

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DENILSON TONETO DA SILVA

Diagramas de Bifurcação para um Oscilador de Chua Quadridimensional

Joinville, SC

2012

DENILSON TONETO DA SILVA

Diagramas de Bifurcação para um Oscilador de Chua Quadridimensional

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Física pela Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque, Doutor em Física

Joinville, SC

2012

# FICHA CATALOGRÁFICA

S586d

Silva, Denilson Toneto da.

Diagramas de Bifurcação para um Oscilador de Chua Quadrimen-  
sional / Denilson Toneto da Silva;

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque. – Joinville - SC,  
2012.

75 f. : il ; 30 cm.

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado Santa Catarina,  
Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2012.

1. Dinâmica não-linear. 2. Expoente de Lyapunov. I. Albuquerque,  
Holokx Abreu.

CDD 531.1

**“DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO PARA UM OSCILADOR  
DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL”**

por

**DENILSON TONETO DA SILVA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

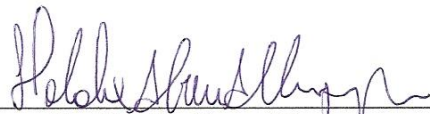
**MESTRE EM FÍSICA**

área de concentração em “Física”, e aprovada em sua forma final pelo

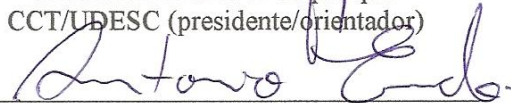
**CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.**

Banca Examinadora:

Joinville, 28 de fevereiro de 2012.



Dr. Holokx Abreu Albuquerque  
CCT/UDESC (presidente/orientador)



Dr. Antonio Endler  
UFRGS



Dr. Paulo Cesar Rech  
CCT/UDESC

Dr. César Manchein  
CCT/UDESC (suplente)



*A toda a minha família.*

# AGRADECIMENTOS

Neste momento de alegria gostaria de recordar todos que contribuíram ao sucesso de mais esta jornada em minha vida:

À minha vontade própria, que algumas vezes parecia desfalecer em meio às turbulências apresentadas pela escola da vida;

Aos meus colegas do mestrado, em especial ao Julio, Thiago, José Carlos e Juliana, que muito contribuíram com idéias e opiniões, além de formar um grande vínculo de amizade e companheirismo;

Aos professores do corpo de mestrado em Física UDESC Joinville-SC, que foram muito mais que professores, foram educadores;

Ao meu orientador Holokx Abreu Albuquerque, que me apoiou em todos os momentos, e contribuiu para a conclusão desta etapa muito importante em minha trajetória de vida;

Ao professor Paulo Cesar Rech. Este é um agradecimento especial, pois não sendo meu orientador, ajudou-me na obtenção de resultados importantes para as conclusões desta dissertação. Um exemplo de dedicação a vida acadêmica;

À minha família, em especial o meu pai Mairi Lima da Silva e mãe Neuza Toneto da Silva, que nos momentos mais difíceis sempre deram a força e incentivo necessários para a conclusão desta pós-graduação, e principalmente por não fazerem da distância geográfica uma barreira intransponível, sofrendo e vibrando em todos os momentos;

À minha namorada Pricyla Corrêa, na qual conviveu comigo novamente (graduação e mestrado) todos os momentos difíceis e bonitos para que mais esta etapa se completasse. Agradeço também a seus pais, Jair Corrêa e Doracilda Corrêa que tanto me receberam em sua casa, em suas vidas e ainda me tratado como um filho, e principalmente por me fornecerem uma segunda casa e família em Joinville;

Aos meus padrinhos: Dilberto Tonetto e Sonia, que sempre me apoiaram e trataram como seu filho, vibrando e comemorando como nunca no momento da formatura do curso Técnico em Mecânica em minha cidade natal (lembro-me desta cena

como se fosse hoje); Este é vínculo muito especial da minha família. Não posso esquecer-me de seu filho, Dielson, no qual tive o grande prazer de ser padrinho;

À minha irmã, Neuzimary Toneto da Silva e minhas duas lindas sobrinhas: Caroline e Rafaela;

A Deus e à padroeira de minha cidade natal, Nossa Senhora de Medianeira, por ter me dado força em todos os momentos difíceis nos quais foi amparado e iluminado. Não posso deixar de mencionar o nome de Dona Helena, na qual suas “brasas” sempre acenderam e iluminaram meu espírito nos momentos escuros e de dificuldades;

À UDESC, por proporcionar através de toda a sua infra-estrutura e corpo docente, de forma gratuita um ensino de qualidade em graduação e agora em pós-graduação;

A Capes por me oferecer uma “bolsa de estudo” no qual me manteve financeiramente focado aos estudos. Ao CNPq e FAPESC, por proporcionar os diversos recursos utilizados em nossos laboratórios e instituição.

A todos, muito obrigado.

*“As descobertas nascem de conjecturas espontâneas da razão criativa”. (C. S. Pierce)*

*“Se tudo fosse irregular – ou regular – não haveria pensamento, pois este não é senão a tentativa de passar da desordem à ordem, sendo-lhe necessárias ocasiões daquela – modelo desta”. (Paul Valéry)*

*“Mas não basta pra ser livre  
Ser forte, aguerrido e bravo  
Povo que não tem virtude  
Acaba por ser escravo ”*

(Parte do Hino do estado do Rio Grande do Sul)  
Letra de Francisco Pinto da Fontoura  
Oficializado na lei nº 5.213, de Janeiro de 1966.



# RESUMO

Este trabalho tem como foco principal estudar, por métodos numéricos, um circuito eletrônico de Chua composto de quatro equações diferenciais através de diagramas de bifurcação e espaços de parâmetros. Nossa proposta aqui é ampliar os estudos numéricos já realizados neste sistema, revelando uma gama maior do seu comportamento. Para isso, realizamos construções dos espaços de parâmetros nos quais apresentam os valores dos expoentes de Lyapunov através de escalas coloridas, mediante a variação de dois parâmetros que compõem o circuito eletrônico. Com este procedimento é possível descobrir onde existem regiões caóticas, periódicas e pontos fixos para o conjunto de parâmetros do sistema.

**Palavras-chave:** Caos. Espaço de parâmetros. Expoente de Lyapunov.

# ABSTRACT

In this work, we numerically studied a four-dimensional Chua circuit model through bifurcation diagrams and parameter spaces. Our main objective here is to extend the studies already realized in this system, showing a wider range of its behavior. For this purpose, we constructed the parameter spaces using the Lyapunov exponents' spectrum through color scales, varying simultaneously two parameters of the system. With this procedure it was possible to discover where are the chaotic regions, the periodic ones and the fixed points for the set of parameters.

**Key words:** Chaos. Parameter Space. Lyapunov Exponents.

# Lista de Figuras

<b>Figura 1.</b> O atrator do sistema de Lorenz. Está é a figura 1.3 retirada da ref. [1]. ....	14
<b>Figura 2.</b> Ilustração do comportamento de duas órbitas no espaço de fase devido a sua dependência nas condições iniciais. Ilustração criada a partir da figura 16 presente na referência [3]. .....	16
<b>Figura 3.</b> Comparação da escala de cores, com o valor numérico assumido e ainda com o comportamento da órbita devido à integração do sistema no tempo. ....	18
<b>Figura 4.</b> Espaço de parâmetros de um sistema quadrático relatado na referência [5]. Em ambas as imagens demonstram a formação de espiral de “ <i>camarões</i> ”. Na imagem da direita, podemos ver a representação do período assumido por cada estrutura. ...	20
<b>Figura 5.</b> Bonatto e Gallas [6] construíram em (a) o espaço de parâmetros que representa o expoente de Lyapunov para os parâmetros $\beta \times \alpha$ , no qual apresenta claramente a formação de espirais de estruturas periódicas. Em (b) é demonstrada através de cores o valor do período de cada estrutura. Em (c) temos o diagrama de bifurcação para a equação de 2º grau representada pela linha tracejada em (b). Finalmente em (d) temos os atratores referentes aos pontos destacados no diagrama de bifurcação. ....	21
<b>Figura 6.</b> Visão global do espaço de parâmetro do maior expoente de Lyapunov. F representa o foco de formação da espiral e os números os valores do período de cada estrutura periódica por onde a reta passa. Os valores de $R$ e $r_L$ estão em unidades de resistência, no caso $\Omega$ . Esta é a figura 1 presente na ref. [7]. ....	22
<b>Figura 7.</b> Em (a) temos o espaço de parâmetros do expoente de Lyapunov. (b) Espaço de parâmetros do período. (c) Diagrama de bifurcação da linha azul presente em (b). Esta é a figura 3, da ref. [8]. ....	23
<b>Figura 8.</b> Ilustração do circuito eletrônico apresentado na ref. [9]. Destaque para os círculos coloridos nos quais revelam os pontos de medição de tensão do circuito eletrônico. ....	25

<b>Figura 9.</b> Visão tridimensional dos atratores do sistema (1) construídos utilizando $a = 10$ , $b = 1$ , $c = 12,5$ e $d = 5$ como valores dos parâmetros.....	27
<b>Figura 10.</b> Em (a) temos o gráfico da variável $x$ em função do tempo. Em (b) temos espectro das frequências da variável $x$ em (a).....	27
<b>Figura 11.</b> Mapa de Poincaré para o sistema (1).....	28
<b>Figura 12.</b> Diagrama de bifurcação para a variável $x$ em relação ao parâmetro $a$ . .....	28
<b>Figura 13.</b> Observação experimental de atratores caóticos do sistema (1). Ambas observações são fotos da tela do osciloscópio. As divisões representadas na tela por varias linhas horizontais e verticais são uma referência, que junto com a escala ajustado para cada eixo, possibilita a leitura variação do sinal de tensão. Em (a) temos a projeção no plano $x - z$ , com $x = 2 Vdivisão$ e $w = 1 Vdivisão$ . Em (b) temos a projeção no plano $y - z$ , com $x = 0,5 Vdivisão$ e $w = 2 Vdivisão$ . Em (c) temos a projeção no plano $x - y$ , com $x = 1 Vdivisão$ e $w = 0,5 Vdivisão$ . Em (d) temos a projeção no plano $x - w$ , com $x = 2 Vdivisão$ e $w = 1 Vdivisão$ . E finalmente em (e) temos a projeção no plano $y - w$ , com $x = 0,5 Vdivisão$ e $w = 0,5 Vdivisão$ . .....	29
<b>Figura 14.</b> Espaços de parâmetros $b \times a$ , para o primeiro maior expoente de Lyapunov, para $c = 12,5$ e (a) $d = 0$ , (b) $d = 1$ , (c) $d = 5$ e (d) $d = 10$ . .....	31
<b>Figura 15.</b> Conjunto de espaços de parâmetros $b \times a$ da caixa da figura 14(a), onde temos o primeiro maior expoente de Lyapunov para $c = 12,5$ e assumindo para (a) $d = 0$ , (b) $d = 1$ , (c) $d = 2$ , (d) $d = 3$ , (e) $d = 4$ e (f) $d = 5$ . Os números representam o período de cada estrutura indicada pelas setas.....	32
<b>Figura 16.</b> Conjunto de espaços de parâmetros $b \times a$ da caixa da figura 14(c), onde temos o segundo maior expoente de Lyapunov para $c = 12,5$ e assumindo para (a) $d = 0$ , (b) $d = 1$ , (c) $d = 2$ , (d) $d = 3$ , (e) $d = 4$ e (f) $d = 5$ . A partir desses espaços, não há ocorrência de hipercaos para os parâmetros utilizados. ....	33
<b>Figura 17.</b> Em (a) temos a representação gráfica da curva utilizando a equação de número (3), no qual permite a realização do diagrama de bifurcação apresentado em (b). Em (c) temos a representação gráfica da outra curva utilizando a equação de número (4), no qual permite a realização do outro diagrama de bifurcação apresentado em (d). As figuras 17 (a) e (c), são respectivamente, as figuras já apresentadas como figura 15(c) e (d).....	34



<b>Figura 18.</b> Conjunto de espaços de parâmetros $b \times a$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov para $c = 12,5$ e assumindo (a) $d = 0$ , (b) $d = 1$ , (c) $d = 2$ , (d) $d = 3$ , (e) $d = 4$ e (f) $d = 5$ . Este conjunto fica exatamente ao lado do conjunto apresentado na figura 15.....	35
<b>Figura 19.</b> Conjunto de espaços de parâmetros $b \times a$ da região limitada pela caixa azul da figura 18(b), onde temos o primeiro maior expoente de Lyapunov para $c = 12,5$ e assumindo para (a) $d = 0,0$ , (b) $d = 0,1$ , (c) $d = 0,2$ , (d) $d = 0,3$ , (e) $d = 0,4$ , (f) $d = 0,5$ , (g) $d = 0,6$ , (h) $d = 0,7$ , (i) $d = 0,8$ , (j) $d = 0,9$ e (l) $d = 1$ . .....	36
<b>Figura 20.</b> Espaços de parâmetros $c \times a$ do primeiro maior expoente de Lyapunov com valor de $b = 0,55$ e (a) $d = 0$ , (b) $d = 1$ , (c) $d = 5$ e (d) $d = 10$ . Valor máximo assumido pelos parâmetros $c$ e $a$ é 24. ....	38
<b>Figura 21.</b> Espaços de parâmetros $c \times a$ do primeiro maior expoente de Lyapunov com valor de $b = 0,55$ e (a) $d = 0$ , (b) $d = 1$ , (c) $d = 5$ e (d) $d = 10$ . Valor máximo assumido pelos parâmetros $c$ e $a$ é 120. ....	38
<b>Figura 22.</b> Espaço de parâmetros $c \times a$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov para $b = 0,55$ e $d = 1$ . Sobre a curva em azul construímos o diagrama de bifurcação da figura 23, e é dada pela equação (5). ....	39
<b>Figura 23.</b> Diagrama de bifurcação sobre a curva em azul da figura 22, no qual utiliza a equação de 2º grau representado pela equação (5). O parâmetro variado é $a$ , variando de 20 a 70. A variável analisada é $z$ . ....	39
<b>Figura 24.</b> Espaço de parâmetros $b \times c$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov, com $a = 7$ e (a) $d = 0$ ; (b) $d = 1$ ; (c) $d = 5$ e (d) $d = 10$ . ....	40
<b>Figura 25.</b> Espaço de parâmetros $c \times b$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov com $a = 60$ e $d = 5$ . Podemos ver claramente a formação de vários “camarões” de forma alinhada.....	41
<b>Figura 26.</b> Em (a) observamos o espaço de parâmetros $c \times b$ com a presença de uma reta sobre a qual construímos um diagrama de bifurcação apresentado em (b). O diagrama é construído com quando variado o parâmetro $b$ nos valores 0,45 a 0,97 e analisando a variável $z$ . ....	42
<b>Figura 27.</b> Em (a) temos o mesmo espaço de parâmetros $c \times b$ já apresentado na figura 25, mas com a presença de uma reta inclinada dado pela equação (6), sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação (b). O parâmetro $b$ foi variado de 0,42 a	

0,70. Este último valor para $b$ está um pouco acima da linha vermelha mostrada na figura 26, com o intuito de mostrar o valor do período do ultimo camarão. A linha azul representa o último valor de $b$ na linha vermelha no espaço de parâmetros. Os números indicam o menor período de cada camarão. A variável analisada foi $z$ .....	43
<b>Figura 28.</b> Em (a) temos o espaço de parâmetros $b \times a$ e em (b) temos o espaço de parâmetros de $b \times c$ . Em ambos temos a presença de uma linha verde onde realizamos os devidos cortes de intersecção dos planos. Como forma final desta etapa, (c) é a construção do espaço de parâmetros $a \times b \times c$ .....	44
<b>Figura 29.</b> Em (a) utilizamos a figura 20(b), nela realizamos um corte em $a = 7$ e $c = 12,5$ , além de rotacionarmos sobre a linha do eixo vertical em $180^\circ$ (linha roxa). Através destas modificações, obtemos o espaço de parâmetros (b). .....	45
<b>Figura 30.</b> Estado final dos cortes em todos os planos, onde podemos ver claramente o encaixe dos valores encontrados em cada plano, obtendo o espaço de parâmetros $a \times b \times c$ . .....	46
<b>Figura 31.</b> Espaço de parâmetros $d \times b$ , com $a = 5$ e $b = 8,5$ . .....	47
<b>Figura 32.</b> Espaço de parâmetros $d \times b$ , com $a = 6$ e $b = 8,5$ . .....	47
<b>Figura 33.</b> Espaço de parâmetros $d \times b$ , com $a = 7$ e $b = 8,5$ .....	48
<b>Figura 34.</b> Espaço de parâmetros $d \times b$ , com $a = 8$ e $b = 8,5$ .....	48
<b>Figura 35.</b> Ampliação do espaço de parâmetros da figura 34. ....	49
<b>Figura 36.</b> Diagrama de bifurcação sobre a reta vermelha da figura 35, no qual utiliza a equação (7). O parâmetro variado é $b$ e a variável analisada é $z$ .....	49
<b>Figura 37.</b> Ampliação da caixa azul presente no diagrama de bifurcação da figura 36.	50
<b>Figura 38.</b> Ampliação da caixa verde presente no diagrama de bifurcação da figura 36. ....	50
<b>Figura 39.</b> Ampliação da caixa laranja presente no diagrama de bifurcação da figura 36. ....	50
<b>Figura 40.</b> Espaço de parâmetros $d \times b$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov com $a = 8$ e $c = 8,5$ , com a curva em azul dada pela equação (8) de $2^\circ$ grau.....	51
<b>Figura 41.</b> Diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 40, no qual utiliza a equação de $2^\circ$ grau representado pela equação (8). O parâmetro variado é $d$ , no intervalo de 0 a 5,5. A variável analisada é $z$ .....	51

<b>Figura 42.</b> Diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 40, no qual utiliza a equação de 2° grau representado pela equação (8). O parâmetro variado é $d$ , indo de 0 a 6. Agora o valor máximo do parâmetro $d$ tem o intuito de atingir a região periódica, pois através dele poderemos constatar a transição caótica para periódica, pelo fenômeno conhecido como bifurcação por crise [20]. .....	52
<b>Figura 43.</b> Espaço de parâmetros $d \times b$ para o maior expoente de Lyapunov com $a = 8$ e $c = 8,5$ , onde existe uma curva em azul dada pela equação (9) de 3° grau. ....	53
<b>Figura 44.</b> Diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 43, no qual utiliza a equação de 3° grau representado pela equação (9). A variável analisada é $z$ e o parâmetro variado é $d$ entre os valores 0 a 8, a fim de atingir a região periódica. ....	54
<b>Figura 45.</b> Em (a) temos um espaço de parâmetros com a presença de uma linha bordô sobre o qual realizamos um diagrama de bifurcação. Ambos os diagramas são construídos para o valor do parâmetro $d = 8$ . O diagrama presente em (b) mostra o comportamento ao longo de toda a extensão da linha bordo (parâmetro $b$ variando de 0,720 a 1,125). Em (c) temos uma redução nos valores do parâmetro $b$ , entre 0,75 a 1,05. Podemos ver a presença de bolhas de bifurcação neste diagrama. A variável analisada é $z$ . .....	54
<b>Figura 46.</b> Espaço de parâmetros com as três representações de retas sobre as quais construímos diagramas de bifurcação que são apresentados na figura 47. A linha horizontal nas cores amarela e verde, assumem respectivamente os seguintes valores, 8,00 e 7,86 para o parâmetro $d$ . Em ambas o parâmetro $b$ varia entre os valores de 0,8 e 1,0. Já a linha em vermelho, no qual se encontra na vertical, o parâmetro $b$ assume valor fixo em 0,875 e variação de valores entre 7,74 e 8,06 para o parâmetro $d$ . ....	55
<b>Figura 47.</b> Visualização 3D dos diagramas de bifurcação apresentados no espaço de parâmetros da figura 46. Nesta representação podemos ver claramente o cruzamento dos diagramas e a formação da bolha de bifurcação dentro da estrutura periódica. Podemos notar que quanto mais próxima da borda caótica, a bola aumenta de tamanho e assume uma formação caótica em seu interior. O diagrama multicolorido e a linha vermelha presente na figura 46, no qual ilustra o dobramento de período do interior da estrutura periódica (valores do parâmetro $d$ igual a 8,06) para quando se aproxima da região caótica (valores do parâmetro $d$ próximos a 7,74). A variável analisada foi $z$ . .....	56

<b>Figura 48.</b> Em (a) temos o espaço de parâmetros com as várias representações de curvas e retas sobre as quais construímos diagramas de bifurcação, alguns diagramas já apresentados anteriormente na forma bidimensional. Em (b) temos a representação 3D dos diferentes diagramas de bifurcação sobre as retas e curvas evidenciadas (a). Em ambos os diagramas a variável analisada foi $z$ . ....	57
<b>Figura 49.</b> (a) Ampliação do espaço de parâmetros da figura 35. (b) e (c) são diagramas de bifurcação mostrando o valor do menor período das duas estruturas periódicas presentes em (a). Os diagramas de bifurcação foram construídos sobre a localização da linha vermelha, a mesma apresentada na figura 35, utilizando a equação (7). A variável analisada foi $z$ . ....	59
<b>Figura 50.</b> (a) Ampliação do espaço de parâmetros da figura 35 com diagramas de bifurcação mostrando os valores dos períodos das estruturas um pouco mais ao centro. Os diagramas de bifurcação (b) e (c) foram construídos sobre a linha vermelha da mesma figura 35 no qual utiliza a equação (7). A variável analisada foi $z$ . ....	60
<b>Figura 51.</b> (a) temos ampliação do espaço de parâmetros da figura 35 com diagramas de bifurcação mostrando os valores dos maiores períodos das estruturas mais próximas ao centro focal $F$ . O diagrama de bifurcação em (b) é construído sobre a curva da equação (8) representada em azul em (a). A variável analisada é $z$ . ....	61
<b>Figura 52.</b> Espaço de parâmetros $d \times a$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov com $b = 0,88$ e $c = 8,5$ . ....	62
<b>Figura 53.</b> Ampliação da espiral da figura 52, com $b = 0,88$ e $c = 8,5$ . Em azul temos a curva dada pela equação (10), onde sobre ela construímos o diagrama de bifurcação apresentado na figura 54. O ponto $F$ é o ponto focal estimado. ....	63
<b>Figura 54.</b> Diagrama de bifurcação construído sobre a curva azul da figura 53, para o parâmetro $d$ variando de 0 a 2,5. A variável analisada foi $z$ . Em $F$ temos o ponto focal estimado para o diagrama de bifurcação. Os períodos assumidos por cada região periódica são identificados no diagrama ....	63
<b>Figura 55.</b> Espaço de parâmetros $d \times c$ para o primeiro maior expoente de Lyapunov com $a = 8$ e $b = 0.88$ . ....	64
<b>Figura 56.</b> Espaço de parâmetros $d \times c$ para o segundo maior expoente de Lyapunov com $a = 8$ e $b = 0.88$ . ....	65

# Lista de Tabelas

<b>Tabela 1.</b> Tabela que relaciona os expoentes de Lyapunov com o comportamento dinâmico do sistema. Através da comparação de cada coluna da tabela (onde consta a ordem do valor de expoente de Lyapunov) restringe a possibilidade de comportamento.....	19
<b>Tabela 2.</b> Valores dos resistores e capacitores listados no circuito da figura 8. Atenção para o valor da resistência $R_{19}$ no qual pode assumir valor variável para testes experimentais e valor fixo nas abordagens numéricas. ....	25

# Sumário

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>2 MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO.....</b>	<b>16</b>
2.1 EXPOENTE DE LYAPUNOV.....	16
2.2 REFERÊNCIAS DE ESTUDOS UTILIZANDO ESPECTRO DO EXPOENTE DE LYAPUNOV.....	20
<b>3 O SISTEMA ESTUDADO.....</b>	<b>24</b>
<b>4 RESULTADOS.....</b>	<b>30</b>
4.1 RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DE NOSSOS ESTUDOS.....	30
4.2 Resultados de $b \times a$ .....	31
4.3 Resultados de $c \times a$ .....	37
4.4 Resultados de $b \times c$ .....	40
4.5 Espaços de Parâmetros $a \times b \times c$ .....	44
4.6 Resultados de $d \times b$ .....	47
4.7 Resultados de $d \times a$ .....	62
4.8 Resultados de $d \times c$ .....	64
<b>5 CONCLUSÕES.....</b>	<b>66</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>68</b>

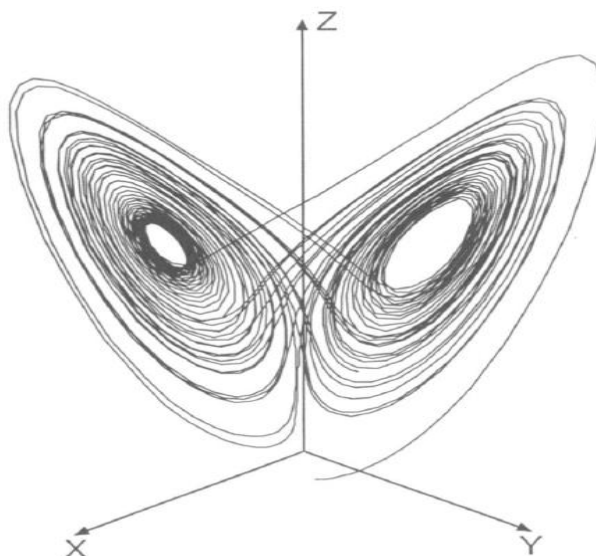
# Capítulo 1

## Introdução

A utilização de computadores pela área de dinâmica não-linear é algo imprescindível. Edward Lorenz, além de ser um dos grandes influentes nessa área de estudo, apoiou-se em tal tecnologia para a realização do início das pesquisas relacionadas às previsões meteorológicas. Pesquisas estas que tiveram início quando o matemático Lorenz serviu na Segunda Guerra Mundial, é lá se dedicou a previsão de fenômenos meteorológicos. Seu interesse por esta área de estudo estendeu-se por diversos anos ao torna-se professor de ciências atmosféricas do MIT [1,2].

Em 1956, resolvendo colocar a prova o método utilizado para previsão do tempo no qual apoiava seus resultados na solução de um sistema linear de equações, decidiu testar um novo modelo pelo qual resolveria numericamente equações diferenciais não-lineares. O computador utilizado na época possuía uma capacidade muito baixa de processamento quando comparado com alguns modelos dos dias atuais: 400 adições e 60 multiplicações por segundo. Tivera muitos problemas até encontrar alguns resultados coerentes. Sua impressora registrava no papel apenas três casas após a vírgula em seus resultados, ao contrário do computador que trabalhava com seis. Nascia aí o termo, hoje muito utilizado nessa área específica, conhecido como *“dependência sensível nas condições iniciais”* no qual influenciariam significativamente na solução do sistema [1].

Com um sistema de equações diferenciais não-lineares de terceira ordem, Lorenz obteve resultados aperiódicos. Com tais resultados, o mesmo publicou o artigo sobre *“Fluxo Determinístico Aperiódico”* publicação esta que consta uma das mais conhecidas imagens de atratores caóticos (ver figura 1) e uma das frases mais conhecidas remetentes a teoria do Caos: *“pequenas perturbações causadas pelo bater das asas de uma borboleta no Brasil pode provocar o surgimento de um tornado no Texas”* [2]. Efeito borboleta, assim como é conhecido, remete claramente a diferentes resultados obtidos devido ao efeito da mudança, por mais que pequena, nas condições iniciais.



**Figura 1.** O atrator do sistema de Lorenz. Está é a figura 1.3 retirada da ref. [1].

Do final do século passado até os dias de atuais, os computadores cada vez tornam-se mais avançados. Utilizando tal advento para resolver equações diferenciais de forma numérica, assim como nosso antecessor Lorenz, esta dissertação de mestrado terá seu apoio. Outro antecessor do qual não deve ser esquecido é Lyapunov, figura importante em nossa área com relação à caracterização da dinâmica caótica, criou um método matemático pelo qual permite calcularmos o comportamento de duas orbitas nas quais partiram de condições iniciais muito próximas e nas quais foram evoluídas no tempo (no próximo capítulo explicaremos com maiores detalhes). Tal modelagem matemática pode ser estudada mais a fundo em diferentes referências [1,2].

A intenção deste trabalho é apresentar um estudo sobre um circuito eletrônico de Chua composto de quatro equações diferenciais, através de diagramas de bifurcação e espaços de parâmetros. Observamos que para este sistema já possui uma referência relatando a sua dinâmica, bem como a sua implementação experimental [9].

Na presente pesquisa, procuramos revelar uma gama maior do seu comportamento dinâmico, assim como apresentar uma visão mais geral do sistema em questão. Nesta tarefa, foram usadas diversas horas de simulações numérico-computacionais em linguagem de programação FORTRAN e C, na qual é possível resolver numericamente as quatro equações diferenciais de forma evolutiva no tempo.



A princípio, a visão do comportamento geral do sistema só se tornará possível após a construção dos espaços de parâmetros, pois, será por meio dessas figuras que a dinâmica do sistema será entendida através do valor do expoente de Lyapunov. Isto é, utilizando-se de escalas coloridas, mediante a variação de dois parâmetros que compõem o circuito eletrônico apresentados nos eixos da figura, atribuímos aos valores do expoente de Lyapunov estas cores.

Os espaços de parâmetros dos expoentes de Lyapunov possibilitaram a realização dos estudos de forma mais detalhada, e ainda, a clareza e riqueza de detalhes dos mesmos possibilitaram a descoberta de regiões onde existem caos, periodicidade e pontos fixos. Por exemplo, utilizando-se da localização das estruturas periódicas presentes nestes diagramas, podemos determinar o período de cada uma dessas estruturas através da construção de diagramas de bifurcação. Estes diagramas de bifurcação, por se tratarem apenas do confronto de uma das variáveis do sistema em função de um de seus parâmetros, possibilitaram determinar com facilidade e precisão o período de cada uma das estruturas periódicas.

Esta dissertação é constituída de cinco capítulos. No capítulo 1 temos a introdução dessa pesquisa. No capítulo 2, abordamos, de forma sucinta, a metodologia utilizada em nossos cálculos numéricos. Ainda neste mesmo capítulo, realizamos uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de investigação aqui feita, sobre o tratamento de dados e resultados de diferentes sistemas dinâmicos. No capítulo 3, apresentamos o sistema dinâmico que será o foco dos nossos estudos numéricos. Apresentamos também os resultados numéricos e experimentais já reportados do circuito eletrônico. No capítulo 4 apresentamos e discutimos os nossos resultados, nos quais revelam a rica dinâmica do sistema estudado. Por fim, no capítulo 5, apresentamos uma conclusão sobre todos os resultados obtidos nesta pesquisa.

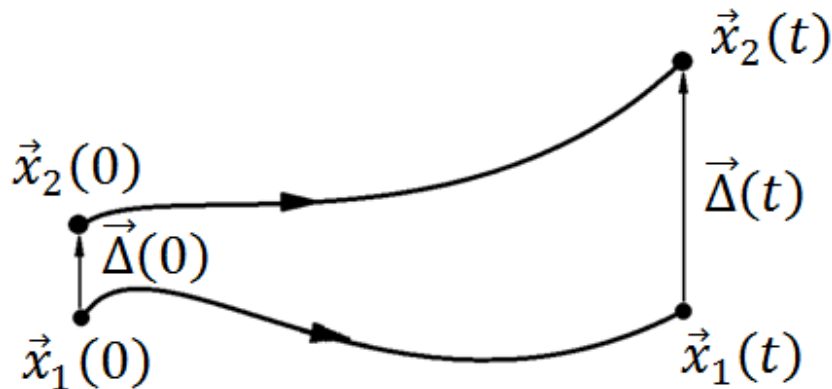
# Capítulo 2

## Método Numérico Utilizado

Neste capítulo, descrevemos o método numérico utilizado em todos os resultados apresentados nesta dissertação. A metodologia aqui utilizada está embasada no cálculo do expoente de Lyapunov, no qual abordamos na seção 2.1. Nesse capítulo também descrevemos o processo utilizado para obtenção dos espaços de parâmetros utilizando o espectro dos expoentes de Lyapunov, o integrador utilizado, como são apresentados os resultados e a forma pela qual podemos interpretá-los. Na seção 2.2, realizamos uma revisão bibliográfica dos trabalhos que utilizaram tal metodologia de análise.

### 2.1 Expoente de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov trata-se de uma medida pela qual podemos quantificar a existência de uma taxa de divergência entre trajetórias que sofreram dependência de forma sensível nas condições iniciais aplicadas. Esta medida, quando aplicada na evolução em tempo contínuo de duas órbitas nas quais tiveram inicializações muito próximas, pode ser ilustrada conforme a figura 2.



**Figura 2.** Ilustração do comportamento de duas órbitas no espaço de fase devido a sua dependência nas condições iniciais. Ilustração criada a partir da figura 16 presente na referência [3].

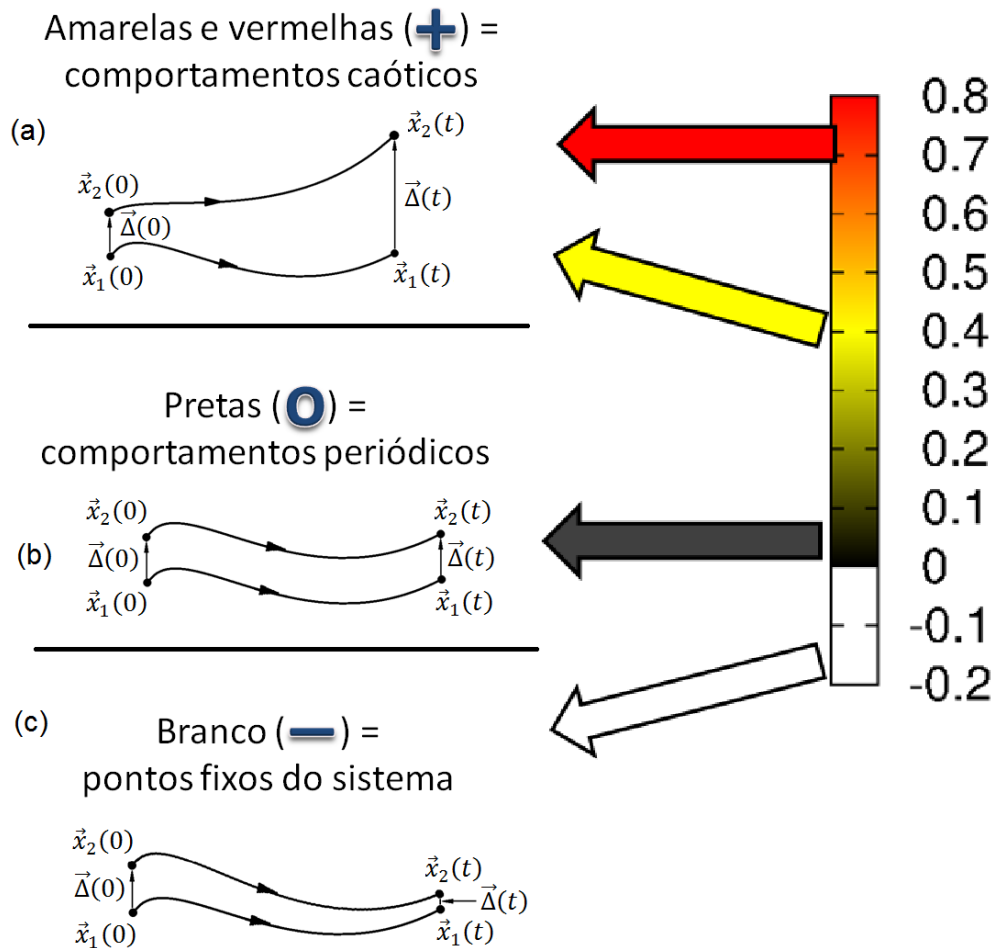
Observa-se nesta ilustração que o sistema possui duas condições iniciais muito próximas e definidas por  $\vec{x}_1(0) = 0$  e  $\vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \vec{\Delta}(0)$  e realizando uma evolução temporal (de forma ilustrativa) de forma contínua até atingir os pontos  $\vec{x}_1(t)$  e  $\vec{x}_2(t)$ . Quando atingido o tempo  $t$ , existe uma diferença entre o valor da posição dos pontos, esta diferença é calculada através da expressão  $\vec{\Delta}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$ . Portanto, se existir uma diferença entre as órbitas,  $|\vec{\Delta}(t)|$ , crescendo de forma exponencial no tempo com a configuração  $|\vec{\Delta}(t)| = |\vec{\Delta}(0)|e^{\lambda t}$ , fica evidente que  $\lambda$  estará representando o expoente de Lyapunov. Observa-se que o exemplo ilustrado teve um valor positivo, isto é,  $\lambda > 0$ .

Mais adiante cada caso será ilustrado e relatado quanto ao comportamento que o sistema pode assumir. Para melhor compreensão, tais casos serão abordados somente após a explanação de como são construídos os espaços de parâmetros contendo o expoente de Lyapunov.

Para a construção de um espaço de parâmetros contendo diversos pontos onde foi calculado o expoente de Lyapunov, devemos realizar a mudança de uma gama grande de valores dos parâmetros de sistema. Para isso, utiliza-se como critério para cada espaço que cada eixo seja formado por um parâmetro na qual estamos variando de forma discretizada. Logo, o espaço de parâmetros possui uma resolução dependendo do valor adotado para a discretização. Para uma imagem no qual é descrita como  $500 \times 500$ , pode-se dizer que foi utilizado a discretização de 500 pontos em cada eixo. Ao multiplicar 500 por 500, tem-se o valor de 250.000. Tal valor revela a resolução do espaço de parâmetros que possui 250 mil pontos. Logo, quanto maior a quantidade de pontos, melhor será a qualidade da imagem. Possibilitando com isto uma melhor visualização, sobretudo dos detalhes.

Com a utilização do método de Runge-Kutta de quarta ordem, cada ponto do espaço de parâmetros é obtido com a evolução no tempo do conjunto de equações diferenciais. Para a integração das equações do sistema utilizam-se as condições iniciais, o passo de integração e o número de interações para calcular o valor do expoente de Lyapunov. Fazendo um comparativo entre os valores obtidos para cada expoente de Lyapunov, os mesmos são postos em ordem decrescente de valor (junto com os valores dos parâmetros). Todos estes dados são salvos em um arquivo. O programa que possibilitou a construção dos espaços de parâmetros a partir dos arquivos foi o Gnuplot. Na construção dos espaços de parâmetros a imagem gerada é plotada em duas dimensões, sendo que a terceira dimensão é visualizada

por meio de uma escala de cores. As duas dimensões correspondem aos parâmetros que controlam o sistema. A terceira dimensão indica os valores obtidos para o expoente de Lyapunov. Estes são vistos através de variações em uma escala de cores que variam do vermelho, passando pelo amarelo, preto e branco. Por exemplo, a figura 3 apresenta uma escala de cores correspondendo ao valor assumido pelo expoente de Lyapunov após uma evolução temporal.



**Figura 3.** Comparação da escala de cores, com o valor numérico assumido e ainda com o comportamento da órbita devido à integração do sistema no tempo.

Adotou-se como padrão para construção dos espaços que: regiões com cores vermelhas sempre representam o maior valor positivo do expoente de Lyapunov. A saber, este valor foram os pontos onde ocorreu maior distanciamento entre as orbitas após a evolução temporal das condições iniciais. A tabela 1 relaciona os expoentes de Lyapunov com o comportamento dinâmico do sistema, onde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  representam o primeiro maior, segundo maior, e assim sucessivamente, expoente de Lyapunov. Ao observar um espaço de

parâmetros que contém apenas o primeiro maior expoente ( $\lambda_1$ ), através da escala das cores e da tabela, pode-se restringir a possibilidade dos demais comportamentos dinâmico do sistema.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	Dinâmica do Sistema
—	—	—	—	Ponto Fixo
□	—	—	—	Ciclo Limite
□	□	—	—	Torus - 2
□	□	□	—	Torus - 3
+	□	—	—	Caos
+	+	□	—	Hipercaos

OBS:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$

**Tabela 1.** Tabela que relaciona os expoentes de Lyapunov com o comportamento dinâmico do sistema. Através da comparação de cada coluna da tabela (onde consta a ordem do valor de expoente de Lyapunov) restringe a possibilidade de comportamento.

Desta forma comparamos as cores do espaço de parâmetros com os maiores expoentes de Lyapunov da tabela para assim então, definir a dinâmica do sistema. Esta escala representa valores positivos (logo, regiões caóticas), nos quais vão decrescendo até atingir o valor zero representado pela cor preta. Quando atingido o zero, tem-se a região conhecida como periódica para o sistema. Esta região indica que não houve afastamento das órbitas com a evolução do tempo quando adotado duas condições iniciais muito próximas.

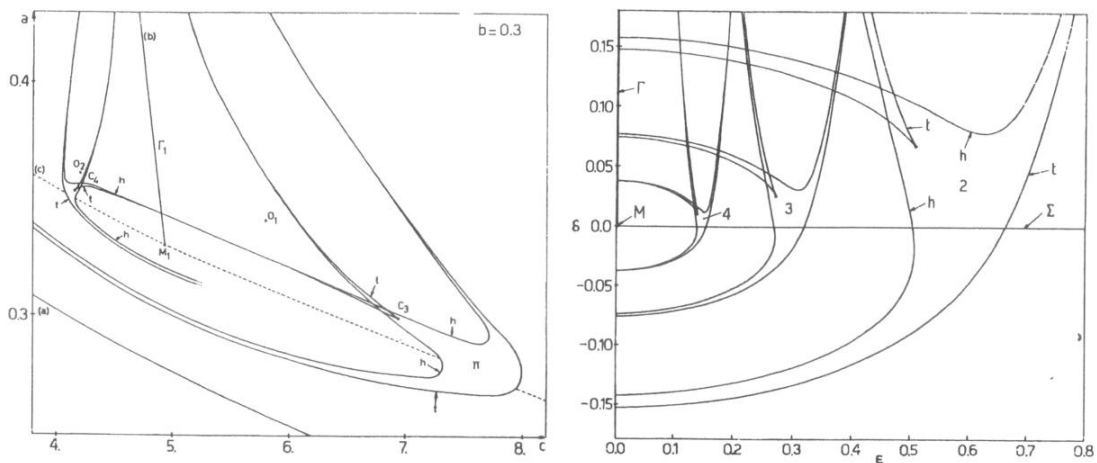
As regiões em branco nos espaços de parâmetros representam trajetórias em que ocorreu aproximação após uma evolução temporal de dois pontos iniciais próximos. Portanto, seu valor será negativo, revelando com isto que o sistema está convergindo para um ponto fixo. Nota-se que para esta região não é adotada uma escala em degradê, isto devido à natureza do sistema, pois, a transição de onde ocorrem pontos fixos para as outras regiões (caóticas e periódicas), acontece de forma abrupta.

## 2.2 Referências de Estudos Utilizando Espectro do Expoente de Lyapunov

As imagens formadas do confronto de dois parâmetros revelam o comportamento do sistema expressando o valor estimado do expoente de Lyapunov (apresentado no capítulo anterior). A determinação do comportamento caótico ou periódico em diferentes regiões destas imagens é o foco deste estudo sobre caos determinístico.

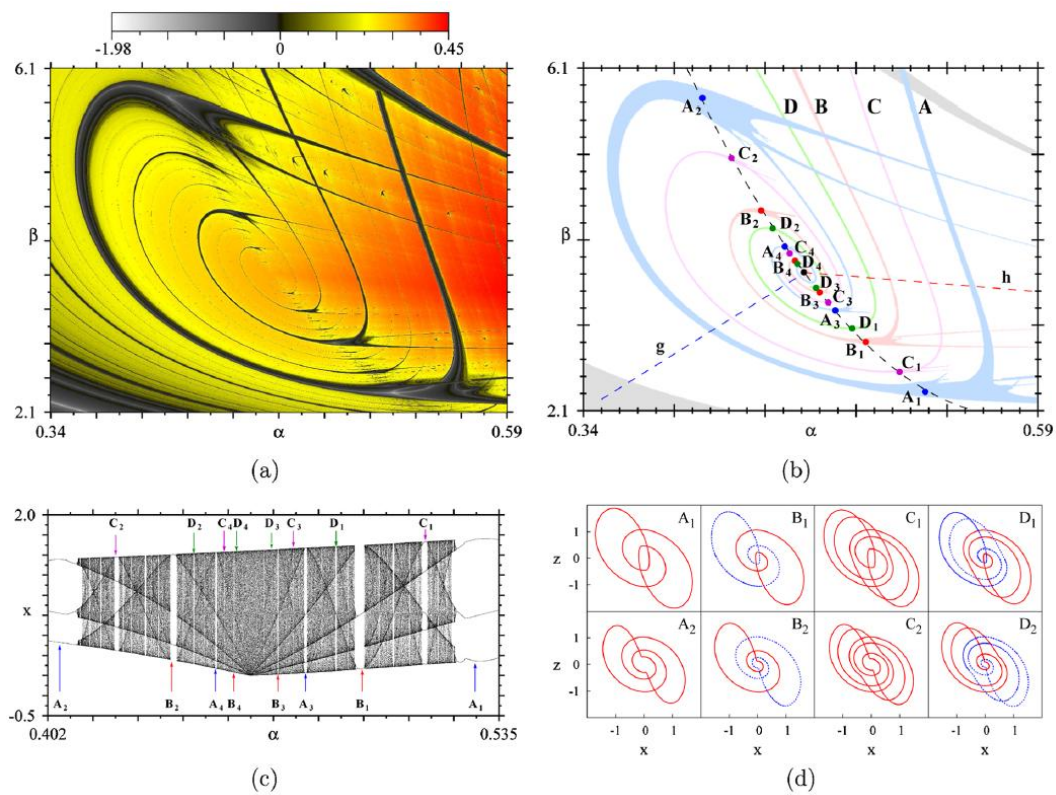
Da bibliografia consultada, grande parte reportam diversos estudos relacionados também aos espaços de parâmetros do expoente de Lyapunov, no qual representam o sistema de equações implementado e sua comparação com diagramas de bifurcação em uma dimensão e/ou atratores. Existem também trabalhos que relatam de diferentes formas, as estruturas periódicas imersas em regiões de caos, existindo uma em particular que pela sua forma foi batizada de “camarão” [4].

Outro comportamento muito relatado é quanto à formação de espirais de um conjunto de estruturas periódicas, como consta as referências [5-7], apresentadas nas figuras 4, 5 e 6, respectivamente. Um dos primeiros estudos relacionados à formação de estruturas periódicas em formação de espiral, figura 4, foi o realizado por Gaspard *et. al.* [5]. O trabalho relaciona órbitas homoclínicas com os autovalores associados de um sistema quadrático além da apresentação do período associado a cada estrutura.



**Figura 4.** Espaço de parâmetros de um sistema quadrático relatado na referência [5]. Em ambas as imagens demonstram a formação de espiral de “camarões”. Na imagem da direita, podemos ver a representação do período assumido por cada estrutura.

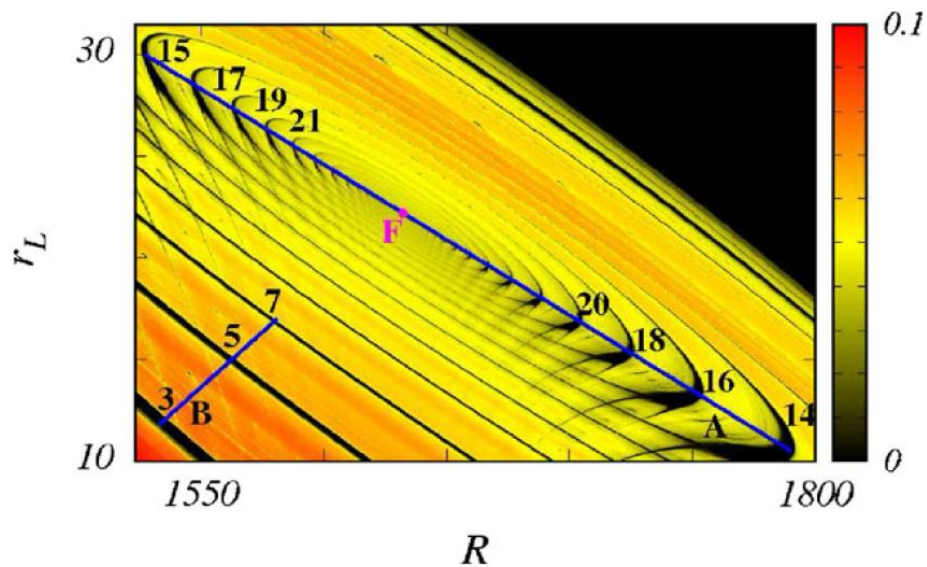
Bonatto e Gallas [6] encontraram a formação de espirais em um circuito eletrônico muito simples, figura 5(a), no qual descreve seu comportamento através de um conjunto de três equações diferenciais. Neste mesmo estudo, os autores realizaram um diagrama de bifurcação através de uma equação de segundo grau, linha tracejada da figura 5(b), no qual corta todas as estruturas que compõe a espiral e passa pelo ponto focal. Tal diagrama é apresentado na figura 5(c) onde mostra claramente as regiões periódicas cortadas pela linha, possibilitando com isto a contagem do período das estruturas, assim como a construção de atratores, figura 5(d), correspondendo aos pontos destacados no diagrama de bifurcação.



**Figura 5.** Bonatto e Gallas [6] construíram em (a) o espaço de parâmetros que representa o expoente de Lyapunov para os parâmetros  $\beta \times \alpha$ , no qual apresenta claramente a formação de espirais de estruturas periódicas. Em (b) é demonstrada através de cores o valor do período de cada estrutura. Em (c) temos o diagrama de bifurcação para a equação de 2° grau representada pela linha tracejada em (b). Finalmente em (d) temos os atratores referentes aos pontos destacados no diagrama de bifurcação.

Albuquerque, Rubinger e Rech [7] além de terem encontrado a formação de espirais de estruturas periódicas em um circuito de Chua (ver figura 6), relatam a formação de auto-

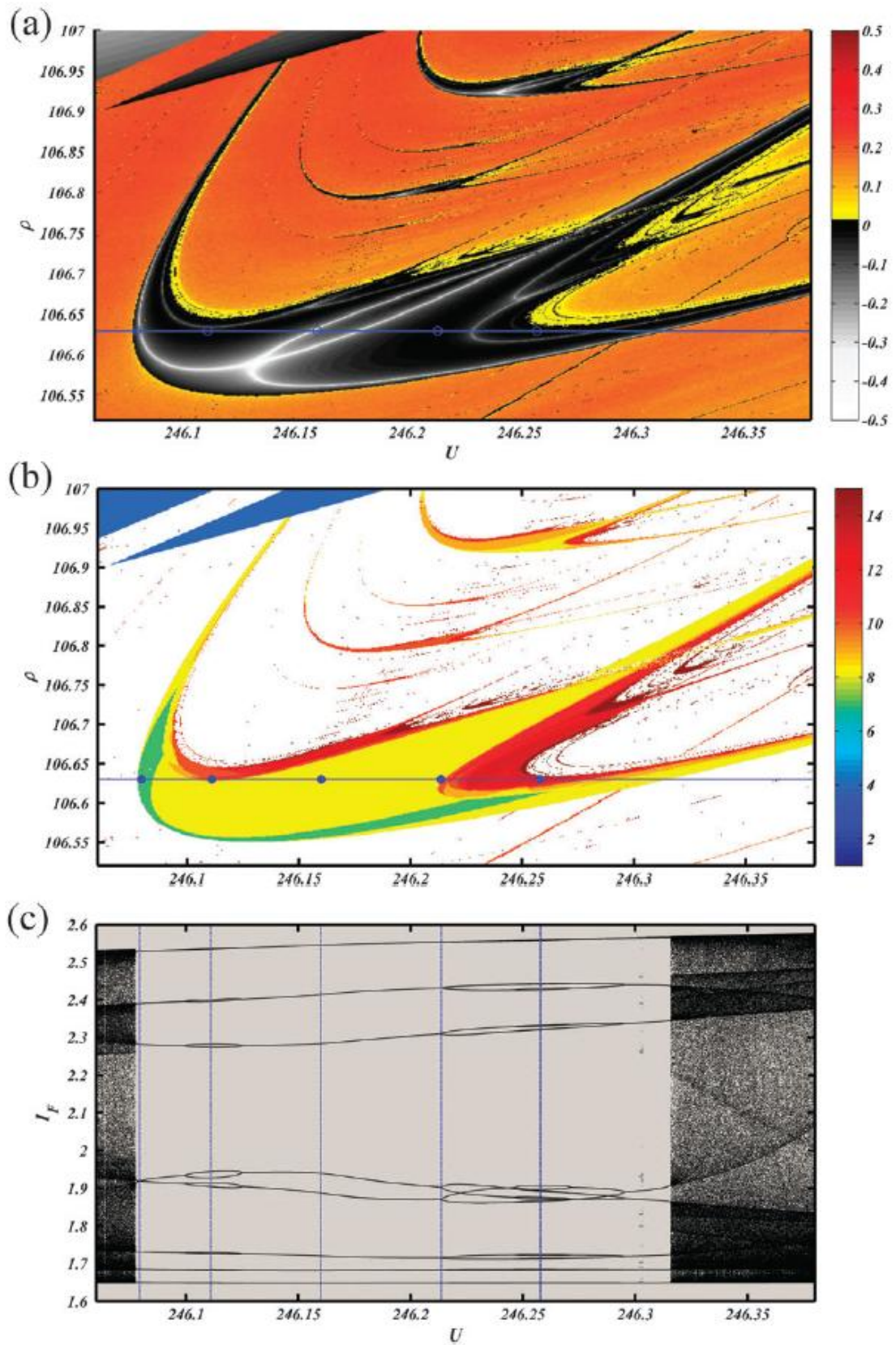
similaridade das estruturas periódicas e a formação de cascatas de bifurcação. O circuito é modelado através de um sistema de três dimensões no qual em uma delas possui um diodo linear por partes. Além disso, os autores demonstraram que o período que as estruturas na forma de espirais assumem, apresentam valores alternados e de forma relativa à posição do centro focal, quando comparados sobre uma linha reta. Esta reta passa pelo foco da formação e pelo centro das estruturas periódicas. Valores alternados devido à diminuição do período seguem a lei  $n - 2$  devido a um lado apresentar somente números ímpares e, no outro, pares. A figura 6 mostra claramente tais afirmações. Os parâmetros utilizados para a construção do espaço de parâmetros são componentes reais do circuito eletrônico e são representados nos eixos da figura.



**Figura 6.** Visão global do espaço de parâmetro do maior expoente de Lyapunov. F representa o foco de formação da espiral e os números os valores do período de cada estrutura periódica por onde a reta passa. Os valores de  $R$  e  $r_L$  estão em unidades de resistência, no caso  $\Omega$ . Esta é a figura 1 presente na ref. [7].

No trabalho da ref. [8], os autores apresentam e discutem o comportamento de um diagrama de bifurcação no interior de uma estrutura periódica, ressaltando o fato do surgimento das janelas, ou bolhas, no diagrama de bifurcação. Tal comportamento é apresentado na figura 7, onde observamos em (c) o aparecimento de bolhas de bifurcação dentro da estrutura periódica. Isso mostra que bolhas de bifurcação podem surgir em certas direções no espaço de parâmetros.





**Figura 7.** Em (a) temos o espaço de parâmetros do expoente de Lyapunov. (b) Espaço de parâmetros do período. (c) Diagrama de bifurcação da linha azul presente em (b). Esta é a figura 3, da ref. [8].

# Capítulo 3

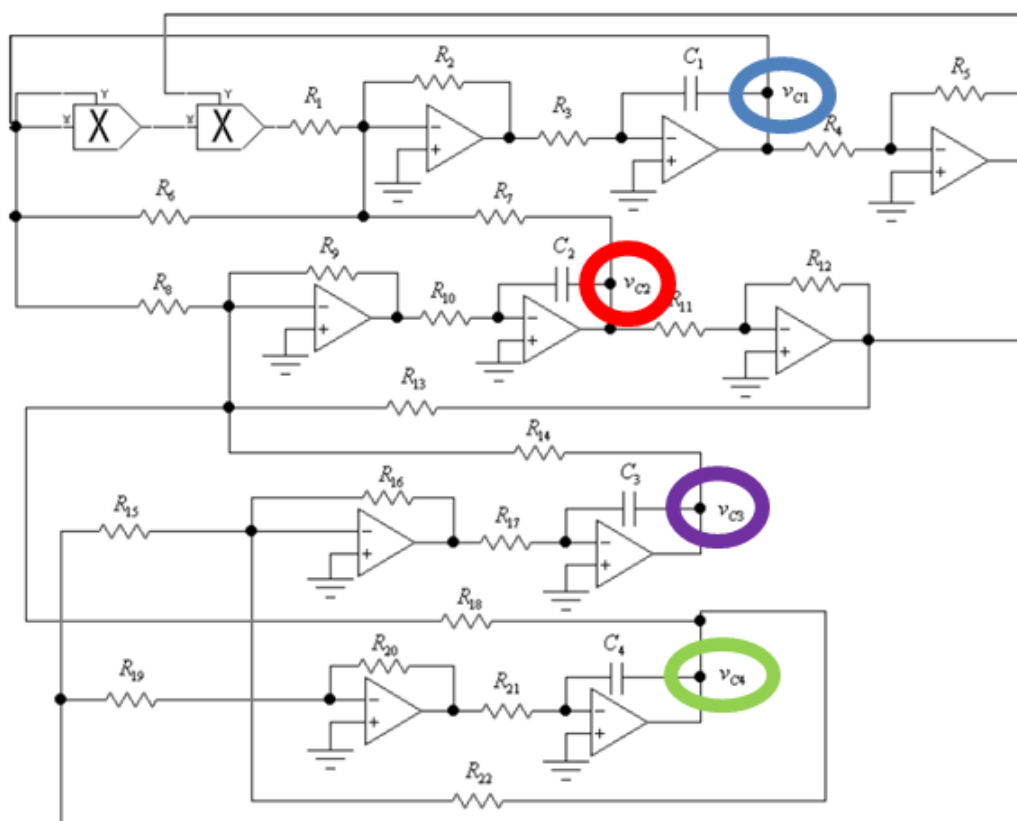
## O Sistema Estudado

O foco de estudo desta dissertação está baseado em um sistema de Chua modificado, composto por quatro equações diferenciais resultando em um sistema 4D. O mesmo pode ser reduzido a três dimensões (três equações diferenciais) caso a última equação diferencial seja anulada devido à atribuição do valor zero ao parâmetro  $d$ . Sua não linearidade é devida ao termo de ordem cúbica presente na primeira equação diferencial. Abaixo mostramos o conjunto de equações.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a (y + 0,2 (x - x^3)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = bx - y + z + w, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -cy + w, \\ \dot{w} = \frac{dw}{dt} = -dy. \end{cases} \quad (1)$$

As equações (1) representam a adimensionalização do circuito eletrônico apresentado na ref. [9]. O esquema do circuito é mostrado na figura 8. Nesta figura pode-se notar, em determinadas regiões do esquema elétrico, a presença de círculos coloridos que facilitam a localização e a identificação dos pontos de medição de tensão do circuito eletrônico. Tais pontos de medição possibilitam o monitoramento do comportamento da série temporal que o circuito apresenta cujo mesmo é simulado por cada equação diferencial.

Cada resistor e capacitor apresentado no circuito eletrônico da figura 8 possui uma numeração que representa o valor adotado na implementação experimental na ref. [9]. Os valores utilizados em cada componente são apresentados na tabela 2. Para escrever corretamente as equações diferenciais, basta antes, aplicar as leis de Kirchhoff das tensões [10,11] em cada malha do esquema eletrônico. Desta forma, obtêm-se as equações (2). As eqs. (1) nada mais são do que a adimensionalização do sistema, ou seja, ficamos com o sistema de equações diferenciais independentes dos valores de tensão.



**Figura 8.** Ilustração do circuito eletrônico apresentado na ref. [9]. Destaque para os círculos coloridos nos quais revelam os pontos de medição de tensão do circuito eletrônico.

Resistores	Valor
$R_1$	$5\text{ k}\Omega$
$R_2, R_9, R_{20}$	$1\text{ k}\Omega$
$R_3, R_4, R_5, R_7, R_{11}, R_{12}, R_{19}$	$10\text{ k}\Omega$
$R_6$	$50\text{ k}\Omega$
$R_8, R_{13}, R_{14}, R_{18}, R_{22}$	$250\text{ k}\Omega$
$R_{10}$	$4\text{ k}\Omega$
$R_{15}, R_{21}$	$20\text{ k}\Omega$
$R_{16}$	$25\text{ k}\Omega$
$R_{19}$	Variável (resultados experimentais) $10\text{ k}\Omega$ (calculado número)
Capacitores	Valor
$C_1, C_2, C_3, C_4$	$1\text{ }\mu\text{F}$

**Tabela 2.** Valores dos resistores e capacitores listados no circuito da figura 8. Atenção para o valor da resistência  $R_{19}$  no qual pode assumir valor variável para testes experimentais e valor fixo nas abordagens numéricas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{R_2}{R_3 R_7 C_1} v_{C_2} + \frac{R_2}{R_3 C_1} \left( \frac{1}{R_6} v_{C_1} - \frac{R_5}{100 R_1 R_4} v_{C_1}^3 \right), \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{R_9}{R_8 R_{10} C_2} v_{C_1} - \frac{R_9 R_{12}}{R_{10} R_{11} R_{13} C_2} v_{C_2} + \frac{R_9}{R_{10} R_{14} C_2} v_{C_3} + \frac{R_9}{R_{10} R_{18}} v_{C_4}, \\ \frac{dv_{C_3}}{dt} = -\frac{R_{12} R_{16}}{R_{11} R_{15} R_{17} C_3} v_{C_2} + \frac{R_{16}}{R_{17} R_{22} C_3} v_{C_4}, \\ \frac{dv_{C_4}}{dt} = -\frac{R_{12} R_{20}}{R_{11} R_{19} R_{21} C_4} v_{C_2}. \end{array} \right. \quad (2)$$

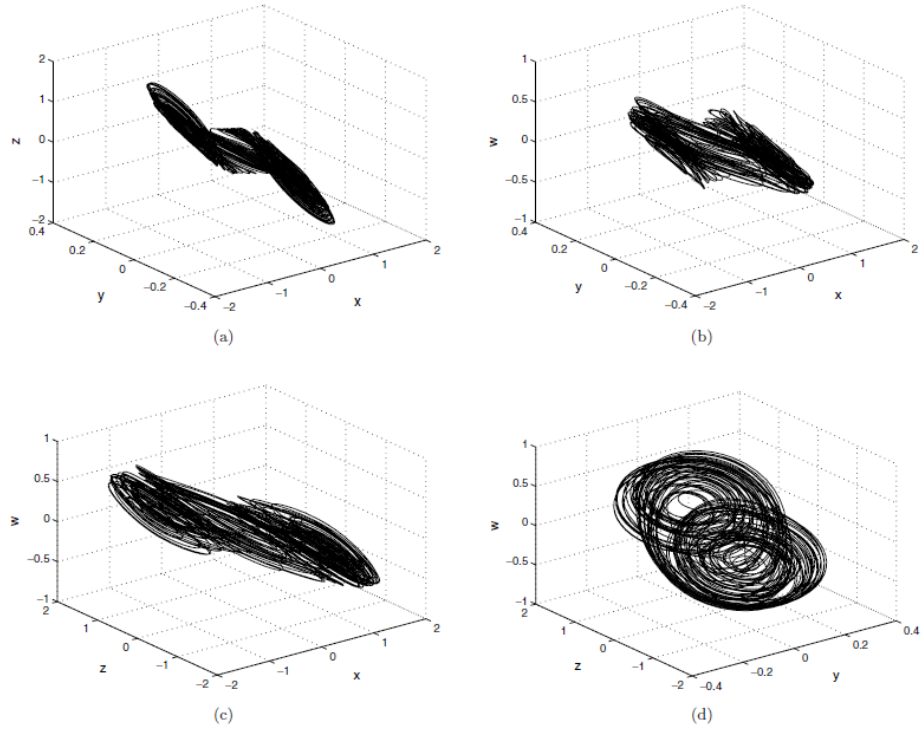
Comparando as eqs. (1) e (2), podemos ver o conjunto de resistores e capacitores associados a cada parâmetro. Logo se conclui algo importante em nossos estudos: os parâmetros  $a, b, c$  e  $d$  não poderão apresentar valores negativos, pois não teriam sentido físico. Tal fato irá refletir nas construções dos espaços de parâmetros do espectro dos expoentes de Lyapunov, nas quais apresentarão somente valores positivos em cada eixo onde ocorre a variação dos parâmetros.

Os autores da ref. [9] realizaram uma investigação do sistema (1) através de mapas de Poincaré, espaços de fase, pontos de equilíbrio, bifurcações e expoentes de Lyapunov. Realizaram ainda a implementação experimental do sistema (1), por multiplicadores analógicos, comparando os resultados experimentais com os resultados teóricos.

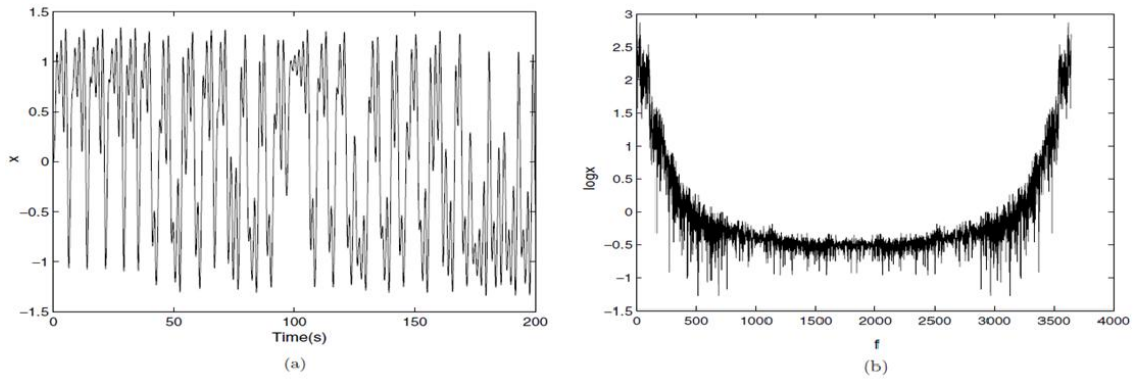
A seguir, apresentamos projeções tridimensionais de alguns atratores caóticos do sistema de equações (1), para os valores de parâmetros  $a = 10$ ;  $b = 1$ ;  $c = 12,5$  e  $d = 5$ . Os cálculos foram realizados utilizando um integrador Runge-Kutta de quarta ordem para as condições iniciais  $(x(0); y(0); z(0); w(0))$  iguais a  $(0; 0; 0,08; 0)$ , gerando os atratores (a), (b), (c) e (d) da figura 9, retiradas da artigo da ref. [9].

A forma de onda da variável  $x$  no domínio do tempo também foi estudada, como é mostrado na figura 10(a). A partir dela, podemos notar que a forma de onda de  $x(t)$  é aperiódica. Numa tentativa de corroborar a aperiodicidade, os autores apresentam o espectro de frequências para a variável  $x(t)$ , observando que é contínuo como mostrado na figura 10(b).

Na figura 11, os autores realizaram seções de Poincaré de algumas das projeções já realizadas. O ultimo resultado numérico apresentado pelos autores da ref. [9] foi um diagrama de bifurcação da variável  $x$  em função do parâmetro  $a$ , com os demais parâmetros fixos nos valores da figura 9, no qual é mostrado na figura 12.

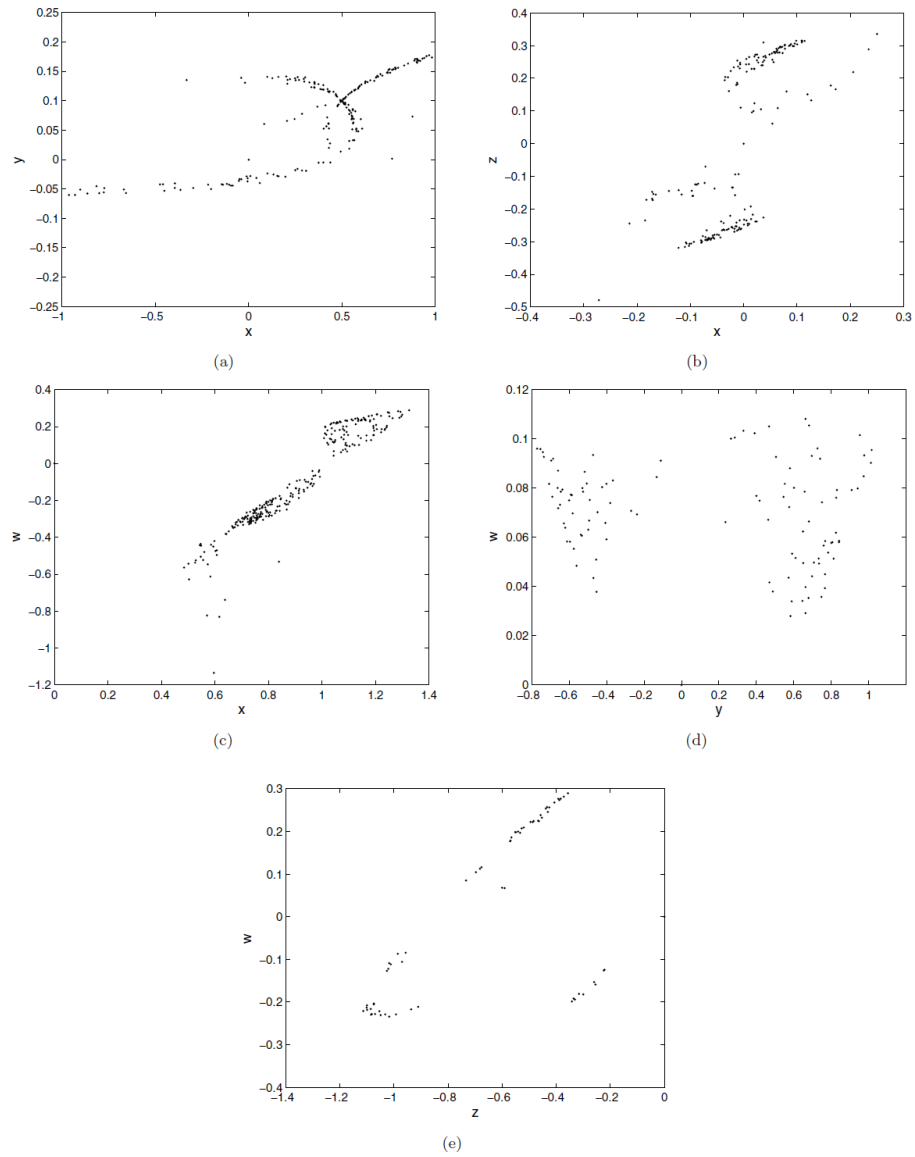


**Figura 9.** Visão tridimensional dos atratores do sistema (1) construídos utilizando  $a = 10$ ,  $b = 1$ ,  $c = 12,5$  e  $d = 5$  como valores dos parâmetros.

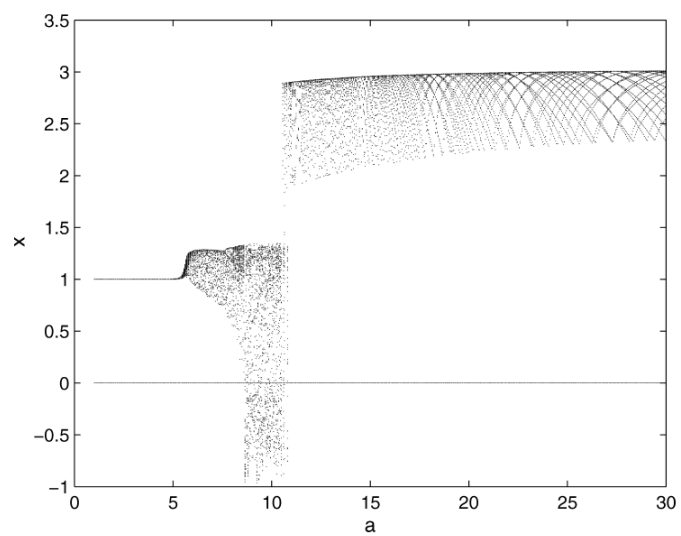


**Figura 10.** Em (a) temos o gráfico da variável  $x$  em função do tempo. Em (b) temos espectro das frequências da variável  $x$  em (a).

Fazendo uso das mesmas condições iniciais utilizadas para gerar os atratores da figura 9, imagens feitas a partir da implementação experimental do circuito com medições de tensão nos pontos indicados (círculos coloridos) na figura 8 são mostrados na figura 13. Conforme os pontos de medição são escolhidos, temos um gráfico gerado pelo osciloscópio no qual representa as projeções nos planos. Os autores da ref. [9] compararam as imagens da figura 13 com os resultados teóricos obtidos na figura 9 e encontram grande similaridade.

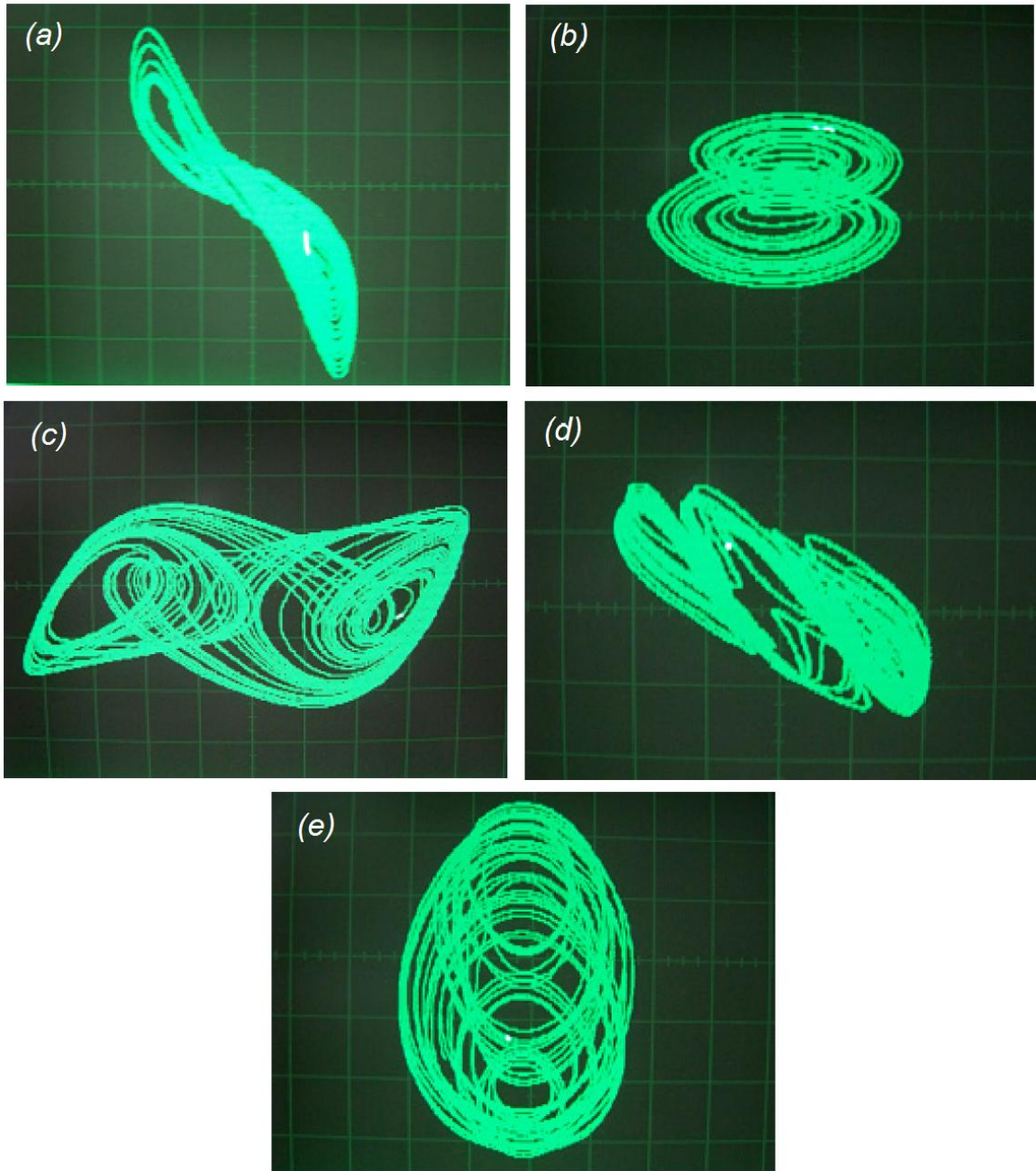


**Figura 11.** Mapa de Poincaré para o sistema (1).



**Figura 12.** Diagrama de bifurcação para a variável  $x$  em relação ao parâmetro  $a$ .





**Figura 13.** Observação experimental de atratores caóticos do sistema (1). Ambas observações são fotos da tela do osciloscópio. As divisões representadas na tela por varias linhas horizontais e verticais são uma referência, que junto com a escala ajustado para cada eixo, possibilita a leitura variação do sinal de tensão. Em (a) temos a projeção no plano  $x - z$ , com  $x = 2 \text{ V/divisão}$  e  $w = 1 \text{ V/divisão}$ . Em (b) temos a projeção no plano  $y - z$ , com  $x = 0,5 \text{ V/divisão}$  e  $w = 2 \text{ V/divisão}$ . Em (c) temos a projeção no plano  $x - y$ , com  $x = 1 \text{ V/divisão}$  e  $w = 0,5 \text{ V/divisão}$ . Em (d) temos a projeção no plano  $x - w$ , com  $x = 2 \text{ V/divisão}$  e  $w = 1 \text{ V/divisão}$ . E finalmente em (e) temos a projeção no plano  $y - w$ , com  $x = 0,5 \text{ V/divisão}$  e  $w = 0,5 \text{ V/divisão}$ .

# Capítulo 4

## Resultados

Neste capítulo, mostramos e discutimos os nossos resultados utilizando os métodos numéricos cuja metodologia está descrita na seção 2.1. Para isso, investigamos o comportamento do sistema perante a variação de dois parâmetros. Primeiramente explicamos quais os parâmetros do sistema que foram abordados, e posteriormente, passamos para a exposição e discussão de cada resultado de forma individual. Em diversos momentos, realizamos investigações do comportamento do sistema através de diagramas de bifurcação.

### 4.1 Resultados Obtidos a Partir de Nossos Estudos

Como tratamos de um sistema de quatro equações diferenciais composto por quatro parâmetros ( $a, b, c$  e  $d$ ), fez-se necessário realizar a construção dos espaços de parâmetros contendo o espectro do expoente de Lyapunov com todas as combinações dos parâmetros, sempre de dois em dois. Ao final tivemos um total de seis combinações descritas da seguinte forma:  $b \times a$ ;  $c \times a$ ;  $b \times c$ ;  $d \times b$ ;  $d \times a$  e  $d \times c$ . Em todos os espaços de parâmetros aqui construídos, sempre foram utilizados as condições iniciais ( $x(0)$ ;  $y(0)$ ;  $z(0)$ ;  $w(0)$ ) iguais a (1,0; 1,0; 1,0; 0,0). A escolha destes valores para as condições iniciais do sistema, teve como objetivo anular a dimensão do sistema representada por  $w$  para o parâmetro  $d = 0$ .

O passo de integração utilizado no método de Runge-Kutta de quarta ordem foi de  $10^{-2}$ , para um número total de  $5 \times 10^5$  interações. Os expoentes de Lyapunov são calculados pelo método de Wolf [12]. Os espaços de parâmetros foram construídos contendo cada um dos expoentes de Lyapunov representados pela escala de cores conforme explicado na seção 2.1. O sistema estudado apresentou 4 expoentes, dos quais o programa calcula e ordena de forma decrescente de valor. O comportamento do sistema é identificado após uma comparação do valor de cada expoente conforme a tabela 1, da seção 2.1. Para os diagramas de bifurcação obtidos nesta dissertação, usamos os máximos das séries temporais da variável  $z$ , ao longo de curvas coloridas construídas sobre os espaços de parâmetros.

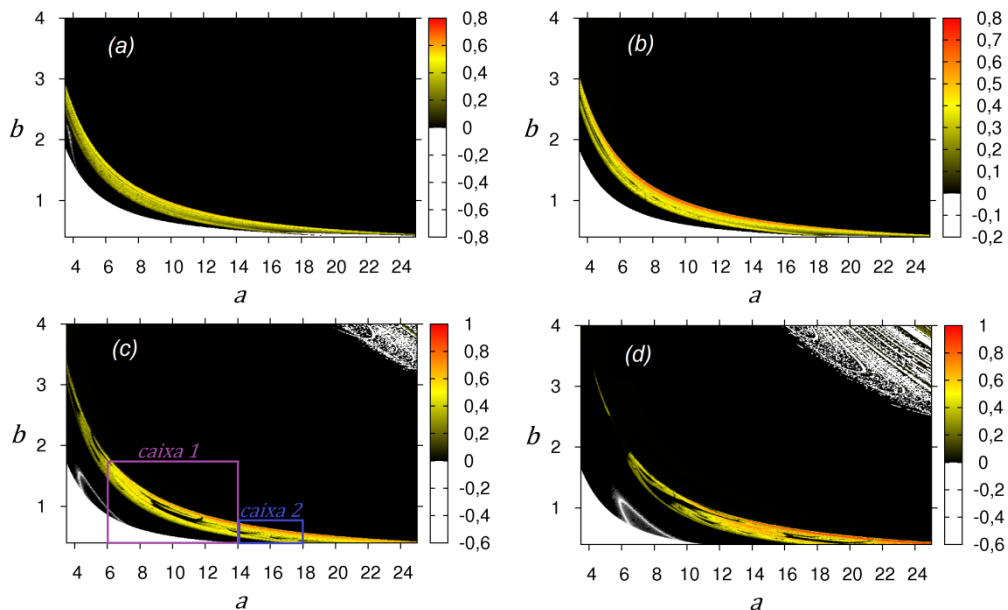


## 4.2 Resultados de $b \times a$

Os primeiros espaços de parâmetros construídos utilizaram como parâmetros as variáveis  $b \times a$ . Manteve-se o parâmetro  $c$  fixo em 12,5 (igual ao utilizado pela referência [9]). O parâmetro  $d$  assumiu vários valores 0, 1, 5 e 10 para cada espaço. Com esta variação nos valores assumidos por este parâmetro, será possível a visualização da influência deste parâmetro no comportamento do sistema. Com estes valores foi possível a construção de quatro espaços cujos resultados são apresentados na figura 14, cuja resolução é de  $500 \times 500$ , ou seja, cada eixo foi discretizado em 500 valores.

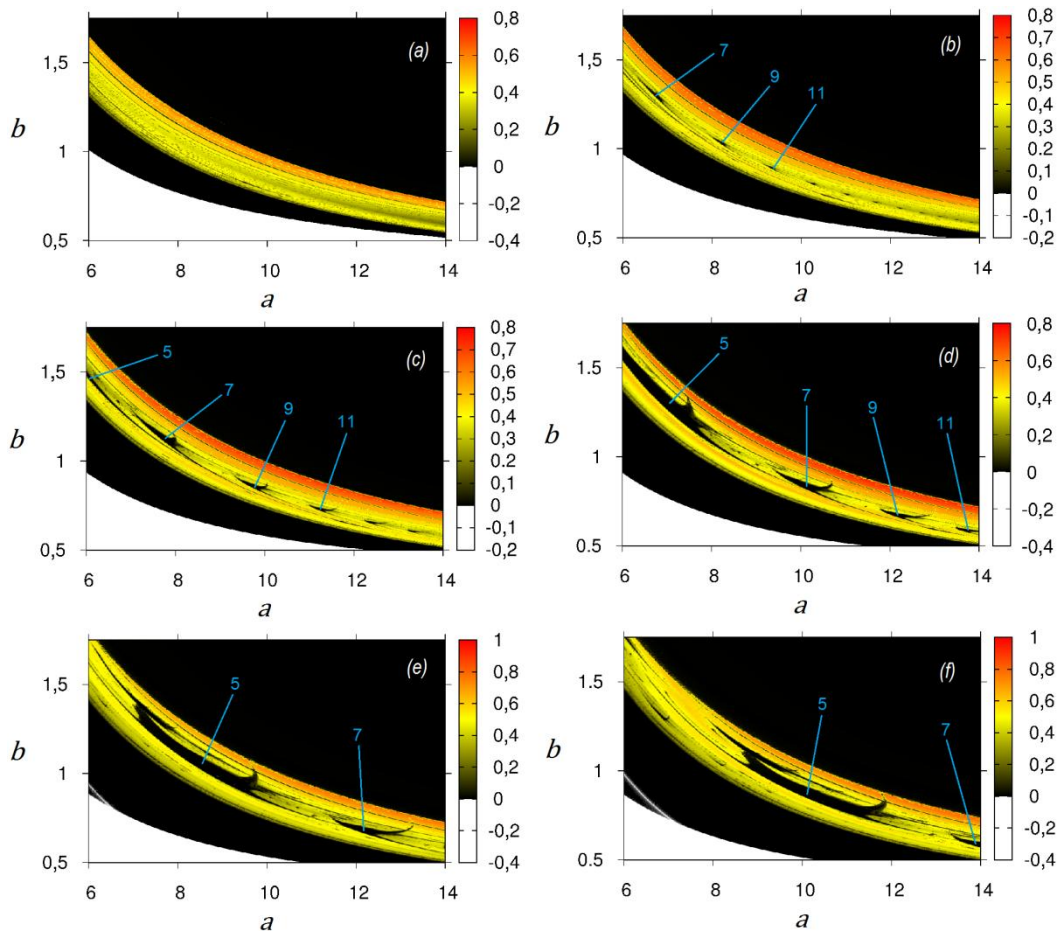
Em cada espaço presente na figura 14 observamos estruturas periódicas (também chamadas de camarões), envolvidas por regiões de caos, estruturas estas amplamente relacionadas em diversos outros trabalhos [4-7,13-17].

É possível ver que a região de caos apresenta-se na figura em uma faixa estreita, de forma descendente do canto superior esquerdo para o canto inferior direito. As estruturas periódicas possuem formatos muito semelhantes. As dimensões desses “camarões” variam ao longo desta faixa de região caótica, diminuindo conforme cresce o parâmetro  $a$  na figura. Outro detalhe possível de ser observado é o crescimento e certa deformação das estruturas periódicas devido ao aumento do valor do parâmetro de  $d$ , parâmetro este que controla a dimensão do sistema (1).



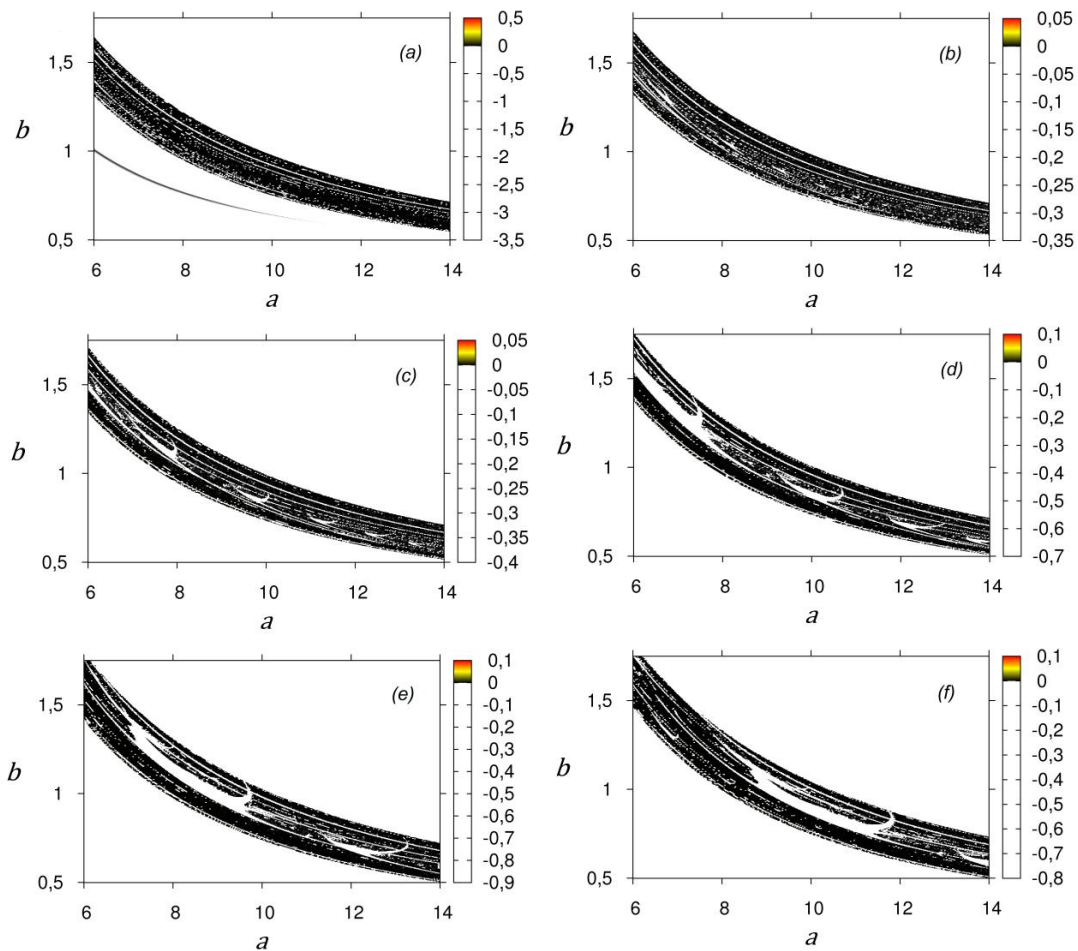
**Figura 14.** Espaços de parâmetros  $b \times a$ , para o primeiro maior expoente de Lyapunov, para  $c = 12,5$  e (a)  $d = 0$ , (b)  $d = 1$ , (c)  $d = 5$  e (d)  $d = 10$ .

Realizando uma ampliação na região da *caixa 1* da figura 14(C), torna-se possível uma melhor análise do comportamento das estruturas periódicas. Para esta região, geramos um espaço de parâmetros mais detalhado devido à combinação de uma variação do parâmetro  $d$  assumindo os valores de 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e quantidades de pontos mantidas sobre uma região menor ( $500 \times 500$  pontos). A figura 15 mostra esta ampliação para o primeiro maior expoente de Lyapunov e a figura 16 para o segundo maior expoente para a mesma região da *caixa 1*. Observando a figura 15(a), para o parâmetro  $d$  igual a zero, podemos verificar a ausência de estruturas periódicas com a forma de camarões, somente linhas de comportamento periódico. Outro fato importante para a primeira figura em que temos  $d$  igual a zero, é que este valor para o parâmetro também implica na anulação da quarta equação diferencial  $dw/dt$  no sistema (1). Portanto, o sistema nesta condição torna-se um sistema de *três* dimensões ao invés de *quatro*, como seria originalmente.



**Figura 15.** Conjunto de espaços de parâmetros  $b \times a$  da caixa da figura 14(a), onde temos o primeiro maior expoente de Lyapunov para  $c = 12,5$  e assumindo para (a)  $d = 0$ , (b)  $d = 1$ , (c)  $d = 2$ , (d)  $d = 3$ , (e)  $d = 4$  e (f)  $d = 5$ . Os números representam o período de cada estrutura indicada pelas setas.

Para analisar se o sistema (1) apresenta hipercaos, que é caracterizado pela existência de dois ou mais expoentes de Lyapunov positivos, mostramos na figura 16 os espaços de parâmetros para o segundo maior expoente. Podemos inferir da análise dessas figuras que o sistema (1), apesar de ser 4D, não apresenta comportamento hipercaótico para a faixa de valores de parâmetros utilizada. Caso o sistema apresentasse hipercaos, deveriam aparecer regiões amareladas ou avermelhadas nos mesmos locais onde temos regiões caóticas no espaço de parâmetro da figura 15.



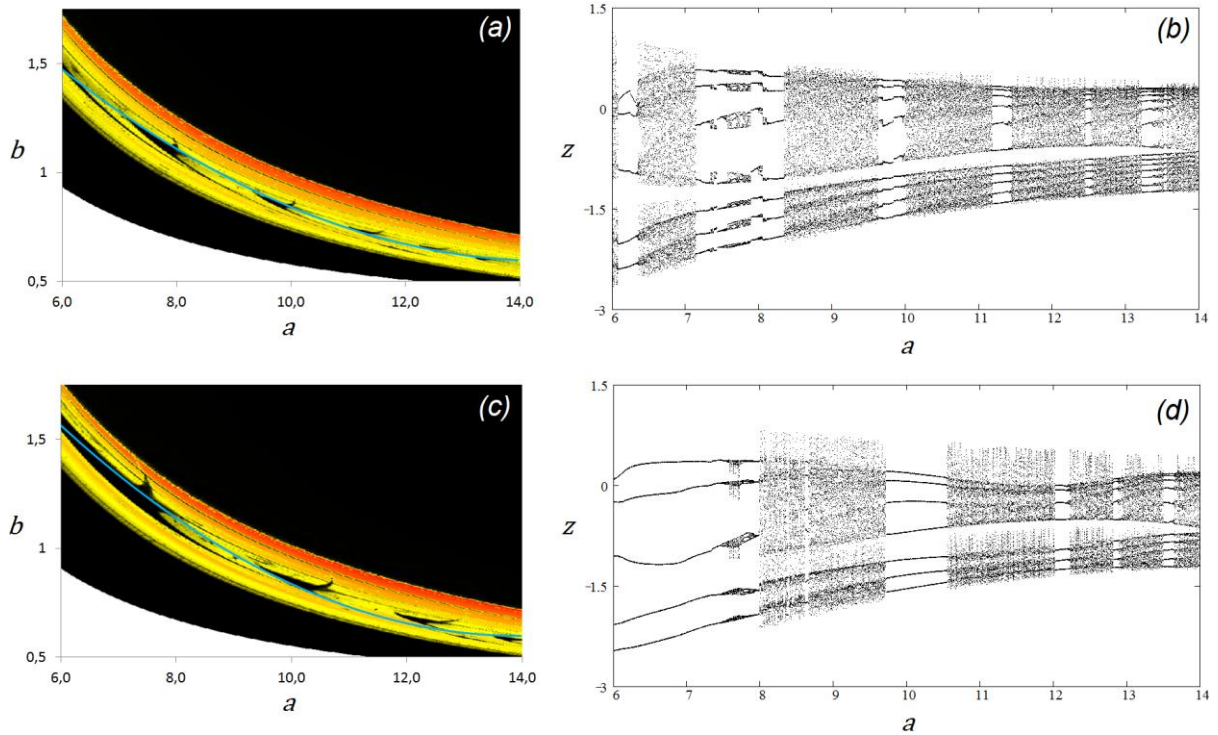
**Figura 16.** Conjunto de espaços de parâmetros  $b \times a$  da caixa da figura 14(c), onde temos o segundo maior expoente de Lyapunov para  $c = 12,5$  e assumindo para (a)  $d = 0$ , (b)  $d = 1$ , (c)  $d = 2$ , (d)  $d = 3$ , (e)  $d = 4$  e (f)  $d = 5$ . A partir desses espaços, não há ocorrência de hipercaos para os parâmetros utilizados.

Quando realizado uma análise sobre os valores do parâmetro  $d$  variando de 1 a 5 (figura 15), notamos o início do surgimento das estruturas periódicas semelhantes a camarões, conforme o aumento do parâmetro  $d$ . Outra observação sobre as estruturas, esta relaciona-

da ao seu tamanho, estas estruturas crescem sobre a faixa de comportamento caótico. Existe ainda uma movimentação dessas estruturas combinada com o aumento deste parâmetro. De maneira ilustrativa, é possível realizar a seguinte analogia a este conjunto de figuras: “os camarões estão nadando em um mar de caos conforme ocorre o aumento do parâmetro  $d$ ”. Além disso, observamos outra particularidade, cada estrutura periódica possui uma diferença de período  $n + 2$ , onde  $n$  é o menor período da estrutura, na medida em que avança no sentido descendente da região de caos. Os diagramas de bifurcações realizados confirmam esta afirmação, e estão mostrados na figura 17(b) e (d), caracterizando uma cascata por adição de período. As equações das curvas presentes na figura 17(a) e (c) são respectivamente

$$b = 0,0121 a^2 - 0,3515 a + 3,1467, \quad (3)$$

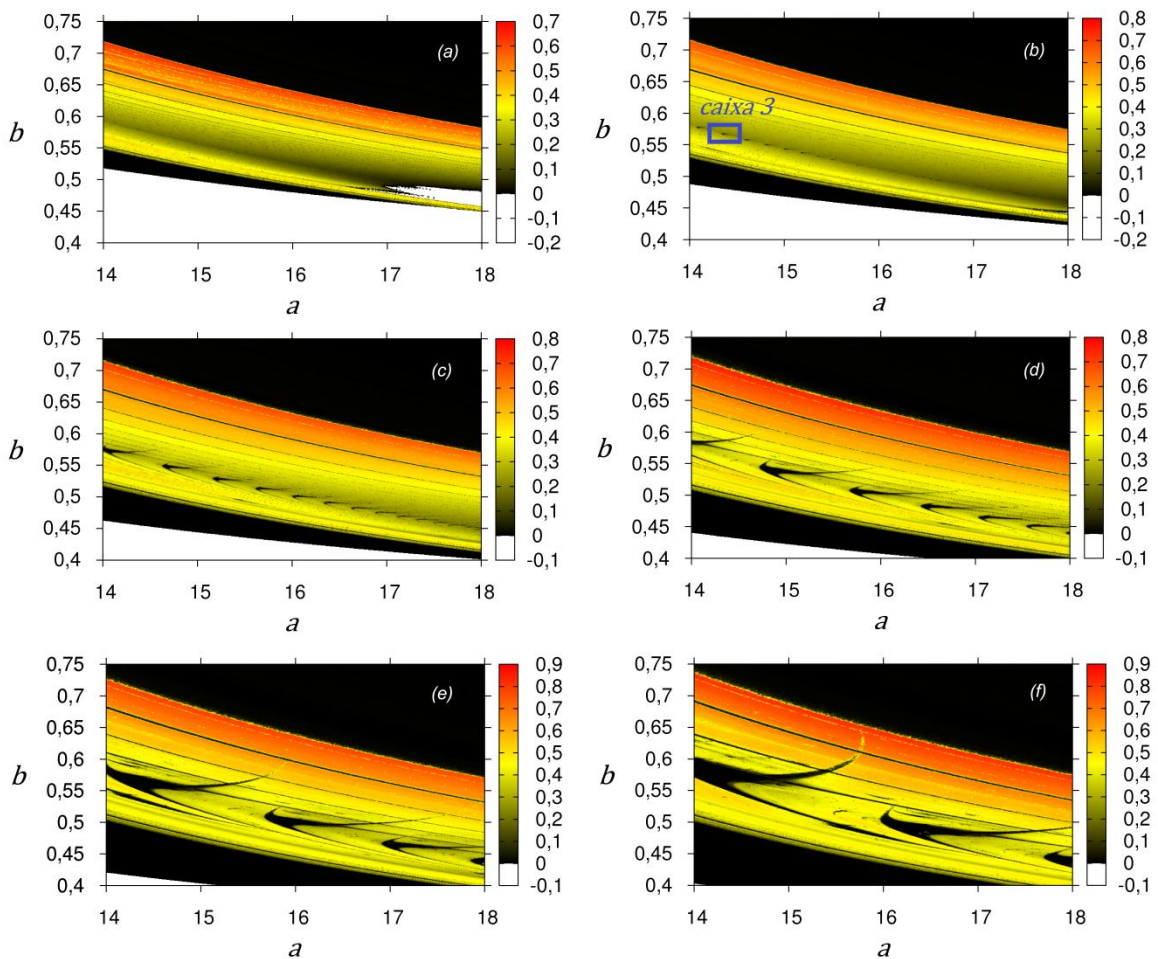
$$b = 0,0153 a^2 - 0,4266 a + 3,5716. \quad (4)$$



**Figura 17.** Em (a) temos a representação gráfica da curva utilizando a equação de número (3), no qual permite a realização do diagrama de bifurcação apresentado em (b). Em (c) temos a representação gráfica da outra curva utilizando a equação de número (4), no qual permite a realização do outro diagrama de bifurcação apresentado em (d). As figuras 17 (a) e (c), são respectivamente, as figuras já apresentadas como figura 15(c) e (d).

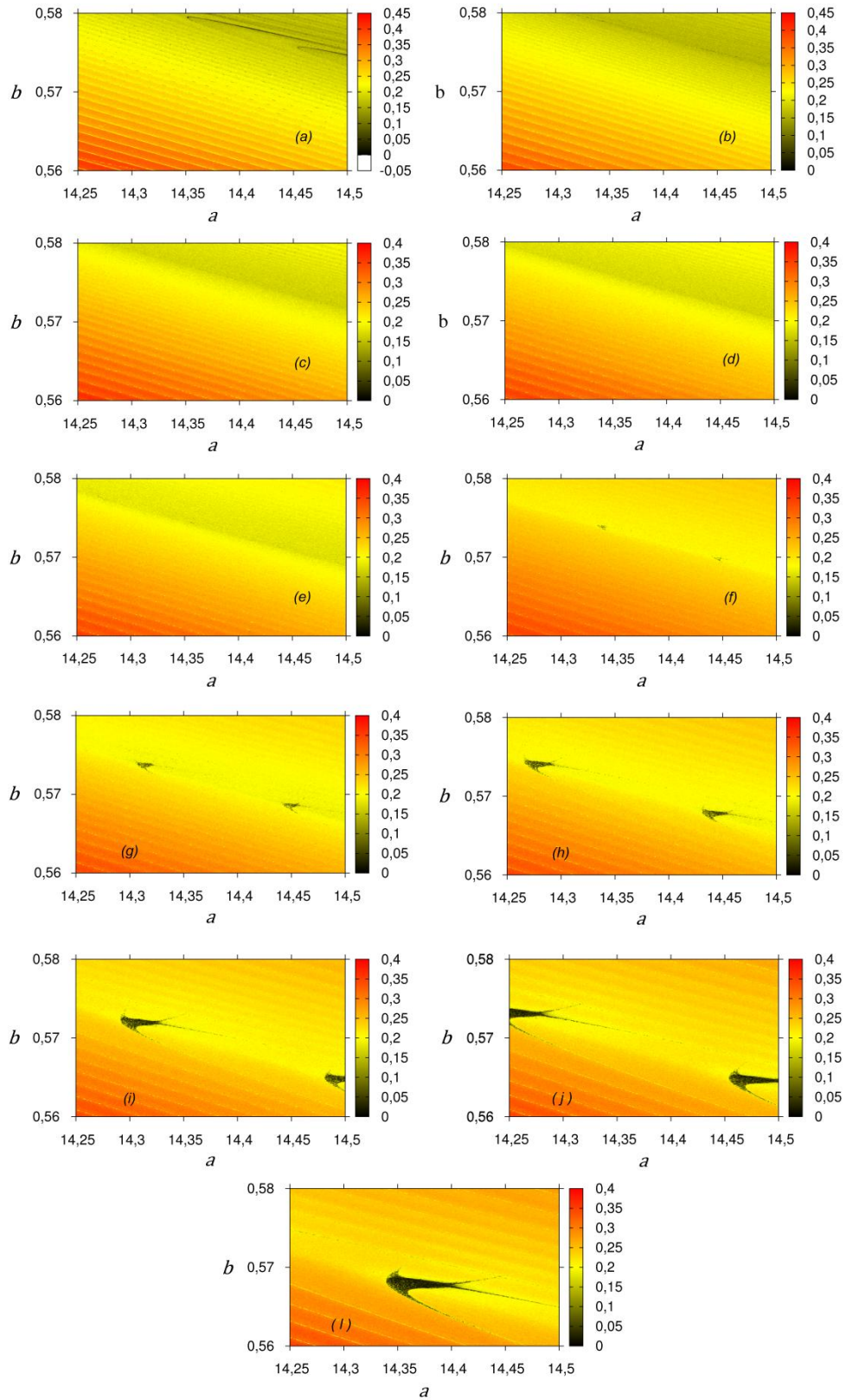
Dando continuidade ao estudo das ampliações da região limitada pela *caixa 2* da figura 14(c), foi realizado um novo conjunto de imagens apresentado na figura 18, seguindo a

mesma seqüência de valores do parâmetro  $d$ . Os mesmos comentários relacionados à figura 15 serão válidos para a figura 18. Visando observar o surgimento das estruturas periódicas, realizamos novamente uma ampliação a fim de visualizar o pequeno “camarão” (ou estrutura periódica) dentro da *caixa 3* da figura 18(b). Para um refinamento no valor do parâmetro  $d$  com os valores 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 e 1,0, produzimos um conjunto de 11 espaços de parâmetros apresentados na figura 19 (cada uma delas com resolução de  $500 \times 500$ ). Deste modo, inferimos que uma estrutura periódica começa a ser formada a partir dos semicírculos presentes em  $d$  igual a zero, figura 19(a). Estes semicírculos parecem ser destruídos (como se fossem fragmentados) e somente quando o parâmetro  $d$  assume valor 0,5, figura 19(f), surge uma estrutura periódica de forma clara. O surgimento do “camarão” mostra-se como uma forma de aglutinação (atração) dos fragmentos dos semicírculos destruídos.



**Figura 18.** Conjunto de espaços de parâmetros  $b \times a$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov para  $c = 12,5$  e assumindo (a)  $d = 0$ , (b)  $d = 1$ , (c)  $d = 2$ , (d)  $d = 3$ , (e)  $d = 4$  e (f)  $d = 5$ . Este conjunto fica exatamente ao lado do conjunto apresentado na figura 15.





**Figura 19.** Conjunto de espaços de parâmetros  $b \times a$  da região limitada pela caixa azul da figura 18(b), onde temos o primeiro maior expoente de Lyapunov para  $c = 12,5$  e assumindo para (a)  $d = 0,0$ , (b)  $d = 0,1$ , (c)  $d = 0,2$ , (d)  $d = 0,3$ , (e)  $d = 0,4$ , (f)  $d = 0,5$ , (g)  $d = 0,6$ , (h)  $d = 0,7$ , (i)  $d = 0,8$ , (j)  $d = 0,9$  e (l)  $d = 1$ .

### 4.3 Resultados de $c \times a$

Quando realizamos a combinação dos parâmetros  $c \times a$  com o valor de  $b$  fixo em 0,55 e o valor de  $d$  assumindo os valores 0; 1; 5 e 10 obtemos os espaços de parâmetros para o maior expoente conforme mostrado na figura 20. Mudando o limite da variação dos parâmetros presentes nos eixos de cada imagem de 24 para 120, de forma a proporcionar uma visão mais global, observamos uma deformação das estruturas periódicas com o aumento do valor do parâmetro  $d$ . Estes resultados são apresentados na figura 21. Para ambas as figuras citadas neste parágrafo, quando o valor do parâmetro  $d$  assume o valor de 0 e 1, formam espaços muito parecidos com os encontrados nas referências [16-18].

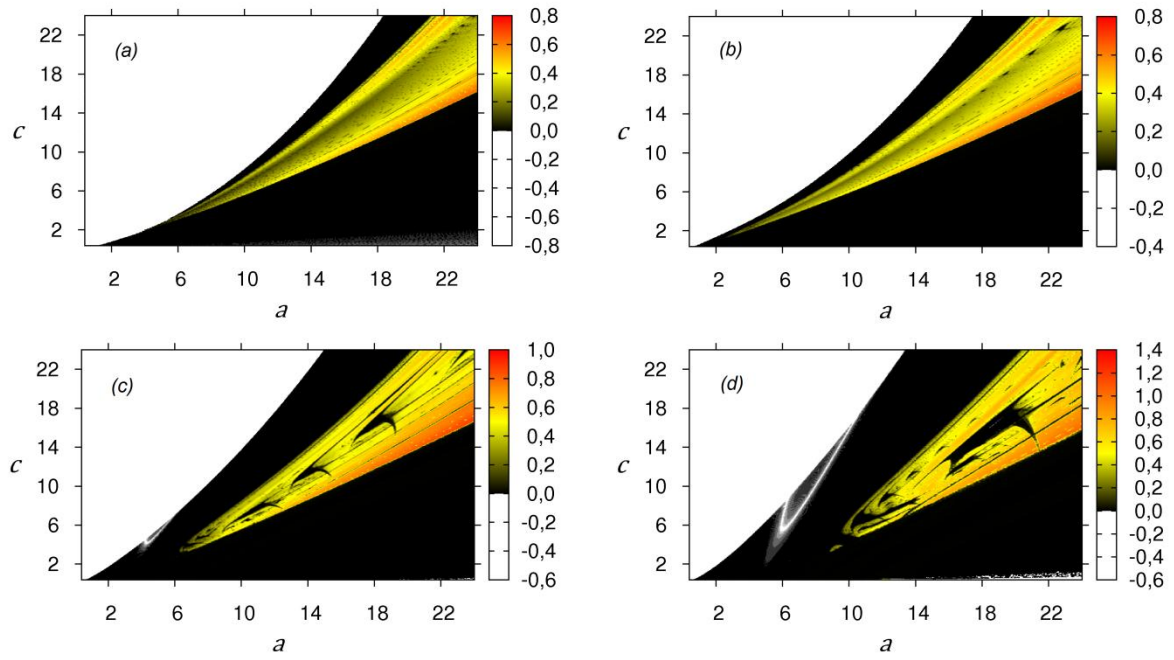
Construindo um diagrama de bifurcação conforme a curva em azul da figura 22, onde adotamos  $b = 0,55$  e  $d = 1$  para os parâmetros fixos, observamos a presença de uma cascata de bifurcação para os valores dos períodos de cada estrutura periódica. A equação da curva azul é

$$c = 0,0131 a^2 + 0,8385 a - 2,2373. \quad (5)$$

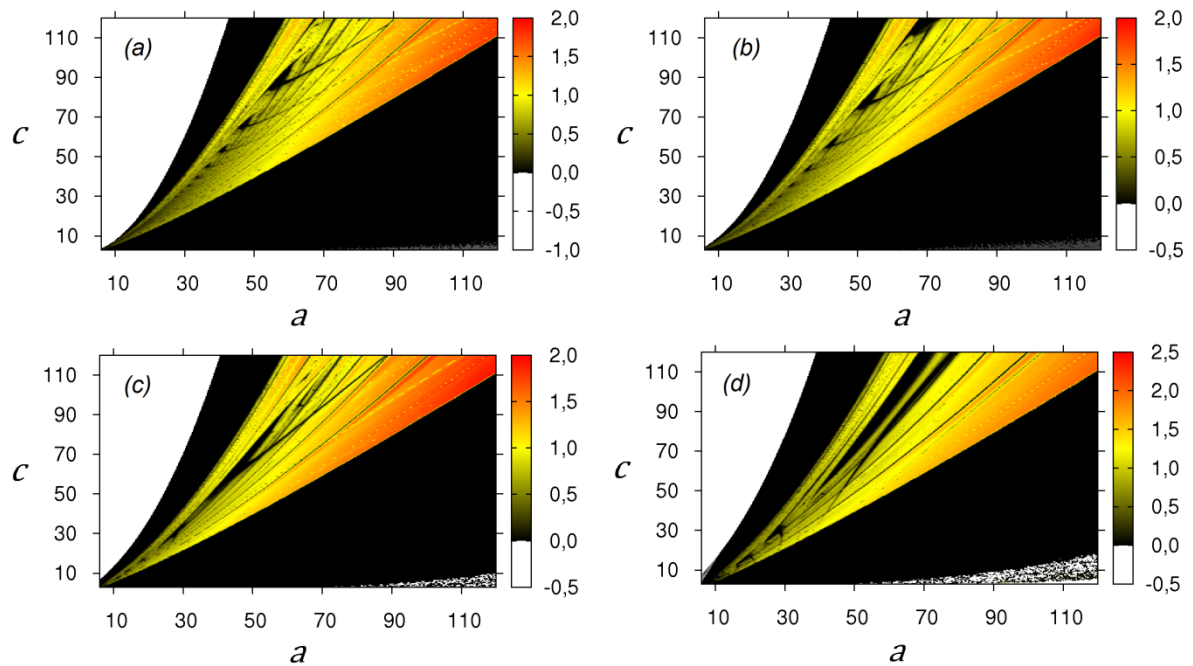
Segundo o diagrama de bifurcação da figura 23, podemos constatar que o período de cada estrutura decresce conforme o aumento da estrutura ou o seu afastamento da origem do sistema de eixos. A regra que rege o decrescimento do valor do período é  $n - 2$  para o período de uma nova estrutura.

Resultados semelhantes com relação à cascata de bifurcação encontrada aqui para os valores dos períodos das estruturas também foi encontrado na ref. [17], no qual os autores relatam resultados para um oscilador de Chua com três dimensões, apresentando um circuito elétrico bastante simples, quando comparado com o estudo aqui reportado.

Os valores encontrados para o período de cada estrutura do nosso sistema assemelham aos valores encontrados pela ref. [18] no qual trabalha com um sistema de três dimensões para um circuito de Chua.

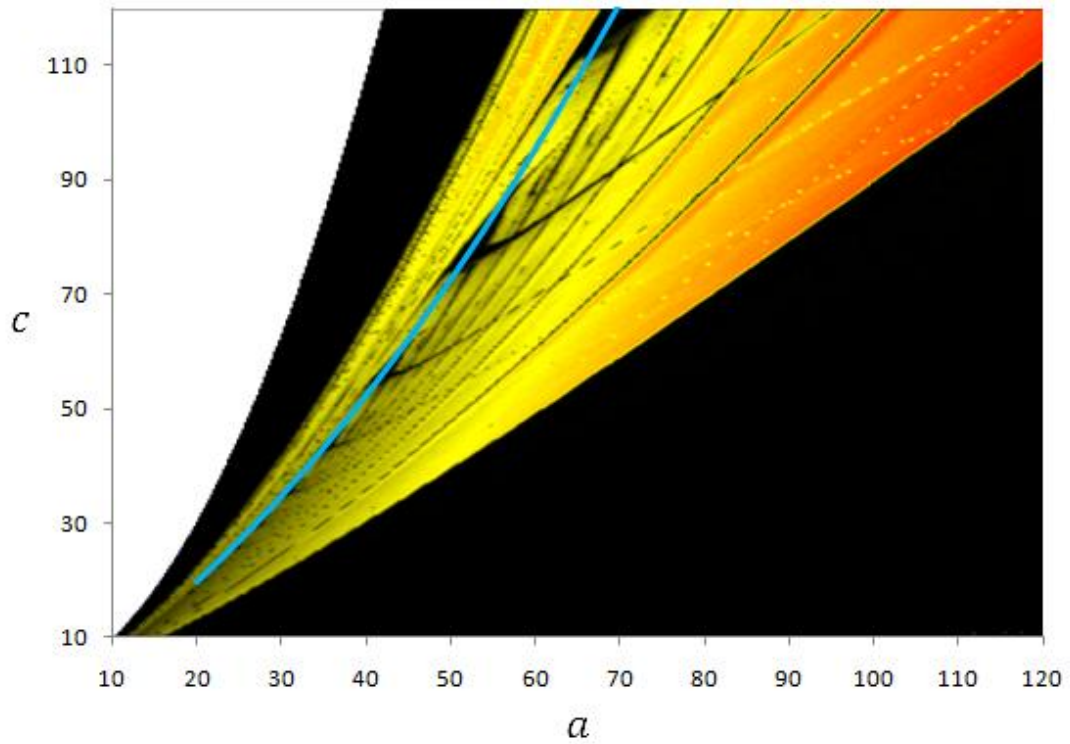


**Figura 20.** Espaços de parâmetros  $c \times a$  do primeiro maior expoente de Lyapunov com valor de  $b = 0,55$  e (a)  $d = 0$ , (b)  $d = 1$ , (c)  $d = 5$  e (d)  $d = 10$ . Valor máximo assumido pelos parâmetros  $c$  e  $a$  é 24.

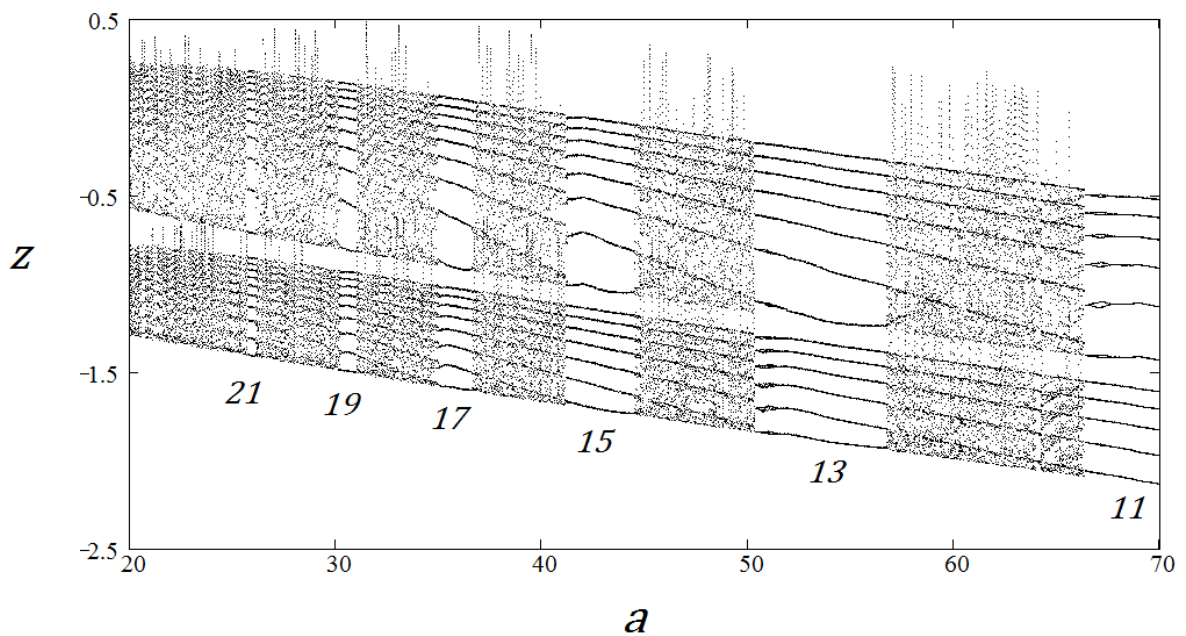


**Figura 21.** Espaços de parâmetros  $c \times a$  do primeiro maior expoente de Lyapunov com valor de  $b = 0,55$  e (a)  $d = 0$ , (b)  $d = 1$ , (c)  $d = 5$  e (d)  $d = 10$ . Valor máximo assumido pelos parâmetros  $c$  e  $a$  é 120.





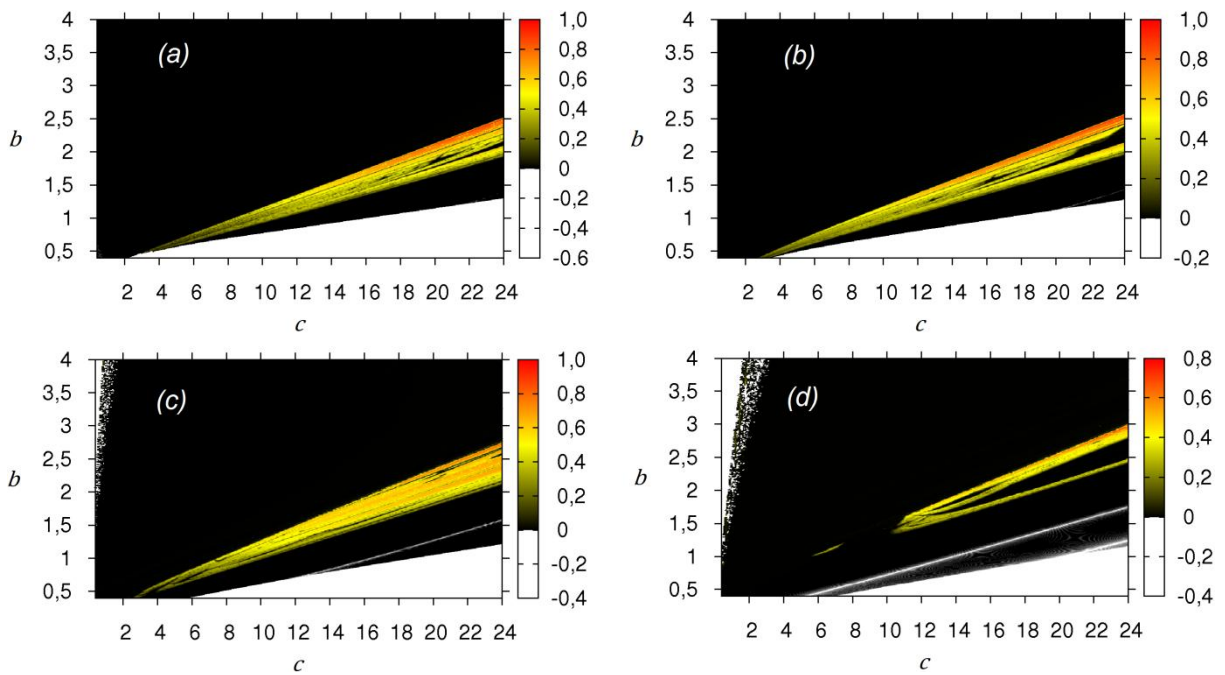
**Figura 22.** Espaço de parâmetros  $c \times a$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov para  $b = 0,55$  e  $d = 1$ . Sobre a curva em azul construímos o diagrama de bifurcação da figura 23, e é dada pela equação (5).



**Figura 23.** Diagrama de bifurcação sobre a curva em azul da figura 22, no qual utiliza a equação de 2º grau representado pela equação (5). O parâmetro variado é  $a$ , variando de 20 a 70. A variável analisada é  $z$ .

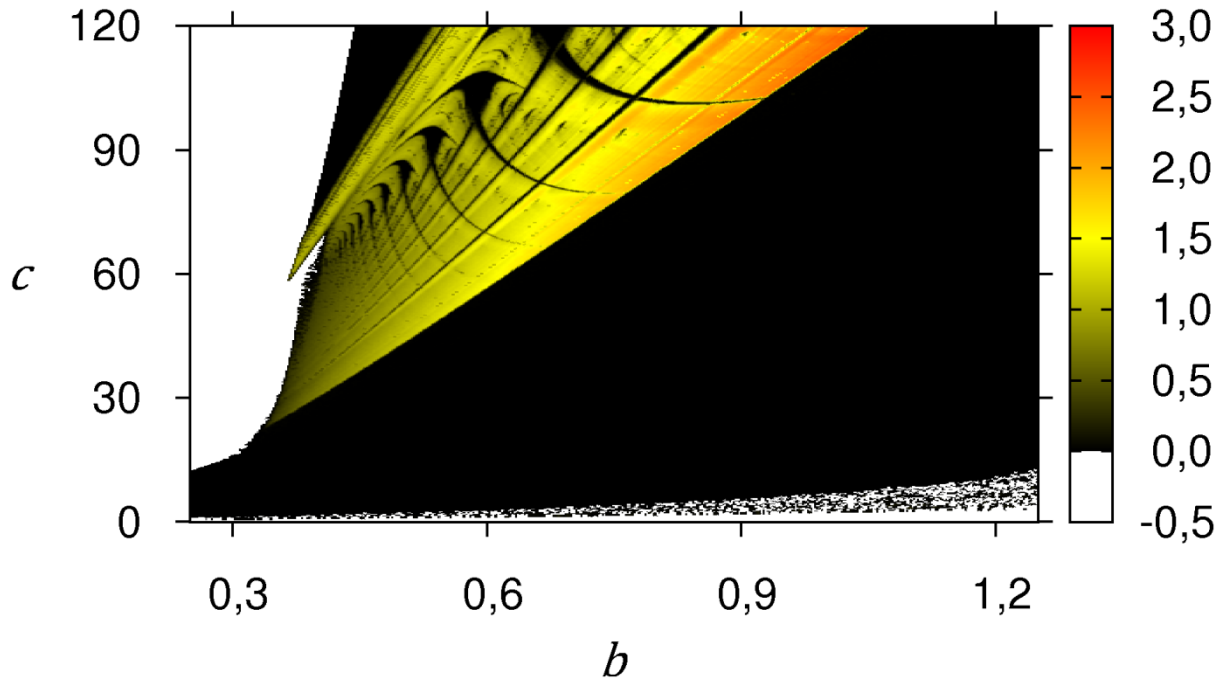
#### 4.4 Resultados de $b \times c$

Na figura 24 mostramos os espaços de parâmetros  $b \times c$ , com o parâmetro  $a$  fixo em 7, e novamente o valor de  $d$  assumindo 0, 1, 5 e 10. Para este conjunto de parâmetros, observamos algumas estruturas periódicas (regiões em preto) imersas na região caótica (região em amarelo e vermelho). Entretanto, para esta escolha de parâmetros fixos, os espaços de parâmetros não apresentaram estruturas periódicas bem claras.



**Figura 24.** Espaço de parâmetros  $b \times c$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov, com  $a = 7$  e (a)  $d = 0$ ; (b)  $d = 1$ ; (c)  $d = 5$  e (d)  $d = 10$ .

Assim, utilizando o valor do parâmetro  $a = 60$  e  $d = 5$  e alterando a faixa de valores dos eixos de forma a construir outro espaço de parâmetros  $c \times b$ , obtemos o espaço da figura 25. Nela vemos uma seqüência de “camarões” alinhados de forma crescente de tamanho, da esquerda para a direita. Os “camarões” aumentam em tamanho à medida que a faixa da região de caos também aumenta na largura. Pode-se ver ainda a presença de outras quatro estruturas periódicas menores exatamente ao lado das estruturas mencionadas anteriormente. Figura semelhante foi encontrada no já citado trabalho da ref. [16], em um estudo de outro sistema de Chua 4D.



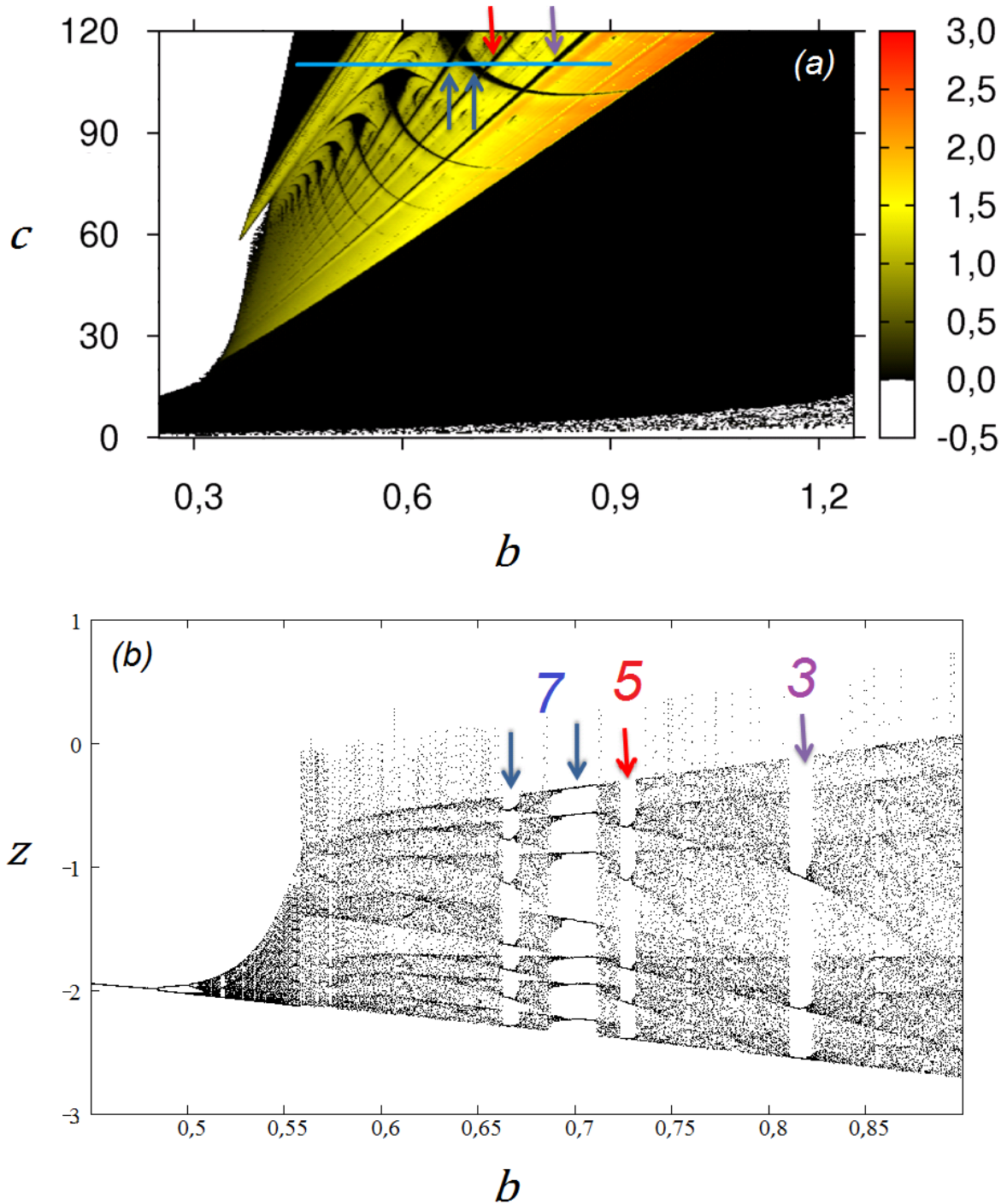
**Figura 25.** Espaço de parâmetros  $c \times b$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov com  $a = 60$  e  $d = 5$ . Podemos ver claramente a formação de vários “comarões” de forma alinhada.

Construímos também para a figura 25, os diagramas de bifurcação, da seguinte forma: primeiro em uma linha horizontal (linha azul na figura 26, onde mantemos constante o valor do parâmetro  $c = 110$  e variamos o valor do parâmetro  $b$  de 0,45 a 0,95), no qual revela o período da maior estrutura periódica presente. Constatamos, através desta análise, que o menor período do maior “comarão” presente neste espaço é 7 (observe as setas azuis). No mesmo diagrama de bifurcação ainda é possível ver o período de dois “comarões” através das suas “antenas”, nos quais ficam representados pelas setas vermelha e roxa, onde seus períodos são respectivamente 5 e 3. Com esta análise preliminar pode-se observar que conforme o tamanho da estrutura cresce, ocorre um decréscimo no valor do período do mesmo.

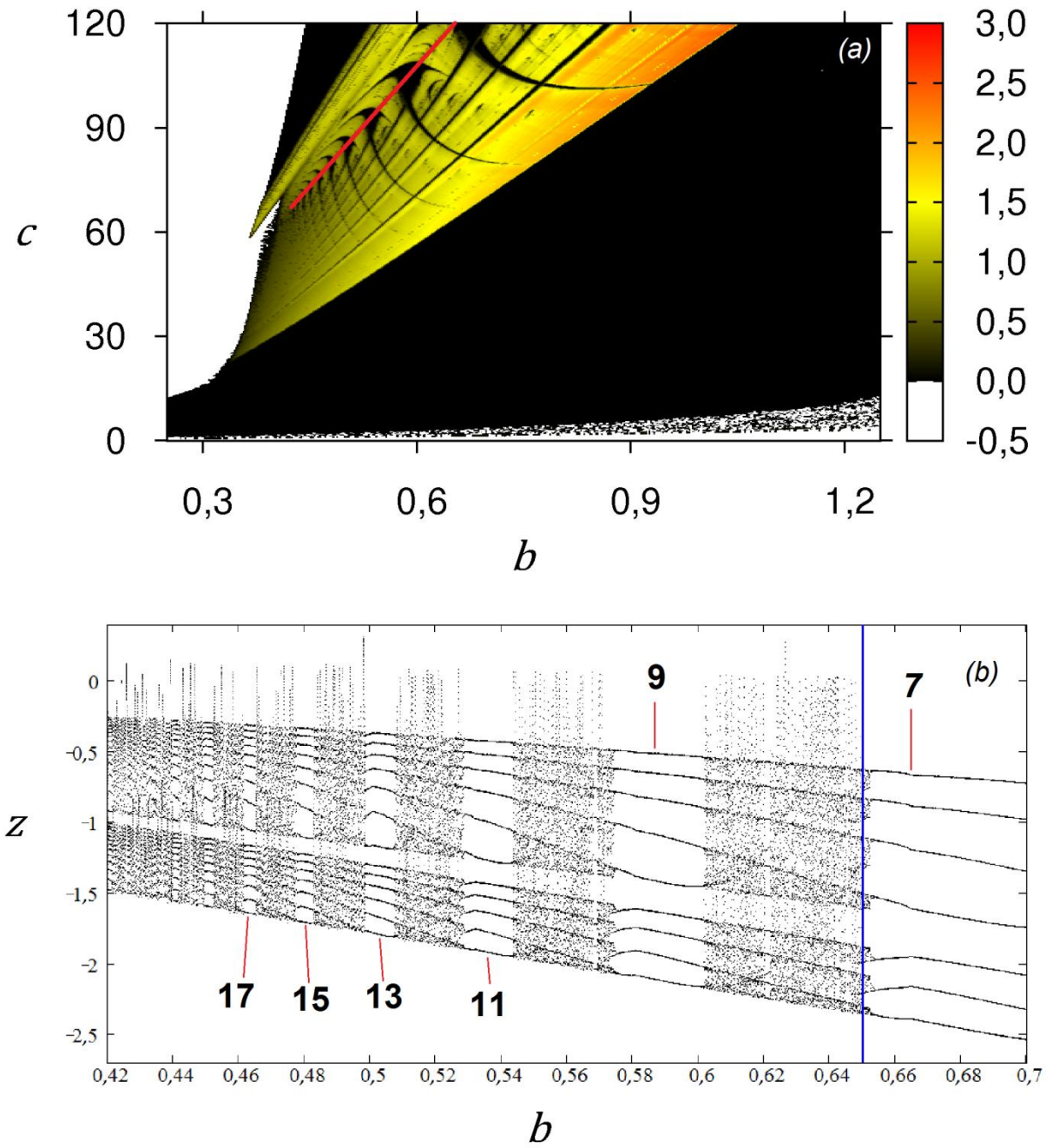
Porém, se construirmos um diagrama de bifurcação em uma reta inclinada de tal forma a passar por todas as estruturas periódicas (linha vermelha da figura 27), no qual é construída utilizando a equação

$$c = 230,769 b - 30 . \quad (6)$$

Observamos que realmente temos uma diminuição do valor do período da estrutura conforme seu crescimento em tamanho e o aumento de ambos os parâmetros. A mudança no valor do período é do tipo  $n - 2$ , onde  $n$  é o menor período de cada estrutura



**Figura 26.** Em (a) observamos o espaço de parâmetros  $c \times b$  com a presença de uma reta sobre a qual construímos um diagrama de bifurcação apresentado em (b). O diagrama é construído com quando variado o parâmetro  $b$  nos valores 0,45 a 0,97 e analisando a variável  $z$ .

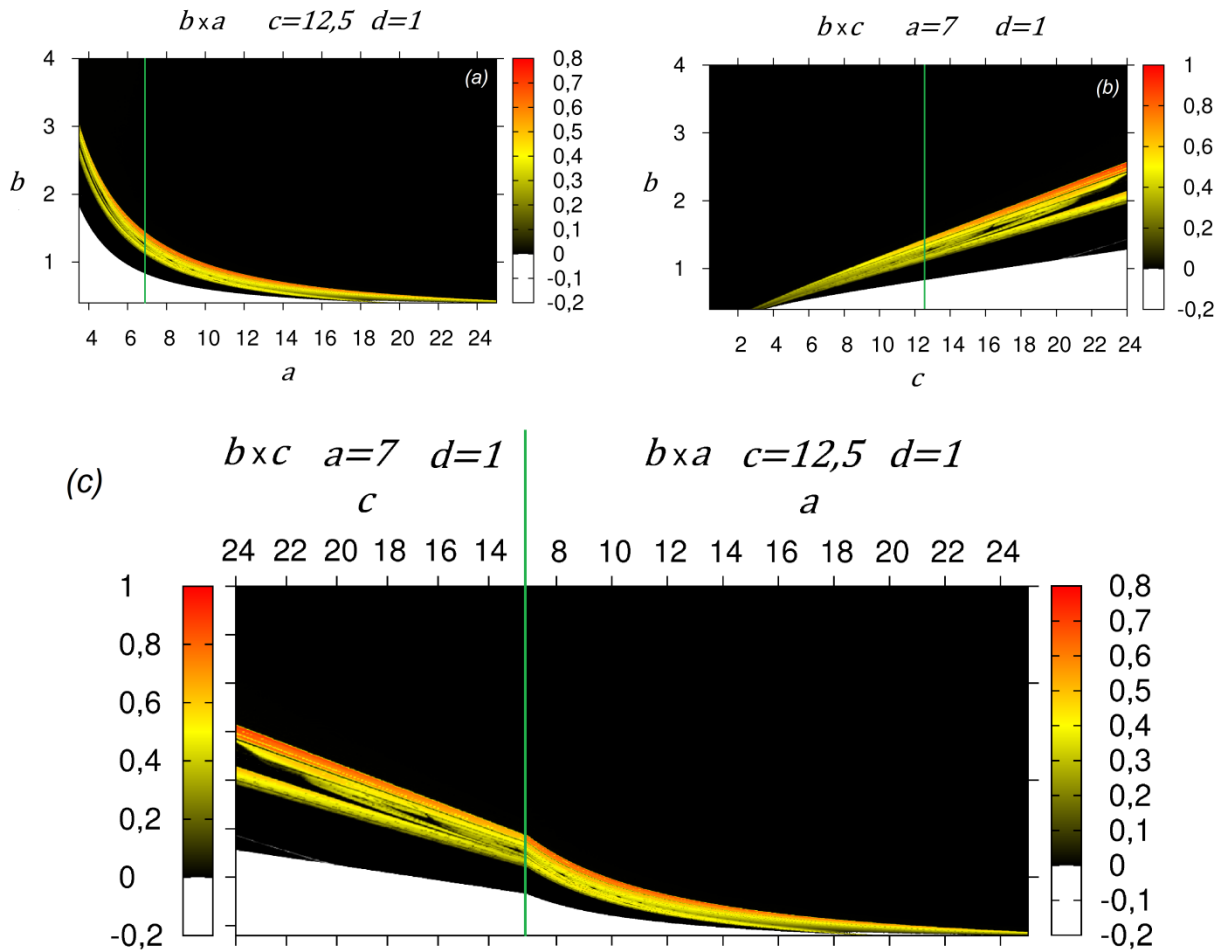


**Figura 27.** Em (a) temos o mesmo espaço de parâmetros  $c \times b$  já apresentado na figura 25, mas com a presença de uma reta inclinada dado pela equação (6), sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação (b). O parâmetro  $b$  foi variado de 0,42 a 0,70. Este último valor para  $b$  está um pouco acima da linha vermelha mostrada na figura 26, com o intuito de mostrar o valor do período do ultimo camarão. A linha azul representa o último valor de  $b$  na linha vermelha no espaço de parâmetros. Os números indicam o menor período de cada camarão. A variável analisada foi  $z$ .



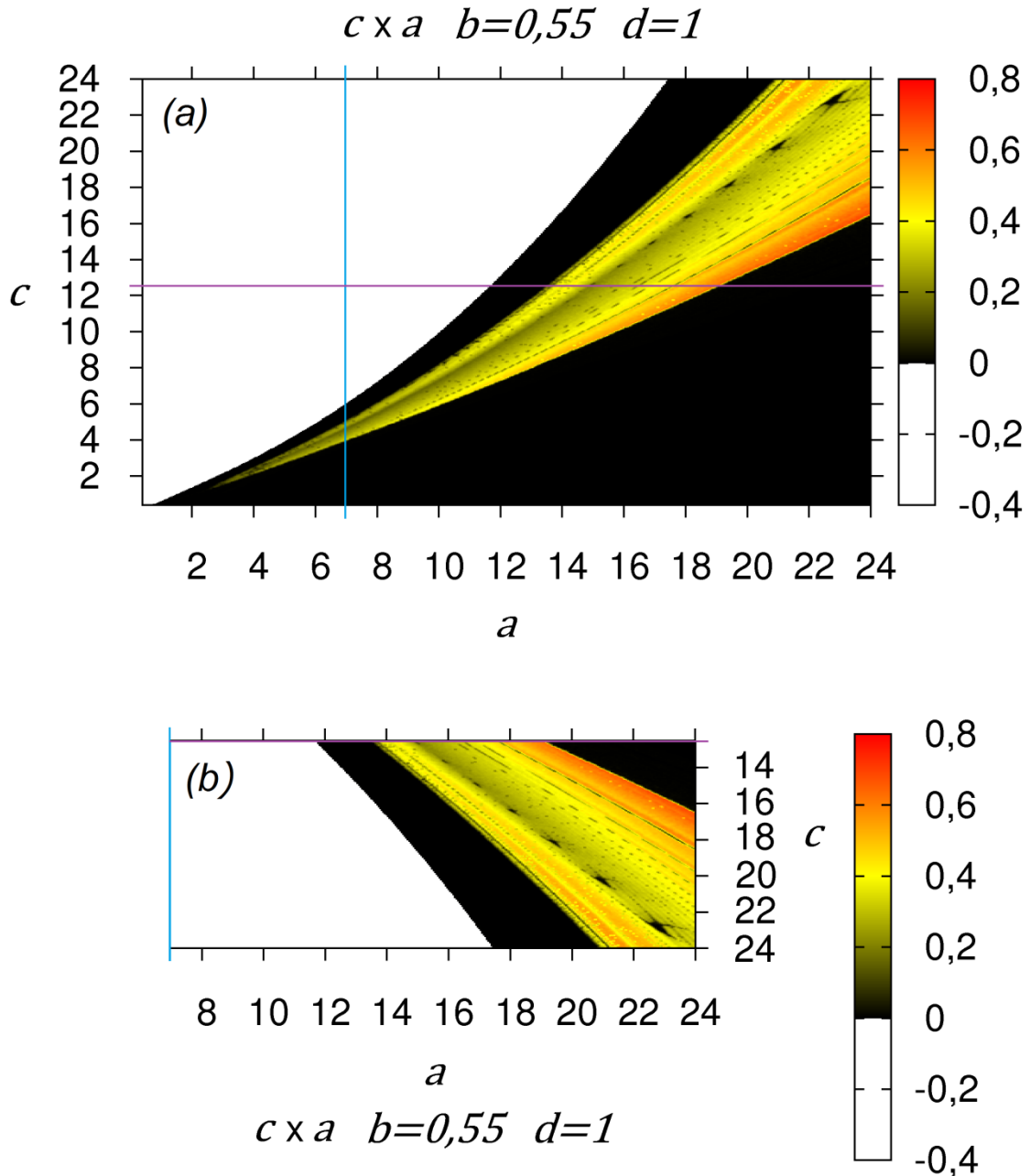
## 4.5 Espaços de Parâmetros $a \times b \times c$

O interessante deste conjunto de espaços de parâmetros apresentados até agora ( $b \times a$ ,  $c \times a$  e  $b \times c$ ) é que podemos, através de algumas modificações, comparar e unir os espaços de forma a se completarem. A primeira comparação pode ser feita entre os espaços  $b \times a$  e  $b \times c$ . A figura 28 apresenta esta análise. Note que em (a) e (b) foram feitas marcações com uma linha verde. Tal linha representa a intersecção dos espaços de parâmetros. Primeiramente giramos a parte direita de (b) do espaço de parâmetros  $b \times c$  no eixo vertical, em um ângulo de  $180^\circ$ . Desta forma pudemos unir (a) com a parte direita de (b) do espaço de parâmetros  $b \times c$ , criando o espaço de parâmetros  $a \times b \times c$  identificado por (c).



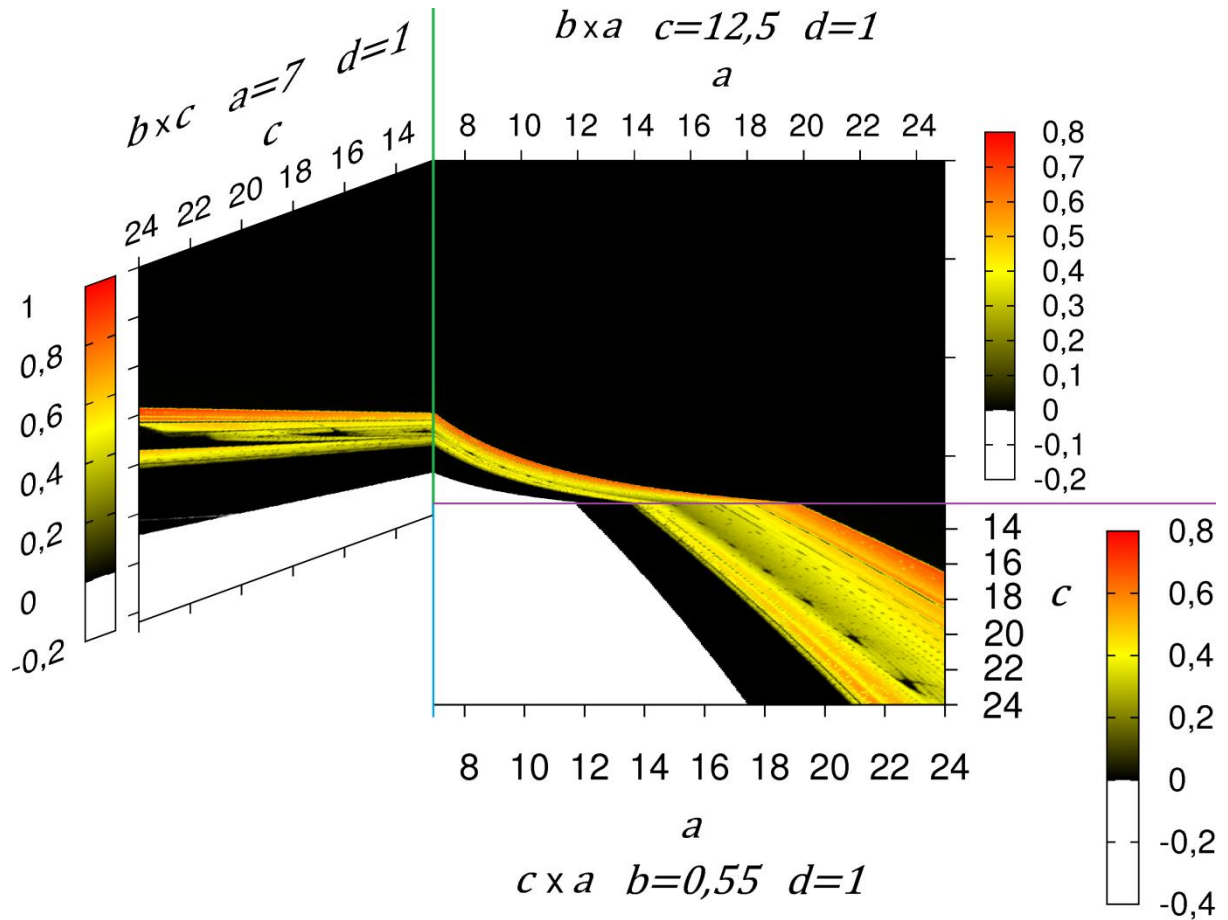
**Figura 28.** Em (a) temos o espaço de parâmetros  $b \times a$  e em (b) temos o espaço de parâmetros de  $b \times c$ . Em ambos temos a presença de uma linha verde onde realizamos os devidos cortes de intersecção dos planos. Como forma final desta etapa, (c) é a construção do espaço de parâmetros  $a \times b \times c$ .

Na figura 29 (a) utilizamos o espaço de parâmetros  $c \times a$  da figura 20(b). Nela realizaremos modificações nas quais envolvem um corte nos valores de  $a = 7$  e  $c = 12,5$ , e ainda um giro no eixo vertical (linha roxa) em  $180^\circ$  de forma a obtermos o espaço de parâmetros (b) da figura 29.



**Figura 29.** Em (a) utilizamos a figura 20(b), nela realizamos um corte em  $a = 7$  e  $c = 12,5$ , além de rotacionarmos sobre a linha do eixo vertical em  $180^\circ$  (linha roxa). Através destas modificações, obtemos o espaço de parâmetros (b).

Agora, podemos encaixar com o espaço de parâmetros da figura 28(c) com a figura 29(b), de modo que obtemos a figura 30. Imagens semelhantes da intersecção de vários espaços de parâmetros já foram relatadas na ref. [19].

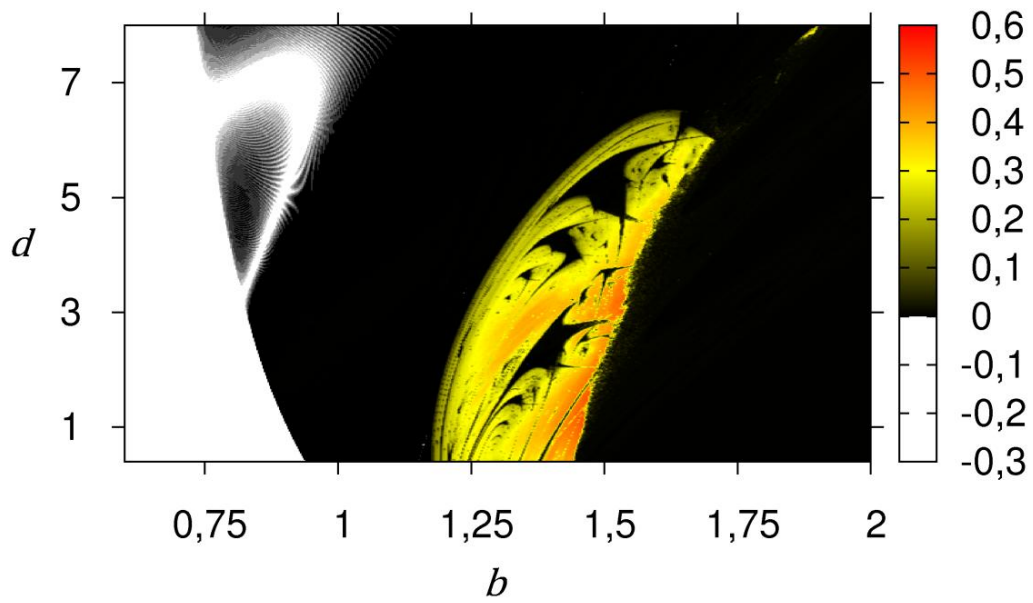


**Figura 30.** Estado final dos cortes em todos os planos, onde podemos ver claramente o encaixe dos valores encontrados em cada plano, obtendo o espaço de parâmetros  $a \times b \times c$ .

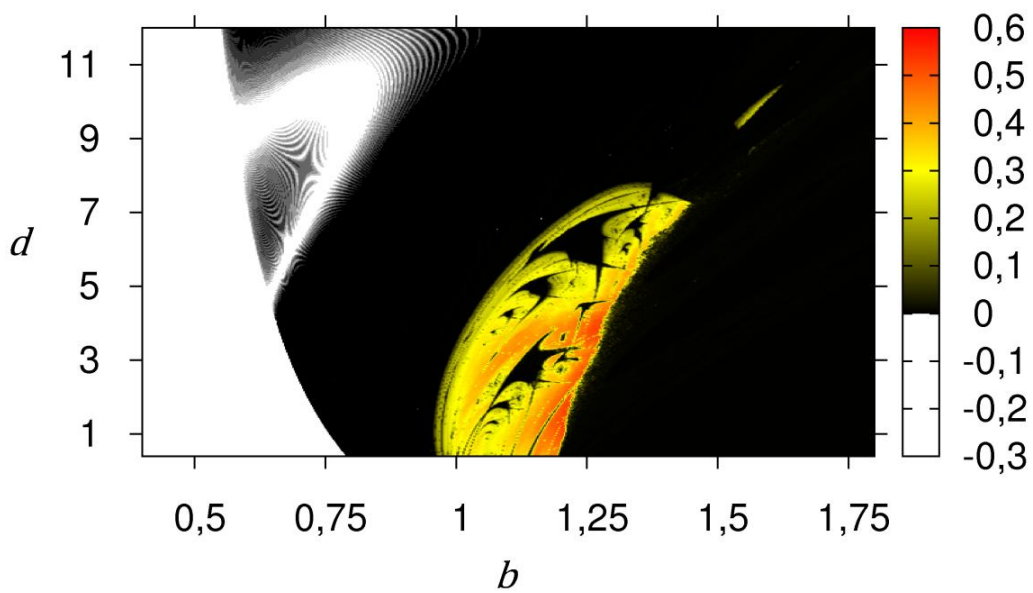


#### 4.6 Resultados de $d \times b$

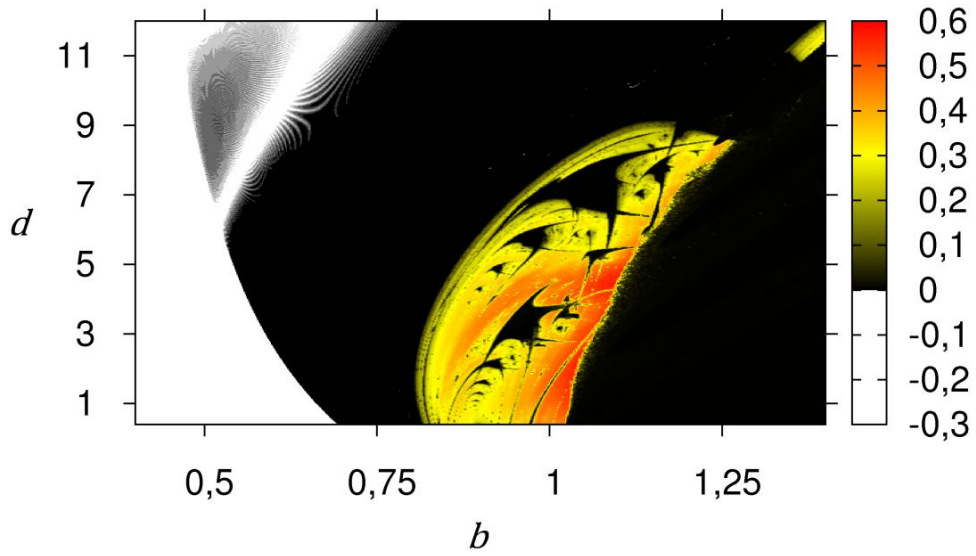
Partindo para os espaços de parâmetros  $d \times b$ , com  $c = 8,5$  e para  $a$  assumindo os valores 5, 6, 7 e 8, temos a seqüência de espaços de parâmetros para o primeiro maior expoente de Lyapunov mostrados nas figuras 31 a 34. Em todas as figuras é impossível não notar uma riqueza de estruturas periódicas existentes em diferentes posições do conjunto de parâmetros  $d \times b$ .



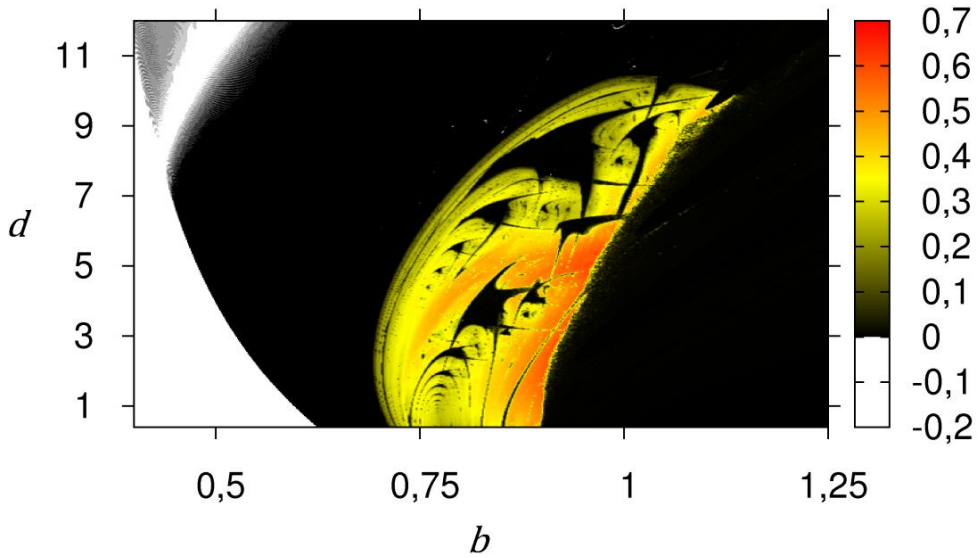
**Figura 31.** Espaço de parâmetros  $d \times b$ , com  $a = 5$  e  $b = 8,5$ .



**Figura 32.** Espaço de parâmetros  $d \times b$ , com  $a = 6$  e  $b = 8,5$ .



**Figura 33.** Espaço de parâmetros  $d \times b$ , com  $a = 7$  e  $b = 8,5$ .

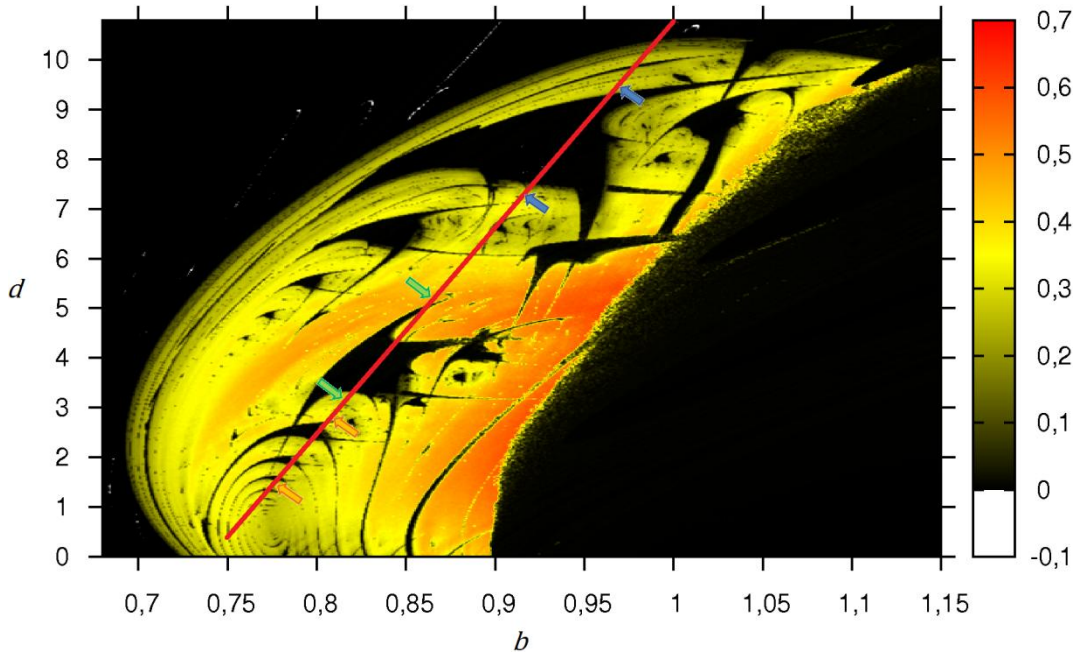


**Figura 34.** Espaço de parâmetros  $d \times b$ , com  $a = 8$  e  $b = 8,5$ .

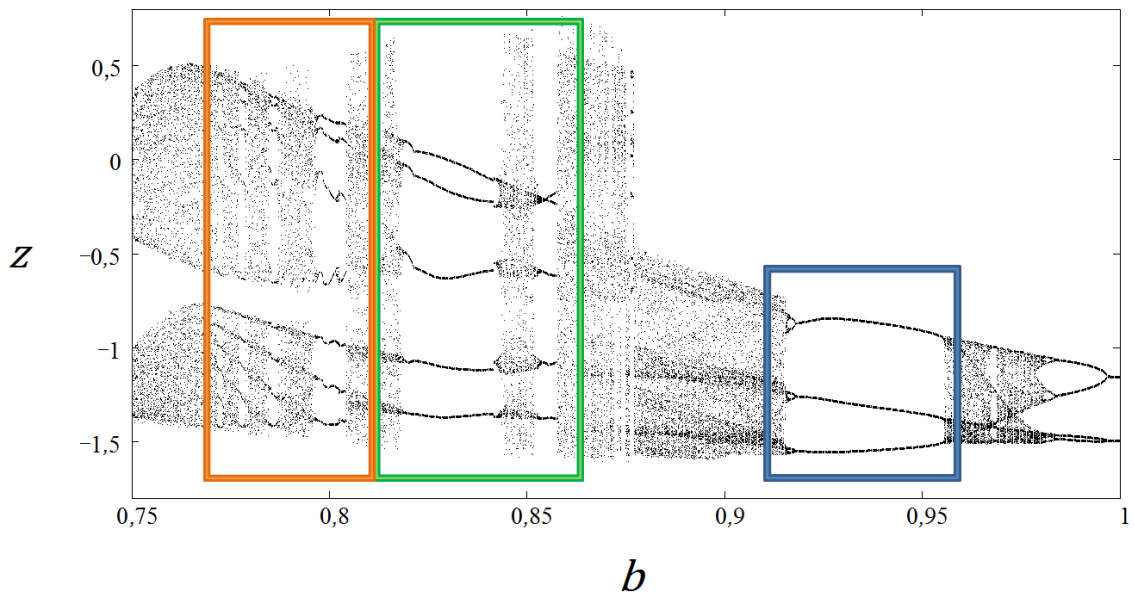
Para realização de um estudo mais detalhado, escolhemos o espaço de parâmetros da figura 34, onde  $a$  assume valor 8. Nela realizamos uma ampliação conforme mostrado na figura 35, mantendo a resolução de  $500 \times 500$ , evidenciando a região de caos e suas estruturas periódicas. A figura 35 será objeto de vários estudos. O primeiro estudo é voltado sobre uma equação da reta (linha vermelha na figura 35) que passa pela maioria das estruturas. A figura 36 mostra o diagrama de bifurcação construído sobre a reta. A reta diagonal crescente possui a seguinte equação

$$d = 43,16 b - 31,97. \quad (7)$$

Nesta realizamos a variação do parâmetro  $b$  no intervalo de 0,75 a 1. O diagrama de bifurcação da figura 36 possui caixas coloridas que são delimitadas pelas setas coloridas presentes na figura 35.

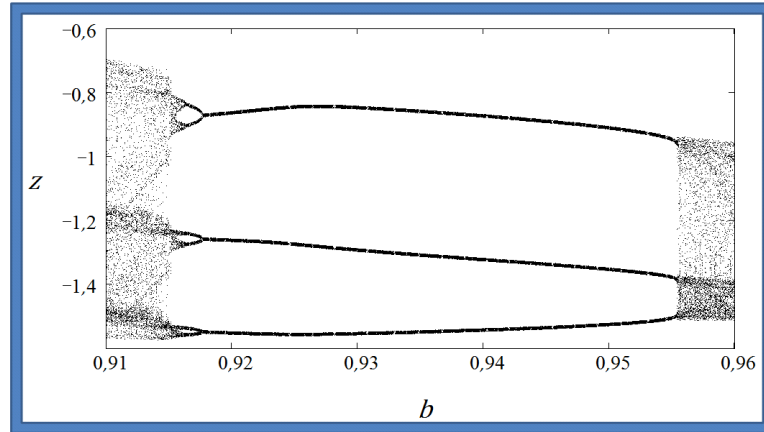


**Figura 35.** Ampliação do espaço de parâmetros da figura 34.

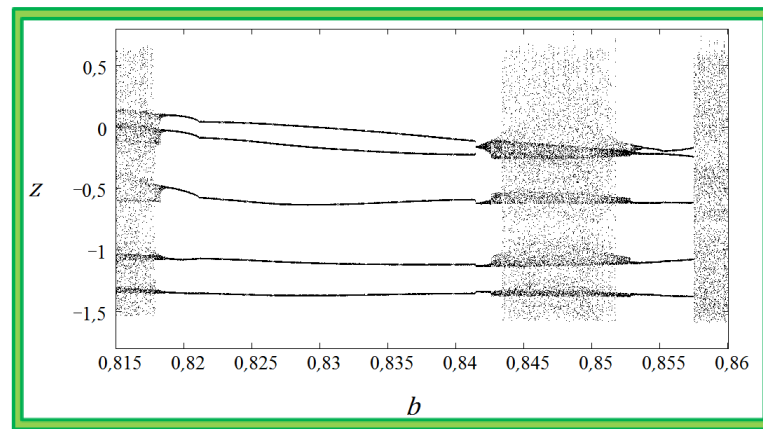


**Figura 36.** Diagrama de bifurcação sobre a reta vermelha da figura 35, no qual utiliza a equação (7). O parâmetro variado é  $b$  e a variável analisada é  $z$ .

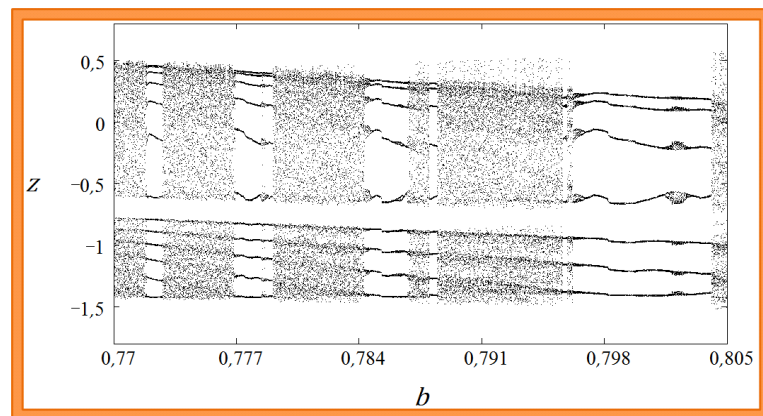
Construímos diagramas de bifurcação relacionados às caixas coloridas presentes na figura 36. Para a região em azul temos a figura 37. Para a região em verde, a figura 38. Por último, temos a região na cor laranja, figura 39.



**Figura 37.** Ampliação da caixa azul presente no diagrama de bifurcação da figura 36.



**Figura 38.** Ampliação da caixa verde presente no diagrama de bifurcação da figura 36.

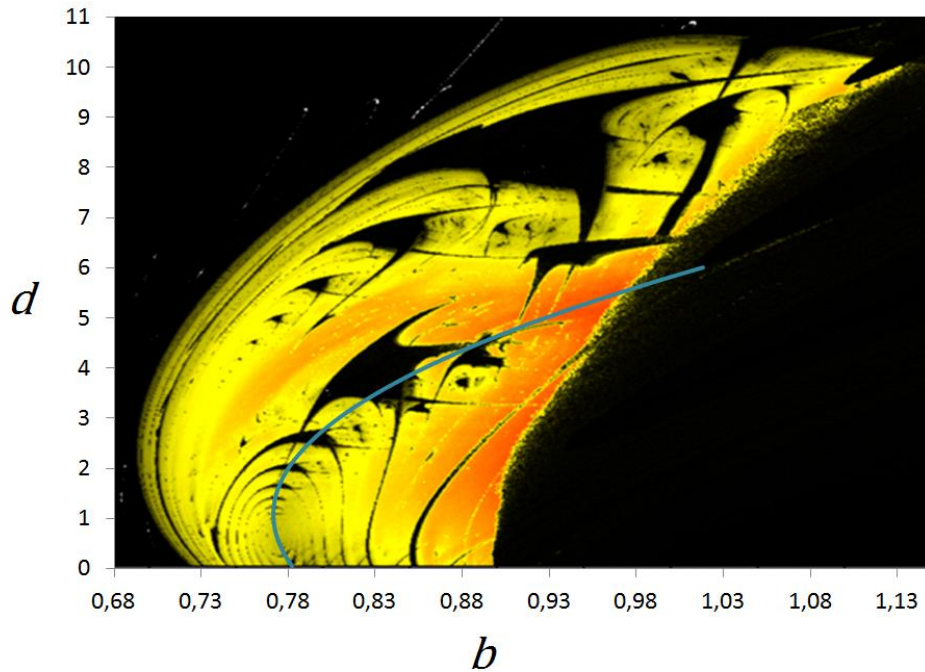


**Figura 39.** Ampliação da caixa laranja presente no diagrama de bifurcação da figura 36.

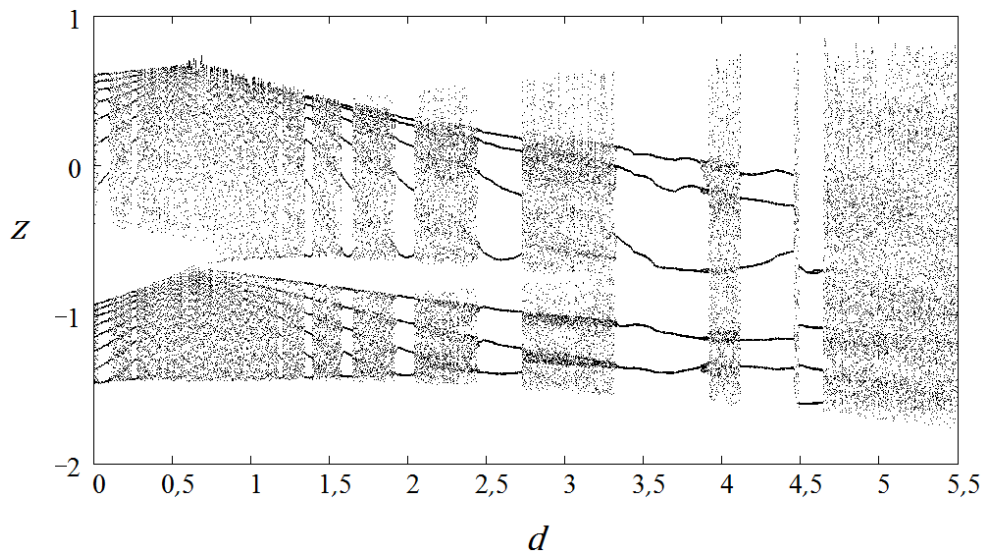
Podemos estudar as rotas de bifurcação em várias direções na figura 35. Por exemplo, utilizando uma equação de 2º grau, mostrada graficamente na figura 40, cuja equação é dada por

$$b = 0,0102 d^2 - 0,022 d + 0,7834. \quad (8)$$

Utilizando a equação (8), construímos um diagrama de bifurcação cujo objetivo é cruzar o maior número de estruturas periódicas presentes no espaço de parâmetro, e principalmente os pequenos camarões presentes na base da região caótica da figura 35. A localização do diagrama de bifurcação é mostrada na figura 41. Esta região da base será o foco de mais estudos ainda nesta dissertação, da qual utilizará esta mesma curva da equação (8).



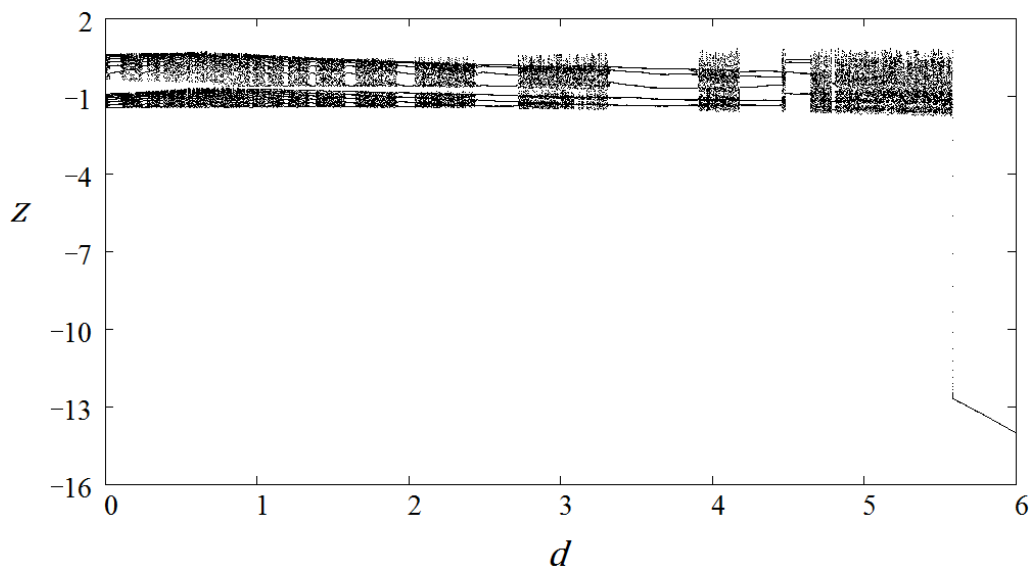
**Figura 40.** Espaço de parâmetros  $d \times b$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov com  $a = 8$  e  $c = 8,5$ , com a curva em azul dada pela equação (8) de 2° grau.



**Figura 41.** Diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 40, no qual utiliza a equação de 2° grau representado pela equação (8). O parâmetro variado é  $d$ , no intervalo de 0 a 5,5. A variável analisada é  $z$ .



Ao aumentarmos o valor do parâmetro  $d$  no diagrama de bifurcação da figura 41, podemos ver que ao final do diagrama de bifurcação apresenta uma transição em seu comportamento, da forma caótica para periódica com período um (comportamento observado à direita na figura 42). No espaço de parâmetros da figura 40 é possível notar que a borda lateral direita, entre a região de caos e periódica, apresenta uma textura granular. Ali, podemos ver que se encontram os valores maiores para o expoente de Lyapunov (pontos em vermelho na região caótica). Esta mudança brusca de um comportamento caótico para um periódico se dá através de uma “crise” [20].



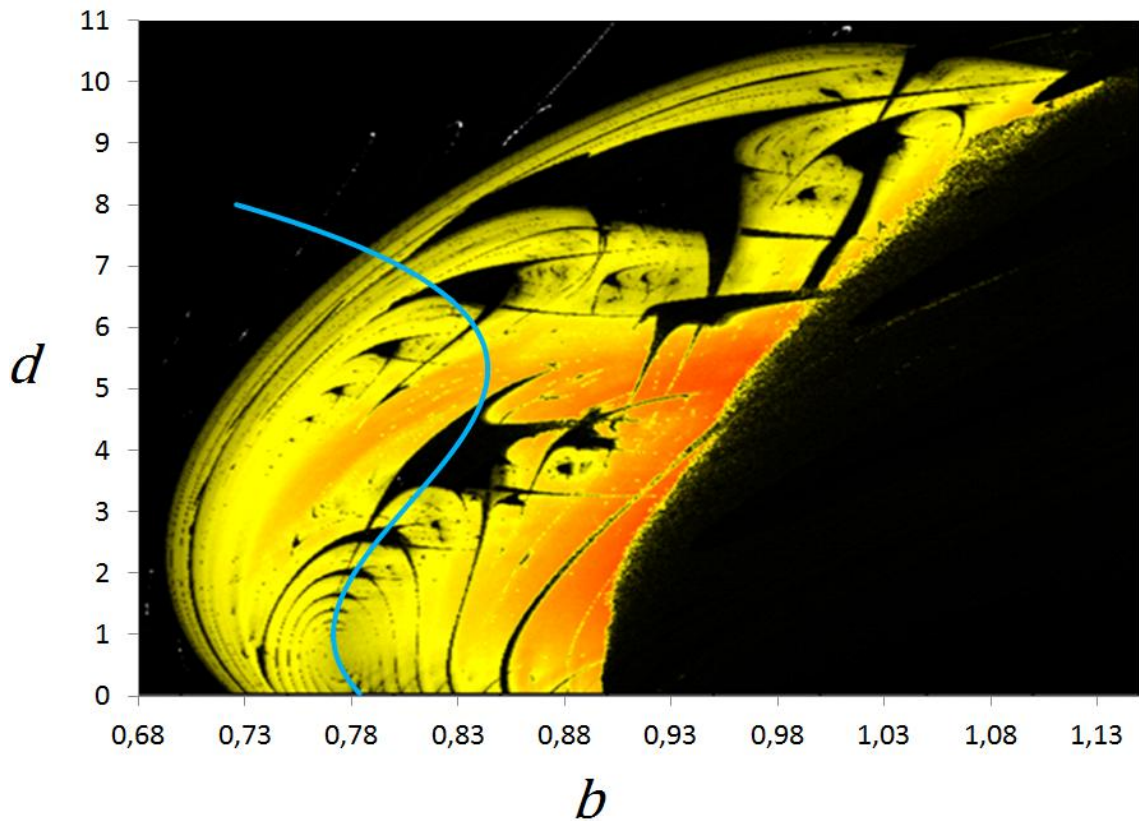
**Figura 42.** Diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 40, no qual utiliza a equação de 2° grau representado pela equação (8). O parâmetro variado é  $d$ , indo de 0 a 6. Agora o valor máximo do parâmetro  $d$  tem o intuito de atingir a região periódica, pois através dele poderemos constatar a transição caótica para periódica, pelo fenômeno conhecido como bifurcação por crise [20].

Agora, utilizando-se de uma equação de 3° grau, curva em azul na figura 43, construímos um diagrama de bifurcação sobre esta curva. A equação é dada por

$$b = -0,0018 d^3 + 0,0171 d^2 - 0,029 d + 0,7851. \quad (9)$$

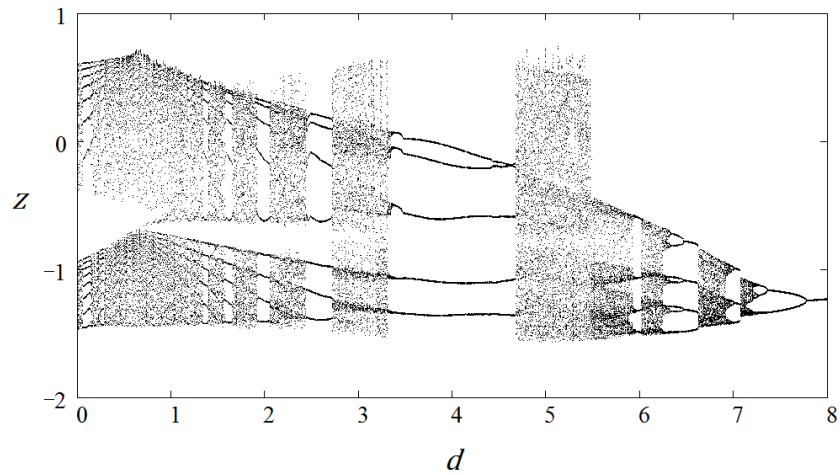
A figura 44 mostra o diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 43. O resultado apresentado sobre esta curva serve como comparação com os resultados anteriores (encontrados pela equação de 2° grau e a reta inclinada), e possibilita a contagem do período de

cada “camarão” por onde ela cruza. A região de fronteira da região caótica com a periódica, pelo lado esquerdo, nos mostra a transição para o caos através do dobramento de período. Fato este contrário ao diagrama da figura 42, no qual discutimos a presença de “bifurcação por crise”. A textura da borda também é diferente, pois, apresenta-se de forma mais definida e sem a presença de granulações.

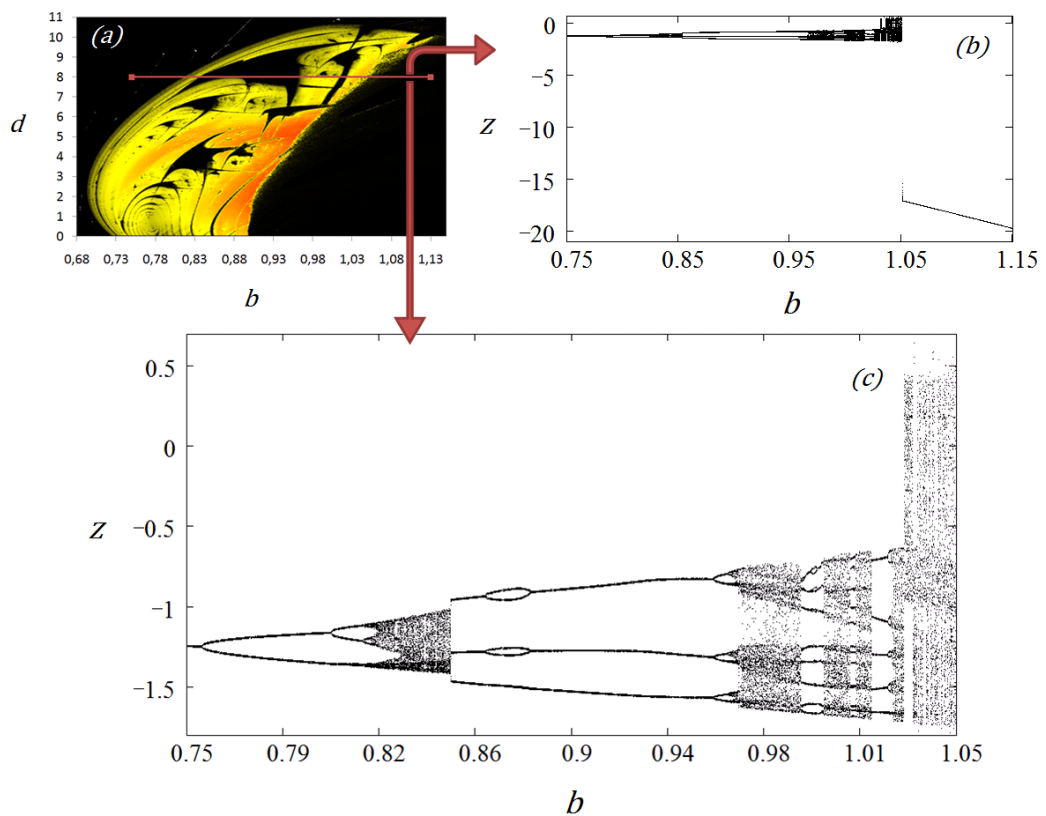


**Figura 43.** Espaço de parâmetros  $d \times b$  para o maior expoente de Lyapunov com  $a = 8$  e  $c = 8,5$ , onde existe uma curva em azul dada pela equação (9) de 3º grau.

Outro diagrama de bifurcação construído foi sobre uma linha na horizontal, que está representada pela linha bordô da figura 45. Este diagrama mostra os dois lados de transição para o caos: tanto do lado esquerdo como do lado direito das regiões periódicas. Nesta linha podemos ver claramente a transição por crise da região periódica para a região caótica pelo lado direito. Porém, realizando o caminho contrário, temos o fato já comentado, a transição periódica para caótica ocorre na forma de duplicação de período. Podemos observar também a formação de bolhas de bifurcação dentro da maior estrutura periódica do espaço de parâmetros.



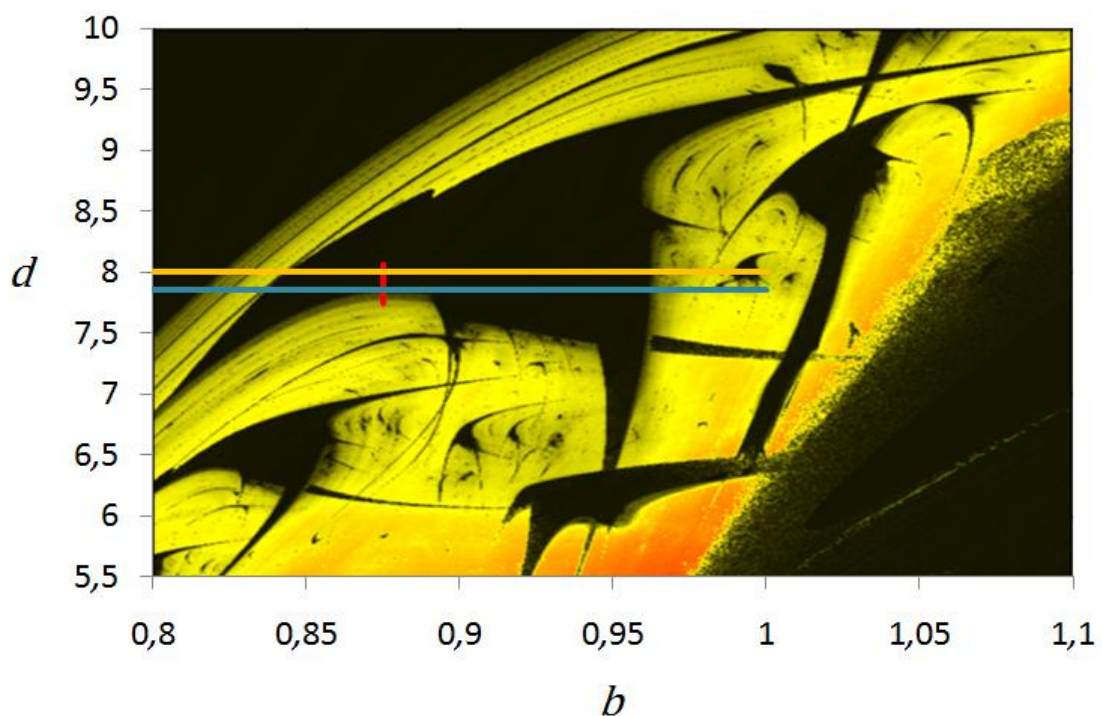
**Figura 44.** Diagrama de bifurcação sobre a linha azul da figura 43, no qual utiliza a equação de 3° grau representado pela equação (9). A variável analisada é  $z$  e o parâmetro variado é  $d$  entre os valores 0 a 8, a fim de atingir a região periódica.



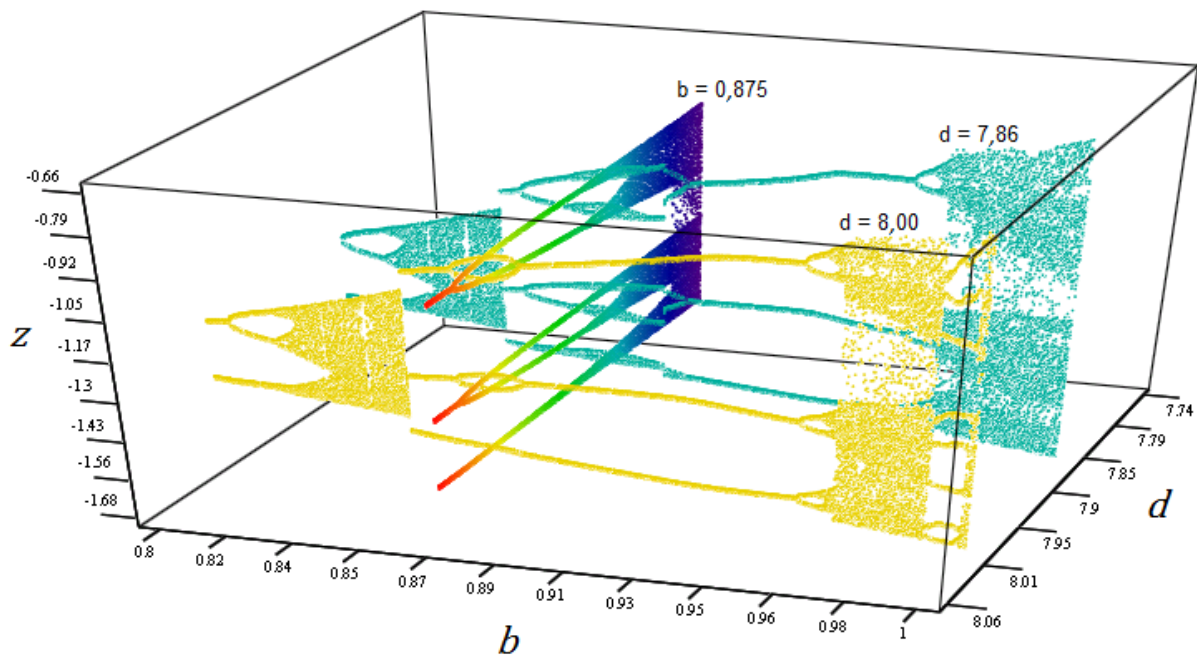
**Figura 45.** Em (a) temos um espaço de parâmetros com a presença de uma linha bordô sobre o qual realizamos um diagrama de bifurcação. Ambos os diagramas são construídos para o valor do parâmetro  $d = 8$ . O diagrama presente em (b) mostra o comportamento ao longo de toda a extensão da linha bordo (parâmetro  $b$  variando de 0,720 a 1,125). Em (c) temos uma redução nos valores do parâmetro  $b$ , entre 0,75 a 1,05. Podemos ver a presença de bolhas de bifurcação neste diagrama. A variável analisada é  $z$ .



Na figura 46 apresentamos a localizações de três diagramas de bifurcação no espaço de parâmetros através de três retas coloridas. Construímos a figura 47 de forma a reunimos os diagramas de bifurcação em uma imagem em 3D. O porquê da realização desta forma de ilustração, vem do objetivo de elucidar e explicar a bolha que se forma nos diagramas de bifurcação das linhas amarela e verde. Esta bolha é proveniente do fato das regiões de valores do parâmetro  $b$  próximos de 0,86 estarem em contato com uma bifurcação por dobramento de período, advinda da borda do “camarão” (diagrama multicolorido da figura 47). Se observarmos a localização da linha amarela, quase que tangenciando a borda de uma região caótica, e a linha verde já tocando a região caótica, podemos observar a evolução do comportamento da bolha. Quanto mais proxima da borda caótica, a bolha torna-se em seu interior também caótica. Nesta borda temos a presença da transição da região interna do “camarão” para a região caótica por dobramento de período (ver diagrama multicolorido mostrando o dobramento de período, presente na figura 47).

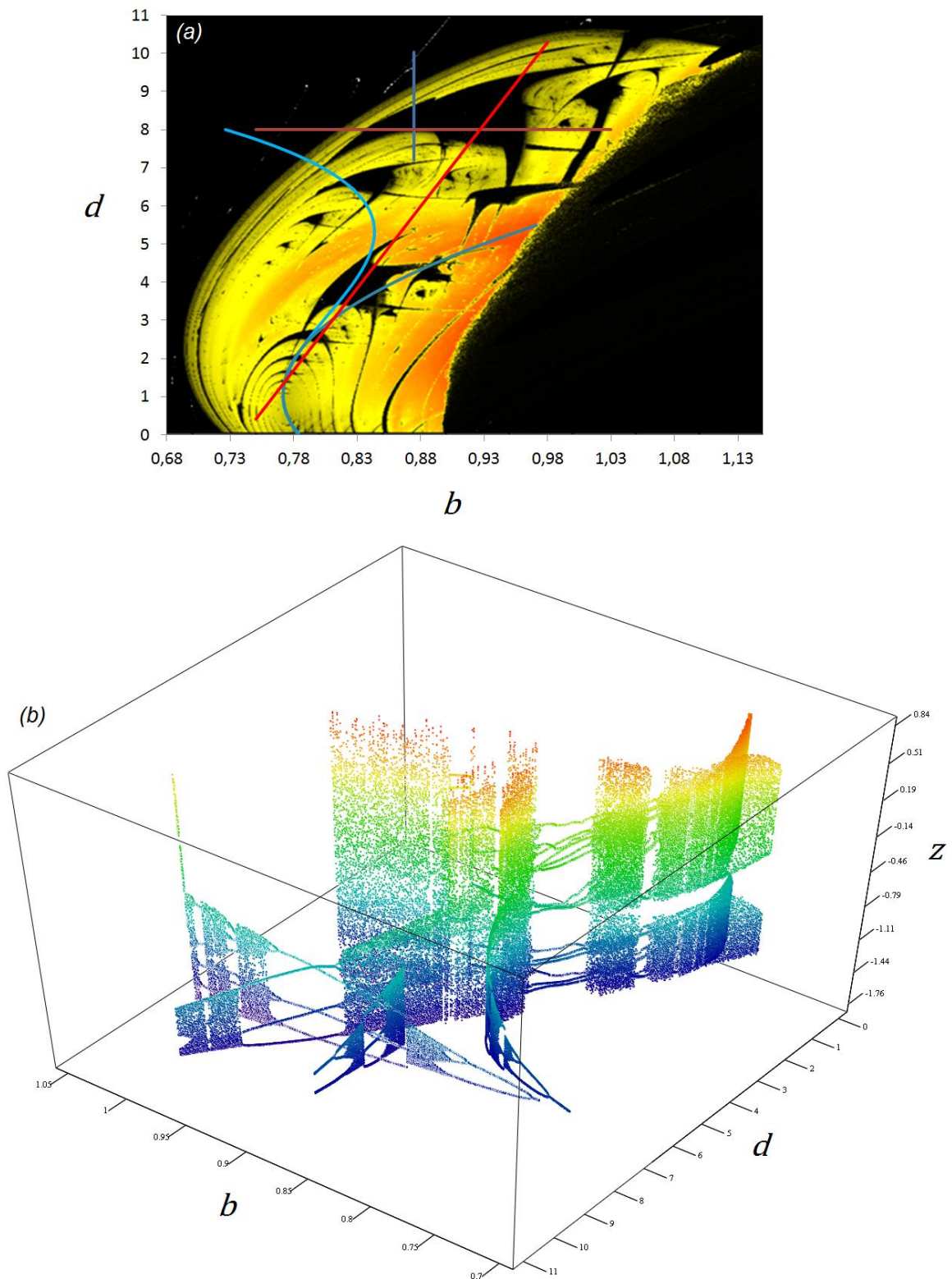


**Figura 46.** Espaço de parâmetros com as três representações de retas sobre as quais construímos diagramas de bifurcação que são apresentados na figura 47. A linha horizontal nas cores amarela e verde, assumem respectivamente os seguintes valores, 8,00 e 7,86 para o parâmetro  $d$ . Em ambas o parâmetro  $b$  varia entre os valores de 0,8 e 1,0. Já a linha em vermelho, no qual se encontra na vertical, o parâmetro  $b$  assume valor fixo em 0,875 e variação de valores entre 7,74 e 8,06 para o parâmetro  $d$ .



**Figura 47.** Visualização 3D dos diagramas de bifurcação apresentados no espectro de parâmetros da figura 46. Nesta representação podemos ver claramente o cruzamento dos diagramas e a formação da bolha de bifurcação dentro da estrutura periódica. Podemos notar que quanto mais próxima da borda caótica, a bola aumenta de tamanho e assume uma formação caótica em seu interior. O diagrama multicolorido e a linha vermelha presente na figura 46, no qual ilustra o dobramento de período do interior da estrutura periódica (valores do parâmetro  $d$  igual a 8,06) para quando se aproxima da região caótica (valores do parâmetro  $d$  próximos a 7,74). A variável analisada foi  $z$ .

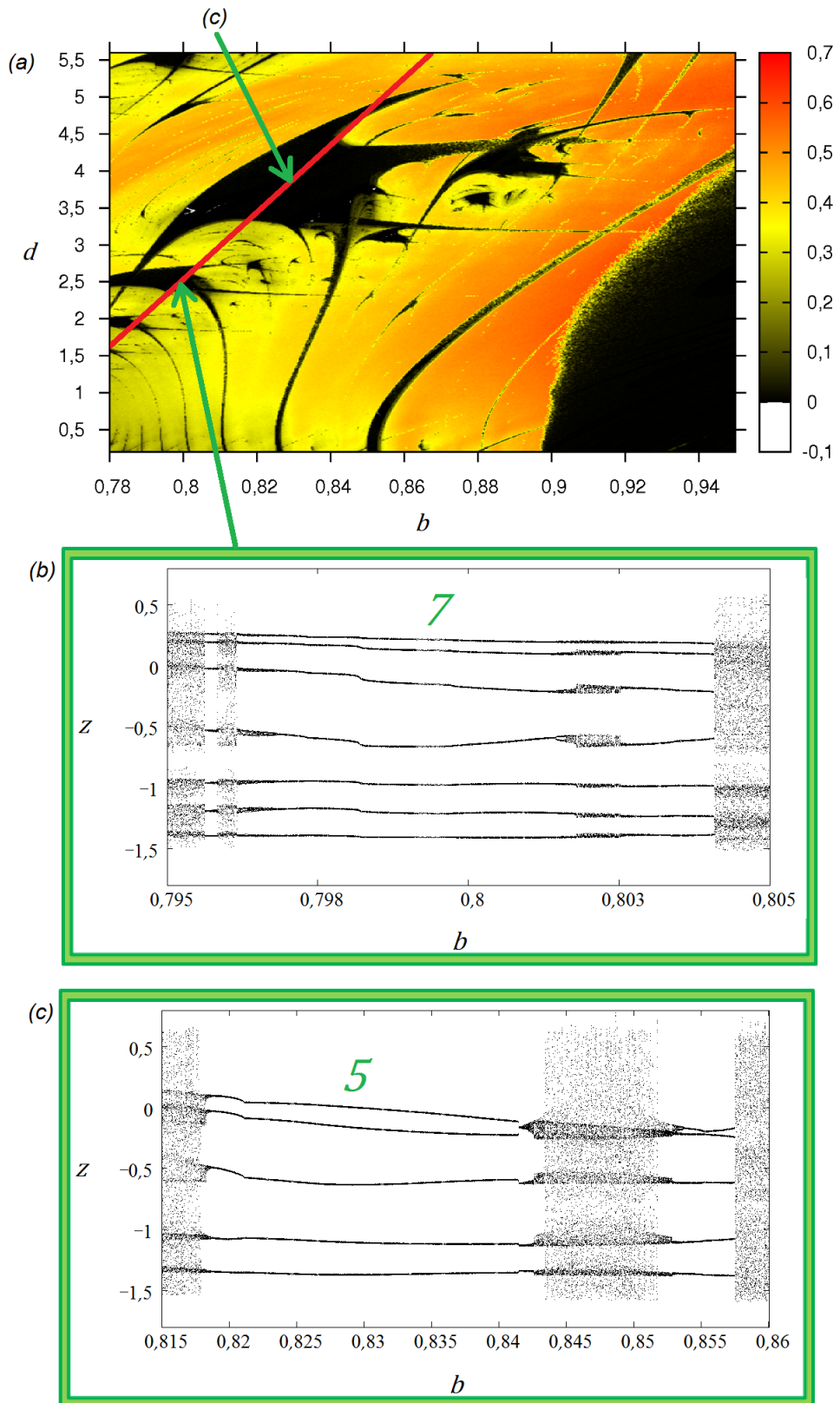
A formação de bolhas de bifurcação dentro de estruturas periódicas já foi reportado na Ref. [7] e em diagramas de bifurcação de modelos de semicondutores [21]. Alguns resultados da Ref. [7] já foram apresentados nesta dissertação, por exemplo a figura 7 do capítulo de revisão de literatura. Outro estudo reportando a evolução de bolhas em diagramas de bifurcação é relatado por Ogorzalek [22]. Neste livro, o autor trabalha com análise de diversos circuitos eletrônicos apresentando comportamento caótico. Justamente em um de seus modelos, podemos ver claramente como ocorre a evolução de uma bolha, através dos varios diagramas de bifurcação nos quais se encontram da pagina 124 a 127. Tal observação, reforça as argumentações realizadas sobre o fato de surgimento de uma bolha com o fato da ocorrência do dobramento de período do diagrama em uma direção perpendicular.



**Figura 48.** Em (a) temos o espaço de parâmetros com as várias representações de curvas e retas sobre as quais construímos diagramas de bifurcação, alguns diagramas já apresentados anteriormente na forma bidimensional. Em (b) temos a representação 3D dos diferentes diagramas de bifurcação sobre as retas e curvas evidenciadas (a). Em ambos os diagramas a variável analisada foi  $z$ .

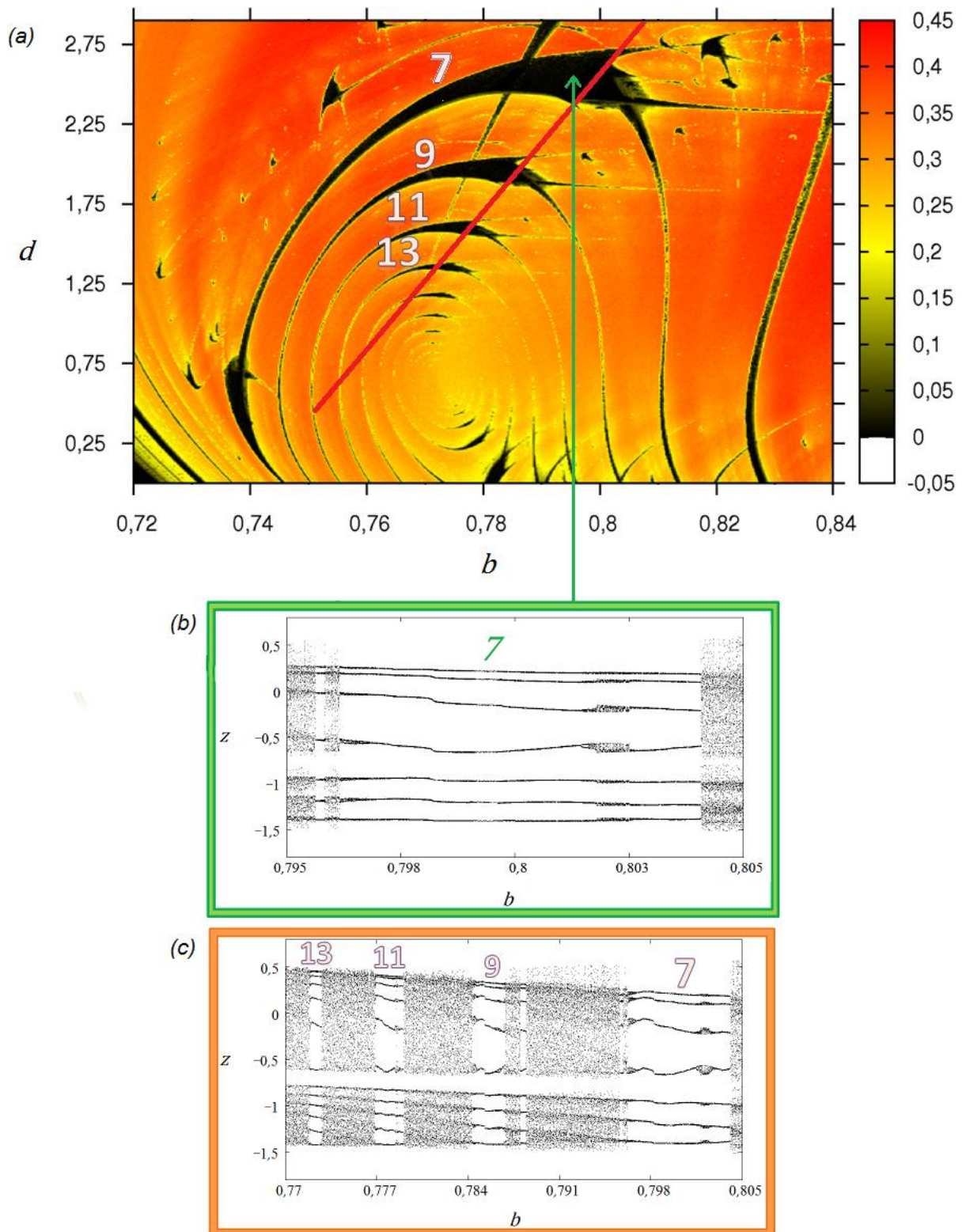
Iremos agora estudar com um pouco mais de detalhes o comportamento dos períodos de algumas estruturas periódicas no espaço de parâmetros da figura 35. Na figura 49 mostramos uma ampliação da figura 35, no qual damos ênfase a duas estruturas, cujos períodos são 5 e 7. Dando continuidade, ampliamos outra região da figura 35, mostrado na figura 50. Nesta figura observamos a formação de uma espiral composta por estruturas periódicas conectadas, e o período dessas estruturas aumenta conforme seguimos a espiral. Os diagramas de bifurcação sobre a figura 50 mostram o comportamento dos períodos dessa espiral. As referências [6,7,13-15] relatam a presença de varias formas de espirais. Diferente da referencia [7] no qual apresenta valores de períodos para estruturas periódicas decaindo seu valor quando ocorre o afastamento a partir do centro da espiral, hora por valores pares em um sentido e hora por valores impares em outro sentido, nosso sistema apresenta valores impares para os dois lados do afastamento da espiral a partir do centro de sua formação. Podemos observar isso na figura 51 em ambos os lados do diagrama de bifurcação tendo como referência o ponto focal  $F$ .

Vale resaltar o motivo da não apresentação de resultados para a região em que  $d$  apresenta valor negativo. Tal fato se deve a dois fatores muito importantes. O primeiro é que o sistema não pode assumir valores negativos para os parâmetros, devido os mesmos representarem componentes eletrônicos reais presentes no circuito eletrônico e não apresentarem real sentido físico para valores negativos. O segundo fato, e mais crucial, é que realizando teste para realização da imagem com valor negativo, o sistema apresentou divergência. Por estes dois fatores, não conseguimos completar o espaço de parâmetros com o espiral dos camarões mesmo como carater ilustrativo.

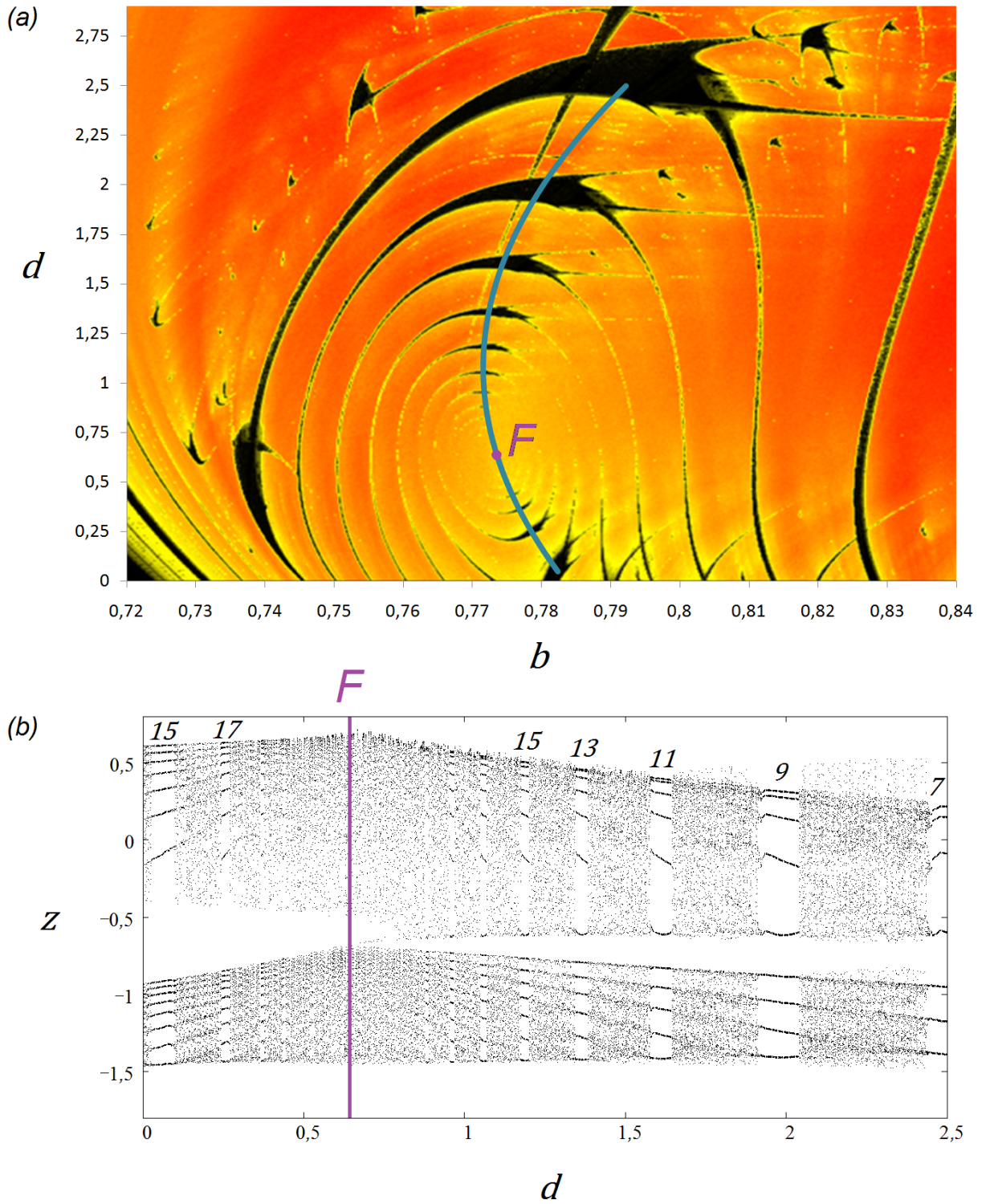


**Figura 49.** (a) Ampliação do espaço de parâmetros da figura 35. (b) e (c) são diagramas de bifurcação mostrando o valor do menor período das duas estruturas periódicas presentes em (a). Os diagramas de bifurcação foram construídos sobre a localização da linha vermelha, a mesma apresentada na figura 35, utilizando a equação (7). A variável analisada foi  $z$ .





**Figura 50.** (a) Ampliação do espaço de parâmetros da figura 35 com diagramas de bifurcação mostrando os valores dos períodos das estruturas um pouco mais ao centro. Os diagramas de bifurcação (b) e (c) foram construídos sobre a linha vermelha da mesma figura 35 no qual utiliza a equação (7). A variável analisada foi  $z$ .



**Figura 51.** (a) temos ampliação do espaço de parâmetros da figura 35 com diagramas de bifurcação mostrando os valores dos maiores períodos das estruturas mais próximas ao centro focal  $F$ . O diagrama de bifurcação em (b) é construído sobre a curva da equação (8) representada em azul em (a). A variável analisada é  $z$ .

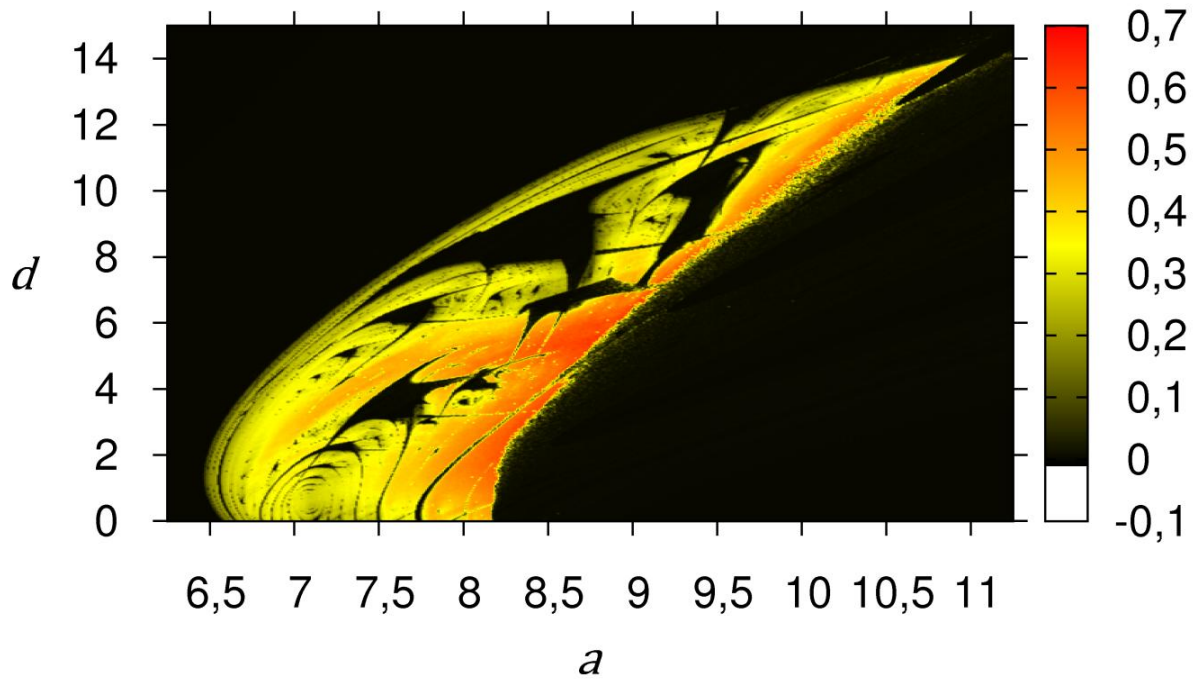
#### 4.7 Resultados de $d \times a$

O espaço de parâmetros  $d \times a$  é mostrado na figura 52. Observamos uma grande similaridade com o espaço de parâmetros da seção anterior,  $d \times b$ , até mesmo na presença de espiral de camarões, na parte de inferior da figura 52.

Realizando uma ampliação da estrutura em espiral da figura 52, mostramos na figura 53 o conjunto de estruturas conectadas em espiral. A curva em azul nesta figura refere-se ao diagrama de bifurcação da figura 54 sobre a qual foi construído. A equação da curva é dada por

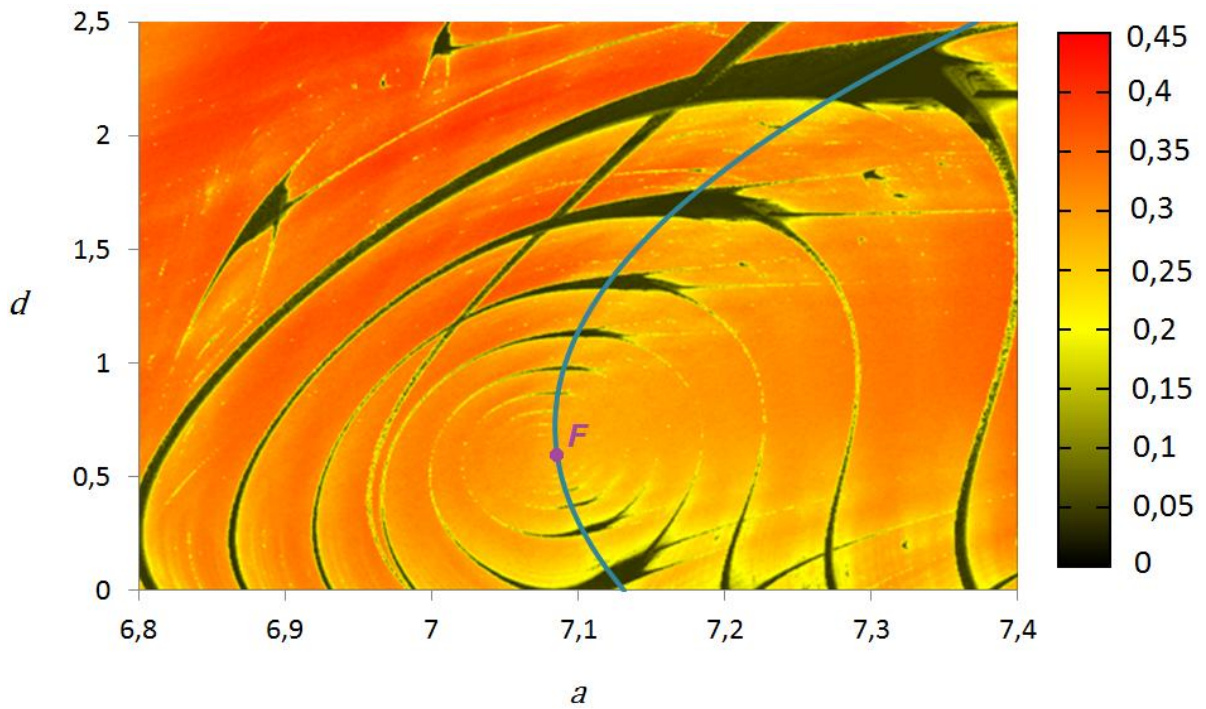
$$a = 0,0908 d^2 - 0,131 d + 7,1314. \quad (10)$$

No diagrama de bifurcação podemos realizar a contagem dos períodos de cada estrutura periódica que compõe a espiral.

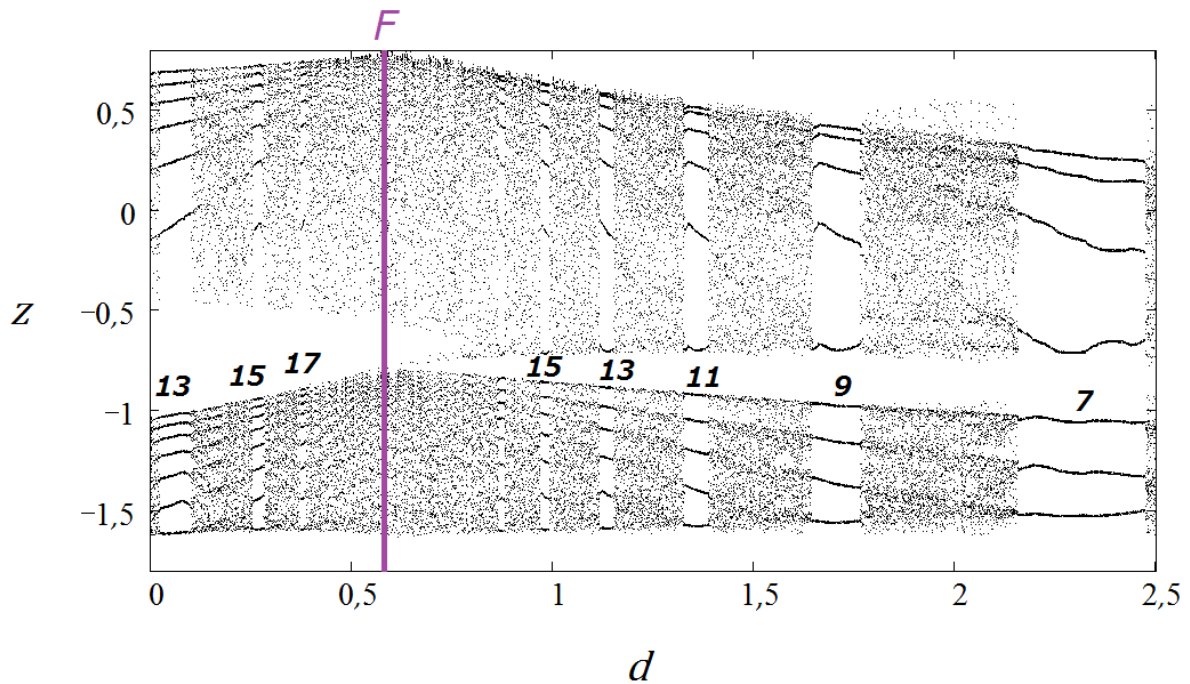


**Figura 52.** Espaço de parâmetros  $d \times a$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov com  $b = 0,88$  e  $c = 8,5$ .





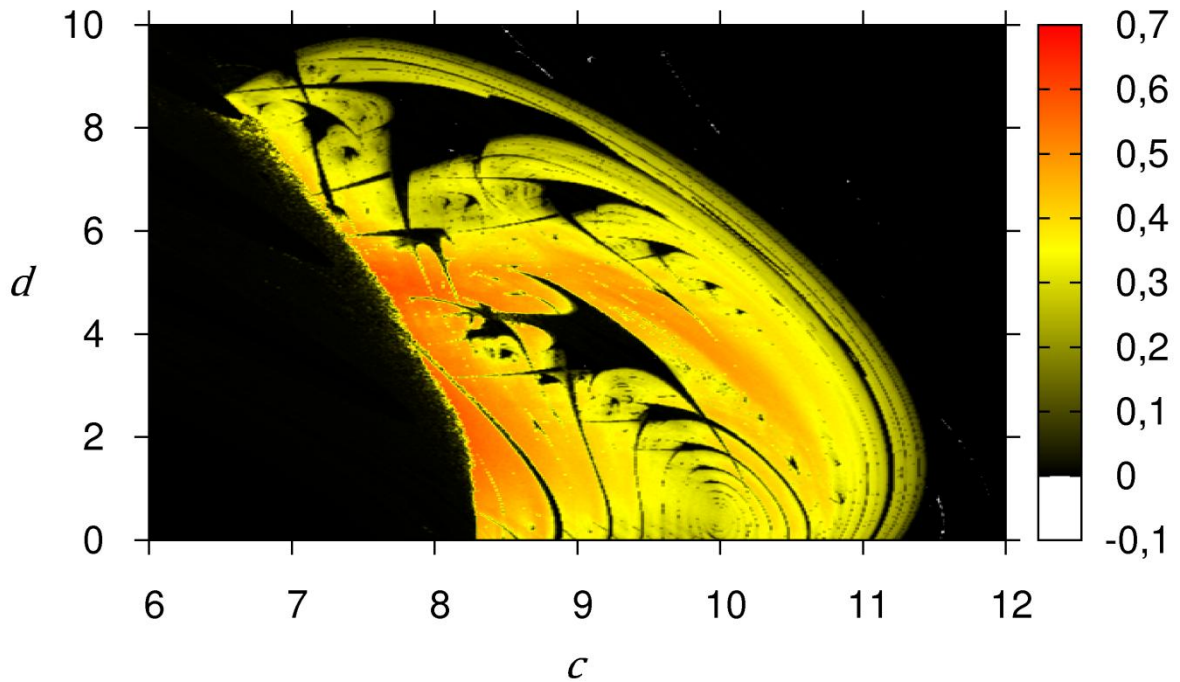
**Figura 53.** Ampliação da espiral da figura 52, com  $b = 0,88$  e  $c = 8,5$ . Em azul temos a curva dada pela equação (10), onde sobre ela construímos o diagrama de bifurcação apresentado na figura 54. O ponto F é o ponto focal estimado.



**Figura 54.** Diagrama de bifurcação construído sobre a curva azul da figura 53, para o parâmetro  $d$  variando de 0 a 2,5. A variável analisada foi  $z$ . Em F temos o ponto focal estimado para o diagrama de bifurcação. Os períodos assumidos por cada região periódica são identificados no diagrama.

#### 4.8 Resultados de $d \times c$

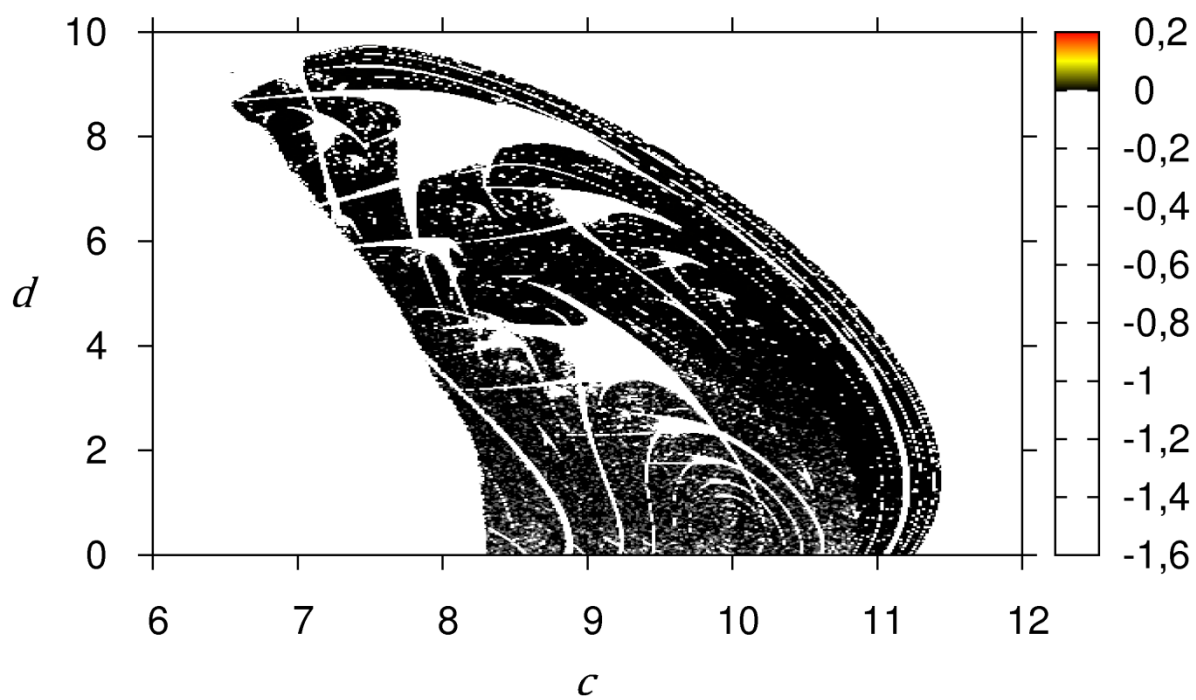
O espaço de parâmetros  $d \times c$  é mostrado na figura 55. Se observarmos as estruturas periódicas presentes, estas possuem tal semelhança com o espaço de parâmetros da seção 4.6,  $d \times b$  (observe a figura 35). Esta similaridade poderia ser comparada a de um espelhamento, se não fosse o fato de duas mudanças: primeiramente a de uma pequena mudança no valor limite do parâmetro  $d$ . A segunda, uma mudança no valor do parâmetro presente no eixo horizontal, para valores mais elevados de  $c$  quando comparados ao mesmo eixo que representa o parâmetro  $b$  na figura 35.



**Figura 55.** Espaço de parâmetros  $d \times c$  para o primeiro maior expoente de Lyapunov com  $a = 8$  e  $b = 0.88$ .

Como se tratando do ultimo espaço de parâmetros que apresenta em um de seus eixos o parâmetro  $d$ , observemos que as espirais surgiram quando variamos este parâmetro.

Na figura 56 temos a representação do segundo maior expoente de Lyapunov para o mesmo espaço de parâmetros  $d \times c$ . Através desta figura, observamos que o sistema não apresenta hipercaos.



**Figura 56.** Espaço de parâmetros  $d \times c$  para o segundo maior expoente de Lyapunov com  $a = 8$  e  $b = 0.88$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

O trabalho aqui apresentado está relacionado com análises utilizando métodos numéricos reportados em diversos artigos científicos nos últimos sete anos. Através dessas análises, ampliamos de forma significativa os resultados já reportados em um sistema de Chua 4D.

A gama de resultados gerados através dos espaços de parâmetros para os expoentes de Lyapunov e diagramas de bifurcação revelou que o sistema apresenta diferentes comportamentos, conforme a variação de seus parâmetros. Para alguns espaços de parâmetros, foi possível observar a presença de cadeias de “camarões” organizando-se hierarquicamente em termos dos períodos e dos tamanhos das estruturas periódicas.

Observamos também a dinâmica das estruturas periódicas no espaço de parâmetros com relação ao parâmetro  $d$ , que controla a dimensão do sistema. Observamos que para  $d$  igual a zero, o sistema pode se comportar como o Chua 3D padrão. Além disso, também observamos o surgimento de uma estrutura periódica após a fragmentação de um semi-anel periódico no espaço de parâmetros com relação aos valores assumidos por  $d$ .

Um fato relevante aqui observado foi a formação de estruturas em forma de espiral no espaço de parâmetros nos quais o parâmetro  $d$  também foi variado. Encontrar regiões que apresentam “camarões” dispostos em formação de espiral foi algo já relatado em outros trabalhos e artigos que estudaram circuitos de Chua. Porém, resultados com tais formações só apareceram em sistemas 3D, e aqui reportamos a existência de tais espirais em um Chua com quatro dimensões, sendo que o parâmetro relacionado com a transição da dimensão tem um papel central na existência dessas espirais.

Outro ponto importante observado foi a existência de diferentes rotas de bifurcação para o caos nas fronteiras entre as regiões caóticas e periódicas, em um mesmo espaço de parâmetros. Observamos, através de diagramas de bifurcação, que a rota pode ocorrer na forma de dobramento de período, bem como por crise, onde a região de caos muda de forma brusca para uma região periódica. Para cada transição, respectivamente, a borda da

fronteira apresenta-se de forma bem definida e a outra com uma textura granular, muito pouco definida.

No decorrer desta pesquisa algo ainda pouco explorado foi uma constante: o surgimento de bolhas de bifurcação dentro de estruturas periódicas, vistas através de diagramas de bifurcação. Com a construção destes diagramas em diferentes direções dentro das estruturas, foi possível visualizar, em uma montagem 3D, a origem dessas bolhas e a interseção delas com o dobramento de período em outras direções. Observamos que o surgimento das bolhas em regiões periódicas é a existência de uma região periódica na borda de uma estrutura e uma outra região periódica mais ao centro dessa estrutura.

A utilização de técnicas conhecidas, acrescidas algumas vezes de novas abordagens, possibilitou o relato dos diversos resultados apresentados nesta pesquisa. Para uma perspectiva futura, estudaremos o comportamento de outros sistemas dinâmicos utilizando estas ferramentas de análise, que se mostraram bem ilustrativas.

# Bibliografia

- [1] Monteiro, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos – 2º Edição**. São Paulo: Livraria da Física, 2002.
- [2] Field – Ferrara, Nelson. **Caos uma Introdução**. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1994.
- [3] Alligood, K. T. **Chaos an Introduction to Dynamical Systems**. New York, 2000.
- [4] GALLAS, J. A. C. [1994] “Dissecting Shrimps: Results For Some One-Dimensional Physical Models,” *Physica A* **202**, 169-223.
- [5] Gaspard, P., Kapral, R. & Nicolis, G. [1984] “Bifurcation Phenomena near Homoclinic Systems: A Two-Parameter Analysis,” *Journal of Statistical Physics* **35**, 697-727.
- [6] Bonatto, C. & Gallas, J. A. C. [2008] “Periodicity Hub and Nested Spirals in the Phase Diagram of a Simple Resistive Circuit,” *Physical Review Letters* **101**, 1-4.
- [7] Albuquerque, H. A. & Rech, P. C. [2012] “Spiral Periodic Structure Inside Chaotic Region In Parameter-Space Of A Chua Circuit,” *International Journal of Circuit Theory And Applications* **40**, 189-194.
- [8] Nascimento, M. A., Gallas, J. A. C. & Varela, H. [2011] “H. Self-Organized Distribution of Periodicity and Chaos in an Electrochemical Oscillator,” *Physical Chemistry Chemical Physics* **13**, 441-446.
- [9] Liu, L., Liu, C., & Zhang, Y. [2009] “Experimental Verification of a Four-Dimensional Chua’s System and its Fractional Order Chaotic Attractors,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19**, 2473-2486.
- [10] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. **Fundamentos de Física 3 – 4º Edição**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996.
- [11] Tipler, P. A. e Mosca, G. **Física para cientistas e engenheiros – Sexta Edição**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2009.
- [12] Wolf, A. Swift, J. B., Swinney, H. L. Vastano, J. A. [1985] “Determining Lyapunov Expoent Diagrams of a 4-Dimensional Chua System”, *Chaos D* **16**, 285-317

- [13] Albuquerque, H. A., Rubinger, R. M. & Rech, P. C. [2008] "Self-Similar Structures in a 2D Parameter-Space of an Inductorless Chua's Circuit," *Physics Letters A* **372**, 4793-4798.
- [14] Gallas, J. A. C. [2010] "The Structure of Infinite Periodic and Chaotic Hub Cascades in Phase Diagrams of Simple Autonomous Flows," *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20**, 197-211.
- [15] Vitolo, R., Glendinning, P. & Gallas, J. A. C. [2011] "Global Structure of Periodicity Hubs in Lyapunov Phase Diagrams of Dissipative Flows," *Physical Review E* **84**, 1-7.
- [16] Stegemann, C., Albuquerque, H. A. & Rech P. C. [2011] "Lyapunov Exponent Diagrams of a 4-Dimensional Chua System," *Chaos* **21**, 1-7.
- [17] Stegemann, C., Albuquerque, H. A. & Rech P. C. [2010] "Some Two-Dimensional Parameter Spaces of a Chua System With Cubic Nonlinearity," *chaos* **20**, 1-5.
- [18] Albuquerque, H. A. & Rech, P. C. [2009] "A Parameter-Space of a Chua System with a Smooth Nonlinearity," *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19**, 1351-1355.
- [19] Barrio, R., & Serrano, S. [2007] "A Three-Parametric Study of the Lorenz Model," *Physica D* **229**, 43-51.
- [20] Grebodi, C., Ott, E., & York, J. A. [1985] "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos," *Physica D* **7**, 181-200.
- [21] Albuquerque, H. A., Silva, R. L., Rubinger, R. M., Oliveira, A. G., Ribeiro, G. M. & Rodrigues, W. N. [2006] "Modeling Chaotic Current Oscillations in Semi-Insulating GaAs with Rate-Equations of Impact Ionization and Field-Enhanced Trapping," *Brazilian Journal of Physics* **36**, 248-251.
- [22] Ogorzalek, Maciej J. **Chaos and Complexity in Nonlinear Electronic Circuits**. Singapura: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1997.