser re-escritos como:

$$\frac{dy_{n+1}}{dx_n} = \gamma(\eta_3 - \eta_4), \quad (34)$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dy_n} = 1 - k\eta_1\eta_3 + k\eta_1\eta_4, \quad (35)$$

e enfim a matriz \mathbf{J} pode ser representada por:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \gamma & -K\eta_1 \\ \gamma(\eta_3 - \eta_4) & 1 - K\eta_1\eta_3 + K\eta_1\eta_4 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Analisando a matriz acima, o valor do determinante da matriz jacobiana é γ ($\det \mathbf{J} = \gamma$), o que implica que na presença de dissipação o sistema sofrerá uma contração de seu volume do espaço de fases, ou seja, não haverá conservação do volume no espaço de fases, se $|\gamma| < 1$. O mesmo não vale para mapas conservativos onde $\det \mathbf{J} = 1$, portanto o volume no espaço de fases será conservado.

O mapa padrão dissipativo relativístico possui dois autovalores: σ_1 e σ_2 , que serão calculados a partir da equação de autovalores, definida como:

$$\det(\mathbf{J} - \sigma \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} \gamma - \sigma & -K\eta_1 \\ \gamma(\eta_3 - \eta_4) & 1 - K\eta_1\eta_3 + K\eta_1\eta_4 - \sigma \end{pmatrix} = 0, \quad (37)$$

ou

$$\sigma^2 - \sigma \operatorname{Tr} \mathbf{J} + \det \mathbf{J} = 0, \quad (38)$$

onde $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz \mathbf{J} e $\operatorname{Tr} \mathbf{J}$ é o traço da matriz \mathbf{J} . Para a matriz \mathbf{J} o determinante é γ . Desta forma as raízes da equação (38), após uma longa manipulação algébrica, serão:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{1}{2}(1 - K\eta_1\eta_3 + K\eta_1\eta_4 + \gamma) \\ & + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - 2K\eta_1\eta_3 + 2K\eta_1\eta_4 - 2\gamma + K^2\eta_1^2\eta_3^2 - 2\gamma K\eta_1\eta_3 + K^2\eta_1^2\eta_4^2 + 2\gamma K\eta_1\eta_4 + \gamma^2)} \end{aligned} \quad (39)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & \frac{1}{2}(1 - K\eta_1\eta_3 + K\eta_1\eta_4 + \gamma) \\ & - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - 2K\eta_1\eta_3 + 2K\eta_1\eta_4 - 2\gamma + K^2\eta_1^2\eta_3^2 - 2\gamma K\eta_1\eta_3 + K^2\eta_1^2\eta_4^2 + 2\gamma K\eta_1\eta_4 + \gamma^2)} \end{aligned} \quad (40)$$

A estabilidade dos pontos fixos é dada pelos autovalores da matriz \mathbf{J} , assim através dos autovalores σ_1 e σ_2 , podemos calcular os expoentes de Lyapunov (λ_j), que indicam se o modelo tem regiões caóticas ou não. Se pelo menos um dos λ_j for positivo, então a trajetória poderá ser classificada como caótica. Além disso, para este caso específico, em sistemas conservativos $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, enquanto nos sistemas dissipativos $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Assim os expoentes de Lyapunov são definidos como:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\sigma_j|. \quad j=1, 2 \quad (41)$$

Como os expoentes de Lyapunov dependem dos autovalores que estão vinculado diretamente aos valores dos parâmetros K , γ e β , não podemos fazer nenhuma afirmação sobre a estabilidade do mapa por meio do estudo analítico do sistema, pois para isto, teríamos que fazer uma adequação na escolha dos valores para os parâmetros K , γ e β , que teriam infinitas possibilidades. Na próxima Seção, apresentaremos alguns resultados envolvendo o comportamento das órbitas através de diagramas de espaço de parâmetros e do maior expoente de Lyapunov, assim podemos analisar valores prováveis de parâmetros com o intuito de encontrar regiões estáveis e caóticas.

Podemos também calcular os pontos fixos do sistema. Para o

mapa padrão dissipativo relativístico, as coordenadas dos pontos fixos (x_0, y_0) são determinadas a partir das Eqs. (20 e (21). Para determinar os pontos fixos, faremos as seguintes considerações:

$$x_{n+1} = x_n = x_0,$$

$$y_{n+1} = y_n = y_0.$$

Assim as Eqs. (20) e (21) podem ser re-escritas da seguinte maneira:

$$y_0 = \gamma y_0 - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_0) \quad (\text{mod } 1), \quad (42)$$

$$x_0 = x_0 + y_0(1 + \beta^2 y_0^2)^{-1/2} \quad (\text{mod } 1). \quad (43)$$

Após algumas manipulações algébricas a equação (43) pode ser re-escrita como:

$$|x_0 - x_0| = y_0(1 + \beta^2 y_0^2)^{-1/2}, \quad (44)$$

considerando $|N| = |x_0 - x_0|$, teremos:

$$|N| = y_0(1 + \beta^2 y_0^2)^{-1/2}, \quad (45)$$

e elevando as igualdades ao quadrado:

$$N^2 = [y_0(1 + \beta^2 y_0^2)^{-1/2}]^2, \quad (46)$$

$$N^2(1 + \beta^2 y_0^2) = [y_0^2], \quad (47)$$

$$N^2 + N^2 \beta^2 y_0^2 = y_0^2, \quad (48)$$

$$N^2 = y_0^2 - N^2 \beta^2 y_0^2, \quad (49)$$

$$N^2 = y_0^2(1 - N^2 \beta^2). \quad (50)$$

Isolando o termo y_0^2 , teremos:

$$y_0^2 = N^2(1 - N^2 \beta^2)^{-1}, \quad (51)$$

$$y_0 = N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2}, \quad (52)$$

que representa a coordenada y_0 dos pontos fixos. Realizando o mesmo procedimento para a variável x_0 , teremos:

$$\text{sen}(2\pi x_0) = \frac{-2\pi}{K}(1 - \gamma)y_0, \quad (53)$$

$$2\pi x_0 = \arcsin\left(\frac{-2\pi}{K}(1 - \gamma)y_0\right), \quad (54)$$

isolando o x_0 :

$$x_0 = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{-2\pi}{K}(1 - \gamma)y_0\right), \quad (55)$$

substituindo a equação (52) na equação (55), teremos:

$$x_0 = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{-2\pi}{K}(1 - \gamma)N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2}\right), \quad (56)$$

portanto os pontos fixos, são:

$$y_0 = N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2}, \quad (57)$$

e

$$x_0 = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{-2\pi}{K}(1 - \gamma)N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2}\right), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (58)$$

Contudo, para que a Eq. (58) seja válida, uma vez que a quantidade sob a raiz quadrada tem que ser positiva e $|\text{sen}(2\pi x_0)| \leq 1$, encontramos as seguintes restrições:

$$|N| < \frac{1}{\beta}, \quad \left| \frac{-2\pi}{K}(1 - \gamma)N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2} \right| \leq 1, \quad (59)$$

e assim o número dos pontos fixos é finito.

Se tivermos $\gamma=1$ os pontos fixos, Eqs. (57) e (58), tornam-se os mesmos

do mapa padrão conservativo:

$$(x_0, y_0)_0 = [0, N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2}], \quad (60)$$

$$(x_0, y_0)_{\pm \frac{1}{2}} = \left[\pm \frac{1}{2}, N(1 - N^2 \beta^2)^{-1/2} \right]. \quad (61)$$

Além disso, mesmo se tivermos $\gamma \neq 1$, em $N=0$ teremos a origem $(x_0, y_0) = (0,0)$ como ponto fixo trivial para o mapa padrão nas versões dissipativa e dissipativa reletivística.

3.2 ESTUDO NUMÉRICO DO MPDR

Nesta Seção apresentamos os resultados da investigação numérica do mapa padrão dissipativo relativístico. Em outras palavras, apresentaremos os resultados obtidos a partir da aplicação de métodos computacionais. As principais técnicas utilizadas no estudo numérico do MPDR baseiam-se na construção de espaços de parâmetros onde medimos o grau de caoticidade e periodicidade, via espectro de Lyapunov e período das órbitas, respectivamente.

3.2.1 ESPAÇOS DE PARÂMETROS PARA O EXPOENTE DE LYAPUNOV

Podemos estudar a dinâmica do mapa padrão dissipativo relativístico variando seus parâmetros, que no sistema em questão temos o conjunto de parâmetros $\{K, \gamma, \beta\}$. Os espaços de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov ou para o período, são projeções bidimensionais de gráficos tridimensionais, compostos por dois eixos referentes a dois parâmetros que são variados (um dos parâmetros é mantido fixo) e mais um eixo que representa o valor do maior expoente de Lyapunov. Em outras palavras, fixamos um parâmetro e variamos outros dois, um em função do outro, associados a um terceiro valor de interesse, por exemplo, a magnitude do maior expoente de Lyapunov. Graficamente é utilizado um gradiente de cores para representar o valor do expoente de Lyapunov com relação ao par de parâmetros escolhidos. Esta variação de cores associadas ao maior expoente de Lyapunov, permite verificar onde ou para quais conjuntos de parâmetros o sistema apresenta regiões de pontos fixos, domínios periódicos (com períodos

estáveis) ou caóticos. Por exemplo, na Fig. 3.1, mostramos o espaço de parâmetros para o mapa padrão dissipativo relativístico.

Para efeitos de análise do comportamento caótico do modelo, estudamos o maior expoente de Lyapunov do sistema, já que para um sistema bidimensional temos dois expoentes de Lyapunov associados. Identificamos uma cor para cada maior expoente de Lyapunov variando continuamente o espectro, desde o branco (expoentes negativos), passando pelo preto (expoente zero), até chegar ao amarelo e o vermelho (expoentes positivos). Dessa forma, conseguimos identificar os comportamentos, caótico e periódico, identificando regiões com os valores dos respectivos parâmetros.

A produção das figuras dos espaços de parâmetros foram obtidas pela combinação das variações do conjunto de parâmetros $\{K, \gamma, \beta\}$ em função da representação gráfica do maior expoente de Lyapunov. Dessa forma, o gradiente de cores utilizado em cada figura está associado à magnitude do expoente de Lyapunov representados na mesma. Assim, o branco mostra os expoentes negativos (regiões de ponto fixo), o preto expoentes nulos (regiões periódicas) e variações de amarelo e vermelho para expoentes positivos (regiões caóticas), outras informações sobre a dinâmica do mapa que podemos obter da análise da Fig. 3.1, será descrita na Seção 3.2.3.

Os espaços de parâmetros para o cálculo do expoente de Lyapunov, foram obtidos considerando a discretização destes em uma malha de 1000×1000 pontos. As condições iniciais para (x_0, y_0) foram $(0,1;0,3)$. Para o cálculo de cada novo expoente de Lyapunov, utilizamos as mesmas condições iniciais, ou seja, não seguimos o atrator, pois o espaço de parâmetros é rico em atratores não havendo a necessidade de ficarmos restritos à apenas um deles.

3.2.2 ESPAÇOS DE PARÂMETROS DOS PERÍODOS

O espaço de parâmetros dos períodos é obtido através da variação de dois parâmetros do sistema, onde descartamos um tempo transiente de 10^7 iteradas e calculamos o período a partir daí, obedecendo a condição dada pela equação (62). A Fig. 3.2 representa um exemplo de espaço de parâmetros dos períodos para o mapa padrão dissipativo relativístico, e nos mostra a periodicidade das estruturas periódicas imersas no caos.

Para construir os espaços de parâmetros dos períodos,

estudamos a dinâmica do modelo em termos do conjunto de parâmetros $\{K, \gamma, \beta\}$ do sistema. Por exemplo, na Fig. 3.2 fixamos um parâmetro (γ) e variamos os outros dois (β ; K), um em função do outro.

Partindo da condição inicial $(x_0, y_0) = (0, 1; 0, 3)$, descartamos 10^7 iteradas, considerando como sendo um tempo transiente suficientemente grande para que a condição inicial fosse direcionada para um atrator. Em seguida determinamos se a órbita é periódica, para o caso periódico, designamos o período do atrator correspondente (período: $1, 2, 3, \dots, 10$). Para valores de períodos maiores que 10 (dez), consideramos que a órbita é caótica ou apresenta períodos superiores a este valor. Representamos os períodos correspondentes as estruturas periódicas, com cores diferentes, nos espaços de parâmetros dos períodos, conforme palheta de cores e número correspondente na Fig. 3.2.

Para tanto, consideramos um ponto (x_n, y_n) como pertencente a órbitas de período τ , se τ for menor que o período máximo, tal que, para todos os pontos das órbitas:

$$\|\vec{x}_{n+\tau} - \vec{x}_n\| < \epsilon_d, \quad (62)$$

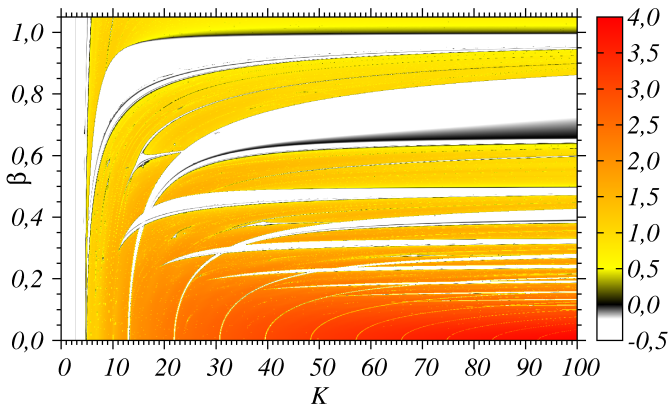
sendo ϵ_d é um número pequeno que representa a precisão numérica do teste. Verificamos a estabilidade do número atribuído a cada período repetindo os cálculos utilizando $\epsilon_d = 10^{-d}$, para $d = 7$ e 8 . Os resultados obtidos são independentes de ϵ_d . Este rigoroso teste foi particularmente importante no limite de dissipação baixa, quando a multiestabilidade se prolifera (Martins, 2008). Multiestabilidade é o nome dado para a coexistência de vários estados de equilíbrio dinâmico para um mesmo conjunto de parâmetros. Tais estados podem tanto ser caóticos, quanto regulares (periódicos). Sistemas que apresentam multiestabilidade em geral são extremamente sensíveis a qualquer perturbação, e o estado final do sistema depende crucialmente das condições iniciais (Pisarchik e Jaimes-Reategui, 2009).

3.2.3 RESULTADOS PARA (K, β)

Os espaços de parâmetros foram construídos, no intuito de aprofundarmos os resultados relatados em trabalhos recentes (Martins e Galas, 2008; Oliveira *et al.*, 2012), onde sistemas dinâmicos são

modelados pelo mapa padrão dissipativo relativístico. Na Fig. 3.1, podemos observar o comportamento do mapa, representado pelo diagrama do expoente de Lyapunov para $0 \leq K \leq 100$ e $0,0 \leq \beta \leq 1,0$, ou seja, variando os valores da amplitude do forçamento K e o parâmetro β (onde a velocidade da partícula está implícita) e fixamos o valor da dissipação, em $\gamma = 0,4$.

Figuras 3.1: Espaço de parâmetros ($K \times \beta$), com $\gamma = 0,4$. As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do maior Expoente de Lyapunov.



Fonte: A autora.

A Fig. 3.1 apresenta predominância de regiões de comportamento caótico (em amarelo, laranja e vermelho) com janelas de pontos fixos em seu interior (estruturas de pontos fixos em branco) e pequenas regiões de periodicidade (em preto). Ou seja, podemos observar que existe uma grande quantidade de estruturas periódicas imersas na região caótica. Para valores de $0 \leq K \leq 5$ temos uma faixa branca que se estende no decorrer dos valores de $0,0 \leq \beta \leq 1,0$ o que deixa explícito que esta é uma região de pontos fixos. Próximo aos valores de $K=5$ e $K=12$, temos o “nascimento” de outras duas grandes regiões de ponto fixo, que “nascem” pequenas e conforme aumentamos o valor do parâmetro β ela aumenta gradativamente. No interior destas estruturas brancas temos linhas ou faixas na cor preta, ou seja, o maior expoente de Lyapunov zero, o que remete a bifurcação do sistema. A bifurcação sucede quando ocorre a variação dos parâmetros de controle, conseqüentemente ocorre a alteração da estabilidade estrutural do

sistema, ou seja, dependendo da perturbação imposta, a estrutura do espaço de parâmetros pode ou não mudar. Esta mudança estrutural de periódica para caótica ou de caótica para periódica é chamado de bifurcação (Ferrara, 1995).

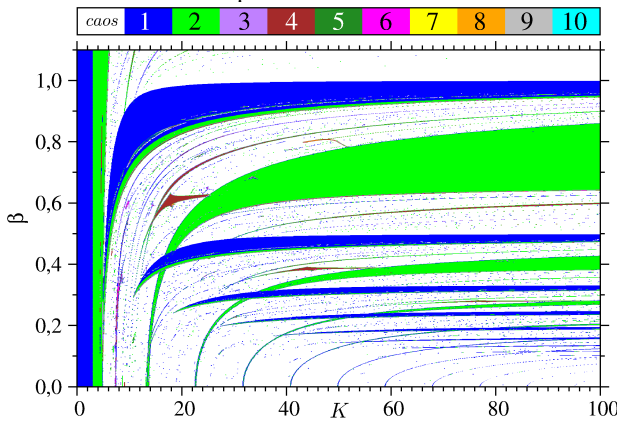
Posteriormente temos outras regiões menores de ponto fixo que nascem no eixo do parâmetro K , com as mesmas características das outras duas maiores, porém em uma escala menor. Também observamos que conforme aumentamos a amplitude do forçamento K o gradiente de cores varia do amarelo para o vermelho aumentando progressivamente, que significa, que quanto maior o valor deste parâmetro, no intervalo de $0,0 \leq \beta \leq 0,2$, mais caótico será o sistema. Neste espaço de parâmetros notamos o surgimento de padrões de diferentes tamanhos, “tipo-Cuspidal” imersos nas regiões caóticas. Tais padrões são conhecidos na literatura como Cuspidal (Bonato; Gallas, 2008; Francke; Poschel; Gallas, 2013; Celestino et al., 2014). A estrutura tipo-Cuspidal mais vizível, na Fig.3.1, fica nas proximidades do ponto (13 ; 0,6), o outro em (39 ; 0,35) e uma estrutura menor nas proximidades do ponto (21 ; 0,35). Sendo estas estruturas na cor branca delimitadas em preto, portanto regiões de periodicidade.

Para refinar ainda mais a visualização dessas estruturas periódicas e suas regras de formação, construímos o espaço de parâmetros dos períodos, que pode ser visualizado na Fig. 3.2. As regiões que anteriormente eram de pontos fixos (estruturas brancas) agora estão representadas pela cor azul (período 1) e as regiões caóticas da Fig. 3.1 (gradiente de cor que vai do amarelo até o vermelho), são reafirmadas no espaço de parâmetros dos períodos como regiões caóticas apresentadas agora pela cor branca, indicativas de caos ou períodos maiores que 10. O espaço de parâmetros dos períodos também apresenta regiões de período 2 (cor verde), que na figura anterior estava representada como regiões de ponto fixos e de periodicidade.

Estendendo a comparação das figuras 3.1 e 3.2, observamos no espaço de parâmetros dos períodos estruturas sequenciais, que se repetem. Ou seja, estas estruturas periódicas se dispõem em uma sequência, elas possuem uma ordem de formação por adição de período, da estrutura azul (período 1), para a estrutura verde (período 2), intercaladas por regiões caóticas. Em suma podemos observar estruturas periódicas auto-similares imersas em regiões caóticas. Na faixa observada anteriormente na Fig.3.1 no intervalo de $0 \leq K \leq 5$, agora temos duas faixas, uma azul (período 1) e outra verde (período 2), que se estende no decorrer dos valores de $0,0 \leq \beta \leq 1,0$, como ocorria

anteriormente. O que é justificado pois na faixa branca da Fig. 3.1 temos uma linha preta paralela, no centro da faixa e a cor preta, ou seja, expoente de Lyapunov zero, o que remete a bifurcação do sistema de período 1 para período 2. As estruturas, tipo-*Cuspidal* observadas na Fig. 3.1, reaparecem na Fig. 3.2 na cor marrom, o que representa estruturas de período 4.

Figura 3.2: espaço de parâmetros dos períodos ($K \times \beta$) do mapa padrão dissipativo relativístico.



Fonte: A autora.

Aprofundando mais a análise da dinâmica do sistema, podemos comprovar analiticamente, além de numericamente, a existência das órbitas de período 1, através da equação:

$$K(N, \gamma, \beta) = \left[\frac{\pm 2\pi(\gamma-1)N}{(1-N^2\beta^2)^{1/2}} \right]. \quad (63)$$

Para tanto, usamos a matriz jacobiana, Eq. (36), do mapa (20-21), encontrando os autovalores σ_1 e σ_2 , substituindo o ponto fixo (57-58) em qualquer um dos autovalores e igualando a 1. Assim fazendo $\sigma(K, \gamma, \beta, N)=1$ obtemos uma relação entre K , γ , β e N , encontramos os parâmetros K e β onde elas nascem.

Invertendo a equação (63), temos:

$$[K(N, \gamma, \beta)]^2 = \left[\frac{\pm 2\pi(\gamma-1)N}{(1-N^2\beta^2)^{1/2}} \right]^2, \quad (64)$$

assim,

$$K^2 = \frac{4\pi^2(\gamma-1)^2 N^2}{1-N^2\beta^2}, \quad (65)$$

$$1-N^2\beta^2 = \frac{4\pi^2(\gamma-1)^2 N^2}{K^2}, \quad (66)$$

$$N^2\beta^2 = 1 - \frac{4\pi^2(\gamma-1)^2 N^2}{K^2}, \quad (67)$$

$$\beta^2 = \frac{K^2 - 4\pi^2(\gamma-1)^2 N^2}{K^2 N^2}, \quad (68)$$

e assim obtemos,

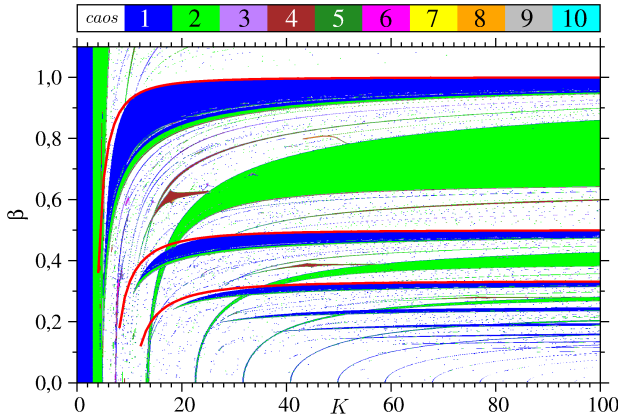
$$\beta(N, \gamma, K) = \sqrt{\frac{K^2 - 4\pi^2(\gamma-1)^2 N^2}{K^2 N^2}}. \quad (69)$$

Para a equação (69), fixando o valor de γ em 0,4 imprimimos as três primeiras linhas referentes a $N=1, 2$ e 3 , representadas pelas três linhas curvilíneas em vermelho sobrepostas as regiões de período 1, que são representadas pela cor azul (período 1) na Fig. 3.3. Portanto, de cima para baixo as curvas vermelhas correspondem aos valores de $N=1, 2$ e 3 , respectivamente. Por fim, podemos localizar as órbitas de período 1 analiticamente, além de numericamente.

As linhas curvilíneas referentes a $N=1, 2$ e 3 , que indicam onde as estruturas de período 1 nascem, não se sobrepõem no canto inferior esquerdo do espaço de parâmetros. Este fato é uma consequência da escolha das condições iniciais usadas para iterar o mapa. Ou seja, a condição inicial escolhida levou o sistema para um atrator próximo ao que foi calculado analiticamente. Entretanto é difícil encontrar condições iniciais que levam exatamente aos mesmos resultados encontrado analiticamente. A propósito, as curvas calculadas

analiticamente também podem ser calculadas para valores maiores que $N=3$, porém os resultados são pouco vizíveis no espaço de parâmetros, o que torna inviável a construção das mesmas.

Figura 3.3: espaço de parâmetros dos períodos ($K \times \beta$) do mapa padrão dissipativo relativístico.



Fonte: A autora.

Podemos avaliar o gráfico da Fig. 3.3 na projeção do espaço de parâmetros dos períodos ($\gamma \times \beta$) e analisar, da mesma forma, analiticamente o sistema. Para tanto, partiremos de:

$$\gamma(N, K, \beta) = \frac{2\pi N + K \sqrt{1 - N^2 \beta^2}}{2\pi N}, \quad (70)$$

Invertendo a equação (70), temos:

$$[\gamma(N, K, \beta)]^2 = \left[1 + \frac{K \sqrt{1 - N^2 \beta^2}}{2\pi N} \right]^2, \quad (71)$$

assim,

$$[\gamma - 1]^2 = \frac{K^2 (1 - N^2 \beta^2)}{4\pi^2 N^2}, \quad (72)$$

$$1 - N^2 \beta^2 = \frac{4\pi^2 N^2 (\gamma - 1)^2}{K^2}, \quad (73)$$

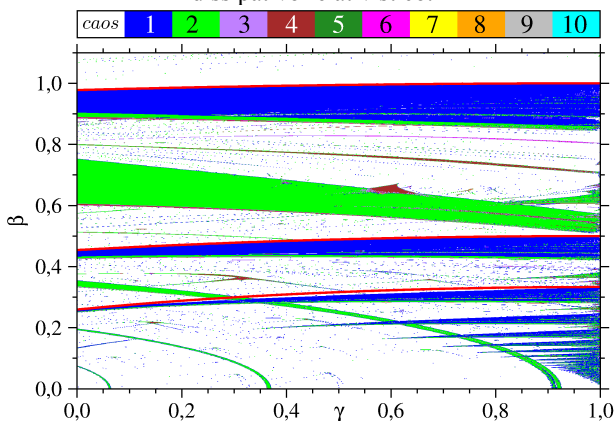
$$\beta^2 = \frac{K^2 - 4\pi^2 N^2 (\gamma - 1)^2}{N^2 K^2}, \quad (74)$$

e assim obtemos,

$$\beta(N, \gamma, K) = \sqrt{\frac{K^2 - 4\pi^2 N^2 (\gamma - 1)^2}{N^2 K^2}}. \quad (75)$$

Da mesma forma, como foi feito anteriormente, para a equação (75), fixando agora o valor de $K=20$ encontramos as três primeiras curvas referentes a $N=1, 2$ e 3 , representadas pelas três linhas em vermelho sobrepostas as regiões de período 1 (em azul) na Fig. 3.4. Portanto, de cima para baixo as curvas vermelhas correspondem aos valores de $N=1, 2$ e 3 , respectivamente. Que são as mesmas curvas do espaço de parâmetro $K \times \beta$ descritas anteriormente, porém visualizadas por outra perspectiva. E novamente, podemos localizar o nascimento das órbitas de período 1 analiticamente.

Figura 3.4: espaço de parâmetros dos períodos ($\gamma \times \beta$) do mapa padrão dissipativo relativístico.



Fonte: A autora.

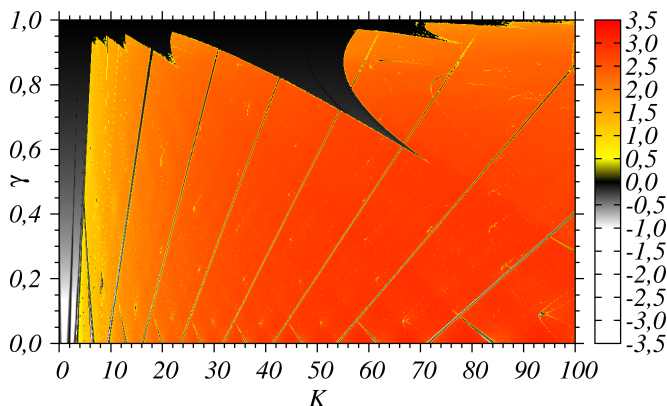
Assim, analisando as Figuras 3.3 e 3.4, também é possível notar, que novamente as estruturas periódicas se organizam do menor para o maior período, estrutura azul (período 1) e verde (período 2), intercaladas por regiões caóticas.

3.2.4 RESULTADOS PARA ($K \times \gamma$)

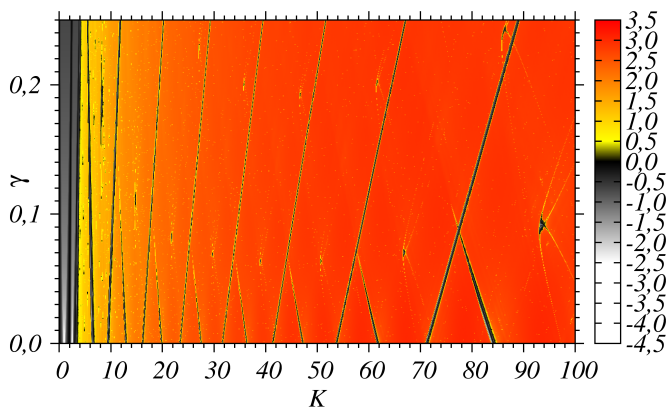
Nesta Seção, será verificado a dinâmica do mapa padrão dissipativo relativístico, através da análise do comportamento dinâmico do espaço de parâmetros para ($K \times \gamma$). Iniciaremos a análise com a Fig. 3.5(a), onde podemos observar o mapa, representado pelo diagrama do expoente de Lyapunov para $0 \leq K \leq 100$ e $0,0 \leq \gamma \leq 1,0$, ou seja, variando os valores da amplitude do forçamento K e o parâmetro γ da dissipação e fixamos $\beta = 0,1$. Podemos observar neste espaço de parâmetros a predominância de regiões de comportamento caótico (em amarelo, laranja e vermelho) e uma pequena região de periodicidade e ponto fixo (preto e branco respectivamente). A Fig. 3.5(a), apresenta várias “listras estreitas” (no gradiente de cor do branco para o preto) que atravessam o espaço de parâmetros na diagonal: estas linhas representam o expoente de Lyapunov zero. Também notamos o surgimento de padrões de diferentes tamanhos, imersos na região de caos, localizados na extensão da base do espaço de parâmetros. Para melhor análise foram feitas ampliações desta imagem.

Assim, na Fig. 3.5(b), temos o espaço de parâmetros do valor do espectro de Lyapunov para $0 \leq K \leq 100$ e $0,0 \leq \gamma \leq 0,25$, referente a ampliação da Fig. 3.5(a), onde podemos observar o comportamento das linhas pretas, expoentes de Lyapunov próximo a zero, que aparentemente separam regiões caóticas. E ainda, os padrões de diferentes tamanhos, visualizados anteriormente que estão imersos na região caótica. Tais estruturas periódicas são conhecidos na literatura como camarões ou *shrimps* (Bonatto; Garreau; Gallas, 2005, Freire *et al.* 2008. e Bonatto; Gallas, 2007). A presença destas estruturas reforça o carácter universal da sua ocorrência, conforme relatado anteriormente para sistemas modelados a tempo contínuo e discreto (Bonatto; Gallas; Ueda, 2008; Celestino *et al.*, 2011; Oliveira *et al.*, 2012; Manchein e Beims, 2013; Celestino *et al.*, 2014).

Figura 3.5: Espaço de parâmetro ($K \times \gamma$), para $\beta = 0,1$.



(a)



(b)

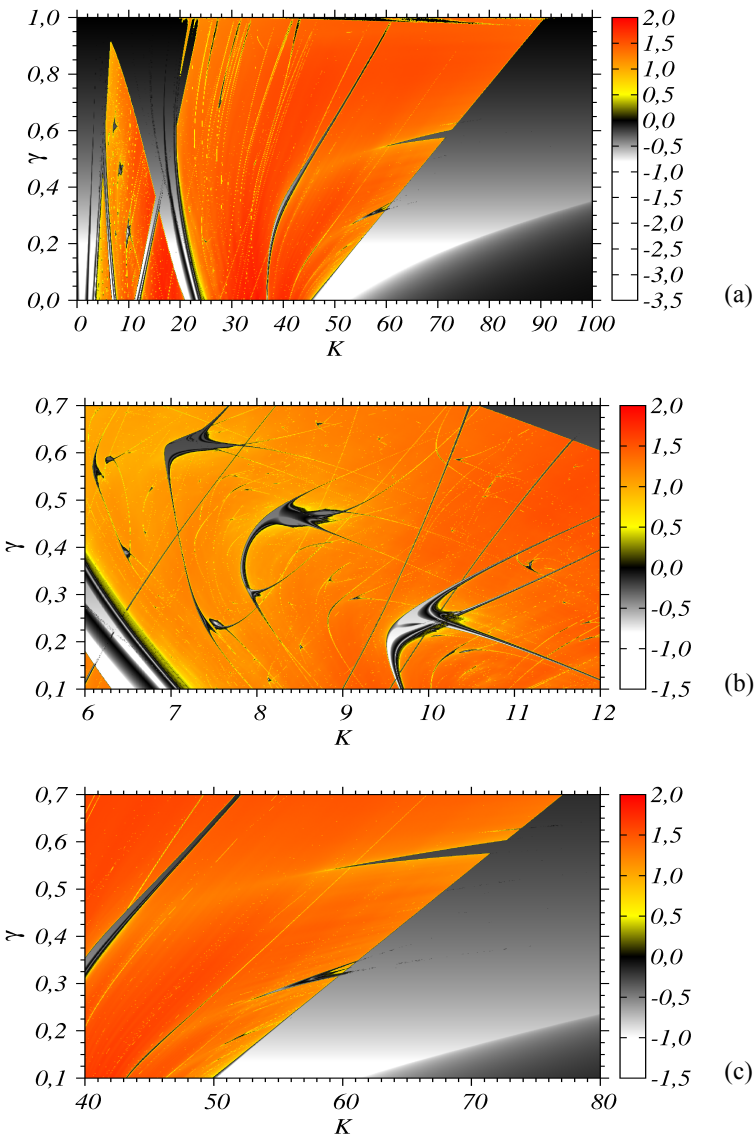
Fonte: A autora.

A seguir a Figura 3.6(a), representa o diagrama dos expoentes de Lyapunov para $0 \leq K \leq 100$ e $0,0 \leq \gamma \leq 1,0$, e $\beta = 0,4$. Nesta figura foi observado uma grande região periódica (representada pelo gradiente de cores do branco, cinza e preto) imersa a esta região dispõem-se domínios caóticos (no gradiente de cores do amarelo, laranja e vermelho). No espaço de parâmetros, lado direito, temos uma região periódica que aparentemente está dividida por expoentes de Lyapunov mais negativos (representado pela cor branca), esta formação indica uma

provável bifurcação no sistema. Imersos ao domínio caótico, nota-se algumas regiões periódicas, além das linhas de periodicidade que o atravessam verticalmente. Para estudarmos com mais minuciosidade este domínio caótico ampliamos a Fig. 3.6(a). Dessa forma na Fig. 3.6(b) , para $6 \leq K \leq 12$ e $0,1 \leq \gamma \leq 0,7$, novamente observa-se surgimento de estruturas de diferentes tamanhos que são auto-similares, os *shrimps*, uma vez que o espaço de parâmetros está repleto delas e quanto mais ampliações fizermos mais estruturas, cada vez menores surgem. No interior dos *shrimps*, podemos observar a existência de linhas brancas. Essas linhas são referentes aos expoentes de Lyapunov mais negativos que cruzam o domínio dos *shrimps* de forma organizada e aparentemente simétrica (ao seu “eixo central”), sugerindo a existência de um ponto de bifurcação no sistema, para tais valores dos parâmetros K e γ . Outro ponto a ser discutido com relação aos expoentes de Lyapunov é a respeito das linhas pretas nos *shrimps*. Essas linhas fazem referência ao valor zero assumido pelos expoentes. O expoente zero indica uma bifurcação no sistema, sucede devido a variação dos parâmetros de controle, conseqüentemente ocorre a alteração da estabilidade estrutural do sistema neste ponto. As linhas pretas podem ser encontradas dentro das regiões de periodicidade, *shrimps*, o que pode indicar a existência de uma rota para o caos em seu interior, já que dependendo da perturbação imposta, a estrutura do espaço de parâmetros pode ou não mudar de periódica para caótica ou de caótica para periódica, ou seja, bifurcação.

Na segunda ampliação, apresentada na Fig. 3.6(c), para $40 \leq K \leq 80$ e $0,1 \leq \gamma \leq 0,7$, observamos a estrutura do espaço de parâmetros neste limite, assim podemos observar “listras ou hanhuras” de periodicidade adentrando na região de caos em duas posições. Ou seja, em dois momentos as regiões de multiestabilidade adentram a região caótica, mais um indício de multiestabilidade no sistema.

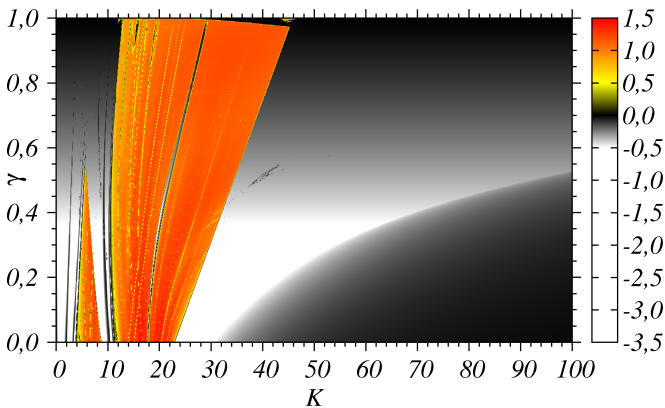
Figura 3.6: Espaço de parâmetro ($K \times \gamma$), para $\beta = 0,4$.



Fonte: A autora.

O espaço de parâmetros da Fig. 3.7, para $0 \leq K \leq 100$ e $0,0 \leq \gamma \leq 1,0$, mostra uma visão geral do comportamento da dinâmica do mapa padrão dissipativo relativístico para $\beta = 0,7$. Assim, podemos observar neste espaço de parâmetros a predominância de regiões pontos fixos e periódicos. Nele há uma pequena região de comportamento caótico (em amarelo, laranja e vermelho), que novamente apresentam listras de regiões de periodicidades. No canto inferior direito do espaço de parâmetros, assim como para a Fig. 3.6(c) para $\beta = 0,4$, aqui temos uma divisão entre as duas regiões periódicas, esta separação indica a existência de um conjunto de parâmetros cujo o sistema apresenta uma dinâmica similar independente dos valores dos parâmetros escolhidos dentro deste conjunto.

Figura 3.7: Espaço de parâmetro ($K \times \gamma$), para $\beta = 0,7$.

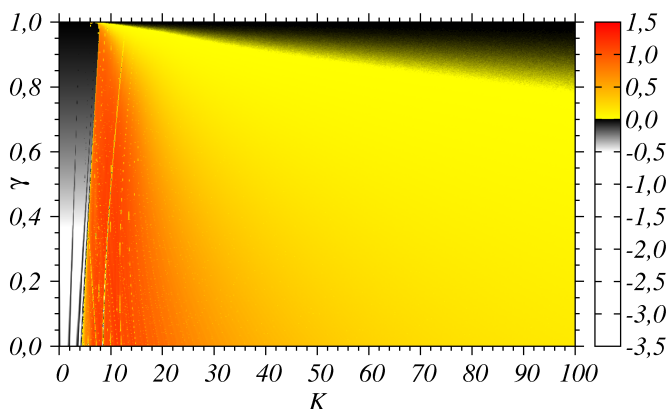


Fonte: A autora.

Para os valores de β até aqui observados, conforme aumentamos este parâmetro no sistema, mais periódico se torna o espaço de parâmetros. Contudo, aumentando o valor do parâmetro β , para $\beta = 1,0$, caso de ressonância, temos o espaço de parâmetros do mapa padrão dissipativo relativístico para $0 \leq K \leq 100$ e $0,0 \leq \gamma \leq 1,0$, que pode ser observado na Fig. 3.8. Nota-se que ao contrário do espaço de parâmetros das Figuras anteriores, neste encontramos uma região caótica predominante, com apenas duas pequenas regiões de comportamento de pontos fixos, uma na lateral esquerda e outra na parte superior. Porém o comportamento antes observado, não é válido para grandes velocidades,

quando o sistema apresenta o caso de ressonância.

Figura 3.8: Espaço de parâmetro ($K \times \gamma$), para $\beta = 1,0$.



Fonte: A autora.

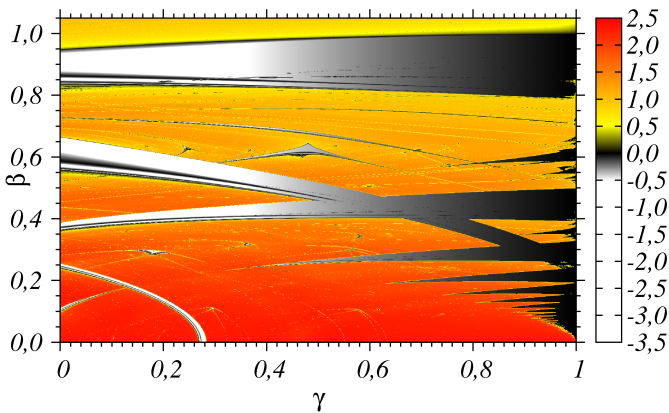
Portanto, ao passo que variamos o parâmetro relativístico β o espaço de parâmetros sofre modificações. Analisando primeiramente, os valores de $\beta = 0,1$ até $\beta = 0,7$ observamos que o espaço de parâmetros sofre variações significativas. Para $\beta = 0,1$, Fig. 3.5, temos um espaço de parâmetros contendo uma pequena região periódica e uma região caótica dominante, posteriormente para $\beta = 0,4$, Fig. 3.6, constatamos o surgimento de regiões de periodicidades ou estruturas tipo-camarões imersos nas regiões caóticas. E ainda, para $\beta = 0,7$, Fig. 3.7, percebemos a predominância de regiões de pontos fixos periódicos no espaço de parâmetros e uma pequena região de comportamento caótico com listras de regiões de periodicidades. Assim, podemos afirmar que, aumentando o valor do parâmetro β no sistema, aumentamos também a existência de regiões periódicas. Ou ainda, quanto maior o valor do β , maior a periodicidade do sistema para os intervalos de parâmetros investigados. Por outro lado, para $\beta = 1,0$, Fig. 3.8, quando o sistema apresenta-se em ressonância, o espaço de parâmetros foge a regra observada anteriormente e apresenta predominância de regiões caóticas e uma pequena região de comportamento de pontos fixos periódicos.

3.2.5 RESULTADOS PARA ($\gamma \times \beta$)

Nesta Seção, apresentaremos e discutiremos os resultados

obtidos da análise dos espaços de parâmetros do mapa padrão dissipativo relativístico para $(\gamma \times \beta)$. Para tanto, variamos os valores da dissipação γ e do parâmetro β (onde a velocidade do sistema está implícita) e fixamos o valor de $K = 20$. Assim, na Fig. 3.9, podemos observar o comportamento do mapa, representado pelo diagrama do maior expoente de Lyapunov para $0 \leq \gamma \leq 1$ e $0,0 \leq \beta \leq 1,0$. Dessa forma observamos regiões de caos (em amarelo, laranja e vermelho), de periodicidade e de ponto fixo (preto e branco respectivamente) coexistindo. Em adição observamos dois tipos de padrões imersos ao domínio caótico. Constatamos esse padrões ou estruturas, na Fig. 3.10(a), uma das ampliações da Fig. 3.9, para o diagrama do expoente de Lyapunov $0,05 \leq \gamma \leq 0,65$ e $0,05 \leq \beta \leq 0,40$, assim verificamos pequenas estruturas periódicas, algumas tipo-camarões, imersas na região caótica, em diferentes tamanhos e autossimilares.

Figura 3.9: Espaço de parâmetro $(\gamma \times \beta)$, para $K = 20$.

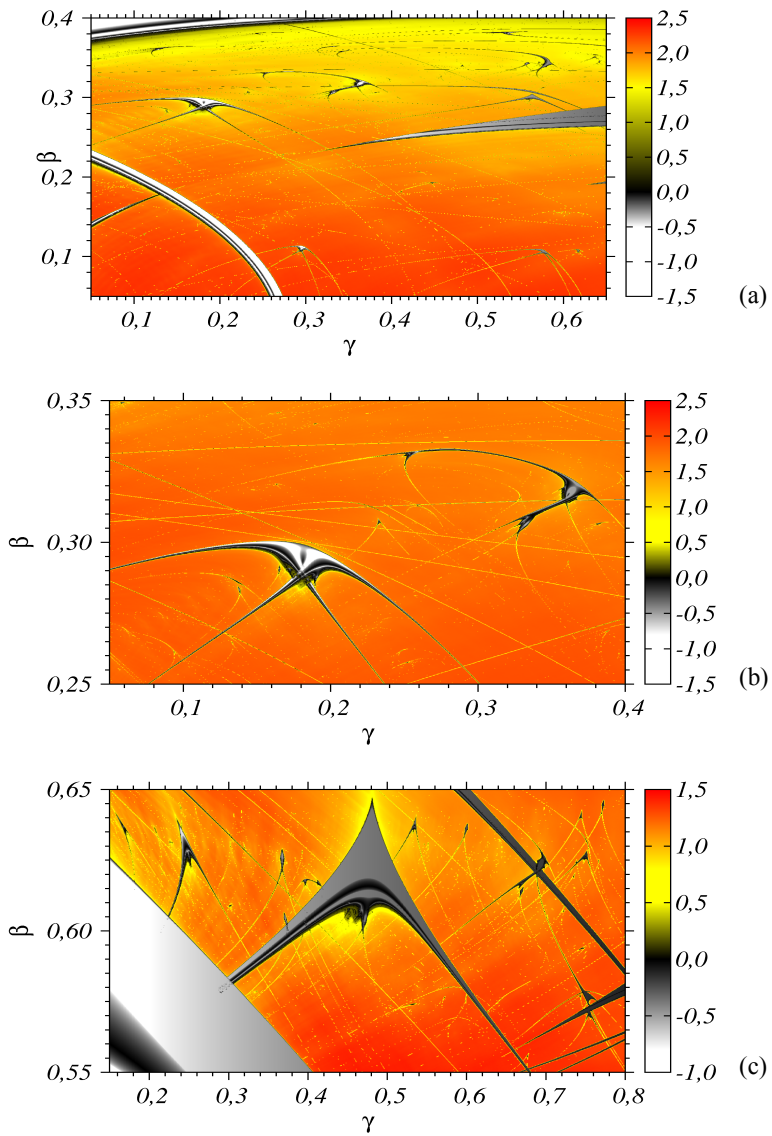


Fonte: A autora.

Ampliando mais uma vez a Fig. 3.9, na Fig. 3.10(b), para $0,05 \leq \gamma \leq 0,40$ e $0,25 \leq \beta \leq 0,35$, podemos observar a existência de estruturas tipo-camarões autossimilares. No interior destas regiões periódicas, observamos, mais uma vez, a existência de linhas brancas, que são linhas referentes aos expoentes de Lyapunov mais negativos que cruzam o domínio do *shrims* de forma organizada e aparentemente simétrica. A Figura 3.10(c), para $0,15 \leq \gamma \leq 0,80$ e $0,55 \leq \beta \leq 0,65$, a ampliação mostra outra região do espaço de parâmetros, Fig. 3.19, onde também existe auto-similaridade, assim reafirmando a auto-similaridade inerente

a dinâmica do sistema.

Figura 3.10: Espaço de parâmetro $(\gamma \times \beta)$, para $K = 20$. Ampliação da Fig. 3.9.



Fonte: A autora.

Este padrão, diferente dos relatados nas Figs. 3.10(a) e 3.10(b) são estruturas, do tipo-*Cuspidal*, e elas se repetem em diferentes tamanhos. Essas estruturas também são auto-similares, uma vez que o espaço de parâmetros está repleto delas e quanto mais ampliações fizermos mais estruturas idênticas, cada vez menores surgem. No interior de algumas estruturas tipo-*Cuspidal*, podemos observar a existência de linhas brancas. Essas linhas são referentes aos expoentes de Lyapunov mais negativos que cruzam o domínio dos *Cuspidal* de forma organizada e aparentemente simétrica (ao seu “eixo central”). Outro ponto a ser discutido com relação aos expoentes de Lyapunov é a respeito das linhas pretas no interior destas estruturas, que fazem referência ao valor zero assumido pelos expoentes, indicando a existência de bifurcações. Essas linhas pretas podem ser notadas dentro das regiões de periodicidade, tipo-*Cuspidal*, o que pode indicar a existência de uma perturbação do sistema, ou seja, bifurcação.

Portanto, observamos que o espaço de parâmetros está repleto dessas estruturas periódicas imersas na região caótica e quanto mais ampliações fizermos mais destas estruturas encontraremos. Nesta Fig. 3.9, encontramos uma estrutura denominada *cuspidal* por outros autores em artigos científicos (Bonatto; Gallas, 2007; Celestino *et al.*, 2011; Francke; Poschel; Gallas, 2013; Celestino *et al.*, 2014), esta assim como os *shrimps*, surgem no espaço de parâmetro com diferentes tamanhos. Podemos observá-las a medida que são feitas ampliações, pois mais estruturas idênticas, cada vez menores surgem no espaço de parâmetros.

Assim, reforçando o relatado anterior da existência de uma ampla variedade de modelos a tempo contínuo e discreto (Bonatto; Gallas; Ueda, 2008), que também apresentam esta característica, ou seja, apresenta pequenas regiões de estruturas periódicas (preto), imersas na região caótica. E essas estruturas periódicas, denominadas na literatura como *cuspidal* e *shrimps* (Bonatto; Garreau; Gallas, 2005, Freire *et al.* 2008. e Bonatto; Gallas, 2007), surgem no espaço de parâmetro com diferentes tamanhos, ou seja, temos a presença de estruturas auto-similares.

4 EFEITO DA TEMPERATURA NA DINÂMICA DO MPDR

Neste capítulo apresentaremos uma visão geral do que acontece com a dinâmica do mapa padrão dissipativo relativístico, quando colocado em contato com um reservatório térmico. Em outras palavras tentaremos caracterizar os efeitos de ruído (reservatório térmico) nas estruturas periódicas (tipo-camarões) presentes no espaço de parâmetros. Para tanto, variamos a temperatura do sistema e discutiremos as mudanças sofridas no espaço de parâmetros e consequentemente na dinâmica do sistema.

O reservatório térmico Gaussiano é colocado em contato com a partícula modelada pelo MPDR adicionando-se o parâmetro $\xi(n)$, que representa o ruído. Sendo que de acordo com o teorema dissipação-flutuação $\langle \xi(n)^2 \rangle = 2(1-\gamma) k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura (Manchein, Celestino, Beims, 2013). Assim, a nova forma do mapa é a seguinte:

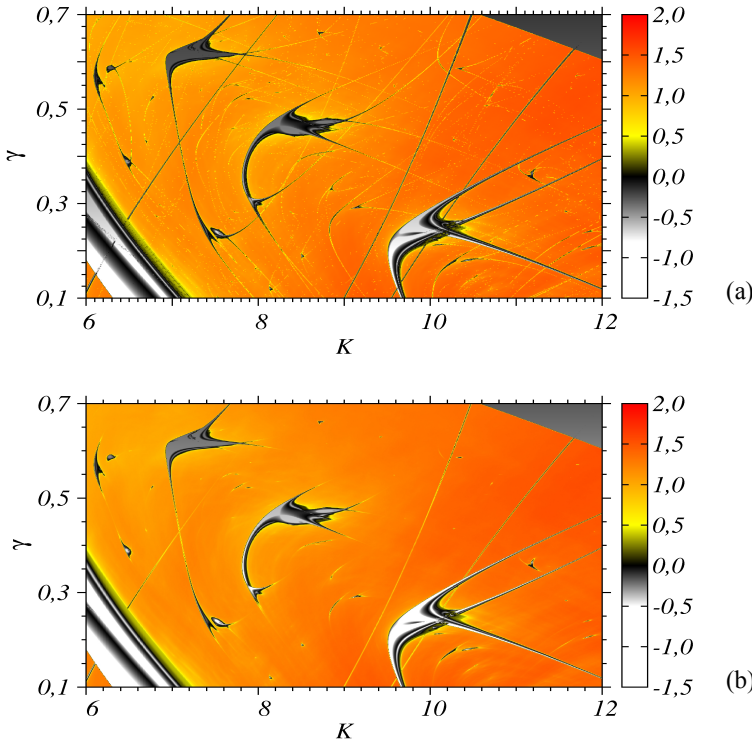
$$y_{n+1} = \gamma y_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \xi_n \quad (\text{mod } 1), \quad (76)$$

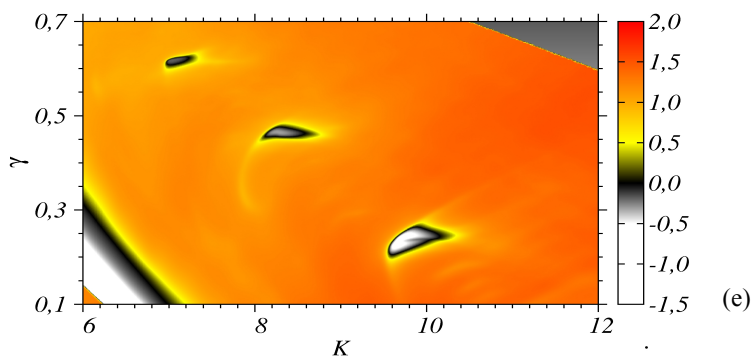
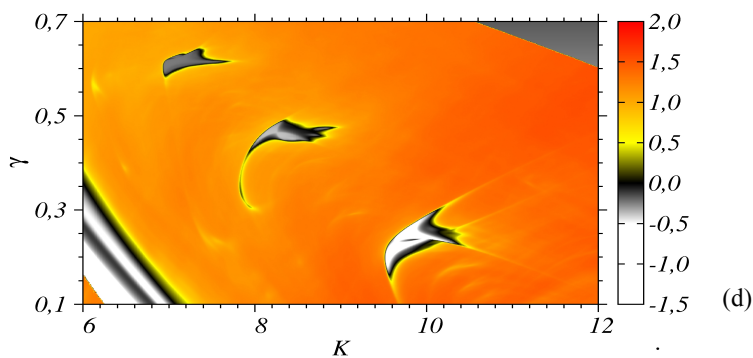
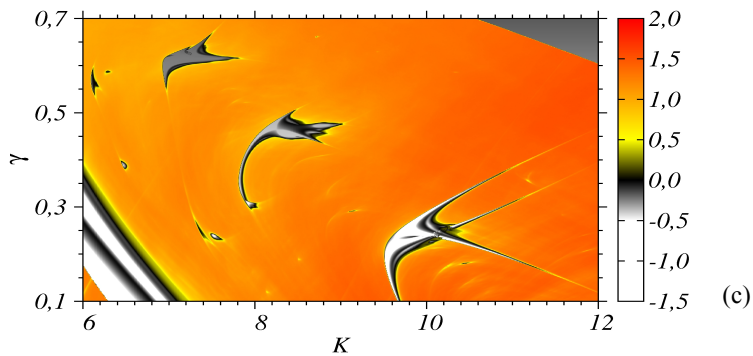
$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} (1 + \beta^2 y_{n+1}^2)^{-1/2} \quad (\text{mod } 1). \quad (77)$$

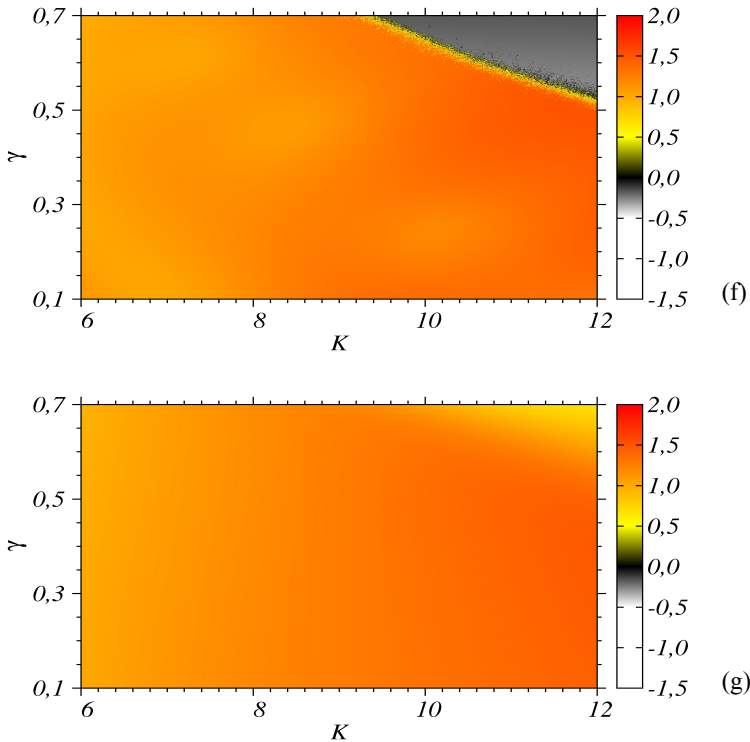
Aumentamos gradativamente o valor do parâmetro T , para analisar a influência da introdução do ruído no MPDR. Se $T=0$, recuperamos o mapa padrão dissipativo relativístico, dado pelas Eqs. (20) e (21). O painel com a Fig. 4.1, proporciona uma visão geral da dinâmica do sistema, onde podemos observar os espaços de parâmetros para $(K \times \gamma)$, com β fixo e em uma função da amplitude da temperatura (T). A Fig. 4.1(a) apresenta o caso de temperatura nula. A seguir aumentamos gradativamente a temperatura de $T = 10^{-7}$; 10^{-6} ; 10^{-5} ; 10^{-4} ; 10^{-2} até $T=10^{-1}$ com os resultados sendo apresentados nas Figs. 4.1(b-g). Assim, para $T=10^{-7}$, uma temperatura considerada muito pequena (veja Fig. 4.1(b)), não há uma mudança significativa nas regiões de periodicidade presentes no espaço de parâmetros. Contudo quando a temperatura é aumentada, Fig. 4.1(c-e), o quadro começa a mudar e a perturbação provocada uma transição de “*ordem para caos*” no sistema. As estruturas tipo-camarões ou *shrimps* e as listras (brancas, pretas e cinzas), que representam regiões de pontos fixos e periódicos e estão situadas nos espaços de parâmetros no canto inferior esquerdo, são todas

destruídos. Lembrando que as linhas ou faixas na cor preta, representam os expoentes de Lyapunov nulos, o que remete a existência de uma bifurcação no sistema. Podemos concluir desse estudo que essas estruturas são, de acordo com os resultados, mais frágeis pois são destruídas pelo ruído mais facilmente. Nas Figs. 4.1(f) e (g), podemos observar a destruição destas regiões de dinâmica periódica no canto superior direito do espaço de parâmetros. A destruição das estruturas tipo-camarões, devido ao ruído, começaram a partir de suas antenas, estendendo-se para o “corpo do camarão”, conforme a temperatura era aumentada. Paralelamente, os outros tipos de estruturas periódicas eram afetadas até que completamente destruídas quando a temperatura atingiu um valor alto suficiente, tornando o espaço de parâmetros estudado, completamente caótico.

Figura 4.1: Espaços de parâmetros ($K \times \gamma$), para (a) $T=0$, (b) $T=10^{-7}$; (c) $T=10^{-6}$; (d) $T=10^{-5}$; (e) $T=10^{-4}$; (f) $T=10^{-2}$; (g) $T=10^{-1}$, para $\beta=0,4$.







Continuação Fig. 4.1. Fonte: A autora.

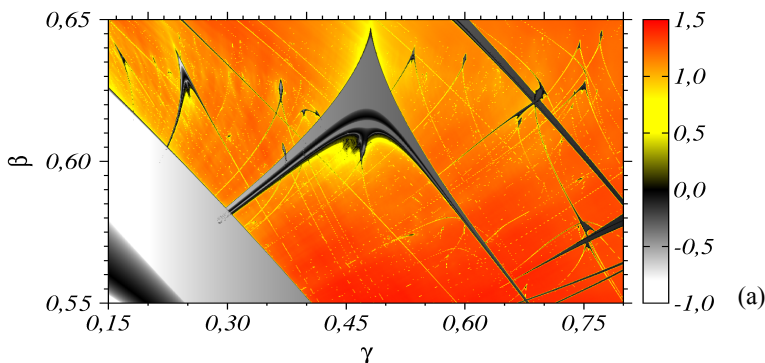
Em outras palavras, a predominância da caoticidade torna-se cada vez mais evidente com o aumento da temperatura, até o completo desaparecimento das estruturas periódicas em $T = 10^{-1}$) Fig. 4.1(g). Portanto aumentando o ruído, ou temperatura, do sistema, destruímos as regiões onde o sistema apresenta periodicidade e há a predominância de caos no mesmo.

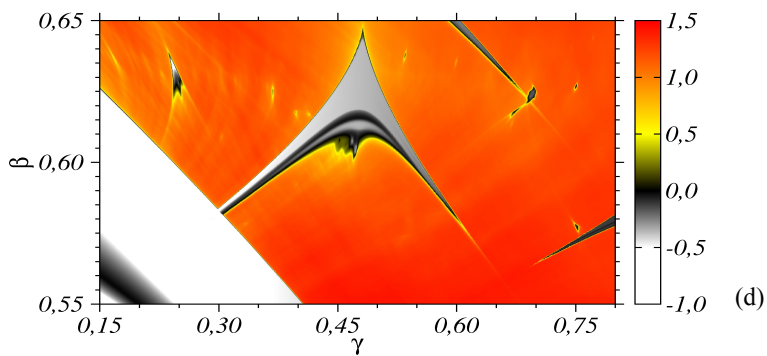
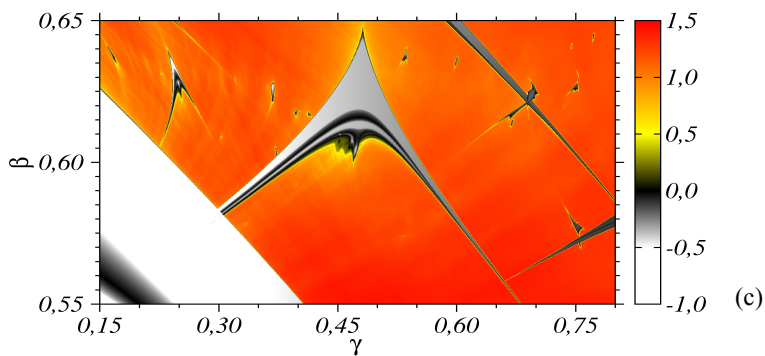
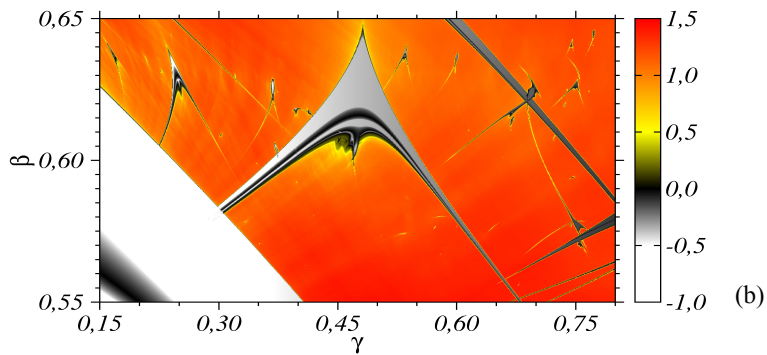
Para o espaço de parâmetros $(\gamma \times \beta)$, com K e T fixos, construímos os espaços de parâmetros para alguns valores de temperatura (T) no sistema, conforme mostrado na Fig. 4.2.

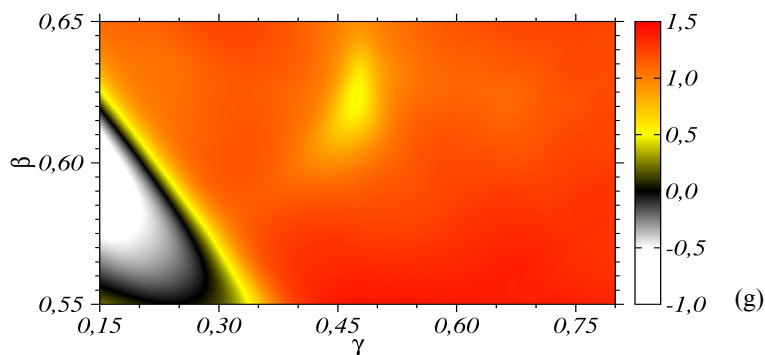
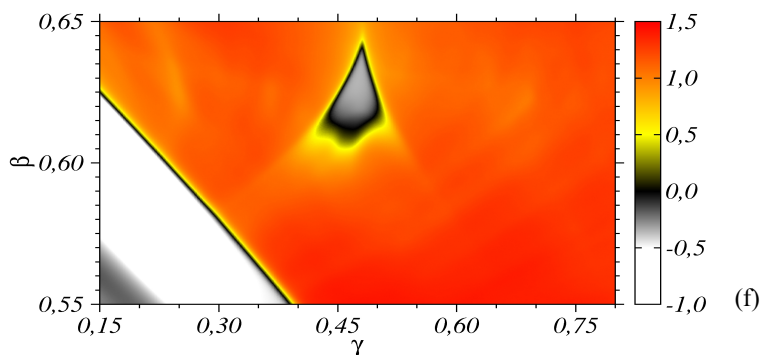
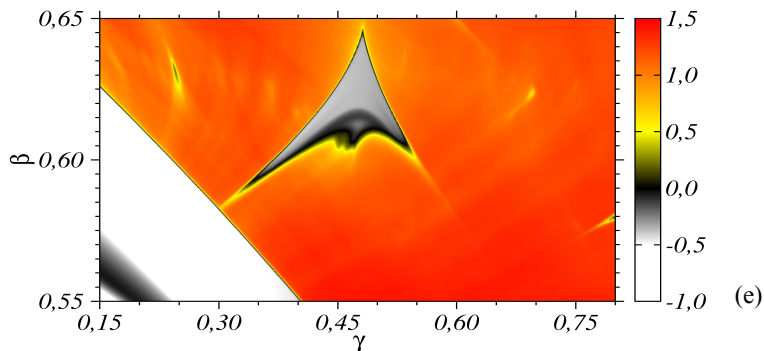
Assim no painel com a Fig. 4.2, podemos constatar, conforme feito anteriormente para o espaço $(K \times \gamma)$, os espaços de parâmetros para $(\gamma \times \beta)$, com K fixo e em função da amplitude da temperatura (T), para $T = 10^{-7}$; 10^{-6} ; 10^{-5} ; 10^{-4} ; 10^{-3} ; 10^{-2} . Inicialmente a Fig. 4.2(a) apresenta o

caso de temperatura nula. A seguir aumentamos a temperatura para $T = 10^{-7}$; temperatura muito pequena, Fig. 4.2(b), novamente não temos mudanças no espaço de parâmetros, as regiões de periodicidade estão presentes e sem alteração significativas. Porém quando a temperatura é aumentada, Fig. 4.2(c-e), o espaço de parâmetros começa a mudar e a perturbação provoca, mais uma vez, a transição ordem-caos no sistema. As estruturas denominadas *cuspidal* e as listras (brancas, pretas e cinzas), são destruídas. As linhas na cor preta (expoentes de Lyapunov nulos), que estão situadas nos espaços de parâmetros no canto inferior esquerdo, indicam uma possível bifurcação no sistema. Essas estruturas são mais instáveis e novamente são destruídas pelo ruído mais facilmente. Nas Figs. 4.2(f) e 4.2(g), podemos observar a destruição das estruturas menores existentes na Fig. 4.2(a), sendo substituída por regiões caóticas em amarelo e vermelho, assim como ocorrido anteriormente. As estruturas tipo-*cuspidal* também foram gradativamente perturbadas pelo ruído, em que inicialmente as suas antenas foram destruídas e depois as regiões mais internas destas estruturas foram atingidas. Nestas regiões aparecem as bifurcações que também são destruídas e substituídas por regiões caóticas destacadas em amarelo e vermelho. Portanto, através da variação da temperatura do sistema, demonstramos que é possível obter, para ambos os casos estudados, uma grande região de caos no espaço de parâmetros, ou seja, é possível obter uma região contínua de caos sem janelas periódicas no espaço de parâmetros.

Figura 4.2: Espaços de parâmetros ($\gamma \times \beta$), para (a) $T=10^{-7}$; (b) $T=10^{-6}$; (c) $T=10^{-5}$; (d) $T=10^{-4}$; (e) $T=10^{-3}$; (f) $T=10^{-2}$, para $K = 20$.







Continuação Fig. 4.2. Fonte: A autora.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos a dinâmica do mapa padrão, nas versões conservativo, dissipativo e ainda dissipativo relativístico com e sem a presença de ruído, através de abordagens numérica e analítica. Os principais objetivos do mesmo referem-se à compreensão e ao entendimento da dinâmica do mapa padrão nos regimes supracitados, e a caracterização da influência da variação do parâmetro relativístico e do parâmetro referente ao ruído na dinâmica do mapa padrão dissipativo relativístico. Com estes objetivos em mente, analisamos o comportamento de cada sistema (sem a influência da temperatura) através dos seus respectivos espaços de fases, à medida que aumentávamos o amortecimento e o parâmetro relativístico. Esperávamos como resultados, o surgimento de atratores no espaço de fases quando adicionamos um termo dissipativo ao sistema. Obtivemos exatamente este resultado: conforme aumentávamos o parâmetro de dissipação percebemos que a estrutura do espaço de fases sofria grandes mudanças estruturais com o surgimento de vários atratores. Estes por sua vez surgiam devido à quebra das trajetórias quase-periódicas que delimitam as ilhas de regularidade, do caso onde a energia é uma quantidade conservada. O número de atratores aumentava conforme nos aproximávamos do limite conservativo em todos os casos estudados. Próximo a este limite podem existir uma grande quantidade de atratores, conforme mostrado para o rotor pulsado no artigo de Martins e Gallas, (2008). Além disso, o incremento do parâmetro relativístico mostrou-se essencial no aparecimento de domínios de regularidade no espaço de fases, até então quase completamente caótico, para o caso onde a energia é uma quantidade conservada.

No estudo analítico do mapa padrão dissipativo relativístico esperávamos encontrar resultados que revelassem a estabilidade do sistema, calculando os autovalores da matriz Jacobiana (J) nos pontos fixos, e assim, através dos autovalores σ_1 e σ_2 , calcular os expoentes de Lyapunov (λ_j), que indicam se o modelo tem regiões caóticas ou não. Porém os expoentes de Lyapunov dependem dos autovalores que são descritos em termos dos valores dos parâmetros K , γ e β , assim não podemos fazer nenhuma afirmação sobre a estabilidade do mapa por meio do estudo analítico do sistema, pois para isto, teríamos que fazer uma adequação na escolha dos valores para os parâmetros K , γ e β , que teriam infinitas possibilidades. Por outro lado, encontramos uma expressão que nos permitiu mostrar onde ocorre o nascimento ou

aparecimento de regiões de período 1 no espaço de parâmetro ($K \times \beta$). Em adição através de estudos numéricos por meio de diagramas de espaço de parâmetros e do maior expoente de Lyapunov, podemos mapear os conjuntos de parâmetros com o intuito de encontrar regiões estáveis e caóticas. Assim, analisando os diagramas de espaço de parâmetros encontramos, além de regiões periódicas imersas em domínios caóticos, duas estruturas encontradas em vários sistemas dinâmicos e amplamente citados na literatura, denominados *cuspidal* e *shrimps* (Bonatto; Garreau; Gallas, 2005, Freire *et al.* 2008. e Bonatto; Gallas, 2007, Celestino *et al.*, 2014). Tais estruturas auto-similares foram encontradas em diferentes tamanhos e configurações, uma vez que o espaço de parâmetros está repleto delas e quanto mais ampliações fizermos mais estruturas, cada vez menores surgem.

Posteriormente os espaços de parâmetros dos períodos foram construídos para refinar ainda mais a visualização dessas estruturas periódicas e suas regras de formação, além de caracterizar o papel do parâmetro relativístico na dinâmica do mapa padrão relativístico. Por meio deste estudo foi possível verificar que as estruturas periódicas se organizam do menor para o maior período, estrutura azul (período 1) e verde (período 2), intercaladas por regiões caóticas.

Finalmente caracterizamos os efeitos de ruído (reservatório térmico) nas estruturas periódicas (tipo-camarões) presentes no espaço de parâmetros do MPDR, esperávamos como resultados, a destruição destas regiões. Obtivemos os resultados esperados, introduzindo a temperatura ouve a predominância da caoticidade e ela torna-se cada vez mais evidente com o aumento da temperatura, até o completo desaparecimento das estruturas periódicas altas temperaturas. As regiões de periodicidade denominados, *cuspidal* e camarões ou *shrimps* foram destruídas. Tanto nas estruturas tipo *cuspidal* quanto nos *shrimps*, inicialmente foram destruídas as “antenas”, depois as regiões menos estáveis destes onde, existem bifurcações e posteriormente sendo totalmente destruído e substituído por uma estrutura caótica. As listras brancas, pretas e cinzas que aparecem nos espaços de parâmetros e representam as regiões de pontos fixos e periódicos, também são destruídas. As linhas ou faixas na cor preta, representam o expoente de Lyapunov nulo, o que remete a uma bifurcação do sistema. Essas estruturas são mais instáveis e são destruídas pelo ruído mais facilmente. Também observou-se que as estruturas periódicas menores, foram as primeiras a serem destruídas pelo ruído. Assim a predominância da caoticidade tornou-se cada vez mais evidente com o aumento do ruído, até o completo desaparecimento das estruturas periódicas no sistema.

Portanto, concluímos que aumentando o ruído, ou temperatura, do sistema, destruimos as regiões onde o sistema apresenta periodicidade e há a predominância de caos no mesmo. Esse pode ser um método utilizado para eliminar atratores periódicos em qualquer que seja o sistema dissipativo.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLIGOOD, K.T.; SAUER T.D.; YORKE J.A. **Chaos An Introduction to Dynamical Systems**. Springer, Nova York, 1996.

BENETTIN, G. et al. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. v. 15, n. 9, p. 09-20, 1980.

BONATTO, C., GARREAU, J. C. E GALLAS, J.A.C. **Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser**. *Physical Review Letters* 95. 143905, 2005.

BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. **Accumulation boundaries: codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric and chemical oscillator**. *Philosophical Transactions of Royal Society A*, v. 366, p 505-517, 2007.

CELESTINO, A. *et al.* **Ratchet Transport and Periodic Structures in Parameter Space**. *Physical Review Letters* 106, p. 234101, 2011.

CELESTINO, A. *et al.* **Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport**. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 19, p. 139–149, 2014.

CHERNIKOV, A.A. *et al.* G.M. **Chaos in the relativistic generalization of the standard maps**. *Phys. Rev. A*, 40, 4072-4076, 1989.

CHIRIKOV, B.V. **Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity**, Institute of Nuclear Physics. Novosibirsk, Preprint No. 267, 1969.

CHIRIKOV, B.V. **Physics Reports** 52 263, 1979.

CIUBOTARIU, C.; BĂDELIȚĂ, L.; STANCU, V. **Chaos in dissipative relativistic standard maps**. Chaos, Solitons and Fractals 13, 1253-1267, 2002.

FERRARA, N.F.; PRADO, C.P.C. **Caos, Uma Introdução**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1995.

FISHMAN, S; PRANGE, R.E.; GRINIASTY, M. Scaling theory for the localization length of the kicked rotor. Physics Letters A 39, 1628-1633, 1989.

FREIRE, J.G. *et al.* **Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the lorenz-84 low-order atmospheric circulation model**. Chaos, v 18, 2008.

LAN, B. L.; YAPP, C. **Dissipative relativistic standard map: Periodic attractors and basins of attraction**. Chaos, Solitons and Fractals 37, 1300–1304, 2008.

LEMOS, N.A. **Mecânica Analítica**, 2 ed., Editora Livraria da Física, 2007.

LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and Chaotic Dynamics**. New York: Springer-Verlag, 1992.

MARTINS, L. C.; GALLAS, J. A. C. **Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: a map with many coexisting attractors**. International Journal of Bifurcation and Chaos 18, 1705–1717, 2008.

MANCHEIN, C.; BEIMS, M.W. **Conservative Generalized Bifurcation Diagrams**. Physics Letters A, v. 377, p. 789, 2013.

MONTEIRO, L.H.A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2002.

OLIVEIRA, D. F.M.; LEONEL, E. D.; ROBNIK, M. **Boundary crisis and transient in a dissipative relativistic standard map**. Physics Letters A 375, 3365-3369, 2011.

OLIVEIRA, D. F.M.; LEONEL, E. D.; ROBNIK, M. **Dynamical properties of a particle in a wave packet: Scaling invariance and boundary crisis**. Physics Letters A 376, 3630-3637, 2012.

OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. Cambridge University Press, New York, 2000.

PISARCHIK, A.; JAIMES-REATEGUI, R. **Control of basins of attraction in a multistable fiber laser**. Physics Letters A, vol. 374, no. 2, pp. 228 – 234, 2009.

RECH, P. C. Bifurcação, **Multiestabilidade e Sincronização em Sistemas Dinâmicos Discretos**. Dissertação de doutorado, UFPR/PR, 2005.

SHMUEL, F; PRANGE, R.E. e GRINIASTY, M. **Scaling theory the localization length of the kicked rotor**. Phys. Rev. A, 39, 1628-1633, 1989.

WENZEL, W.; BIHAM, O.; JAYAPRAKASH, C. **Periodic orbits in the dissipative standard map**. Phys. Rev. A, 43, 6550-6557, 1991.

WOELLNER, C. F. **Aspectos dinâmicos de uma rede de mapas Hamiltonianos acoplados**. Dissertação de mestrado, UFPR/PR, 2006.