

Estruturas de bifurcação delimitam regiões periódicas imersas em áreas de caos em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos. Neste trabalho são estudadas as estruturas de bifurcação de sistemas dinâmicos contínuos quadridimensionais, um circuito de Chua e um acoplamento de dois osciladores de FitzHugh-Nagumo. Investigou-se as bifurcações que formam o endoesqueleto de camarões em planos de parâmetros no circuito de Chua, além de estruturas espirais, caos transiente e bacias de atração caóticas e periódicas. Análise semelhante foi realizada no acoplamento de dois osciladores de FitzHugh-Nagumo, identificando estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, estruturas de línguas de Arnold imersas em regiões de comportamento quase-periódico, com períodos organizados e conectadas com regiões periódicas, e a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

Joinville, 2014

ANO
2014

ANDERSON HOFF | ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS
QUADRIDIMENSIONAIS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS QUADRIDIMENSIONAIS

ANDERSON HOFF

JOINVILLE, 2014

ANDERSON HOFF

**ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS
DINÂMICOS QUADRIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada
para obtenção do título de mestre em
Física pela Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas – CCT.

Orientador: Prof. Holokx Abreu
Albuquerque

Joinville, SC

2014

H698e

Hoff, Anderson.

Estruturas de bifurcação em sistemas
dinâmicos quadridimensionais / Anderson
Hoff. – 2014

64 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

Bibliografia : p. : 61-64

Dissertação (mestrado) – Universidade do
Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências
Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Física, Joinville, 2014.

1. Estruturas de bifurcação. 2. Sistemas
quadridimensionais. 3. Expoente de Lyapunov.
4. Chua. 5. FitzHugh-Nagumo. I. Albuquerque,
Holokx Abreu. II. Universidade do Estado de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. IV. Título.

CDD 531.1

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UDESC

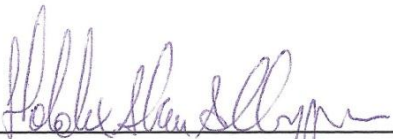
ANDERSON HOFF

**ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS
QUADRIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração "Física".

Banca Examinadora

Orientador:



Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC

Membros



Prof. Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC



Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos
UNIFESP

Joinville, SC, 25 de fevereiro de 2014.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Cleidi, pelo amor, apoio, compreensão e companheirismo em todos os anos que estamos juntos.

À minha família, em especial meus pais Rubens e Janete, pelo amor e educação, e meus irmãos Claudinei e Jéssica.

Ao meu orientador professor Holokx, por aceitar o desafio de me orientar, pela paciência e ensinamentos transmitidos nestes dois anos.

Aos amigos com os quais sei que sempre posso contar. À Mariana, por toda ajuda prestada no Mestrado e no processo do Doutorado.

Aos amigos do Mestrado, pelas discussões, troca de conhecimentos, momentos de descontração e os incontáveis cafés.

Aos professores do Mestrado, em especial Professor Paulo pelos ensinamentos e sua franqueza, e Professor César pelos resultados e a parceria nos artigos.

À CAPES, CNPq e UDESC pelo apoio financeiro nestes dois anos.

RESUMO

HOFF, Anderson. **Estruturas de bifurcação em sistemas dinâmicos quadridimensionais**. 2014. 64 f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2014.

Estruturas de bifurcação delimitam regiões periódicas imersas em áreas de caos em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos. Neste trabalho são estudadas as estruturas de bifurcação de sistemas dinâmicos contínuos quadridimensionais, um circuito de Chua e um acoplamento de dois osciladores de FitzHugh-Nagumo. Os resultados numéricos foram obtidos através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, através de integração numérica dos sistemas, e das curvas de bifurcação, por continuação numérica através do MatCont. Investigou-se as bifurcações que formam o endoesqueleto de camarões em planos de parâmetros no circuito de Chua, além de estruturas espirais, caos transiente e bacias de atração caóticas e periódicas. Análise semelhante foi realizada no acoplamento de dois osciladores de FitzHugh-Nagumo, identificando estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, estruturas de línguas de Arnold imersas em regiões de comportamento quase-periódico, com períodos organizados e conectadas com regiões periódicas, e a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Palavras-chave: Estruturas de bifurcação. Sistemas quadridimensionais. Expoente de Lyapunov. Chua. FitzHugh-Nagumo.

ABSTRACT

HOFF, Anderson. **Bifurcation structures in four-dimensional dynamical systems**. 2014. 64 f. Dissertation (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2014.

Bifurcation structures form periodic regions immersed in areas of chaos in parameter planes of dynamical systems. In this work we studied the bifurcation structures of four-dimensional continuous-time dynamical systems, a Chua's circuit and a coupling of two FitzHugh-Nagumo oscillators. Numerical results were obtained by calculating the Lyapunov exponents obtained by numerical integration, and bifurcation curves by numerical continuation through MatCont. They were investigated the bifurcations that form the endoskeleton of shrimps in parameter planes in the Chua circuit, also spiral structures, transient chaos and chaotic and periodic basins of attraction. A similar analysis was performed on the coupling of two FitzHugh -Nagumo oscillators, identifying periodic structures immersed in chaotic regions, Arnold tongues structures immersed in regions of quasi-periodic behavior with periods organized and connected with periodic regions, and the sensitivity of the system in the initial conditions.

Key words: Bifurcation structures. Four-dimensional systems. Lyapunov exponent. Chua. FitzHugh-Nagumo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 SISTEMAS DINÂMICOS	15
3 ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO	21
3.1 BIFURCAÇÕES	21
3.2 CONTINUAÇÃO NUMÉRICA	24
4 RESULTADOS	29
4.1 SISTEMA DE CHUA	29
4.2 SISTEMA DE FITZHUGH-NAGUMO	46
5 CONCLUSÕES	59
 Referências	 61

1 INTRODUÇÃO

O procedimento de modelar sistemas utilizando um conjunto de equações diferenciais tem aplicações nos mais variados campos, como Física, Química, Biologia, Economia, e nas Engenharias de um modo geral. O fato de que simples equações podem ter soluções de grande complexidade continua a espantar cientistas e aumenta a esperança de que fenômenos aparentemente complicados de serem compreendidos possam ser descritos adequadamente por modelos simples. Muitos de tais modelos foram desenvolvidos e estudados em detalhes, mas eles continuam a apresentar surpresas e levantar questões.

Nas últimas décadas, um número considerável de trabalhos foram desenvolvidos em sistemas não lineares analisando bifurcações em planos de parâmetros [1, 3, 2]. Como resultado, a existência de órbitas regulares pode ser visualizada em áreas de periodicidade imersas em regiões de comportamento caótico ou quase-periódico. As bifurcações são fenômenos utilizados como indicadores de mudanças drásticas em comportamentos dinâmicos e extensivos esforços tem sido feitos para descrever como bifurcações entre oscilações periódicas e caóticas se manifestam em todos os tipos de sistemas, identificando padrões que unam diversos sistemas não-lineares em uma mesma classe.

Os parâmetros de sistemas dinâmicos determinísticos desempenham uma importante função especificando as transições entre comportamento caótico e periódico. Esta influência dos parâmetros na transição do atrator pode ser representada em planos de parâmetros. Para identificar os padrões de estruturas de bifurcação, diversos sistemas tem sido analisados utilizando os expoentes de Lyapunov e curvas de bifurcação sobrepostas em planos de parâmetros [5, 4, 6, 7]. O expoente de Lyapunov caracteriza os diferentes comportamentos que o sistema pode apresentar (equilíbrio, ciclo limite, caos), e o segundo mostra como ocorrem as mudanças entre as diferentes regiões. A combinação de diferentes técnicas dá uma ideia da evolução do sistema em termos dos parâmetros e das diferentes rotas para o caos.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar os resultados numéricos da análise de dois sistemas dinâmicos quadridimensionais: o primeiro uma variação do sistema de Chua obtido através da adição de uma variável de controle no circuito original, e o segundo sistema consiste num acoplamento de osciladores de FitzHugh-Nagumo que simulam o comportamento de neurônios. Através dos métodos computacionais de integração e continuação numérica, será mostrado que estes sistemas apresentam estruturas de bifurcação que organizam os diferentes comportamentos nos planos de parâmetros, semelhantes aos diversos sistemas contínuos e discretos repor-

tados na literatura. O estudo também revela a sensibilidade destes sistemas às condições iniciais impostas, característica de sistemas caóticos.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 é feita uma breve revisão teórica sobre sistemas dinâmicos e maneiras de classificar os diversos comportamentos que estes podem apresentar. O Capítulo 3 é dedicado à introdução de bifurcações e ao método de continuação numérica utilizado na obtenção dos resultados. No Capítulo 4 são apresentados separadamente os resultados numéricos com algumas discussões referentes aos dois sistemas quadridimensionais estudados: o sistema de Chua e o acoplamento de osciladores de FitzHugh-Nagumo. As conclusões finais do trabalho estão relacionadas no Capítulo 5, onde são resumidos os principais aspectos resultantes da dissertação, além de recomendações e sugestões para futuros trabalhos.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

Um sistema dinâmico consiste na formulação matemática do conceito científico geral de um processo determinístico. Os estados futuro e passado de muitos sistemas físicos, químicos, biológicos, ecológicos, econômicos e sociais podem ser previstos para uma certa extensão conhecendo seu estado presente e as leis governando sua evolução. Comprovado que estas leis não mudam no tempo, o comportamento de tal sistema pode ser considerado como completamente definido pelo seu estado inicial. Assim, a definição de um sistema dinâmico inclui um conjunto de seus estados possíveis (espaço de estados) e uma lei de evolução do estado no tempo [8]. O tempo em um sistema dinâmico pode ter uma variação contínua ou assumir somente valores discretos inteiros. Sistemas do primeiro tipo são classificados como a tempo contínuo (ou fluxo) e do segundo a tempo discreto (ou mapa).

A maneira mais comum de definir um sistema dinâmico contínuo é através de equações diferenciais. Um sistema quadridimensional não-linear a tempo contínuo pode ser expresso da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z, w, \alpha), \\ \dot{y} &= g(x, y, z, w, \alpha), \\ \dot{z} &= h(x, y, z, w, \alpha), \\ \dot{w} &= j(x, y, z, w, \alpha).\end{aligned}\tag{2.1}$$

No sistema de equações (2.1), f , g , h e j representam funções reais, com ao menos uma não-linearidade, x , y , z e w são as variáveis dinâmicas e α representa o conjunto de parâmetros de controle do sistema. Nesta dissertação são estudados dois sistemas dinâmicos quadridimensionais, um derivado do circuito tridimensional de Chua e o outro um acoplamento de dois osciladores de FitzHugh-Nagumo.

Um dos principais objetivos ao estudar sistemas dinâmicos é determinar o comportamento das soluções para os modelos matemáticos propostos, tendo eles interpretações físicas ou não. Basicamente, existem três técnicas para se investigar o comportamento de um sistema dinâmico:

- Técnica analítica: integram-se analiticamente as equações, determinando as soluções em termos de fórmulas gerais. Desse modo obtém-se soluções válidas para quaisquer condições iniciais e qualquer conjunto de parâmetros de controle. No entanto, somente para alguns sistemas de equações a solução analítica é possível de se obter;

- Técnica numérica: integram-se numericamente as equações, calculando valores para as variáveis $\vec{x}(t)$, para determinados valores da variável independente t . Usando este método, todo o trabalho de integração é realizado pelo computador, o conjunto de sistemas de equações solucionáveis é infinitamente maior que o da técnica analítica, porém as soluções são específicas para um conjunto de parâmetros e condições iniciais, sendo impossível generalizar tais soluções;
- Técnica qualitativa: através de cálculos analíticos relativamente simples, temos pistas de como o sistema evolui. Basicamente determinam-se as soluções assintóticas, os possíveis comportamentos do sistema quando $t \rightarrow \infty$, e a estabilidade dessas soluções, sem solucionar diretamente um sistema de equações diferenciais. Quando esta técnica é aplicada, perde-se parte da informação, relativa ao comportamento do sistema antes de atingir o regime permanente [9].

Sistemas dinâmicos multidimensionais revelam uma grande dificuldade para a obtenção de resultados analíticos que possam identificar possíveis comportamentos e a evolução de tal sistema no tempo. Assim, utilizam-se métodos numéricos e ferramentas computacionais para a análise destes sistemas. Entre os sistemas analisados incluem-se sistemas caóticos, os quais apresentam grande sensibilidade às condições iniciais. Diante disso pode-se questionar a fidelidade dos resultados numéricos, pois além da discretização do tempo fazem-se arredondamentos em todas as etapas do cálculo. Apesar disso, os resultados numéricos podem ser considerados como uma boa representação da realidade do fenômeno físico. O que dá suporte para tal confiabilidade é o Teorema do Sombreamento [10], o qual garante que, matematicamente, mesmo que a trajetória calculada numericamente divirja exponencialmente da trajetória verdadeira com as mesmas condições iniciais, existe uma trajetória verdadeira com condições iniciais ligeiramente diferentes que se aproxima da trajetória numérica. Em outras palavras, a solução numérica encontrada para a condição inicial x_0 corresponde na realidade ao comportamento do sistema com condição inicial $x_0 \pm \delta$, e isso valida os resultados obtidos numericamente.

Três métodos básicos são utilizados para estudar numericamente modelos de sistemas dinâmicos [11]:

- integração numérica ou simulações, incluindo computação dos expoentes de Lyapunov e características dimensionais e espectrais;
- análise na forma normal, computando coeficientes de equações canônicas reduzidas (forma normal) próximos de valores críticos de parâme-

tros para prever quais soluções e bifurcações estão presentes localmente;

- continuação de soluções especiais e suas fronteiras de estabilidade, computando famílias de equilíbrio, órbitas periódicas, detectando e continuando valores de parâmetros críticos (bifurcações) no qual a dinâmica do sistema muda qualitativamente.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados como conservativos ou dissipativos. Analisando um fluxo no espaço de fases pelo teorema de Liouville, pode-se verificar se o sistema é conservativo, ou não, observando a evolução temporal de um hiper-volume n -dimensional, definido pelo conjunto de condições iniciais, sendo n a dimensão do espaço de fases. Se o fluxo preservar o volume no espaço de fases, o sistema é dito conservativo. Se o volume no espaço de fases diminui com o tempo, o sistema é dissipativo. As trajetórias dos sistemas dissipativos, quando o sistema não diverge, convergem para uma região limitada do espaço de fases, o atrator, que é um conjunto de pontos invariante no tempo. Em sistemas autônomos contínuos com quatro dimensões, podem-se ter os seguintes tipos de atratores [9]:

- Ponto de equilíbrio estável: é um ponto no espaço de fases cujo comportamento do sistema converge e independe do tempo;
- Atrator periódico ou ciclo limite: é um conjunto de valores para o qual o comportamento do sistema converge, exibindo um comportamento periódico (movimento regular);
- Atrator quase-periódico (torus): exibe um comportamento quase-periódico com duas frequências fundamentais independentes. O comportamento quase-periódico sugere uma situação dinâmica na qual órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, entretanto, sem apresentar dependência sensível às condições iniciais;
- Atrator caótico: é um atrator que apresenta um comportamento aperiódico, e dependência sensível às condições iniciais, ou seja, a distância entre duas trajetórias cresce exponencialmente, mas o atrator ocupa um volume finito no espaço de fases.

Sistemas dinâmicos caóticos apresentam a característica de possuir divergência exponencial de trajetórias próximas, ou sensibilidade nas condições iniciais. Para medir esta taxa de afastamento entre trajetórias são utilizados os expoentes de Lyapunov [9]. O expoente de Lyapunov possui essa denominação em homenagem ao matemático russo Aleksandr Lyapunov, um

dos primeiros a explorar a estabilidade dinâmica há mais de cem anos atrás [12].

Dessa forma, seja um sistema de n equações diferenciais ordinárias, como o sistema (2.1), na qual existe uma hipersfera de condições iniciais centrada num ponto $x(t_0)$. Conforme o tempo transcorre, o volume se deforma. Considerando que ao longo da j -ésima dimensão ($j = 1, \dots, n$), o raio inicial $d_j(t_0)$ tenha variado exponencialmente no tempo, de forma que seu valor corresponda a $d_j(t)$ no instante t , teremos

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (2.2)$$

que pode ser reescrita como

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}, \quad (2.3)$$

onde os λ_j são chamados de expoentes de Lyapunov. Para sistemas dissipativos, o somatório dos expoentes de Lyapunov deve ser negativo. O cálculo dos expoentes é realizado numericamente, exceto quando a derivada de cada equação do sistema é constante e o expoente pode ser obtido algebricamente.

Sobre uma solução periódica, a distância entre dois pontos se mantém constante, em média, com o passar do tempo, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares ao atrator periódico, há contração do volume no espaço de fases, logo, os expoentes correspondentes a essas direções são negativos. No comportamento caótico, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, pois há divergência de trajetórias vizinhas, que implica na dependência sensível às condições iniciais.

Em sistemas N -dimensionais existem N expoentes de Lyapunov, que quando colocados em ordem crescente $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, podem ser associados aos seguintes tipos de atratores:

1. ponto de equilíbrio estável: tem-se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$, já que o volume de condições iniciais deve se contrair ao longo das N direções do espaço de fases, a fim de que a trajetória convirja para o ponto;
2. atrator periódico ou ciclo-limite: tem-se $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$, sendo que o expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória fechada;
3. torus d -dimensional: tem-se pelo menos dois à d expoentes de Lyapunov iguais a zero, ou seja, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d = 0$, obtendo um atrator

torus d -dimensional, e os outros expoentes sendo negativos (no mínimo um, pois o sistema é dissipativo);

4. atrator caótico: tem-se ao menos um expoente positivo ($\lambda_1 > 0$, associado à dependência sensível nas condições iniciais; o próximo é nulo, ao longo da trajetória, e o restante deve ser negativo, e sua soma maior, em módulo, que a soma dos expoentes positivos ($\sum_N \lambda_N < 0$), para o sistema dissipativo. Nos casos onde temos mais de um expoente de Lyapunov positivo, existe a ocorrência de regiões de hipercaos.

Os planos de parâmetros podem ser utilizados para analisar o comportamento de um sistema observando a variação da magnitude de uma dada quantidade, com as variações de dois parâmetros do sistema. Assim, o plano de parâmetros é um gráfico tridimensional, que representa bidimensionalmente a variação de quaisquer dois parâmetros que compõem o sistema, associados a um terceiro valor de interesse, por exemplo, a magnitude do maior expoente de Lyapunov, utilizado nesta dissertação. Graficamente, é utilizado um gradiente de cores para representar o valor do expoente de Lyapunov com relação ao par de parâmetros escolhidos. Esta variação de cores associadas ao maior expoente de Lyapunov permite verificar onde o sistema apresenta regiões de equilíbrio, regiões periódicas e regiões caóticas.

O estudo do comportamento dos sistemas, assim como a periodicidade das estruturas e as rotas para o caos, também foi realizado com outra ferramenta de visualização definida na literatura como diagrama isoperiódico [13, 14]. O diagrama isoperiódico é obtido através da variação de dois parâmetros do sistema, plotando o número de máximos ou mínimos locais de uma variável, obtendo assim os períodos das estruturas periódicas presentes no intervalo dos parâmetros escolhido, atribuindo uma cor a cada valor de período. Esta escala de cores é disposta no topo da figura, indicando o valor do período correspondente.

3 ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO

A teoria de bifurcação estuda e classifica fenômenos caracterizados por mudanças repentinas no comportamento decorrentes de pequenas variações nas condições impostas, analisando como a natureza qualitativa das soluções das equações depende dos parâmetros do sistema.

3.1 BIFURCAÇÕES

Em um sistema de equações dependente de parâmetros, a estrutura qualitativa do fluxo pode mudar ao variar seus parâmetros. Em particular, pontos de equilíbrio podem ser criados ou destruídos, ou alterar sua estabilidade. Estas mudanças qualitativas na dinâmica são chamadas bifurcações e os valores dos parâmetros no qual elas ocorrem são chamados pontos de bifurcações. Em outras palavras, bifurcação é uma mudança do tipo topológico do sistema quando seus parâmetros passam por um valor crítico [8]. Bifurcações são importantes cientificamente, pois fornecem modelos de transições e instabilidades quando alguns parâmetros são variados.

Podemos classificar as bifurcações quanto a possibilidade, ou não, de prevêê-las estudando os autovalores da matriz Jacobiana do sistema. Quando há essa possibilidade trata-se de bifurcações ditas locais, como sela-nó e Hopf, que podem ser definidas e estudadas analisando pequenas perturbações nas soluções periódicas. Quando não há, as bifurcações são ditas globais, como as bifurcações homoclínicas e heteroclínicas [15], as quais não podem ser detectadas analisando a vizinhança de pontos de equilíbrio.

Bifurcações de equilíbrio

Em sistemas dinâmicos contínuos, existem duas bifurcações principais pela qual um equilíbrio tem sua estabilidade alterada ao variar um ou mais parâmetros: a bifurcação sela-nó e a bifurcação de Hopf, que são identificadas a partir da análise dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema no ponto de equilíbrio.

Bifurcação sela-nó: está associada ao aparecimento de um autovalor $\lambda = 0$. A Fig. 1 mostra a principal característica dessa singularidade, a mudança de estabilidade, porque o ponto crítico do parâmetro $\alpha = 0$ representa o fim de um ramo estável e revela a inexistência de soluções com significado físico para valores de α maiores que zero, já que o equilíbrio torna-se um número complexo, do resultado da função $\alpha = -x^2$, retirada da Ref. [8]. A bifurcação sela-nó é o mecanismo básico de criação e destruição de pontos de equilíbrio, e também é chamada de bifurcação de dobra, tangente, ponto limite ou ponto de retorno.

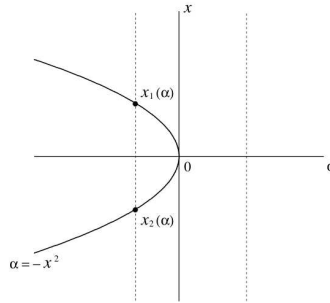


Figura 1 – Bifurcação sela-nó no plano de fase e do parâmetro. Figura retirada da Ref. [8].

Bifurcação de Hopf: É caracterizada pela existência de um par de autovalores da matriz Jacobiana puramente imaginários (complexo conjugados) no ponto de bifurcação. O diagrama de bifurcação é mostrado na Fig. 2, em termos das variáveis x_1 e x_2 e do parâmetro α . Quando o parâmetro $\alpha = \alpha_0$, o ponto de equilíbrio perde a estabilidade e surge um ciclo limite para $\alpha > 0$. A bifurcação de Hopf pode se apresentar na forma subcrítica ou supercrítica. É um tipo de bifurcação que liga equilíbrio a movimento periódico [15].

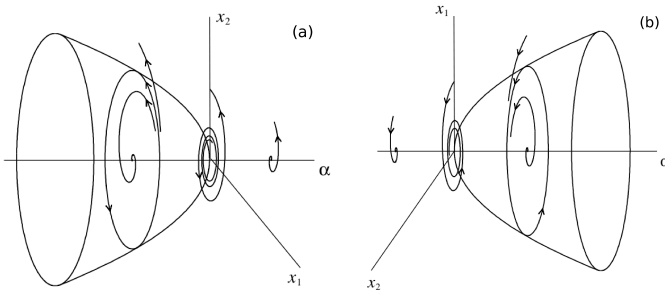


Figura 2 – Bifurcação de Hopf (a) subcrítica e (b) supercrítica no espaço de fases e do parâmetro. Figuras retiradas de [8].

A bifurcação de Hopf de um sistema implica no surgimento de um ciclo limite. A estabilidade deste ciclo depende do sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov (l_1). O ciclo limite é instável quando l_1 é maior que zero, neste caso a bifurcação de Hopf é subcrítica, e, quando l_1 é menor que zero, tem-se a bifurcação de Hopf supercrítica, com ciclo limite estável [8].

Bifurcações de ciclos

Além do equilíbrio, a forma mais comum de comportamento é um ciclo limite. Um ciclo limite é uma trajetória fechada isolada, onde isolada no sentido que trajetórias vizinhas não são fechadas: elas espiralam em direção ou afastando do ciclo limite. Se todas as trajetórias aproximam-se do ciclo limite, este é estável ou atrativo; caso contrário ele é instável. Ciclos limite estáveis são muito importantes cientificamente, pois eles modelam sistemas que exibem oscilações auto-sustentáveis. Em outras palavras, estes sistemas oscilam mesmo sem um forçamento periódico externo.

Analisando a estabilidade do ciclo pode-se prever os tipos de bifurcações existentes. O melhor método de examinar as maneiras na qual uma órbita periódica pode perder sua estabilidade é usando uma seção de Poincaré, e estudando o sistema dinâmico discreto resultante [16]. Para um ciclo periódico L_0 , o ponto x_0 torna-se um ponto fixo da superfície Σ , como mostrado na Fig. 3, extraída da referência [8]. Em termos do mapa de Poincaré, a estabilidade de um ciclo periódico é reduzida a análise da estabilidade do ponto fixo do mapa, que é simplesmente caracterizada em termos dos autovalores da Jacobiana do mapa sobre o ponto fixo [17].

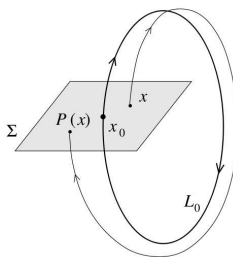


Figura 3 – Seção de Poincaré associado ao ciclo L_0 . Figura retirada de [8].

Um ciclo limite gerado por uma bifurcação de Hopf cresce variando-se adequadamente os parâmetros do sistema. Ele pode perder sua estabilidade quando seus autovalores característicos (multiplicadores) cruzam o círculo unitário. As possíveis bifurcações de codimensão 1 são as seguintes (codimensão é o número de condições que devem ser satisfeitas para caracterizar o ponto de bifurcação):

- Bifurcação sela-nó: um multiplicador característico real cruza o círculo unitário em $+1$. Implica que dois ciclos limites com estabilidades complementares coincidem e então desaparecem. É o processo idêntico ao caso para o ponto de equilíbrio.

- Bifurcação de dobramento de período: um multiplicador característico real cruza o círculo unitário em -1 . Neste caso, o ciclo limite original torna-se instável enquanto uma família de soluções de período duplicado emerge. Em geral pode surgir uma série de n duplicações depois das quais um ciclo limite de período $2^n T$ é obtido. Diversos sistemas apresentam uma série infinita de bifurcações com um ponto de acumulação finito; o movimento associado além desse ponto é caótico, caracterizando uma rota para o caos via duplicação de período ou cenário de Feigenbaum [15].
- Bifurcação de Neimark-Sacker ou bifurcação secundária de Hopf: dois multiplicadores complexo conjugados cruzam o círculo unitário em $e^{\pm i\theta}$, com módulo igual a 1. Define no espaço de estados o aparecimento de um torus e uma solução quase-periódica associada. Neste caso o ciclo limite desestabiliza-se e surge um movimento quase-periódico.

Os planos de parâmetros contendo as curvas de bifurcação são chamados de diagramas de estabilidade, pois mostram os diferentes tipos de comportamento que ocorrem quando se move sobre este plano de parâmetros. As curvas de diversos tipos de bifurcações, nos diagramas de estabilidade, formam estruturas de bifurcação semelhantes para diversos sistemas dinâmicos diferentes. O conhecimento teórico das estruturas de bifurcação associadas com as bifurcações de maior codimensão guiam a análise numérica e ajudam a entender o comportamento do modelo.

3.2 CONTINUAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica de um sistema dinâmico fornece muita informação sobre o comportamento das soluções, mas é aplicável somente em sistemas de baixa ordem. Para sistemas maiores o tempo computacional para se obter as soluções aumenta muito, tornando o processo lento e dispendioso. Um método alternativo, conhecido como continuação numérica, é uma técnica para computar consecutivas sequências de pontos que se aproximam de um ramo desejado. O processo é feito através de uma aproximação passo a passo, iniciando com a continuação de uma singularidade de baixa ordem e adicionando um parâmetro ao modelo para encontrar as próximas soluções.

A solução numérica utilizando o método de continuação é construída através de algoritmos de predição e correção. O passo preditor dá uma primeira estimativa do próximo ponto na curva de soluções enquanto que o passo corretor encontra a solução partindo do resultado da predição. O controle do tamanho do passo é feito através do controle dependente da

convergência, ou seja, o tamanho do passo é diminuído se não ocorre a convergência após um número prévio de iterações e aumentado se a convergência requer apenas poucos passos [8]. É fundamental para este processo obter um bom ponto inicial para a geração do diagrama de estabilidade.

Para obter as bifurcações nos sistemas estudados, utilizou-se o software MatCont [11, 18], o qual é uma coleção de algoritmos numéricos implementados como um conjunto de ferramentas para o Matlab para a detecção, continuação e identificação de ciclos limite e vários tipos de bifurcações [19]. O objetivo do MatCont é fornecer um ambiente interativo projetado para análise de continuação e forma normal de sistemas dinâmicos. Esta análise é complementar à simulação dos sistemas e permite uma identificação e maior compreensão do comportamento presente nos sistemas dinâmicos. O tempo de simulação não é tão importante; em um ambiente de continuação, ele pode ser usado para computar pontos de equilíbrio ou ciclos limite estáveis, a partir dos quais a continuação pode iniciar para detectar e computar fenômenos mais complexos (bifurcações).

As principais bifurcações que podem ser detectadas através do MatCont são apresentadas na Fig. 4, dispostas de cima para baixo na ordem em que são encontradas, em termos da codimensão. A codimensão de uma bifurcação é o número mínimo de parâmetros que devem ser variados para identificá-la [8], ou seja, para uma bifurcação de Hopf, por exemplo, é necessário variar um parâmetro do sistema. Ao variar dois parâmetros iniciando nesta bifurcação, percorre-se a curva de bifurcação de Hopf no plano de parâmetros, e condições especiais desta bifurcação podem surgir, como por exemplo uma bifurcação HH (Hopf duplo), onde tem-se dois pares de autovalores da matriz Jacobiana complexo-conjugados com parte real nula, caracterizando uma bifurcação de codimensão 2. A tabela 1 identifica as abreviações de codimensão 1 e algumas de codimensão 2. A lista completa pode ser encontrada na Ref. [18], e as condições necessárias para cada bifurcação são descritas em [8].

Pode-se dividir as bifurcações identificadas no MatCont em bifurcações de equilíbrio e bifurcações de ciclo. As bifurcações de equilíbrio são obtidas a partir de um ponto de equilíbrio do sistema, enquanto as bifurcações de ciclo, ou ciclo limite, são obtidas a partir da continuação de um ciclo periódico do sistema analisado.

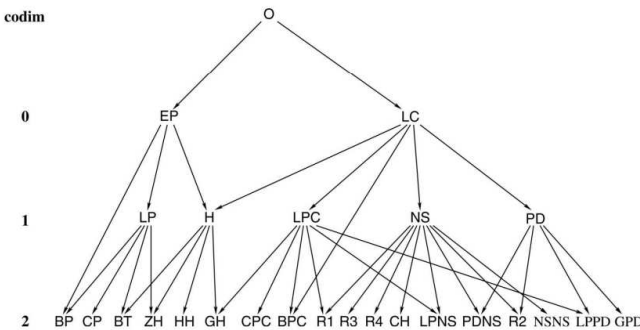


Figura 4 – Principais bifurcações identificadas pelo programa MatCont. Figura retirada de [18].

A Fig. 5 mostra o procedimento para obtenção das bifurcações e das respectivas curvas de bifurcação para um plano de parâmetros $b \times d$ do sistema de Chua (que será descrito posteriormente), partindo de um ponto inicial de equilíbrio. Neste caso, da condição inicial $(x, y, z, w) = (0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 0)$, e com parâmetros $(a, b, c, d) = (8, 0; 0, 2; 8, 5; 4, 0)$, o sistema é integrado e atinge o equilíbrio (Fig. 5(a)). O último ponto da integração é tomado então como ponto inicial, e passa-se a variar um parâmetro (neste caso b), para observar como o equilíbrio perde estabilidade (nesta etapa a integração do sistema não é mais necessária). Ao aumentar o parâmetro b , identifica-se uma bifurcação de Hopf (Fig. 5(b)), ou seja, o sistema perde o equilíbrio através de uma bifurcação de Hopf, surgindo um ciclo limite de período 1. Escolhe-se esta bifurcação como ponto inicial e, a partir de tal, pode-se calcular as bifurcações de ciclo limite (como o ciclo perde estabilidade ao variar um parâmetro), ou a curva de bifurcação de Hopf ao longo da variação de dois parâmetros (este passo é suprimido aqui e as curvas obtidas estão na Fig. 5(f)). Analisando a estabilidade do ciclo, Fig. 5(c), observa-se que o ciclo sofre uma bifurcação de dobramento de período (PD), seguindo até o ponto de ciclo limite (LPC), considerado este o limite do ciclo que surgiu da bifurcação de Hopf. O processo é repetido para as bifurcações encontradas (Fig. 5(d),(e)), obtendo resultados semelhantes. Finalmente, a Fig. 5(f) apresenta as curvas de bifurcação obtidas a partir das bifurcações detectadas no processo. A combinação de curvas de bifurcação obtidas formam estruturas de bifurcação em planos de parâmetros com características semelhantes em vários sistemas dinâmicos diferentes.

Analisando os resultados obtidos, pode-se inferir o comportamento do sistema para a região do plano de parâmetros analisada (Fig. 5(f)). Na

Tipo de objeto	Letra
Ponto inicial (Point)	P
Órbita (Orbit)	O
Equilíbrio (Equilibrium)	EP
Ciclo Limite (Limit cycle)	LC
Bifurcação de Ponto Limite (Limit point)	LP
Bifurcação de Hopf	H
Bifurcação de Ponto Limite do Ciclo	LPC
Neimark-Sacker (torus)	NS
Dobramento de período (Period Doubling or flip)	PD
Hopf Duplo (Double Hopf)	HH
Bifurcação de Hopf Generalizada (Generalized Hopf)	GH
Bifurcação de ponta de ciclos ou cuspidal	CPC
Ressonância 1:1	R1
Ressonância 1:2	R2
Ressonância 1:3	R3
Ressonância 1:4	R4
Dobramento de período generalizado	GPD

Tabela 1 – Lista de abreviações e significado das bifurcações apresentadas na figura 4.

região em verde, o comportamento assintótico do sistema tende ao equilíbrio. Ao variar os parâmetros, b ou d , este equilíbrio perde estabilidade através de uma bifurcação de Hopf (curva azul), e surge, na região de cor magenta, um ciclo periódico de período 1. Este ciclo, por sua vez, sofre uma bifurcação de dobramento de período (curva verde), e na região de cor azul o sistema passa a oscilar com período 2. O sistema sofre mais uma bifurcação de dobramento de período (curva magenta), passando a oscilar com período 4 (região amarela). Após mais uma bifurcação identificada (curva ciano), obtém-se período 8 para o sistema. A sequência de bifurcações continua, caracterizando a rota para o caos por dobramento de período. Após um ponto de acumulação das bifurcações de dobramento de período, o sistema passa a ter oscilações caóticas (região em vermelho), identificado por outros métodos, devido ao fato do método de continuação numérica não identificar a região caótica, somente as bifurcações presentes.

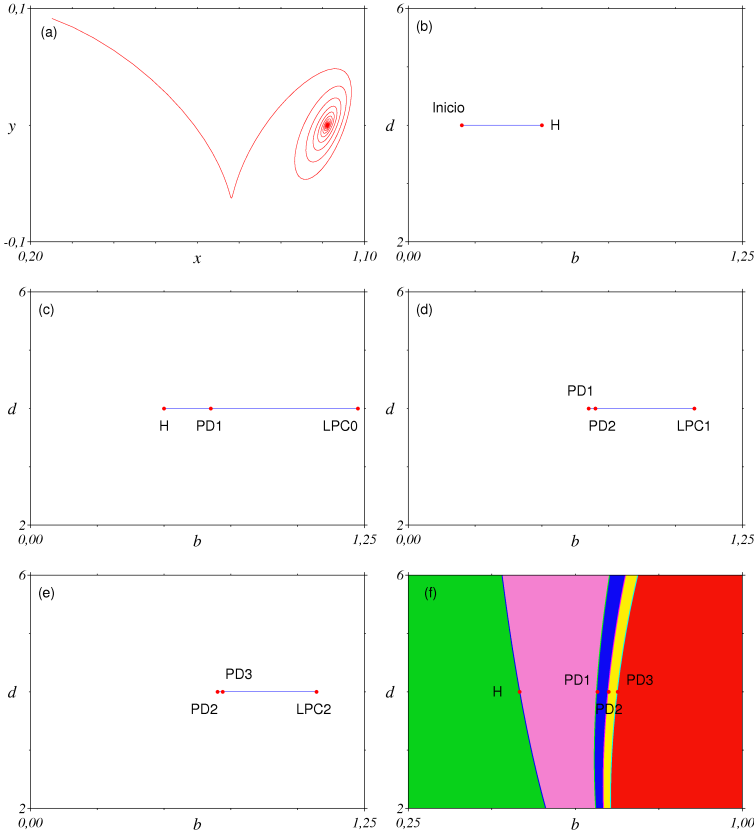


Figura 5 – (a) Integração do sistema (4.1), atingindo um ponto de equilíbrio. (b)-(e) Obtenção das bifurcações pelo método de continuação numérica, à partir do equilíbrio em (a). (f) Diagrama de estabilidade caracterizado pelas curvas obtidas a partir das bifurcações encontradas.

4 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos através dos métodos computacionais descritos anteriormente aplicados à dois sistemas quadridimensionais: um sistema de Chua modificado e um sistema obtido do acoplamento entre dois osciladores descritos pelo modelo de FitzHugh-Nagumo. Os resultados são apresentados através dos planos de parâmetros utilizando os valores de expoentes de Lyapunov, curvas de bifurcações e diagramas isoperiódicos.

4.1 SISTEMA DE CHUA

Historicamente, um dos sistemas dinâmicos mais estudados é o circuito de Chua [20], que consiste em um indutor L , um resistor linear R , dois capacitores lineares C_1 e C_2 , e um resistor não-linear chamado diodo de Chua. O circuito de Chua foi projetado por Leon Chua e construído originalmente para ilustrar que o caos modelado pelas equações de Lorenz é realmente um fenômeno físico e não um resultado numérico [12].

O sistema de Chua estudado

Nas últimas décadas uma grande quantidade de artigos publicados reportam a rica dinâmica que o circuito de Chua apresenta, incluindo variações do modelo e arranjos experimentais [22, 21, 23]. Baseado no modelo tridimensional, versões com dimensões maiores podem ser construídos introduzindo outras variáveis ao sistema, apresentando dinâmicas mais complexas, como hipercaos [24].

Neste trabalho foi realizado um estudo numérico em um sistema de Chua modificado, composto por quatro variáveis e quatro parâmetros, com uma não-linearidade cúbica, resultando em um sistema 4D, cujo grupo de equações diferenciais ordinárias é dado pelo conjunto de equações (4.1).

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = a(y + 0.2(x - x^3)), \\
 \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = bx - y + z + w, \\
 \dot{z} &= \frac{dz}{dt} = -cy + w, \\
 \dot{w} &= \frac{dw}{dt} = -dy.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Este sistema autônomo (não depende explicitamente do tempo) foi obtido adicionando um controlador w no sistema tridimensional original. O parâmetro d controla a dimensão do sistema, pois ao fazer $d = 0$, a última equação diferencial se anula (iniciando o sistema com $w = 0$). As equações (4.1) representam a adimensionalização do esquema elétrico da Fig. 6, referente ao circuito eletrônico apresentado na Ref. [25]. Os círculos coloridos identificam os pontos de medição de tensão do circuito, que representam as variáveis do sistema numérico.

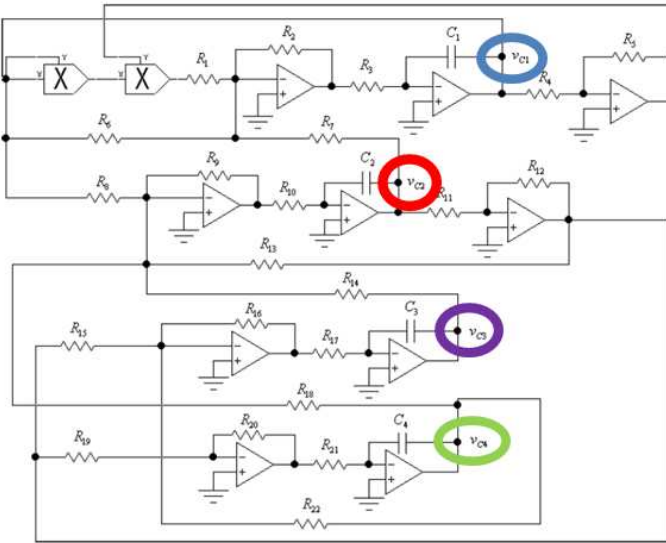


Figura 6 – Esquema do circuito eletrônico apresentado na Ref. [25]. Os círculos coloridos revelam os pontos de medição de tensão do circuito.

No sistema (4.1), x , y , z e w são variáveis, que representam as voltagens no circuito real, e a , b , c e d são os parâmetros, que representam combinações de resistores e capacitores no circuito real [25]. Para obter o sistema (4.1), é preciso aplicar as leis de Kirchhoff das tensões em cada malha do esquema eletrônico, resultando no sistema de equações (4.2). Comparando as equações (4.1) e (4.2), é possível identificar o conjunto de resistores e capa-

citores associados a cada parâmetro.

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{R_2}{R_3 R_7 C_1} v_{C_2} + \frac{R_2}{R_3 C_1} \left(\frac{1}{R_6} v_{C_1} - \frac{R_5}{100 R_1 R_4} v_{C_1}^3 \right), \\
 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{R_9}{R_8 R_{10} C_2} v_{C_1} - \frac{R_9 R_{12}}{R_{10} R_{11} R_{13} C_2} v_{C_2} + \frac{R_9}{R_{10} R_{14} C_2} v_{C_3} + \frac{R_9}{R_{10} R_{18} C_2} v_{C_4}, \\
 \frac{dv_{C_3}}{dt} &= -\frac{R_{12} R_{16}}{R_{11} R_{15} R_{17} C_3} v_{C_2} + \frac{R_{16}}{R_{17} R_{22} C_3} v_{C_4}, \\
 \frac{dv_{C_4}}{dt} &= -\frac{R_{12} R_{20}}{R_{11} R_{19} R_{21} C_4} v_{C_2}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

O sistema (4.1) possui três pontos de equilíbrio: $(1; 0; -b; 0)$, $(-1; 0; b; 0)$, além do ponto trivial $(0; 0; 0; 0)$, calculados e analisados quanto a estabilidade para um ponto particular no espaço de parâmetros em [25].

Resultados

Nesta subseção serão apresentados os resultados obtidos através dos métodos computacionais de integração e continuação numérica aplicados ao sistema (4.1). Para obter os planos do maior expoente de Lyapunov, estes foram discretizados em uma malha quadrada de 500×500 pontos igualmente espaçados, integrando numericamente o sistema (4.1) através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo igual a 10^{-2} e um tempo de integração de 5×10^5 , utilizando o algoritmo proposto em [26] para calcular cada um dos $2,5 \times 10^5$ expoentes de Lyapunov no plano de parâmetros. Os diagramas isoperiódicos foram obtidos também utilizando o método de Runge-Kutta, neste caso com passo variável, removendo um transiente de 5×10^6 e utilizando 1×10^6 integrações para encontrar o período com uma precisão de 1×10^{-3} , em uma malha discretizada de 1200×1200 pontos. Os dados para a construção destes diagramas isoperiódicos foram obtidos pelo Professor César Manchein. As curvas de bifurcação foram obtidas através do software MatCont, versão 5,0. As figuras foram construídas utilizando o programa Gnuplot versão 4.2.

Na Ref. [27], foi realizado um estudo numérico utilizando os expoentes de Lyapunov e diagramas de bifurcação, onde foram apresentados os resultados do maior expoente de Lyapunov para todas as combinações e diversos valores dos parâmetros a , b , c e d . Neste trabalho o diagrama quadridimensional $a \times b \times c \times d$ é dividido nas seguintes combinações de parâmetros: $b \times a$ com c e d fixos, $c \times a$ com b e d fixos, $c \times b$ com a e d fixos, $d \times a$ com

b e c fixos, $d \times b$ com a e c fixos, e $d \times c$ com a e b fixos. As combinações dos valores dos parâmetros fixados para a variação dos outros dois parâmetros do sistema estão descritos na tabela 2.

Plano de Parâmetros		
$b \times a$	$c = 12,5$	$d = 5,0$
$c \times a$	$b = 0,55$	$d = 10,0$
$c \times b$	$a = 7,0$	$d = 1,0$
$d \times a$	$b = 0,88$	$c = 8,5$
$d \times b$	$a = 8,0$	$c = 8,5$
$d \times c$	$a = 8,0$	$b = 0,88$

Tabela 2 – Valores dos parâmetros fixados para a variação do outro par de parâmetros do sistema (4.1).

Para valores negativos dos parâmetros a , b , c e d , o sistema diverge, ao menos para as condições iniciais utilizadas.

A Fig. 7(a), obtida através do MatCont para o par de parâmetros $d \times c$, mostra as curvas de bifurcação de Hopf (azul) e de dobramento de período (magenta, verde e ciano), obtidas a partir da continuação de um ponto inicial de equilíbrio. Conhecendo as características das bifurcações, pode-se inferir o comportamento do sistema para esta faixa dos parâmetros, na qual há uma região de equilíbrio que sofre uma bifurcação de Hopf, criando ciclos periódicos para a região acima da curva de Hopf. Este ciclo periódico sofre bifurcações de dobramento de período para uma região de caos. Para visualizar as regiões caóticas, utiliza-se o cálculo dos expoentes de Lyapunov, plotando o maior expoente de Lyapunov codificado por cores, onde, na Fig. 7(b), ciano identifica regiões de equilíbrio, preto regiões periódicas, amarelo e vermelho caos, e branco divergência do sistema. Como se pode ver, as curvas de bifurcação são identificadas mesmo na região com $d < 0$, onde ocorre divergência, e há uma boa concordância entre os métodos numéricos utilizados. Outra característica encontrada para este par de parâmetros é o fato de que as bifurcações de dobramento de período formam estruturas fechadas neste plano de parâmetros.

Na Fig. 8 são apresentados os planos de parâmetros de todas as combinações entre parâmetros do sistema (4.1), utilizando o maior expoente de Lyapunov codificado por cores, e as curvas de bifurcação sobrepostas no mesmo plano de parâmetros. Para os planos de parâmetros do expoente de Lyapunov, a cor branca mostra os expoentes negativos (região de equilíbrio), a cor preta os expoentes nulos (regiões periódicas), e variações de amarelo e vermelho caracterizam os expoentes positivos (regiões caóticas).

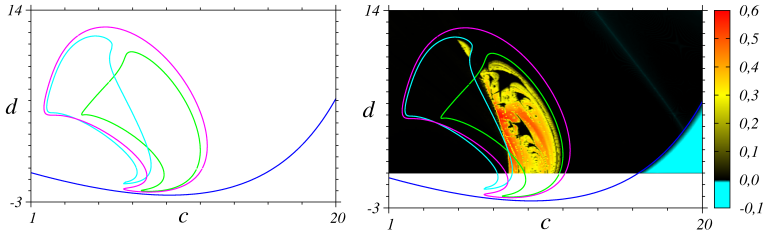


Figura 7 – Planos de parâmetros $d \times c$ com a e b fixos, com (a) curvas de bifurcação e (b) maior expoente de Lyapunov com curvas de bifurcação sobrepostas.

Para a integração numérica do sistema (4.1), foi utilizada a condição inicial $(x, y, z, w) = (0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 0)$, a mesma utilizada em [27]. As curvas de bifurcação foram sobrepostas ao expoente de Lyapunov, utilizando a seguinte relação de cores: azul corresponde a bifurcação de Hopf, verde à dobramento de período, e ciano para sela-nó. Linhas contínuas correspondem as bifurcações supercríticas e pontilhadas à bifurcações subcríticas. Para as Figs. (b) e (e), um estudo mais detalhado das estruturas de bifurcação foi realizado, através da obtenção das bifurcações a partir de ciclos periódicos em estruturas periódicas imersas na região caótica, e da identificação de bifurcações de codimensão 2 sobre as curvas, através do MatCont, resultados estes discutidos com mais detalhes nas páginas seguintes.

Nos resultados apresentados na Fig. 8, pode-se visualizar as características da dinâmica do sistema para as diferentes combinações de parâmetros. O sistema apresenta regiões de equilíbrio, periódicas e caóticas. Em todas as combinações analisadas, verificou-se que a mudança de equilíbrio para ciclo limite ocorre através de uma bifurcação de Hopf, ou seja, o equilíbrio perde estabilidade e surge um ciclo limite de período um. A bifurcação de Hopf pode ser subcrítica ou supercrítica, e sua mudança é caracterizada pela bifurcação de codimensão dois Hopf-Generalizada (GH), ponto onde o primeiro coeficiente de Lyapunov troca de sinal. O ciclo limite que nasce através da bifurcação de Hopf sofre vários dobramentos de período até atingir a região caótica, caracterizando a conhecida rota para o caos por dobramento de período (cenário de Feigenbaum).

Um comportamento interessante das estruturas periódicas observadas no plano $b \times a$ está relacionado com o parâmetro d , responsável pelo acoplamento do modelo tridimensional de Chua com a dimensão extra. Para discutir a influência deste parâmetro no comportamento caótico do sistema, foi construída a Fig. 9, variando o parâmetro d conforme mostrado no canto

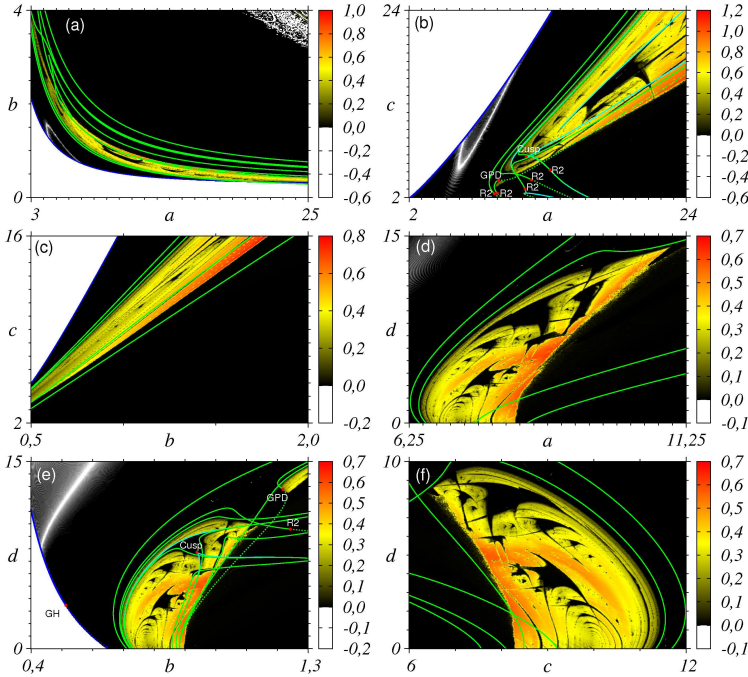


Figura 8 – Planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e as curvas de bifurcação sobrepostas para os pares de parâmetros: (a) $b \times a$ com c e d fixos; (b) $c \times a$ com b e d fixos; (c) $c \times b$ com a e d fixos; (d) $d \times a$ com b e c fixos; (e) $d \times b$ com a e c fixos; (f) $d \times c$ com a e b fixos.

superior direito de cada subfigura. Os números em ciano identificam o período das estruturas periódicas na região indicada. Para $d = 0$, não há estruturas pe-riódicas imersas no domínio caótico, apenas listras pretas, como a que está indicada de período 5. No entanto, ao aumentar o valor de d , estruturas periódicas surgem, aumentam seu domínio e apresentam um movimento na região caótica.

Para $d = 1$, surgem estruturas de período 7 e 9. Em $d = 2$, as estruturas 5 e 7 caminharam para a direita do domínio caótico, e a estrutura 9 saiu da região. Em $d = 3$, “descem” novas estruturas periódicas, de períodos 3, 4 e 5, que continuam o movimento para $d = 4$ e $d = 5$, onde surge uma estrutura de período 2 que engloba quase toda a região caótica superior. Por outro lado, a borda entre a região de equilíbrio (branca) e a região periódica

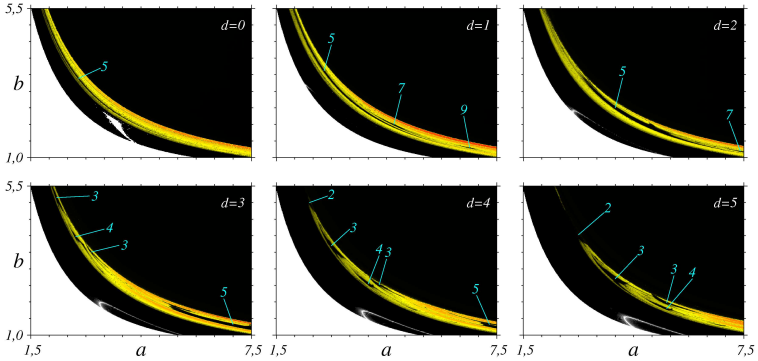


Figura 9 – Planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov para o par $b \times a$ com c fixo, e os valores de d mostrados em cada plano. Os números em ciano identificam o pe-ríodo de cada estrutura per-iódica.

quase não é alterada nestas variações do parâmetro d . Este comportamento de movimento das estruturas periódicas já foi observado no trabalho [27], mas para outra faixa dos parâmetros a e b .

A Fig. 10 é um zoom da Fig. 8(b), na qual é possível identificar as curvas de bifurcação que delimitam a região caótica e a estrutura periódica interna. Os pontos R2, GPD e Cusp correspondem às bifurcações de codimensão dois, e podem estar relacionadas a mudanças na estabilidade das bifurcações. Uma característica interessante é a estrutura periódica interna, que possui uma forma conhecida na literatura como camarão (shrimp em inglês). Esta estrutura é recorrente em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos contínuos e discretos [2, 3, 29, 22, 28, 30]. Ainda, além do camarão imerso na região caótica, as curvas de dobramento de período (verde) na região pe-riódica formam uma estrutura com o mesmo formato de camarão. Através do diagrama isoperiódico obtido na mesma região, pode-se identificar esta estrutura caracterizada pela cor amarela (período 2), anexada à região periódica (azul). Uma análise da sequência de camarões na Fig. 8(b) mostrou que as estruturas periódicas do tipo camarão aparecem com adição de período ao aumentarmos os valores dos parâmetros.

O diagrama isoperiódico presente na Fig. 10(b), corrobora o resultado apresentado em (a), no qual estão codificados por cores o período de cada estrutura (neste caso o número de máximos da variável x), mostrando os dobramentos de período, além da região periódica mais estável no camarão central, em concordância com as curvas obtidas para as bifurcações. Uma vez

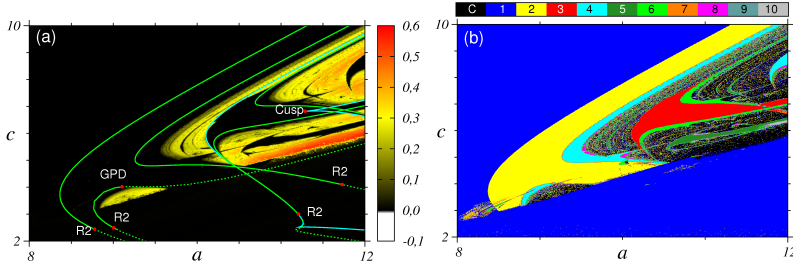


Figura 10 – (a) Planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e as curvas de bifurcação para o par de parâmetros $c \times a$ com b e d fixos. (b) Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo, mostrando as estruturas periódicas.

que sistemas dinâmicos não-lineares podem exibir muitos tipos de comportamentos, conhecendo as regras de adição de período dos planos de parâmetros, é possível prever estados periódicos para diferentes conjuntos de parâmetros em aplicações físicas reais [3].

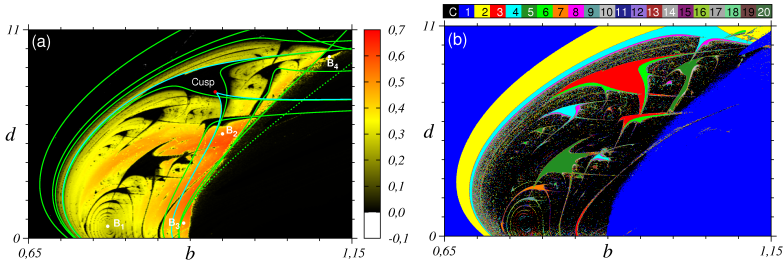


Figura 11 – (a) Plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e as curvas de bifurcação para o par de parâmetros $d \times b$ com $a = 8.0$ e $c = 8.5$. (b) Diagrama isoperiódico para a mesma extensão de (a). Os pontos $B_1, \dots, B_4$ em (a) serão discutidos adiante.

A mesma análise foi realizada na Fig. 11(a), a qual é uma ampliação da Fig. 8(e), e foi construída plotando o maior expoente de Lyapunov para o par de parâmetros $d \times b$, mostrando as regiões periódicas e caóticas, e superpondo as curvas de bifurcação de dobramento de período (verde) e sela-nó (ciano). Pode-se ver a rota para o caos por dobramento de período (Feigenbaum), e a sequência de estruturas periódicas em forma de camarão organizadas no plano de parâmetros. Os pontos $B_1, \dots, B_4$ estão relacionados

a análise de bacias de atração, e serão identificados posteriormente.

As curvas de bifurcação definem ainda a estrutura interna do camarão no plano de parâmetros, composto por duas curvas de bifurcações sela-nó e duas de dobramento de período. O diagrama isoperiódico da mesma região, Fig 11(b), evidencia os resultados discutidos anteriormente. As estruturas de bifurcação delimitam regiões de mesmo período, e é possível visualizar a sequência de adição de período $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \dots$, formado pelos camarões.

A Fig. 12 foi construída com as curvas de bifurcação que definem a região periódica central do camarão, ou endoesqueleto, formado por duas curvas sela-nó com uma bifurcação de dobra e duas curvas de dobramento de período que se cruzam. Em [28], é dada uma definição para as estruturas tipo camarão: “Camarões são formados por um conjunto regular de janelas adjacentes centradas ao redor do par principal de arcos parabólicos superestáveis que interseccionam-se. Um camarão é um mosaico infinito de domínios de estabilidade duplamente composto por um domínio mais interno principal mais todos os domínios de estabilidade adjacentes que surgem de duas cascatas de dobramento de período juntamente com seus correspondentes domínios caóticos.” Os autores salientam que os camarões não podem ser confundidos com seu domínio mais interno de periodicidade.

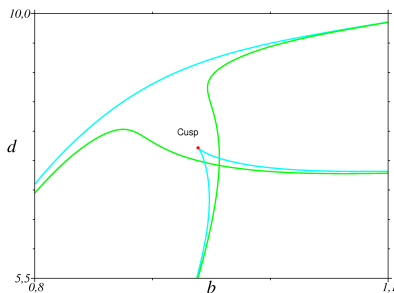


Figura 12 – Curvas de bifurcação que formam a estrutura de menor período do camarão no plano de parâmetros $d \times b$.

Para analisar de uma maneira diferente a estrutura do maior camarão presente na Fig. 11, foi construída a Fig. 13(a), na qual está plotado o maior expoente de Lyapunov na região caótica, e na região periódica, foram plotados os valores do segundo maior expoente de Lyapunov.

Através da Fig. 13, podemos analisar a janela principal do corpo do camarão, o endoesqueleto [2]. Este endoesqueleto possui o menor período da estrutura e é delimitado por curvas de bifurcação de dobramento de período e

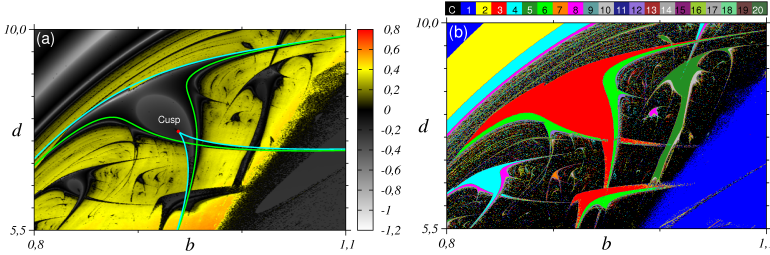


Figura 13 – (a) Expoente de Lyapunov no plano de parâmetros $d \times b$, na região do maior camarão da Fig. 11. Nas regiões periódicas foi plotado o segundo maior expoente de Lyapunov. (b) Diagrama isoperiódico na mesma estrutura periódica do camarão.

sela-nó com uma bifurcação de codimensão dois cusp (dobra). Ainda, a região com o valor mais negativo do segundo expoente (região branca), constitui a estrutura superestável do camarão. As linhas superestáveis correspondem aos pontos na janela periódica onde os atratores possuem o valor mais negativo do maior expoente diferente de zero [31], e sustentam a estrutura do camarão.

Outra estrutura interessante encontrada por ambos os métodos numéricos no plano de parâmetros, foi a presença de estruturas espirais ao redor de um ponto focal, ou seja, estruturas periódicas alinhadas, organizadas por adição de período e conectadas entre si em torno do eixo central. Na Fig. 14, são mostradas somente as curvas de bifurcação sela-nó obtidas numericamente através do MatCont, a partir de uma das regiões periódicas, que constituem uma única estrutura. Não foi possível seguir até o ponto focal devido a falta de precisão numérica do MatCont. Pode-se observar que a estrutura segue mesmo na região de divergência, no qual $d < 0$.

A Fig. 15(a) mostra as curvas de bifurcação de sela-nó e de dobramento de período obtidas na região em espiral, sobrepostas ao maior expoente de Lyapunov, onde é possível identificar as regiões periódicas organizadas em forma de espiral. Por outro lado, na Fig. 15(b), obteve-se o período das estruturas periódicas codificados por cores, onde a cor preta caracteriza a região de período maior que 20, neste caso considerado caos. Como já identificado em [27], o sistema apresenta valores de períodos ímpares para as estruturas periódicas, aumentando o valor das regiões periódicas a medida que ocorre a aproximação do centro da espiral.

Estruturas espirais foram estudadas em diversos sistemas dinâmicos [1, 6, 32, 28, 21, 33]. A curva da Fig. 14 mostra que existe uma conexão entre as diferentes regiões periódicas que compõem a espiral, ou seja, a estrutura

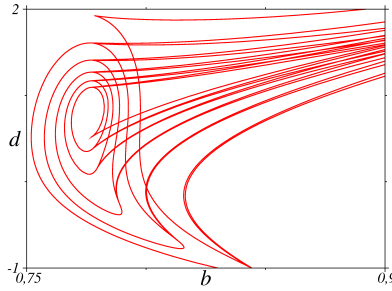


Figura 14 – Curva de bifurcação sela-nó em forma de espiral para o plano $d \times b$.

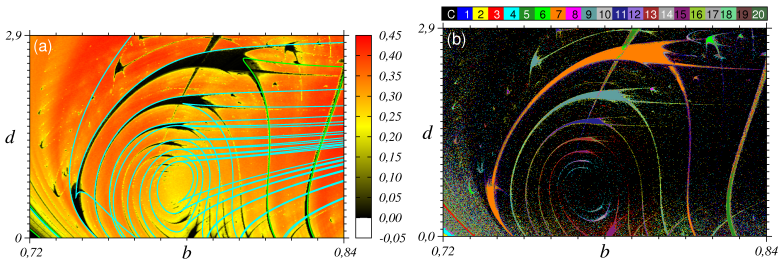


Figura 15 – (a) Diagrama de Lyapunov com curvas de bifurcação e (b) diagrama isoperiódico para o plano de parâmetros $d \times b$, na região que apresenta a estrutura periódica espiral.

do domínio periódico é governada pela geometria espiral. Assim, com dois parâmetros de controle, o sistema pode ser percorrido continuamente de um ramo da espiral para outro, logo, uma órbita de período n pode ser alterada para outra órbita periódica seguindo a estrutura espiral, sem nunca cruzar ou tocar a fase caótica [32]. A estrutura em forma de dobra (cusp), existente na estrutura, é típica de sistemas que exibem multiestabilidade e fenômenos de histerese [1].

A existência de diversas curvas de bifurcação cruzando-se ou atravessando a região caótica é mais um indicativo da existência de multiestabilidade no sistema dinâmico [7]. Multiestabilidade é o nome dado para a coexistência de vários estados de equilíbrio dinâmico para um mesmo conjunto de parâmetros. Mesmo mantendo os parâmetros fixos, mudanças qualitativas na dinâmica do sistema podem resultar de mudanças nas condições iniciais como consequência da multiestabilidade [34].

A análise da multiestabilidade existente no sistema (4.1) foi desenvolvida através da evolução temporal do sistema para um determinado valor dos parâmetros, variando duas condições iniciais e mantendo as outras duas fixas, caracterizando o regime assintótico resultante. O objetivo foi identificar os possíveis comportamentos do sistema para diferentes condições iniciais. Assim, foram analisados os pontos B_1 , B_2 e B_3 da Fig. 11(a), situados na região caótica, lembrando que os expoentes de Lyapunov foram obtidos para a condição inicial particular $(x, y, z, w) = (0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 0)$. Deste modo, obteve-se os resultados representados pela Fig. 16, onde, para a variação de x e y , $z = 0, 1$ e $w = 0, 0$, e, variando-se z e w , $x = 0, 1$ e $y = 0, 1$. A cor preta caracteriza pontos que evoluem para um regime periódico e vermelho para um comportamento caótico. Como as condições iniciais são muito próximas, identifica-se a característica principal de sistemas caóticos: a alta sensibilidade às condições iniciais.

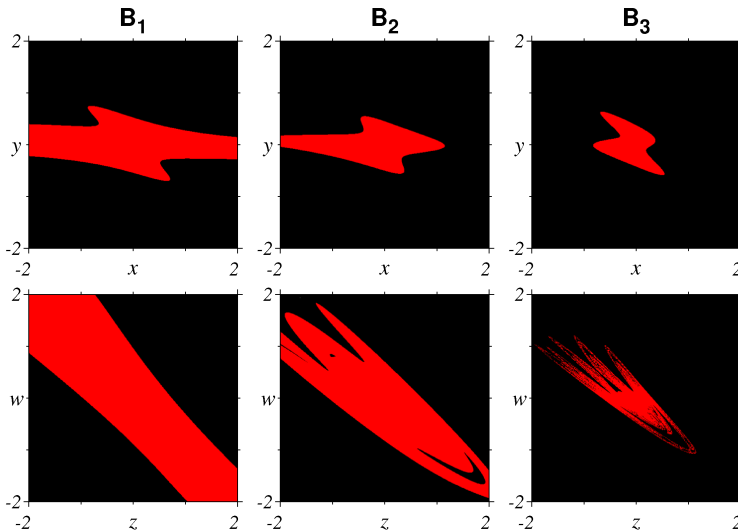


Figura 16 – Seções transversais de bacias de atração para os pontos B_1 , B_2 , e B_3 da Fig. 11(a). Cada coluna mostra os planos bidimensionais obtidos da variação de duas variáveis, mantendo as outras duas fixas para a condição inicial do sistema. A cor preta caracteriza condições iniciais para soluções periódicas e vermelho caóticas.

Pode-se ver que para uma região pequena de condições iniciais centrada próxima da origem o sistema evolui para um comportamento caótico.

Observando as localizações dos pontos B_1 , B_2 , e B_3 na Fig. 11, pode-se ver que o ponto B_3 está mais próximo da fronteira caótica à direita e é o ponto que apresenta uma maior mistura entre condições caóticas e periódicas, visto na Fig. 16. Segundo [35], as bacias de atração são separadas por fronteiras e é comum para sistemas não-lineares, fronteiras de bacias fractais, as quais muitas vezes são provenientes de caos transiente nas fronteiras.

Em sistemas dissipativos, caos transiente aparece na forma de transientes caóticos. É preciso deixar claro que caos transiente é diferente de transiente para o caos, visto que o primeiro, mas não o último, é devido a uma ligação com o conjunto caótico não-atrativo. Em [36], este fenômeno é observado em um oscilador obtido a partir do sistema de Chua. Na região com este fenômeno, o comportamento inicial do sistema é virtualmente indistinguível do caótico, mas então o sistema passa rapidamente para outro estado estável (atrator), que pode ser estacionário, periódico ou caótico.

Para estudar o caos transiente no sistema (4.1), foram construídos os planos de Lyapunov para os parâmetros $d \times b$, Fig. 17, enfatizando a borda direita da Fig. 11, utilizando dois tempos de integração diferentes: em (a), um tempo de $5,0 \times 10^5$, e em (b) um tempo de $5,0 \times 10^6$, para um mesmo passo de integração de 10^{-2} . Deste modo, é possível identificar pontos que possuem transiente, os quais evoluem para um regime periódico após um intervalo de tempo maior, caracterizados pela cor preta na figura. Ainda, na Fig. 17(a), identifica-se uma região granulada maior a medida que o parâmetro d aumenta, ou seja, há uma influência direta deste parâmetro no fenômeno de transiente caótico, como mostrado na Fig. 18, onde (a), (b) e (c) são referentes ao ponto P_1 e (d), (e) e (f), são referentes ao ponto P_2 , da Fig. 17.

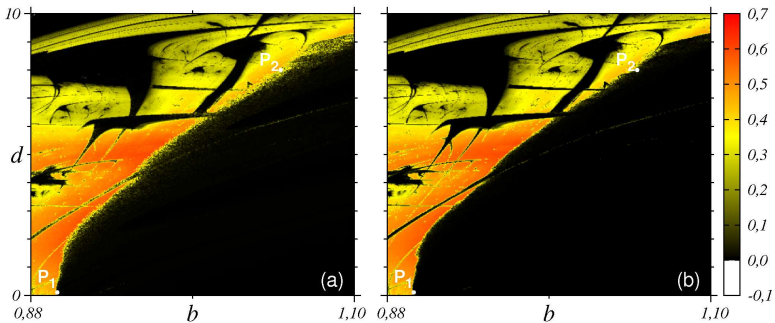


Figura 17 – Amplificação da Fig. 11 mostrando a fronteira entre a região caótica e periódica (em preto), onde o caos transiente é visível, devido aos tempos de integração diferentes. Em (a) o tempo do transiente é de $5,0 \times 10^5$, e em (b) é de $5,0 \times 10^6$.

Em (a) e (b), tem-se as séries temporais para ambos os pontos, nas quais é possível identificar que o transiente caótico é muito maior no ponto P_2 , visto que não foi identificado um transiente caótico longo para pontos próximos a $d = 0$. Nas figuras (c) e (d) tem-se um zoom das respectivas séries temporais (a) e (b), mostrando como as séries temporais mudam repentinamente para o regime periódico; e em (e) e (f), foram construídos os atratores nos respectivos pontos, onde os quadros na lateral inferior enfatizam o regime caótico, enquanto os atratores tornam-se periódicos após o transiente, apresentando o mesmo formato e de período 1, com a diferença que a medida que d aumenta, o tamanho do atrator também aumenta. De acordo com o tipo do atrator assintótico do sistema, pode-se distinguir dois tipos principais de caos transiente. O primeiro tipo é para o caso no qual o atrator que coexiste é relativamente simples, por exemplo, um atrator periódico: enquanto o comportamento assintótico do sistema é simples, o transiente é caótico. É o caso observado na Fig. 18. O segundo tipo ocorre quando um conjunto caótico não atrativo coexiste com um atrator caótico. Neste caso há duas formas distintas de comportamento caótico [35].

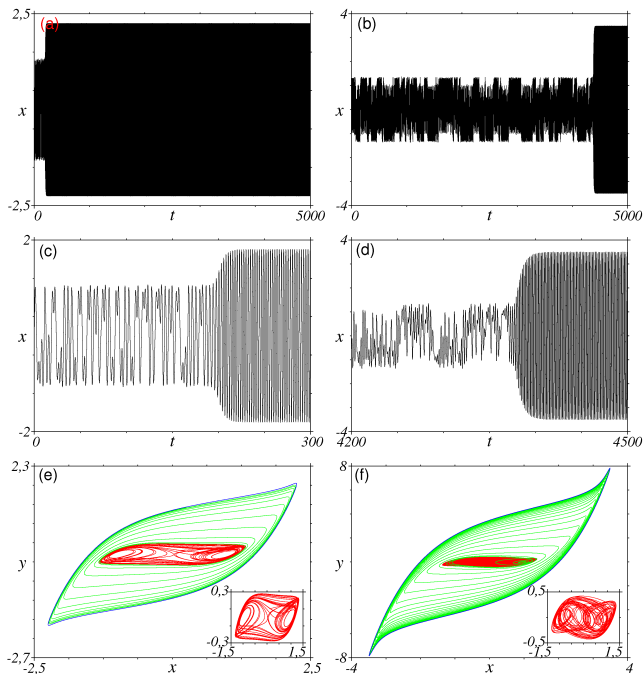


Figura 18 – Séries temporais para os pontos P_1 e P_2 , na região do transiente caótico na Fig. 17(a). Em (a), (b), (c) e (d), as respectivas séries temporais, e em (e) e (f) os atratores caóticos e periódicos com o transiente entre eles. As inserções mostram em mais detalhes os atratores caóticos.

A Fig. 19 foi construída com o objetivo de mostrar a mudança na bacia de atração do ponto B_4 devido ao fenômeno do transiente caótico. Localizado na região de transiente caótico, no alto da Fig. 11, cujos parâmetros são $(b, d) = (1, 15; 9, 57)$, este ponto possui um valor maior do parâmetro d , o qual aumenta o tempo em que o sistema permanece no transiente caótico. As regiões em preto caracterizam condições iniciais que evoluem para um atrator periódico, enquanto a cor vermelha caracteriza condições iniciais que possuem um atrator caótico para os respectivos tempos de integração. Na coluna da esquerda, variou-se as condições iniciais de x e y , com $(z, w) = (0, 1; 0, 0)$, e z e w , com $(x, y) = (0, 1; 0, 1)$, para um tempo de integração de $1,0 \times 10^6$, com um transiente de $5,0 \times 10^5$, enquanto na coluna da direita o mesmo procedimento foi realizado para um tempo de in-

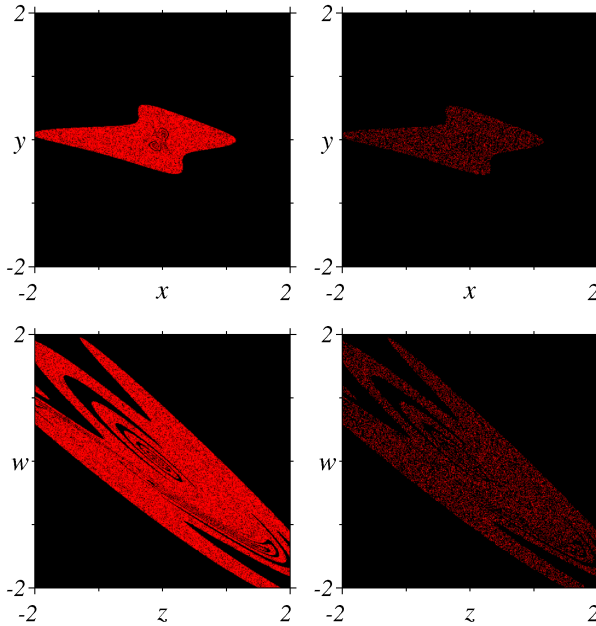


Figura 19 – Seção da bacia de atração para o ponto B_4 na Fig. 11(a), na região do transiente caótico. A coluna da esquerda é para um transiente de $5,0 \times 10^5$, e a coluna da direita para um transiente de $4,5 \times 10^6$. Para as bacias $y \times x$, $(z, w) = (0, 1; 0, 0)$, e para as bacias $w \times z$, $(x, y) = (0, 1; 0, 1)$. A cor preta refere-se a soluções periódicas e em vermelho para condições iniciais que evoluem para um atrator caótico.

tegração de $5,0 \times 10^6$, com um transiente de $4,5 \times 10^6$, com o mesmo passo de 10^{-2} .

A mudança entre as duas colunas, ou seja, o aparecimento de mais regiões em preto, caracteriza a existência de condições iniciais que possuem um transiente caótico. Quanto maior for a evolução temporal, maior será o incremento de pontos periódicos, dominando a bacia do atrator caótico. Para pontos na região caótica afastados da borda de transição caos/transiente/periódico, observou-se através da análise de atratores que o sistema permanece caótico mesmo para tempos de integração grandes, comprovando que o fenômeno do transiente caótico ocorre somente na borda granulada da Fig. 11.

Em suma, a dinâmica de um sistema de Chua quadridimensional, sistema (4.1), foi estudada aplicando os métodos de integração e continuação numérica, utilizando os expoentes de Lyapunov, diagramas isoperiódicos e curvas de bifurcação, mostrando a rica dinâmica que o sistema apresenta ao variar seus parâmetros de controle, resultados estes apresentados em planos de parâmetros. Através do maior expoente de Lyapunov, observou-se estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, e para o parâmetro d , que controla a dimensão do sistema, observou-se a presença de estruturas periódicas conectadas entre si e organizadas em forma de espiral em torno de um ponto focal, e a presença de caos transiente dependente do valor deste parâmetro. A variação das bacias de atração periódicas e caóticas mostrou a dependência destas em termos dos parâmetros e a sensibilidade do sistema às condições iniciais. Ainda, utilizando o método de continuação numérica, curvas de bifurcação foram obtidas mostrando as estruturas de bifurcação nos planos de parâmetros. Estas curvas revelaram como ocorrem as transições entre diferentes comportamentos do sistema, a conexão da estrutura espiral, e o endoesqueleto de camarões, formados por duas curvas sela-nó com uma bifurcação de dobra, e duas curvas de dobramento de período que se cruzam.

4.2 SISTEMA DE FITZHUGH-NAGUMO

As equações de FitzHugh-Nagumo são um conjunto de equações simples que exibem o comportamento qualitativo observado em neurônios: equilíbrio, excitabilidade e comportamento periódico [37]. As equações diferenciais não-lineares que descrevem o modelo de FitzHugh-Nagumo [38] são:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= c(y + x - \frac{1}{3}x^3 + J(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{c}(x - a + by).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Apesar das variáveis não possuírem uma interpretação fisiológica exata, a variável x corresponde a voltagem através da membrana celular do neurônio, representando a excitabilidade do sistema; a variável y à recuperação do estado de repouso da membrana e $J(t)$ representa um estímulo externo, o qual, para as análises realizadas, foi considerado $J(t) = 0$, ou seja, não há um forçamento externo. Os parâmetros a , b e c foram introduzidos no sistema (4.3) para ajustar o resultado das equações ao comportamento observado fisiologicamente.

Acoplamento de osciladores de FitzHugh-Nagumo

A observação de modelos dinâmicos de uma rede de neurônios idênticos pode ser realizada através do acoplamento entre as unidades descritas pela equação (4.3). A ligação entre os neurônios corresponde a um acoplamento elétrico, onde é inserido um novo parâmetro no sistema de equações (4.3), que relaciona as variáveis $x(t)$, as quais correspondem a voltagem através da membrana. Assim, este acoplamento funciona como uma conexão entre dois ou mais osciladores (neurônios).

Foram realizados dois acoplamentos diferentes entre dois osciladores, um primeiro chamado acoplamento unidirecional e o segundo bidirecional. O acoplamento é realizado inserindo uma constante, neste caso γ , multiplicado pela diferença nas voltagens $x(t)$. O caso unidirecional é obtido inserindo o acoplamento somente em um oscilador, o qual atua sobre o outro, conforme descrito pelo sistema de equações (4.4), onde (x_1, y_1) representam o primeiro oscilador, no qual inseriu-se o termo de acoplamento, e (x_2, y_2) o

oscilador acoplado.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= c(y_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{c}(x_1 - a + by_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= c(y_2 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{1}{c}(x_2 - a + by_2).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

No acoplamento bidirecional, os dois osciladores estão conectados entre si, com o mesmo parâmetro de acoplamento adicionado em ambos. O conjunto de equações é dado pelo sistema (4.5).

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= c(y_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{c}(x_1 - a + by_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= c(y_2 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3) + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{1}{c}(x_2 - a + by_2).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

O trabalho desenvolvido em [39] apresenta resultados numéricos para acoplamentos uni e bidirecionais, com o acoplamento de dois, três e quatro osciladores. O estudo foi baseado na análise de expoentes de Lyapunov, planos isoperiódicos e diagramas de bifurcação. Nesta dissertação, pretende-se estender os resultados obtidos analisando as bifurcações de equilíbrio e as estruturas de bifurcação que ocorrem nas proximidades das regiões caóticas analisadas em [39], para ambos os sistemas unidirecional e bidirecional. O objetivo é estudar o sistema do ponto de vista da dinâmica não-linear e não do ponto de vista fisiológico, ou seja, os resultados não são contextualizados com o comportamento observado nos próprios neurônios. As análises foram realizadas em termos do parâmetro de acoplamento γ associado a um dos parâmetros do sistema. Nestas análises, os parâmetros não variados foram fixados nos valores apresentados na tabela 3.

Plano de Parâmetros		
$a \times \gamma$	$b = 0,4$	$c = 2,0$
$b \times \gamma$	$a = 0,7$	$c = 2,0$
$c \times \gamma$	$a = 0,7$	$b = 0,4$

Tabela 3 – Valores dos parâmetros fixados para os planos de parâmetros dos sistemas acoplados.

Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos através dos métodos computacionais de integração e continuação numérica aplicados aos sistemas (4.4) e (4.5). Para obter os planos de expoente de Lyapunov, estes foram discretizados em uma malha quadrada de 500×500 pontos igualmente espaçados, integrando numericamente os sistemas através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo igual a 10^{-1} e um tempo de integração de 5×10^5 , utilizando o algoritmo proposto em [26] para calcular cada um dos $2,5 \times 10^5$ expoentes de Lyapunov para cada plano de parâmetros. Os diagramas isoperiódicos foram obtidos também utilizando o método de Runge-Kutta, neste caso com passo variável, removendo um transiente de 5×10^6 e utilizando 1×10^6 integrações para encontrar o período com uma precisão de 1×10^{-3} , em uma malha discretizada de 1200×1200 . Os dados para a construção destes diagramas isoperiódicos foram obtidos pelo Professor César Manchein. As curvas de bifurcação foram obtidas pelo software MatCont, versão 5.2. As figuras foram construídas utilizando o programa Gnuplot versão 4.2.

Os sistemas (4.4) e (4.5) possuem vários pontos de equilíbrio diferentes, dependentes dos valores dos parâmetros assumidos. Conforme os parâmetros variam, um ou mais equilíbrios podem ter sua estabilidade alterada, e bifurcações ocorrerão. Assim, é interessante estudar as curvas de bifurcação de equilíbrio do sistema, as quais mostram como o equilíbrio é alterado ao variar os parâmetros. A Fig. 20 apresenta as curvas de bifurcação de equilíbrio em termos dos parâmetros a , b , c , e do parâmetro de acoplamento γ , para os acoplamentos unidirecional e bidirecional. Em [37], foi realizado um estudo analítico e numérico do sistema (4.5), no qual obteve-se as bifurcações do par de parâmetros $\gamma \times a$, resultado semelhante ao apresentado na Fig. 20(d).

As Figs. 20(a), (b), e (c), correspondem ao acoplamento unidirecional, e as Figs. 20(d), (e), e (f), ao acoplamento bidirecional. As curvas em ciano, magenta e vermelho correspondem a diferentes curvas de bifurcação de Hopf, relacionadas a diferentes pontos de equilíbrio, e as curvas em verde

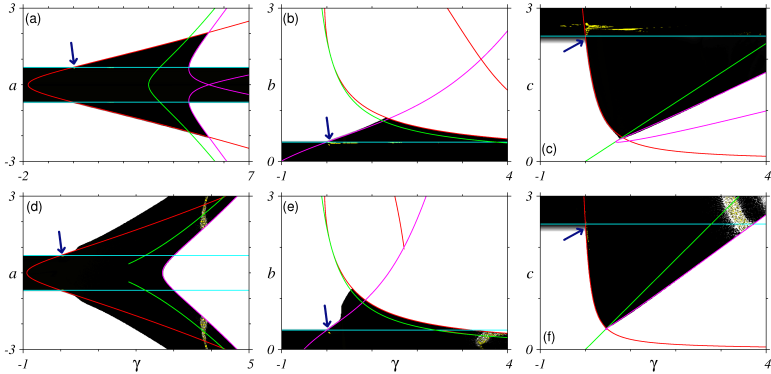


Figura 20 – Planos de parâmetros com o maior expoente de Lyapunov e as curvas de bifurcação de equilíbrio para: (a)-(c) sistema unidirecional (4.4); (d)-(f) sistema bidirecional (4.5).

sela-nó ou ponto limite do equilíbrio, que representam pontos onde a solução deixa de existir. Ainda, utilizando os expoentes de Lyapunov, caracterizou-se as regiões em termos do comportamento do sistema para a condição inicial particular $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-0, 1; 0, 1; 0, 5; -0, 3)$, onde a cor branca está relacionada a pontos de equilíbrio, preto à regiões periódicas e em amarelo à regiões caóticas, para os diferentes planos de parâmetros. As setas azuis presentes nas Figs. 20(a)-(f), sinalizam as respectivas regiões caóticas nestes planos. Pode-se observar que apesar de possuir uma grande região periódica, as áreas de caos concentram-se em uma pequena faixa de parâmetros, que serão mostradas em detalhes nas próximas páginas.

Os resultados mostram a semelhança entre os dois sistemas em termos das curvas de bifurcação e das regiões com diferentes comportamentos que ambos apresentam. Pode-se observar que para uma grande faixa de parâmetros, ambos os sistemas evoluem para o equilíbrio, e somente para uma faixa de valores os sistemas possuem oscilações periódicas. Dentro destas estrutura periódicas, foram identificados pontos com comportamento caótico. Para valores negativos dos parâmetros b e c , o sistema diverge, motivo pelo qual não foram plotadas estas regiões nas Figs. 20(b),(c),(d) e (f).

Sistema unidirecional

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da análise das regiões caóticas do sistema (4.4), indicados nas Figs. 20(a)-(c) pelas setas azuis.

As Figs. 21(a)-(c) mostram o valor do maior expoente de Lyapunov, caracterizando as regiões caóticas e periódicas para os parâmetros a , b , e c , em termos do parâmetro de acoplamento γ . Para caracterizar os expoentes foi utilizada a seguinte escala de cores: branco para equilíbrio, preto para comportamento periódico, e marrom, passando pelo amarelo, vermelho, até o azul, para o comportamento caótico. Esta escala de cores foi utilizada para manter a mesma paleta de cores adotada em [39].

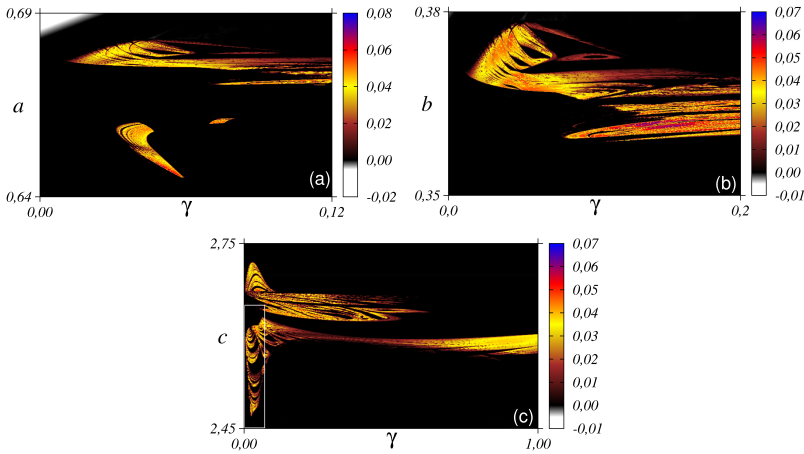


Figura 21 – Regiões caóticas e estruturas periódicas dos planos de parâmetros: (a) $a \times \gamma$; (b) $b \times \gamma$; (c) $c \times \gamma$, indicadas pelas setas azuis nas Figs. 20(a)-(c), respectivamente.

Observa-se regiões periódicas imersas nas regiões caóticas nos planos de parâmetros das Figs. 21. Diversas análises nestes planos de parâmetros foram realizadas em [39], mostrando estruturas periódicas e regras de adição de período para estas formações, através de planos de expoentes de Lyapunov e diagramas isoperiódicos.

Pelo fato da região caótica estar concentrada em uma pequena faixa de parâmetros, encontrou-se dificuldade em obter as curvas de bifurcação para os planos $a \times \gamma$ e $b \times \gamma$, devido a falta de precisão numérica do MatCont. Assim, o estudo das estruturas de bifurcação estão concentrados no plano de parâmetros $c \times \gamma$, mas acredita-se que os resultados sejam semelhantes para os outros parâmetros, devido as semelhanças encontradas nos resultados apresentados em [39] para os diferentes parâmetros.

As Figs. 22(a)-(b), obtidas através do zoom indicado pela caixa branca na Fig. 21(c), mostram a riqueza da dinâmica que o sistema apre-

senta no plano de parâmetros $c \times \gamma$. Na primeira figura, foram plotados o maior expoente de Lyapunov codificado por cores, utilizando a mesma paleta de cores das Figs. 21, com as curvas de bifurcação de ciclos sobrepostas. Na Fig. 22(b), é mostrado o diagrama isoperiódico na mesma região, com os valores dos períodos identificados no quadro superior, com a região caótica e períodos maiores que 20 em preto. As bifurcações são identificadas pelas seguintes cores: verde correspondem à bifurcações de Neimark-Sacker, ciano e azul bifurcações sela-nó. Há duas curvas de Neimark-Sacker diferentes, uma horizontal e outra cruzando o plano, e duas curvas de sela-nó em ciano, as quais possuem a mesma forma: cruzam a região caótica pelo lado direito, delineando a fronteira inferior das estruturas periódicas, fazem duas dobras e terminam ao tocar a curva de Neimark-Sacker horizontal.

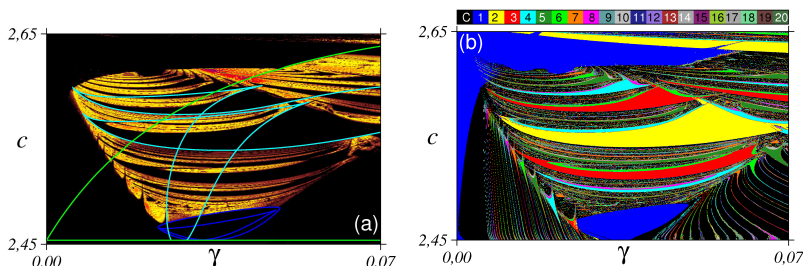


Figura 22 – (a) Expoente de Lyapunov na região delimitada pela caixa branca na figura 21(c), com as curvas de bifurcação sobrepostas. (b) Diagrama isoperiódico na mesma região de análise.

A Fig. 22(a) mostra a concordância entre os resultados obtidos por dois métodos numéricos diferentes: de integração e continuação numérica. Pode-se observar que as curvas de sela-nó delimitam a borda inferior das estruturas periódicas imersas na região caótica, indicando que o atrator caótico sofre uma crise repentina, passando a ter um comportamento periódico ao variar os parâmetros adequadamente.

A identificação de curvas de bifurcação de Neimark-Sacker é um indicativo da existência de regiões de comportamento quase-periódico (torus) no plano de parâmetros [8], que não são identificadas pela análise do maior expoente de Lyapunov, visto que o torus possui dois expoentes de Lyapunov nulos.

O comportamento quase-periódico é caracterizado pelo chamado número de rotação $\rho = p/q$, onde q é o período da órbita e p o número de revoluções ao longo do meri-diano [17, 8]. Para uma órbita periódica, ρ é racional (pode ser obtido da divisão de dois inteiros), e para um compor-

tamento quase-periódico, ρ é irracional. Este comportamento pode ser visualizado no diagrama isoperiódico da Fig. 22(b), onde, nas regiões inferiores existem áreas em preto que caracterizam quase-periodicidade, neste caso com estruturas periódicas internas bem definidas, diferentes da região central, por exemplo, onde o comportamento caótico é observado pela cor preta, também, mas cravejado de pontos periódicos. As configurações periódicas existentes na região de torus possuem características de estruturas conhecidas como línguas de Arnold, as quais possuem nos planos de parâmetros a forma de triângulos distorcidos [40, 41]. A bifurcação de oscilações quase-periódicas para periódicas é chamada de sincronização (phase locking), ou seja, os dois osciladores sincronizam nestas regiões periódicas.

A Fig. 23, obtida em [8] da análise de um mapa bidimensional, mostra o padrão das bifurcações que delimitam a formação típica das línguas de Arnold. Na figura, t representam curvas de sela-nó, h Neimark-Sacker e f dobramento de período, limitando a estrutura interna de período 7.

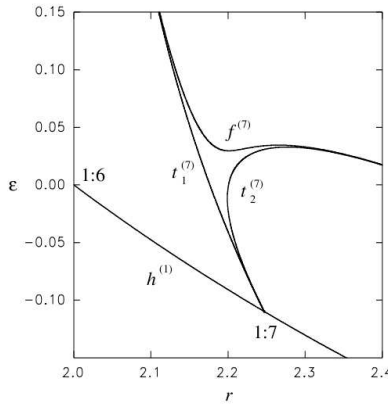


Figura 23 – Estrutura das bifurcações em uma região com línguas de Arnold. Figura retirada de [8].

Segundo [16], cada região de movimento periódico delimitado por dois arcos de bifurcação sela-nó, em regiões de quase-periodicidade são chamadas línguas de Arnold. Pode-se ver na Fig. 22, e também no zoom mostrado nas Fig. 24(a),(c), que a curva de bifurcação sela-nó delimita a borda direita da língua de período 3, e a mesma possui um dobramento de período, passando para 6 e identificado pela cor verde. Acredita-se que exista uma estrutura de período 2 encoberta pela área azul, com as mesmas características.

Segundo a análise feita em [39], as estruturas periódicas estão organizadas similarmente a ramos da árvore de Stern-Brocot [13]. Assim, a estrutura primária segue uma organização por adição de período: $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$. A soma dos períodos de duas estruturas primárias consecutivas é igual ao período das estruturas secundárias que estão entre duas estruturas primárias, obtendo, por exemplo $3 + 4 \rightarrow 7, 4 + 5 \rightarrow 9 \dots$. Visualmente ainda observa-se estruturas terciárias entre as secundárias, seguindo a mesma organização.

Através das curvas de bifurcação de sela-nó (cor ciano) na Fig. 22(a), identifica-se uma conexão entre as estruturas periódicas presentes na região central e as presentes na região de torus. Na Fig. 22(b), observa-se que ambas as formações delimitadas pela mesma curva possuem o mesmo período. Ainda, a região inferior em azul, de período 1 observado na Fig. 22(b), é devido à multiestabilidade do sistema, e apresenta-se com uma estrutura isolada, possuindo uma curva de bifurcação fechada, representada pela curva de sela-nó azul em 22(a). Na Fig. 24(d), observa-se a mesma sequência de adição de período observada nas línguas de Arnold em (c), o que reforça a ideia de que as estruturas periódicas estão interligadas.

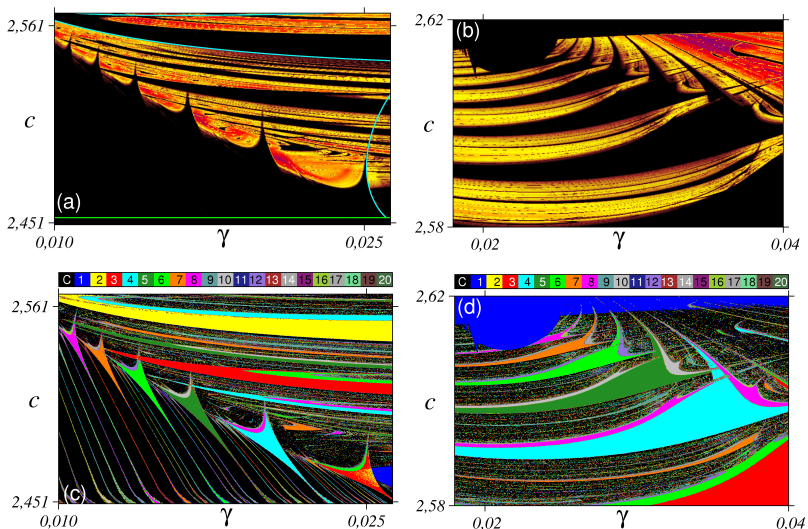


Figura 24 – Zooms das Figs. 22, mostrando as estruturas periódicas nas regiões interligadas pelas curvas de bifurcação sela-nó, através de: (a) e (b) expoentes de Lyapunov; (c) e (d) diagramas isoperiódicos.

As Figs. 25(a) e (b) mostram os expoentes de Lyapunov obtidos utilizando duas condições iniciais diferentes: $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-0, 1; 0, 1; 0, 5; -0, 3)$ para (a) e $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-0, 1; 0, 1; 0, 5; 0, 1; -0, 3)$ para (b). O resultado corrobora a existência da multiestabilidade do sistema (4.4), visto que uma região caótica em (a), adquire um comportamento periódico em (b) devido a alteração da condição inicial do sistema, que resultou na mudança do valor do expoente de Lyapunov. Por outro lado, as curvas de bifurcação não são alteradas por pequenas mudanças nas condições iniciais, o que torna este método de continuação numérica mais geral na análise de sistemas dinâmicos. A curva de Neimark-Sacker (verde) que corta a região caótica em (a), passa a delimitar a fronteira caos-periodicidade. Foi identificado um comportamento de quase-periodicidade na região em (b), próximo a curva de Neimark-Sacker, ou seja, o sistema passa do comportamento periódico para quase-periódico até a curva, para após ter um comportamento caótico. Este resultado pode ser visualizado na Fig. 25(c), na qual foi plotado o segundo maior expoente de Lyapunov para a condição inicial de (b), mostrando uma faixa preta sobre a curva de Neimark-Sacker, onde o expoente é zero. Visto que a existência de dois expoentes de Lyapunov nulos caracteriza um comportamento quase-periódico, neste caso, a curva cruzando a região caótica caracteriza uma região de torus que só é identificada pela integração numérica para outras condições iniciais, o que explica o fato da curva de Neimark-Sacker cruzar a região caótica na Fig. 22(a).

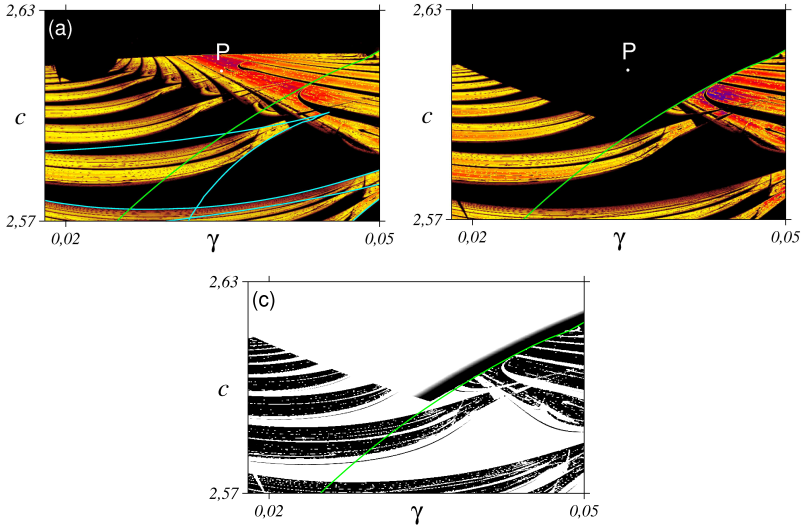


Figura 25 – Expoentes de Lyapunov para duas condições iniciais diferentes. Em (a), $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-0, 1; 0, 1; 0, 5; -0, 3)$, e para (b) $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-0, 1; 0, 5; 0, 1; -0, 3)$. Em (c) foi plotado o segundo maior expoente para (b), mostrando a região de torus na borda da curva de Neimark-Sacker .

A Fig. 26 foi construída para comprovar como o comportamento do sistema é afetado pela condição inicial imposta, variando-se as CIs no ponto P da Fig. 25, onde $(\gamma, c) = (0, 035; 2, 615)$. Para isso variou-se os valores de x_1 e y_1 na Fig. 26(a), ou seja, o oscilador com o termo de acoplamento, mantendo a mesma condição de $(x_2, y_2) = (0, 5; -0, 3)$. O comportamento assintótico do sistema depende neste caso da condição inicial de x_1 e y_1 no plano de (x_1, y_1) , onde a cor vermelha caracteriza pontos que evoluem para um comportamento caótico e a cor preta pontos que evoluem para um comportamento periódico. O mesmo raciocínio foi empregado em 26(b), mas neste caso variou-se a condição inicial do segundo oscilador, mantendo a condição inicial do primeiro em $(x_1, y_1) = (0, 1; 0, 1)$. Como as condições iniciais não são idênticas e o termo de acoplamento está presente em (x_1, y_1) , as bacias de atração não são idênticas, apesar de apresentarem resultados semelhantes, com grandes regiões caóticas e periódicas.

Ao realizar este estudo verificou-se ainda que, para uma grande região de condições iniciais fora do intervalo apresentado, o sistema diverge.

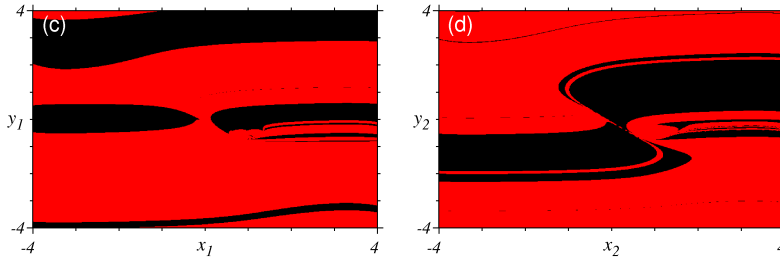


Figura 26 – Bacias de atração referentes ao ponto P da Fig. 25, variando-se (x_1, y_1) em (a) e (x_2, y_2) em (b).

Das Figs. 25 e 26, conclui-se existir uma grande sensibilidade às condições iniciais, fenômeno este característico de sistemas caóticos.

Sistema bidirecional

A análise das curvas de bifurcação para o sistema (4.5) não mostrou resultados além das bifurcações de equilíbrio apresentadas na Fig. 20. As Figs. 27(a)-(c), mostram os planos de parâmetros a , b , c , variados com o parâmetro de acoplamento γ , nas regiões indicadas pelas setas azuis nas Figs. 20(d)-(f), expondo o maior expoente de Lyapunov para indicar o comportamento do sistema em relação aos parâmetros. A análise de bifurcações de ciclo limite não trouxe resultados satisfatórios para estas regiões, que concentram-se em uma faixa muito pequena de valores dos parâmetros, na qual o MatCont não teve precisão numérica suficiente. Comparando estes resultados com o acoplamento unidirecional, conclui-se que o acoplamento unidirecional resulta numa maior riqueza no comportamento do sistema, fato este caracterizado pela assimetria das equações para os dois osciladores presente no sistema (4.4).

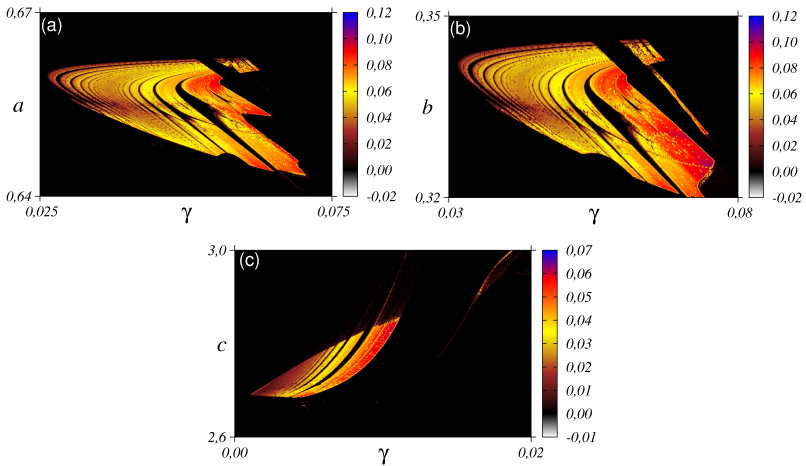


Figura 27 – Expoentes de Lyapunov para o sistema bidirecional, para os pares de parâmetros: (a) $a \times \gamma$, (b) $b \times \gamma$ e (c) $c \times \gamma$, nas regiões indicadas por setas azuis na Fig. 20.

Em resumo, a dinâmica dos sistemas (4.4) e (4.5) foi analisada através dos métodos computacionais de integração e continuação numérica, revelando os diferentes comportamentos existentes nos sistemas e a dependência destes em relação aos parâmetros e as condições iniciais impostas. Através dos resultados apresentados, verificou-se a existência de regiões

de equilíbrio que, através de bifurcações de Hopf, tornam-se periódicas. Observou-se a formação de estruturas periódicas imersas na região caótica, organizadas por adição de período, e estruturas de línguas de Arnold em regiões de comportamento quase-periódico, com períodos organizados de acordo com ramos da árvore de Stern-Brocot. As curvas de bifurcação de sela-nó identificaram a conexão entre diferentes regiões periódicas do mesmo plano de parâmetros, que apresentam o mesmo período, umas imersas na região caótica e outras na região de quase-periodicidade, e curvas de bifurcação de Neimark-Sacker mostraram a existência de comportamento quase-periódico em determinadas regiões do plano de parâmetros. Mostrou-se ainda como a condição inicial imposta altera o comportamento do sistema entre os comportamentos caótico, quase-periódico e periódico.

5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação propôs-se a investigação das estruturas de bifurcação nos planos de parâmetros de sistemas dinâmicos contínuos quadridimensionais. Para isto foram estudados separadamente dois modelos: um sistema de Chua quadridimensional e um acoplamento de osciladores de FitzHugh-Nagumo.

Através das curvas de bifurcação mostrou-se como os sistemas possuem seus comportamentos divididos nos planos de parâmetros através de bifurcações. Esse método se mostrou eficiente na definição de valores de parâmetros de interesse, sem necessidade de integrar o sistema para vários parâmetros diferentes, por ser mais rápido e de fácil implementação. Por outro lado, o método não identifica regiões que possuem comportamento caótico. Assim, combinando com o método de análise dos expoentes de Lyapunov e dos diagramas isoperiódicos, foi possível identificar as regiões de caos dos sistemas, as rotas para o caos, e como são formadas as regiões periódicas imersas em regiões caóticas, principalmente a formação de estruturas espirais, camarões e línguas de Arnold em regiões de quase-periodicidade.

Os resultados apresentados na seção 4.1 revelaram a riqueza do comportamento do sistema de Chua quadridimensional estudado, o qual apresentou vários fenômenos característicos de sistemas caóticos. As curvas de bifurcação mostraram como o comportamento do sistema é modificado sob variação dos parâmetros de controle. Uma das características encontradas foi a mudança do equilíbrio para um ciclo periódico através de uma bifurcação de Hopf, seguido pela clássica rota para o caos por dobramento de período para todas as combinações de parâmetros. Estruturas de bifurcação semelhantes a diversos sistemas contínuos e discretos foram observados nos planos de parâmetros, como camarões e espirais imersas em regiões caóticas e organizadas por adição de período. As curvas de bifurcação delinearam o endoesqueleto dos camarões e indicaram a existência de multiestabilidade no sistema, comprovada pela análise das bacias de atração, que mostraram as condições iniciais que evoluem para o comportamento caótico e periódico. Ainda, foi comprovado a existência de caos transiente no sistema e como este é influenciado pelo parâmetro d , responsável pela dimensão adicional do circuito.

Para o acoplamento de osciladores de FitzHugh-Nagumo, seção 4.2, os resultados obtidos mostraram os diferentes comportamentos existentes para as combinações dos parâmetros dos sistemas acoplados uni e bidirecional com o parâmetro γ , responsável pelo acoplamento entre os osciladores. Observou-se a semelhança entre as regiões de equilíbrio e periódicas de ambos os acoplamentos, e como estas são definidas pelas curvas de bifurcação

de Hopf. Estruturas periódicas com mesmo período e sequência de adição, a princípio sem ligação nos planos de parâmetros, foram conectadas através das curvas de bifurcação, mostrando a complexidade do sistema. Apesar de não serem obtidas todas as curvas de bifurcação que formam as línguas de Arnold, estas puderam ser caracterizadas nos planos de parâmetros utilizando os diagramas isoperiódicos. O comportamento quase-periódico foi identificado pelos dois métodos numéricos utilizados, e a análise de bacias de atração ajudaram a explicar os resultados obtidos, demonstrando ainda como o comportamento é alterado por mudanças nas condições iniciais, passando de um comportamento caótico para periódico ou quase-periódico.

A combinação dos dois métodos numéricos mostrou-se eficiente na caracterização dos possíveis comportamentos que os sistemas apresentam, sendo possível a utilização destes na análise de outros sistemas dinâmicos contínuos, como proposta para trabalhos futuros. Uma análise das bifurcações globais pode ser realizada nos sistemas, visto que a estrutura espiral apresenta características que indicam a possibilidade de existência de um ponto heteroclínico no centro da estrutura espiral. Ainda, pode-se investigar como são alteradas as estruturas de bifurcação em sistemas hipercaóticos, nos quais as estruturas periódicas desaparecem ou são deformadas nos planos de parâmetros.

Os resultados numéricos apresentados na seção 4.1 foram publicados no artigo “Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model”, em *Physics Letters A*, v. 378, p. 171, 2014.

REFERÊNCIAS

- [1] GASPARD, P.; KAPRAL, R.; NICOLIS, G. Bifurcation Phenomena near Homoclinic Systems: A Two-Parameter Analysis. *Journal of Statistical Physics*, vol. 35, n. 5/6, p. 697, 1984.
- [2] FAÇANHA, W.; OLDMAN, B.; GLASS, L. Bifurcation structures in two-dimensional maps: the endoskeletons of shrimps. *Physics Letters A* v. 377, p. 1264, 2013.
- [3] MEDEIROS, E. S. et al. Torsion-adding and asymptotic winding number for periodic window sequences. *Physics Letters A*, v. 377, p. 628, 2013.
- [4] GENESIO, R.; INNOCENTI, G.; GUALDANI, F. A global qualitative view of bifurcations and dynamics in the Rössler system. *Physics Letters A* v. 372, p. 1799, 2008.
- [5] BARRIO, R. et al. Qualitative and numerical analysis of the Rössler model: Bifurcations of equilibria. *Computers and Mathematics with applications* v. 62, p. 4140, 2011.
- [6] BARRIO, R. et al. Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with Shilnikov saddle-foci. *Physical Review E*, v. 84, p. 035201, 2011.
- [7] BARRIO, R.; BLESÁ, F.; SERRANO, S. Qualitative analysis of the Rössler equations: Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors. *Physica D*, v. 238, p. 1087, 2009.
- [8] KUSNETSOV, Y. A. *Elements of applied bifurcation theory*. Nova York: Springer-Verlag, 1998.
- [9] ALVES MONTEIRO, L. H. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [10] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Nova York: Cambridge University Press, 2000.
- [11] DHOOGHE, A.; GOVAERTS, W.; KUSNETSOV, Y. A. MatCont: A Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software* 29, p.141, 2003.
- [12] SPROTT, J. C. *Elegant Chaos*. Singapura: World Scientific Publishing Ltda, 2010.

- [13] FREIRE, J. G.; GALLAS, J. A. C. Stern-Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer-van der Pol and the FitzHugh-Nagumo models of excitable systems. *Physics Letters A*, v. 375, p. 1097, 2011.
- [14] CELESTINO, A. et al. Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, v. 19, p. 139, 2014.
- [15] FERRARA, N.; PRADO, C. *Caos: Uma Introdução*. São Paulo: Edgard Blöcher Ltda, 1995.
- [16] THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. West Sussex: John Wiley and Sons, 2002.
- [17] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Nova York: Springer, 2003.
- [18] DHOOGHE, A. et al. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. v. 14, p. 147, 2008.
- [19] RAY, A.; GHOSH, D.; CHOWDHURY, A. R. On the chaotic aspects of three wave interaction in a magnetized plasma. *Physics Letters A*, v. 372, p. 5329, 2008.
- [20] CHUA, L. O. Chua's Circuit: An Overview Ten Years Later. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, v. 4, p. 117, 1994.
- [21] ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a Chua circuit. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, v. 40, p. 189, 2010.
- [22] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit. *Physics Letters A*, v. 372, p. 4793, 2008.
- [23] ROCHA, R.; ANDRUCIOLI, G. L. D.; MEDRANO-T., R. O. Experimental characterization of nonlinear systems: a real-time evaluation of the analogous Chua's circuit behavior. *Nonlinear Dynamics*, v. 62, p. 237, 2010.
- [24] STEGEMANN, C. et al. Lyapunov exponent diagrams of a 4-dimensional Chua system. *Chaos*, v. 21, p. 033105, 2011.

- [25] LIU, L.; LYU, C.; ZHANG, Y. Experimental Verification of a Four-Dimensional Chua's System and its Fractional Order Chaotic Attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 19, p. 2473, 2009.
- [26] WOLF, A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285, 1985.
- [27] SILVA, D. T. Diagramas de Bifurcação para um Oscilador de Chua Quadridimensional. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2012. Dissertação de Mestrado.
- [28] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Physical Review E*, v. 84, p. 016216, 2011.
- [29] STOOP, R. et al. Shrimps: Occurrence, Scaling and Relevance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 22, n. 10, p. 1230032, 2012.
- [30] GALLAS, J. A. C. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models. *Physica A*, v. 202, p. 196, 1994.
- [31] MEDEIROS, E. S. et al. Replicate periodic windows in the parameter space of driven oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 44, p. 982, 2011.
- [32] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. Periodicity Hub and Nested Spirals in the Phase Diagram of a Simple Resistive Circuit. *Physical Review Letters*, v. 101, p. 054101, 2008.
- [33] GALLAS, J. A. C. et al. Antiperiodic oscillations. *Scientific Reports*, v. 3, n. 1958, p. 1, 2013.
- [34] RECH, P. C. Bifurcação, Multiestabilidade e Sincronização em Sistemas Dinâmicos Discretos. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2005. Tese de Doutorado.
- [35] LAY, Y.-C.; TÉL, T. *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales*. Nova York: Springer, 2011.
- [36] BO-CHENG, B. et al. Transient chaos in smooth memristor oscillator. *Chinese Physics B*, v. 19, p. 030510, 2010.
- [37] CAMPBELL, S. A.; WAITE, M. Multistability in coupled Fitzhugh-Nagumo Oscillators. *Nonlinear Analysis*, v. 47, p. 1093, 2011.

-
- [38] FITZHUGH, R. Impulses and physiological states in theoretical models of the nerve membrane. *Biophysical Journal*, v. 1, p. 445, 1961.
 - [39] SANTOS, J. V. Dinâmica de redes de osciladores de FitzHugh-Nagumo. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2012. Dissertação de Mestrado.
 - [40] ROSA, C.; CORREIA, M. J.; RECH, P. C. Arnold tongues and quasiperiodicity in a prey–predator model. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 40, p. 2041, 2009.
 - [41] SOUZA, S. L. T. et al. Self-similarities of periodic structures for a discrete model of a two-gene system. *Physics Letters A*, v. 376, p. 1290, 2012.