

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF**

**JULIANA VICENTE DOS SANTOS**

**DINÂMICA DE REDES DE OSCILADORES DE FITZHUGH-NAGUMO**

Joinville, SC

2013

**JULIANA VICENTE DOS SANTOS**

**DINÂMICA DE REDES DE OSCILADORES DE FITZHUGH-NAGUMO**

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT.

Orientadores: Prof. Holokx Abreu Albuquerque e Prof. César Manchein

Joinville, SC

2013

## FICHA CATALOGRÁFICA

S237d

Santos, Juliana Vicente dos.

Dinâmica de redes de osciladores de Fitzhugh-Nagumo.

/ Juliana Vicente dos Santos –2013;

88f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2013.

Orientador: Prof. Holokx Abreu Albuquerque; Coorientador: Prof. César Manchein - Joinville-SC

1. FitzHugh-Nagumo. 2. Redes de Neurônios.
3. Diagrama de Bifurcação. 4. Espaço de Parâmetros
5. Diagrama Isoperiódico. I. Albuquerque, Holokx A.
- II. Manchein, César

CDD 531.1

**JULIANA VICENTE DOS SANTOS**

**“ DINÂMICA DE REDES DE OSCILADORES DE FITZHUGH-NAGUMO”**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

Área de concentração em “Dinâmica Não Linear” e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

**Banca Examinadora:**

Dr. Holokx Abreu Albuquerque - CCT/UDESC (Presidente)

Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC

Dr. Ricardo Viana - UFPR

Dr. César Manchein - CCT/UDESC (Suplente)

Joinville, 01/03/2013.

*“Sessenta anos atrás eu sabia  
tudo, hoje sei que nada sei. A  
educação é o descobrimento  
progressivo da nossa ignorância.”*

---

**William James Durant**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu marido, pelo incentivo, amor, confiança e dedicação despendidos a mim durante toda nossa convivência e em especial neste período de dedicação ao mestrado. Também agradeço minha mãe por todo carinho, amor, abnegação e cuidados que contribuíram não apenas a minha formação como cidadã, mas também na minha formação acadêmica. Agradeço a minha irmã pelos momentos de descontração na intenção de me divertir nas horas de cansaço.

Agradeço com carinho ao meu orientador, professor Holokx Abreu Albuquerque, por toda ajuda, pela confiança, compreensão e por todo conhecimento transmitido a mim neste período e principalmente por incentivar minhas ideias, acreditar nelas, o que acabou por culminar na realização desta dissertação. Agradeço da mesma forma ao meu coorientador professor César Manchein, que para mim foi de fundamental importância neste trabalho, que foi feliz na escolha do modelo de estudo, agradeço pelo apoio, conhecimento transmitido e conselhos.

Obrigada a todos os professores que de alguma forma estiveram envolvidos no processo da minha formação na pós-graduação, em especial ao Grupo de Dinâmica Não-Linear.

Devo lembrar dos amigos e colegas do mestrado, que tanto me ajudaram, me receberam com carinho e compartilharam de tantos momentos de bom humor. São tantos os nomes, o clube da Luluzinha e o do Bolinha, muito obrigada a todos, sempre lembrarei de vocês com carinho. Agradeço em especial a amigas Anne e Kelaine, que neste fim de jornada me receberam em suas casas com carinho e prontidão e me apoiaram muito.

E por fim, agradeço a agência financiadora Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa de estudos.

## RESUMO

SANTOS, Juliana Vicente dos. **Dinâmica de redes de osciladores de Fitzhugh-Nagumo**. 2013. 88f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2013.

O modelo de Fitzhugh-Nagumo é composto originalmente por um sistema de duas equações diferenciais não-lineares, que simulam o comportamento de condução do impulso nervoso através da membrana neural. Neste trabalho estudamos numericamente o comportamento dinâmico de redes de neurônios acoplados, modeladas pelas equações de Fitzhugh-Nagumo. Consideramos redes de dois, três e quatro neurônios acoplados unidirecionalmente e bidirecionalmente, para as quais foram construídos espaços de parâmetros dos expoentes de Lyapunov, diagramas isoperíodos e diagramas de bifurcação. Nos espaços de parâmetros e diagramas isoperiódicos investigamos a dinâmica da variação entre a intensidade de acoplamento dos sistemas de neurônios e um outro parâmetros quaisquer do sistema, calculando o espectro de Lyapunov e os máximos locais de uma variável, respectivamente. Os resultados evidenciaram a existência de estruturas auto-similares arranjadas sequencialmente em cascatas de bifurcação por adição de período imersas em regiões caóticas. Internamente, as estruturas periódicas exibem cascatas de bifurcações por dobramento de período. No caso do modelo para dois neurônios acoplados unidirecionalmente existe a formação de estruturas periódicas em camada, arranjadas em cascatas de bifurcação por adição de período. Finalmente mostramos que, para as redes de três e quatro neurônios, existe a ocorrência de regiões de hipercaos na dinâmica dos sistemas.

**Palavras-chave:** Fitzhugh-Nagumo. Redes de neurônios. Diagrama de bifurcação. Espaço de parâmetros. Diagrama isoperiódico.

## ABSTRACT

Santos, Juliana Vicente dos **Dinamic of Fitzhugh-Nagumo oscilator network.** 2013. 88f. Dissertation (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2013.

The Fitzhugh-Nagumo model originally consists of two non-linear differential equations, which simulate the behavior of nerve impulse conduction through the neuronal membrane. In this work, we study the dynamical behavior of coupled neuron networks modeled by equations of Fitzhugh-Nagumo, in the numerical viewpoint. The numerical simulations were made considering networks of two, three and four neurons coupled unidirectionally and bidirectionally, for which parameter spaces, isoperiodic diagrams and bifurcation diagrams were built. In the parameter spaces and isoperiodic diagrams we investigated the dynamics of the variation between coupling strength of the neural systems and any other parameters of system, calculating the Lyapunov exponents and the local maximum of a variable respectively. The results showed the existence of periodic structures, self-organized arranged sequentially in a period-adding bifurcation cascade immersed in chaotic regions. Internally these structures undergo bifurcations by period-doubling. In the case of the two neurons model unidirectionally coupled, we observe the formation of periodic structures arranged in period-adding bifurcation cascade. Finally we show that in some cases the networks of three and four neurons the occurrence of hyperchaos, were observed in the dynamics of the systems.

**Key words:** Fitzhugh-Nagumo. Neural network. Bifurcation diagram. Parameter-spaces. Iso-periodic diagram.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Fisiologia dos Neurônios</b>	<b>13</b>
2.1	Neurônios . . . . .	13
2.2	Potencial da membrana . . . . .	14
2.2.1	Potencial de ação . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modelos de Redes de Neurônios</b>	<b>18</b>
3.1	Modelo de Hodgkin-Huxley . . . . .	18
3.2	Modelo de Hindmarsh-Rose . . . . .	20
3.3	Modelo de Fitzhugh-Nagumo . . . . .	21
3.3.1	Modelo de Fitzhugh-Nagumo para uma rede de neurônios . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Dinâmica Não-Linear e Teoria do Caos</b>	<b>26</b>
4.1	Sistemas dinâmicos . . . . .	26
4.2	Atratores . . . . .	27
4.3	Dependência sensível nas condições iniciais e Expoente de Lyapunov . . . . .	29
4.4	Espaços de parâmetros para o expoente de Lyapunov . . . . .	31
4.5	Diagrama de Bifurcação . . . . .	32
4.6	Diagramas Isoperiódicos . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>35</b>

5.1	Análise dos resultados para uma rede de dois neurônios acoplados . . . . .	37
5.1.1	Acoplamento bidirecional para os parâmetros $a \times \gamma, b \times \gamma$ e $c \times \gamma$ . . .	37
5.1.2	Acoplamento unidirecional para os parâmetros $a \times \gamma, b \times \gamma$ e $c \times \gamma$ . .	46
5.2	Análise dos resultados para uma rede de três neurônios acoplados . . . . .	60
5.2.1	Acoplamento bidirecional para os parâmetros $a \times \gamma, b \times \gamma$ e $c \times \gamma$ . . .	60
5.2.2	Acoplamento unidirecional para os parâmetros $a \times \gamma, b \times \gamma$ e $c \times \gamma$ . .	70
5.3	Análise dos resultados para uma rede de quatro neurônios acoplados . . . . .	76
5.3.1	Acoplamento bidirecional para os parâmetros $a \times \gamma, b \times \gamma$ e $c \times \gamma$ . . .	76
5.3.2	Acoplamento unidirecional para os parâmetros $a \times \gamma, b \times \gamma$ e $c \times \gamma$ . .	79

## 6 Conclusões

82

# Capítulo 1

## Introdução

O sistema nervoso é composto por células denominadas neurônios, responsáveis por receber e interpretar informações que são usadas para manter o funcionamento do nosso corpo. O funcionamento de todo sistema nervoso está baseado em mudanças do potencial elétrico da membrana neural, causadas por estímulos internos ou externos ao organismo. Estas mudanças são codificadas na forma de pulsos elétricos que são processados e propagados à outros neurônios ou para os órgãos que executaram o comando solicitado [1], por exemplo, a contração de um músculo. O cérebro é a parte do sistema nervoso responsável por processar toda a informação, codificando e decodificando os estímulos para executar estas tarefas.

Os esforços dos cientistas em tentar compreender o funcionamento do cérebro ultrapassa as capacidades básicas: de processamento, armazenamento e aprendizagem. Os estudos, também, buscam descobrir o tratamento para as várias doenças neurodegenerativas, na tentativa de recuperação de pessoas que nasceram com lesões ou adquiriram lesões cerebrais, dentre outros quadros médicos.

Como grande parte do funcionamento do cérebro ainda não é conhecido, muitos cientistas se propuseram à criar modelos na tentativa de reproduzir o funcionamento dos neurônios, da forma mais realista possível. Devido a complexidade de se modelar um fenômeno neurológico, surgem aplicações como a neurociência computacional, que combina os métodos computacionais e a modelagem matemática para simular a forma de organização, estrutura e funcionamento do cérebro [2]. Neste cenário, a Dinâmica Não-Linear se faz presente, pela sua relevância histórica, no estudo de fenômenos biológicos e médicos [3] modelados por sistemas de equações

diferenciais e para caracterizar padrões caóticos e/ou regulares nestes sistemas [4].

Um dos primeiros modelos que tentou reproduzir o funcionamento de um neurônio, surgiu por volta de 1952 com os cientistas A.L.Hodgkin e A.F.Huxley. Eles estudaram o fluxo de corrente elétrica através da superfície da membrana da fibra de uma célula nervosa de uma lula gigante [5]. O modelo de Hodgkin-Huxley estuda quantitativamente a excitação de um neurônio, que resulta em um estímulo e sua propagação ao longo da membrana neural [6]. Em 1961 o cientista R. FitzHugh [7] propôs um modelo de equações diferenciais não-lineares, baseado em uma generalização do oscilador de Van der Pol e uma simplificação do modelo de Hodgkin e Huxley [8]. As equações de movimentos propostas por Fitzhugh, apresentam de forma qualitativa o funcionamento dos neurônios, através de uma variável rápida, que representa a voltagem através da membrana neural e uma variável lenta, de recuperação após o estado excitado desta célula [9]. No ano seguinte, 1962, o cientista J. Nagumo criou um circuito, para descrever as equações de Fitzhugh [6]. Desta maneira o sistema de equações se tornou conhecido como Modelo de Fitzhugh-Nagumo. No ano de 1982 J.L. Hindmarsh e R. M. Rose propuseram um modelo de duas variáveis para o potencial de ação da célula neural, com a propriedade de que cada potencial de ação é separado por um intervalo de tempo, ou seja, intervalo entre os disparos de estímulos [10].

Esta dissertação essencialmente visa aplicar as ferramentas da Dinâmica Não-Linear e Teoria do Caos no estudo do comportamento de sistemas de equações que regem o funcionamento de células neurais. O sistema de equações que utilizaremos nesta dissertação será o modelo de osciladores de Fitzhugh-Nagumo acoplados, ou seja, vamos trabalhar com sistemas constituídos de dois ou mais osciladores acoplados. Estes osciladores simulam o funcionamento dos neurônios. Assim, será possível observarmos o comportamento de neurônios conectados (acoplados) a partir de sinapses elétricas e verificar o comportamento destes neurônios quando se restringe a direção do fluxo de íons através das junções sinápticas, ou seja, mudaremos o tipo de acoplamento entre os osciladores. Com isso, o principal objetivo é identificar o comportamento e a periodicidade de estruturas auto-similares imersas em regiões caóticas, para o modelo de osciladores de Fitzhugh-Nagumo.

Realizaremos um estudo do modelo de osciladores de Fitzhugh-Nagumo acoplados, simulando o comportamento dinâmico nos casos de redes para dois, três e quatro neurônios (os-

---

ciladores) acoplados de forma bidirecional e unidirecional. Estas redes resultam em conjuntos de sistemas de quatro, seis e oito equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e não-lineares, respectivamente. O integrador utilizado para resolver tais sistemas foi o Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo. O modelo matemático foi implementado com o uso de linguagens de programação Fortran e C, em ambiente Linux. O tratamento das figuras foi feito com o auxílio dos programas Gnuplot e XMGrace, versões 4.4 e 5.1.22, respectivamente.

O Capítulo 2 apresentará uma revisão teórica sobre a anatomia, função e funcionamento dos neurônios, mostrando como estas células reagem aos estímulos, e os conduzem até um outro neurônio ou até um órgão efector, ou seja, aquele que executará o comando enviado pelo sistema nervoso. No Capítulo 3 serão descritos alguns dos modelos de funcionamento de neurônios, com as principais características e principalmente, será apresentado o modelo de Fitzhugh-Nagumo, utilizado nesta dissertação. Neste tópico, será apresentado o conjunto de equações deste modelo, os parâmetros do sistemas e os tipos de acoplamentos utilizados. No Capítulo 4 faremos resumidamente, uma revisão teórica sobre a Dinâmica Não-Linear, com os principais conceitos utilizados para a análise numérica dos resultados. No Capítulo 5 apresentaremos os resultados numéricos dos conjuntos de equações utilizados para modelar as redes de neurônios. Os estudos estão baseados na construção de espaços de parâmetros para o expoente de Lyapunov, diagramas isoperiódicos e diagramas de bifurcação de um parâmetro do sistema e a intensidade de acoplamento. No Capítulo 6 serão discutidos os resultados, as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Fisiologia dos Neurônios

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos a respeito da estrutura e fisiologia básica dos neurônios. Será mostrado como ocorre um estímulo e como ele é propagado ao longo de uma rede de neurônios.

### 2.1 Neurônios

O sistema nervoso central humano tem aproximadamente 86 bilhões de unidades celulares, chamados de Neurônios. Estas células tem a função de receber e conduzir as informações internas e externas garantindo respostas adequadas a manutenção da homeostase (equilíbrio do corpo) [11]. Anatomicamente, o neurônio se divide em três partes principais: os dendritos, o corpo celular ou soma e os axônios. A Fig. 2.1 ilustra a estrutura de um neurônio.

Os dendritos são responsáveis por receber a informação ou estímulo. O corpo celular ou soma é responsável pela síntese de todas as proteínas neurais. Os axônios são os processadores das informações vindas dos dendritos e corpo celular, com a função de transmitir as informações recebidas para outras células. Os neurônios que constituem o sistema nervoso se ligam por meio de junções da membrana plasmática chamadas de sinapses, especializadas em transmitir sinais [12]. O espaço entre as membranas de duas células neuronais, onde ocorrem as sinapses, chamamos de Fenda Sináptica [13]. Basicamente, estas sinapses ou as transmissões entre dois neurônios podem ser realizadas quimicamente (neurotransmissores) e eletricamente (junções comunicantes).

No Sistema Nervoso Central os corpos celulares dos neurônios estão localizados na parte mais externa do encéfalo formando a substância cinzenta. Seus prolongamentos, os axônios, estão posicionados no centro e formam a substância branca. A cor branca se deve a grande quantidade de mielina presente nos axônios [14]. A mielina ou bainha de mielina funciona como um isolante térmico, protegendo o neurônio e também tem a função de acelerar a velocidade da condução do impulso elétrico.

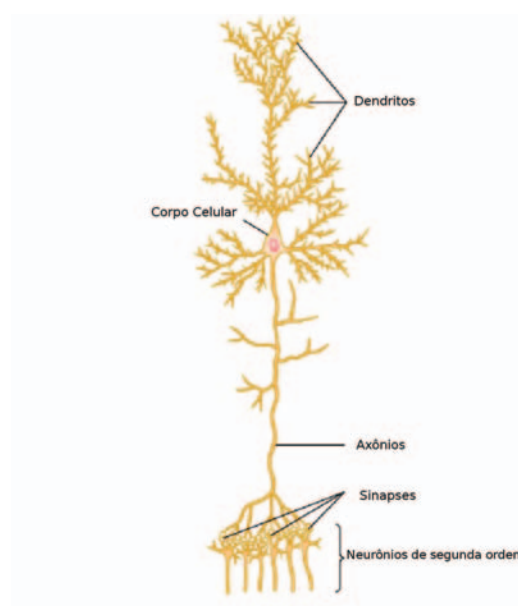


Figura 2.1: Estrutura de um neurônio. Figura adaptada e extraída da Ref. [11].

Basicamente os neurônios tem duas propriedades fundamentais: a irritabilidade (excitabilidade) que é capacidade de responder a estímulos, ou seja, os neurônios modificam sua função como resposta a estímulos do ambiente, e a condutividade que é a transmissão desta informação para o próximo neurônio da rede ou órgão efector (órgão que responde o comando do sistema nervoso). Para entendermos estas duas propriedades devemos estudar o potencial da membrana [12].

## 2.2 Potencial da membrana

A membrana das células do nosso corpo é formada por uma bicamada fosfolipídica que separa o citoplasma da célula do meio extracelular. Essa camada é uma barreira seletiva a en-

trada de certas substâncias. Basicamente, a composição química no interior e no exterior de uma célula é igual, mas em concentrações diferentes. Quando necessário ocorre transporte for difusão das substancias do meio mais concentrado para o meio menos concentrado. Este transporte é realizado por estruturas imersas na membrana celular chamadas de canais iônicos [11].

Os canais iônicos, Fig. 2.2, são proteínas integrais de membrana, proteínas transportadoras. Estas estruturas são responsáveis por filtrar as substâncias que entram ou saem da células. Os canais iônicos transportam tipos específicos de íons. Temos canais catiônicos, revestidos de carga negativa que transportam íons positivos e canais aniônicos, revestidos por carga positiva que transportam íons negativos [11].

Os fluídos de dentro e fora da célula são ricos em íons de sódio  $Na^+$ , potássio  $K^+$ , cálcio  $Ca^{+}$  e cloreto  $Cl^{-}$ . Quando ocorre o transporte destes íons através da membrana das células, ocasiona uma movimentação das cargas positivas e negativas dentro e fora da célula gerando uma mudança de potencial elétrico. Este mecanismo chamamos de Potencial da membrana [11].

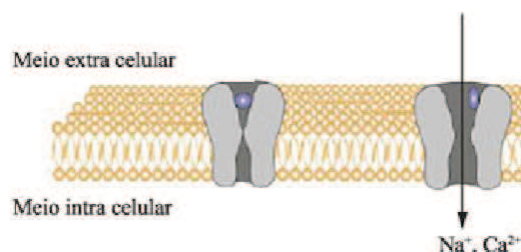


Figura 2.2: Canal de íons da membrana plasmática. Figura adaptada e extraída da Ref. [15].

A princípio as células estão em equilíbrio, ou neutras, para cada íon negativo existe um íon positivo próximo que o neutraliza, formando um Potencial de equilíbrio. Contudo as células neurais e musculares são células auto-excitáveis, ou seja, são especialistas em gerar impulsos eletroquímicos causados pela diferença de potencial, criando e transmitindo sinais de forma rápida. A mudança do neurônio de seu estado de repouso, para o estado em que gera impulso e o transporta, ou seja, uma diferença de tensão negativa, para uma positiva e negativa novamente,



chamamos de Potencial de ação [11].

### 2.2.1 Potencial de ação

Quando uma célula neural se encontra em repouso, a membrana desta célula está polarizada, isto é, o meio intracelular dos neurônios, tem uma grande concentração de substâncias e íons negativos, assim a membrana se encontra eletronegativa. Isto confere ao neurônio um potencial de membrana de aproximadamente  $-70mV$  a  $-90mV$ . Podemos dizer que o neurônio está com Potencial de repouso [12].

Ao se aplicar um estímulo externo (por exemplo o estímulo de luz, uma picada de inseto, um cheiro, um sabor, uma emoção, dentre outros), ocorre uma mudança de função da membrana, que leva à uma diferença de potencial produzindo uma alteração elétrica suficiente para gerar um potencial de ação, ou seja, um impulso elétrico. Este impulso é propagado por toda a célula, conduzindo informação a outras células ou órgãos efetores.

O potencial de ação ocorre quando, após um estímulo externo, canais iônicos se abrem na membrana e transportam íons de sódio  $Na^+$  para dentro da célula, que sofre despolarização, desta forma o potencial da célula se eleva até o valor de  $30mV$ , portanto eletropositivo. Em alguns milissegundos o estímulo é transmitido, Fig. 2.3, os canais de sódio  $Na^+$  se fecham e os de potássio  $K^+$  são acionados, ocorrendo transporte destes íons para fora da célula. A célula se repolariza, e readquire seu potencial de repouso, ou seja, o potencial volta a pelo menos  $-70mV$  [11, 12].

Para que a repolarização ocorra no menor intervalo de tempo, e a célula volte ao repouso, entra em funcionamento a Bomba de sódio  $Na^+$  e potássio  $K^+$ , que é um mecanismo que ajuda o meio intracelular a ficar com um saldo negativo de carga. A Bomba de Sódio  $Na^+$  e Potássio  $K^+$  funciona por transporte ativo com gasto de ATP (Adenosina Trifosfato), pelos canais de transporte, onde retira três íons sódio  $Na^+$  para fora da célula e retorna dois íons potássio  $K^+$  para o interior da célula. Com esta atividade ocorre um gasto de energia celular, pois transporta íons contra o gradiente de concentração do meio menos concentrado para o mais concentrado. Enquanto a célula neural não voltar ao seu estado de repouso (potencial de repouso), ela não transportará um novo estímulo. [11, 12].

Como dispositivo de segurança, o potencial de ação só ocorre se a entrada de sódio  $Na^+$

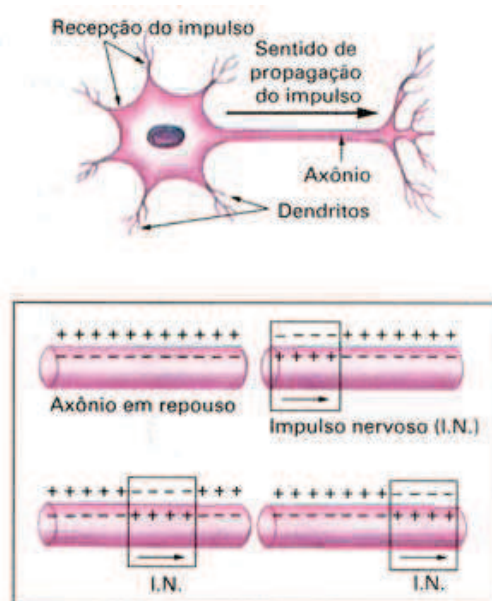


Figura 2.3: Propagação do impulso elétrico. Figura extraída da Ref. [16]

for suficiente para fazer o potencial do interior da célula, subir de  $15mV$  a  $30mV$ , ou seja, sair de  $-70mV$  para pelo menos  $-55mV$ . Caso contrario o estímulo não é conduzido e a ação não ocorre [12]. Este mecanismo é chamado de Limiar de Ação. Se este dispositivo não existisse, qualquer estímulo, por menor que seja, por exemplo o simples toque do ar ambiente em nossa pele, desencadearia um estímulo e poderíamos senti-lo, lei do tudo ou nada.

## Capítulo 3

# Modelos de Redes de Neurônios

Neste Capítulo serão apresentados modelos de sistemas de equações diferenciais a tempo contínuo, que descrevem o fluxo de corrente elétrica pelos neurônios, ou seja, modelam o surgimento dos potenciais de ação e condução de estímulo ao longo das células neurais.

### 3.1 Modelo de Hodgkin-Huxley

Um dos primeiros modelos que tenta reproduzir o funcionamento de neurônios de forma mais realista surgiu por volta de 1952 com os cientistas Alan Hodgkin e Andren Huxley [5]. As equações descrevem como os potenciais de ação surgem e são propagados. Hodgkin e Huxley estudaram o fluxo de corrente elétrica através da superfície da membrana de uma célula nervosa de uma lula gigante. O modelo quantificou a dependência das condutâncias de sódio  $N_a$  e potássio  $K$  com o potencial de membrana e com o tempo. No modelo, o potencial, a corrente e outras variáveis de estado da membrana variam com o tempo e não com a distância da fibra [5].

O modelo de Hodgkin e Huxley é baseado em quatro equações diferenciais ordinárias não lineares independentes do tempo, onde a membrana faz o papel de um capacitor que altera o potencial elétrico de acordo com as correntes elétricas aplicadas [5]. A primeira equação corresponde a Equação de Potencial de Membrana e descreve como a tensão se comporta dentro do neurônio, dependendo das equações das variáveis de ativação do sódio e potássio ( $m$  e  $n$ ) e da variável de inativação do sódio ( $h$ ), que descreve as mudanças da condutividade da membrana e corresponde as outras três equações. A Fig. 3.1 mostra o circuito elétrico proposto por Hodgkin

e Huxley, para descrever o modelo:

$$\begin{aligned}
 c_m \frac{dV}{dt} &= \bar{g}_K n^4 (E_K - V) + \bar{g}_{Na} m^3 h (E_{Na} - V) + \bar{g}_l (E_l - V) + \frac{I_e(t)}{A}, \\
 \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \\
 \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \\
 \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

O sistema (3.1) é um conjunto de equações de um circuito RC (circuito resistor-capacitor), sendo que  $c_m$  é capacitância da membrana,  $V$  é o potencial de membrana,  $I$  é uma corrente externa aplicada. Os termos  $E_{Na}$ ,  $E_K$  e  $E_l$  (*leak* - corrente de fuga) correspondem ao potencial de Nernst dos íons  $Na^+$ ,  $K^+$  e  $l$  que pode ser Cloro  $Cl^-$  ou outro íon. Os termos  $g_{Na}$ ,  $g_K$ ,  $g_l$  são as condutâncias máximas da membrana com relação aos íons. O termo  $n^4$  multiplicando a

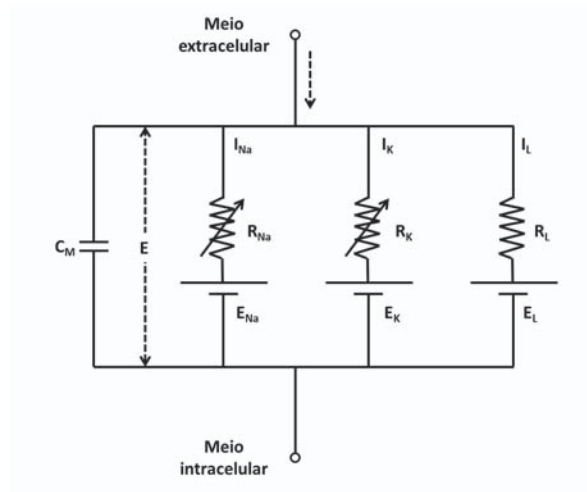


Figura 3.1: Circuito utilizado por Hodgkin-Huxley. Extraído da Ref. [5]

condutância de  $K^+$  e os termos  $m^3$  e  $h$  multiplicando a condutância de  $Na^+$ , representam a dinâmica de abertura e fechamento dos canais iônicos em função do potencial ( $V$ ) e do tempo, respectivamente. Os expoentes 4, 3 e 1 atribuídos aos termos  $n$ ,  $m$  e  $h$ , são ajustes numéricos que Hodgkin e Huxley fizeram devido ao diferente número de "partículas de ativação e inativação" para cada condutância. Os fatores  $\alpha$  e  $\beta$  representam a taxa de transição (estado aberto e fechado) dos canais iônicos, e são dependentes da voltagem. O fator  $\alpha$  é o número de vezes por

segundo que um canal fechado abre, enquanto  $\beta$  é o número de vezes por segundo que um canal aberto fecha.

Com o avanço tecnológico das técnicas de cristalografia de raio X e genética, 40 anos depois que o modelo foi proposto por Hodgkin e Huxley, foi mostrado que esses expoentes realmente representavam a estrutura microscópica dos canais iônicos. Na época em que Hodgkin e Huxley estudaram o modelo não sabiam da existência destes canais. O canal iônico de potássio é uma proteína que tem 4 (razão pelo qual o expoente é 4) subunidades idênticas, que se abrem e fecham de forma independente, sendo  $n$  a probabilidade de uma subunidade se encontrar aberta. Para que este canal iônico conduza, é preciso que todas suas subunidades estejam abertas, o que acontece com probabilidade  $n^4$ . Para o canal iônico de sódio a situação é análoga. Este canal têm 3 subunidades  $m$  de ativação, e uma subunidade  $h$  de inativação [17].

## 3.2 Modelo de Hindmarsh-Rose

Por volta de 1982, J. L. Hindmarsh e R. M. Rose estudaram os neurônios do caracol *Lymnaea stagalis*. Os dois cientistas desenvolveram um modelo para descrição do potencial de ação de neurônios, construído a partir de uma modificação do modelo de Fitzhugh-Nagumo [10]. O modelo é um gerador de pulsos, com a propriedade de que cada sequência de pulsos é separado por um longo intervalo de picos [10].

Hindmarsh e Rose adicionaram ao seu sistema de equações uma corrente de adaptação  $z$ , ou seja, uma corrente lenta que faz gradualmente a membrana da célula neural se hiperpolarizar. O modelo é constituído por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, não-lineares, autônomas e de primeira ordem [10], conforme o conjunto de equações 3.2:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 + I - z, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r(s(x - x_1) - z).\end{aligned}\tag{3.2}$$

A variável  $x(t)$  representa o potencial membrana,  $y(t)$  representa o conjunto de canais rápidos associados ao transporte de  $Na^+$  e  $K^+$  e  $z(t)$  corresponde a uma variável lenta, que

representa a existência de outros canais iônicos, como o canal de  $Ca^{+}$ . O termo  $I$ , representa uma corrente externa e os termos  $a, b, c, r, s$  e  $x_0$  são os parâmetros do sistema.

Na literatura, existem estudos recentes onde se investigam a dinâmica do comportamento do Modelo de Hindmarsh-Rose quadridimensional [18]. Este modelo consiste no conjunto de equações (3.2), onde foi adicionado uma equação relativa à uma variável  $w$ , que representa um processo ainda mais lento, quando a comparamos com a variável  $z$ . O modelo de Hindmarsh-Rose quadridimensional é representado por um conjunto de treze parâmetros e quatro equações diferenciais de primeira ordem, autônomas e não-lineares, dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 + I - z, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y - ew, \\ \dot{z} &= r(s(x - x_1) - z), \\ \dot{w} &= h(-pw + f(y - g)).\end{aligned}\tag{3.3}$$

### 3.3 Modelo de Fitzhugh-Nagumo

Entre os anos de 1952 a 1962 o pesquisador Richard Fitzhugh propôs um modelo que era uma simplificação do modelo mais realístico, as equações matemáticas de Hodgkin e Huxley [7, 19, 20]. O modelo, que pertence a classe de equações de Liénard, a princípio foi intitulado de *The Bonhoeffer-Van der Pol Model*, ou (BVP) de forma abreviada, por causa da semelhança com as equações de Van der Pol para osciladores relaxados e com referência ao artigo de Bonhoeffer de 1948 [21], onde foi descrito um processo eletroquímico com características excitativas similares aos dos neurônios [7]. Depois, em 1962, J.S. Nagumo representou o modelo BVP com um circuito elétrico [6], que é ilustrado na Fig. 3.2.

A letra  $C$  representa a capacitância da membrana neural descrita por um capacitor, um dispositivo de voltagem que representa a corrente rápida passando por um diodo túnel responsável pelo elemento não-linear das equações,  $R$  um resistor,  $L$  um indutor e  $E$  uma bateria para a corrente recuperada [22].

Desta forma R. Fitzhugh e J.S. Nagumo representaram de forma qualitativa as características de condução do impulso nervoso na célula neural, a dinâmica do potencial de membrana,

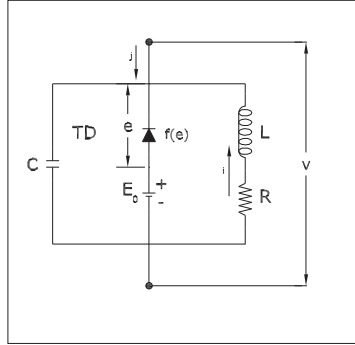


Figura 3.2: Circuito utilizado por J.S. Nagumo. Extraído e adaptado da Ref. [5]

a força de recuperação da membrana excitável e a existência de um limiar de ação. As equações diferenciais não-lineares (3.4) que descrevem o modelo intitulado por Modelo de Fitzhugh-Nagumo [7] são:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= c(w + u - \frac{1}{3}u^3 + J(t)), \\ \frac{dw}{dt} &= -1/c(u - a + bw). \end{aligned} \quad (3.4)$$

A variável  $u$  corresponde à voltagem através da membrana celular, representa a excitabilidade do sistema e esta relacionada com os íons de  $N_a$ ; a variável  $w$  representa a recuperação do repouso pela membrana logo após um Potencial de Ação, representa o conjunto de forças que leva o sistema ao estado de equilíbrio. A função  $J(t)$  representa um estímulo externo e os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , devem ser sempre maiores que *zero*, foram introduzidos nas equações para ajustar o comportamento das equações aos resultados experimentais e não tem nenhum sentido fisiológico significativo.

No artigo publicado por Fitzhugh [7], propõem que os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  deveriam ter as condições apresentadas em 3.5:

$$1 - \frac{2b}{3} \leq a \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1, \quad b \leq c^2. \quad (3.5)$$

### 3.3.1 Modelo de Fitzhugh-Nagumo para uma rede de neurônios

A observação de modelos dinâmicos de uma rede de neurônios idênticos, pertencentes à uma mesma região anatômica, pode ser realizada com o modelo de Fitzhugh-Nagumo, onde focaremos a análise no acoplamento entre estas unidades. A ligação entre os neurônios corresponde à um acoplamento elétrico, onde é inserido um novo parâmetro no sistema de equações (3.4), que relaciona as variáveis rápidas  $u(t)$ , que correspondem a voltagem através da membrana. Assim, este acoplamento funciona como uma conexão entre dois ou mais neurônios, o fluxo de íons entre as fendas sinápticas.

Neste trabalho serão estudados dois tipos de acoplamento para redes de 2, 3 e 4 neurônios. O acoplamento bidirecional, que é aquele onde todos os elementos da rede interagem, conectados em regime (*todos com todos*). Os  $n$  neurônios estão totalmente conectados à todos os outros neurônios sujeitos a mesma intensidade de acoplamento [23, 24].

Assim, o caso bidirecional será um sistema de  $2n$  equações diferenciais não-lineares, sendo que as variáveis  $u$  e  $w$  do sistema de equações (3.4) foram modificadas para  $x$  e  $y$ , o parâmetro que corresponde à intensidade de acoplamento será chamado de  $\gamma$ , a função  $J(t)$  será considerada nula e o índice  $i = 1, \dots, n$  corresponde ao número de neurônios à serem acoplados [25]. O sistema de equações (3.6) representa o conjunto de  $n$  neurônios de Fitzhugh-Nagumo eletricamente acoplados [8]:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= c(y_i + x_i - \frac{1}{3}x_i^3) + \gamma \sum_{j=1}^n (x_i - x_j), \\ \frac{dy_i}{dt} &= -1/c(x_i - a + by_i).\end{aligned}\tag{3.6}$$

A Fig. 3.3, mostra as redes de 2, 3 e 4 neurônios com acoplamento bidirecional.

No acoplamento unidirecional, um sistema ou neste caso um neurônio, ao qual denominamos mestre, atua sobre os demais sistemas acoplados que são denominados escravos (*sistema mestre-escravo*). O sistema escravo pode prever a trajetória do sistema mestre e não influencia a dinâmica do sistema mestre [24, 26]. Considerando este acoplamento, um neurônio será o mestre e o outro o escravo, sequencialmente. No caso unidirecional, o modelo de Fitzhugh-Nagumo



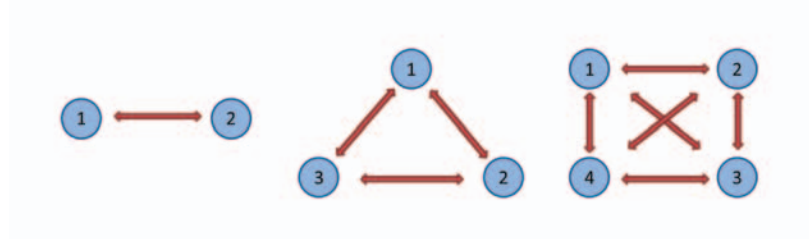


Figura 3.3: Tipos de redes de 2, 3 e 4 neurônios com acoplamento bidirecional.

para as redes de 2, 3 e 4 neurônios podem ser descritos pelos grupos equações diferenciais (3.7), (3.8) e (3.9) respectivamente.

Para  $n = 2$  teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= c(y_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -1/c(x_1 - a + by_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= c(y_2 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -1/c(x_2 - a + by_2).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para  $n = 3$  teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= c(y_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -1/c(x_1 - a + by_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= c(y_2 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3) + \gamma(x_2 - x_3), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -1/c(x_2 - a + by_2), \\
 \frac{dx_3}{dt} &= c(y_3 + x_3 - \frac{1}{3}x_3^3) + \gamma(x_3 - x_1), \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -1/c(x_3 - a + by_3).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para  $n = 4$  teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= c(y_1 + x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) + \gamma(x_1 - x_2) + \gamma(x_1 - x_3), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -1/c(x_1 - a + by_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= c(y_2 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3) + \gamma(x_2 - x_3) + \gamma(x_2 - x_4), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -1/c(x_2 - a + by_2), \\
 \frac{dx_3}{dt} &= c(y_3 + x_3 - \frac{1}{3}x_3^3) + \gamma(x_3 - x_4), \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -1/c(x_3 - a + by_3), \\
 \frac{dx_4}{dt} &= c(y_4 + x_4 - \frac{1}{3}x_4^3) + \gamma(x_4 - x_1), \\
 \frac{dy_4}{dt} &= -1/c(x_4 - a + by_4).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A Fig. 3.4, mostra as redes de 2, 3 e 4 neurônios com acoplamento unidirecional, respectivamente.

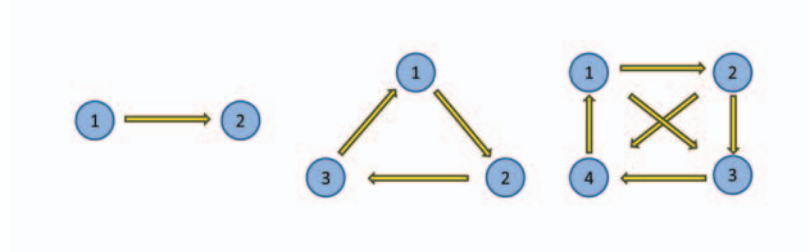


Figura 3.4: Tipos de redes de 2, 3 e 4 neurônios com acoplamento unidirecional.

## Capítulo 4

# Dinâmica Não-Linear e Teoria do Caos

Neste capítulo, faremos uma breve descrição sobre os principais tópicos da dinâmica não-linear, as ferramentas utilizadas para a análise da dinâmica do modelo de Fitzhugh-Nagumo. Assim, serão apresentadas as definições de atratores, dependência sensível nas condições iniciais, expoente de Lyapunov, espaço de parâmetro para o expoente de Lyapunov, diagrama isoperiódico e diagrama de bifurcação.

### 4.1 Sistemas dinâmicos

Os fenômenos não-lineares, responsáveis pelo comportamento dos eventos naturais, estão presentes em tudo que nos cerca. A teoria dos sistemas não-lineares é uma ferramenta para descrever os fenômenos naturais de forma realística [27].

Na evolução temporal dos sistemas dinâmicos não-lineares, as variáveis e suas derivadas descrevem as propriedades dinâmicas do sistema [28]. Geralmente, as equações destes sistemas apresentam parâmetros que sob qualquer variação, podem iniciar uma mudança de comportamento, levando muitas vezes à uma evolução com complexidade elevada. Quando a evolução temporal do sistema nos leva a um comportamento aperiódico (caos determinístico), podemos denominá-lo como um sistema Caótico [29]. Portanto, o caos ocorre quando um sistema determinístico (sistema de equações não-lineares) apresenta um comportamento aperiódico e tem dependência sensível as condições iniciais.

Um sistema dinâmico determinístico é composto por um conjunto de estados possíveis,

aos quais são regidos por uma regra ou lei que determina o estado atual do sistema, exclusivamente em termos do estado passado [30]. Podemos classificar estes sistemas como autônomos ou não autônomos, ou seja, o sistema pode ter o tempo como uma variável implícita ou explícita, respectivamente [31].

A variável tempo dos sistemas dinâmicos pode ter uma variação contínua. Um exemplo de um sistema dinâmico contínuo, ou fluxo, é um sistema de  $N$  equações diferenciais ordinárias, autônomo que pode ser representado pela equações

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= F_1(x^1, x^2, \dots, x^N), \\ \frac{dx^2}{dt} &= F_2(x^1, x^2, \dots, x^N), \\ &\vdots \\ \frac{dx^N}{dt} &= F_N(x^1, x^2, \dots, x^N).\end{aligned}$$

## 4.2 Atratores

O comportamento de um sistema dinâmico pode ser observado pelos seus estados em relação ao tempo. Em um espaço  $N$ -dimensional, um estado pode ser representado por  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , gerado pelas variáveis do sistema e é chamado de espaço de estados. A dimensão do espaço de estados é o número de equações diferenciais de primeira ordem das variáveis que são necessárias para descrever o sistema. Depois de uma evolução temporal do sistema, o caminho descrito por ele no espaço de estados chamamos de trajetória [31].

Os sistemas físicos podem ser classificados como dissipativos e conservativos. Sistemas dissipativos são aqueles em que há perda de energia. Já sistemas conservativos a energia inicial é exatamente igual a energia final do sistema, ou seja, não perdem energia [29, 31]. No caso de sistemas dissipativos o volume no espaço de estados é contraído.

As trajetórias dos sistemas dissipativos convergem para uma região limitada do espaço de estados, atrator, que é um conjunto de pontos, Fig. 4.1. Assim o espaço de estados mostrará a estrutura dos atratores e das bacias de atração [29].

Em sistemas dinâmicos bidimensionais autônomos de tempo contínuo, podemos ter dois tipos de atratores:

- Ponto de equilíbrio: é um valor no espaço de estado, cujo comportamento do sistema converge e independente do tempo;
- Atrator periódico ou ciclo limite: é um conjunto de valores, na qual o comportamento do sistema converge, ou seja, exibe um comportamento periódico (movimento regular).

No caso de sistemas tridimensionais, ou de maior dimensão, ainda temos:

- Atrator toroidal (Torus): é aquele que exibe um comportamento quase-periódico, com 2 frequências fundamentais independentes. O comportamento quase-periódico sugere uma situação dinâmica na qual órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, entretanto, sem apresentar dependência sensível nas condições iniciais;
- Atrator caótico: é um atrator no qual apresenta a dependência sensível nas condições iniciais, ou seja, a distância entre duas trajetórias cresce exponencialmente, mas o atrator ocupa um volume finito no espaço de estado.

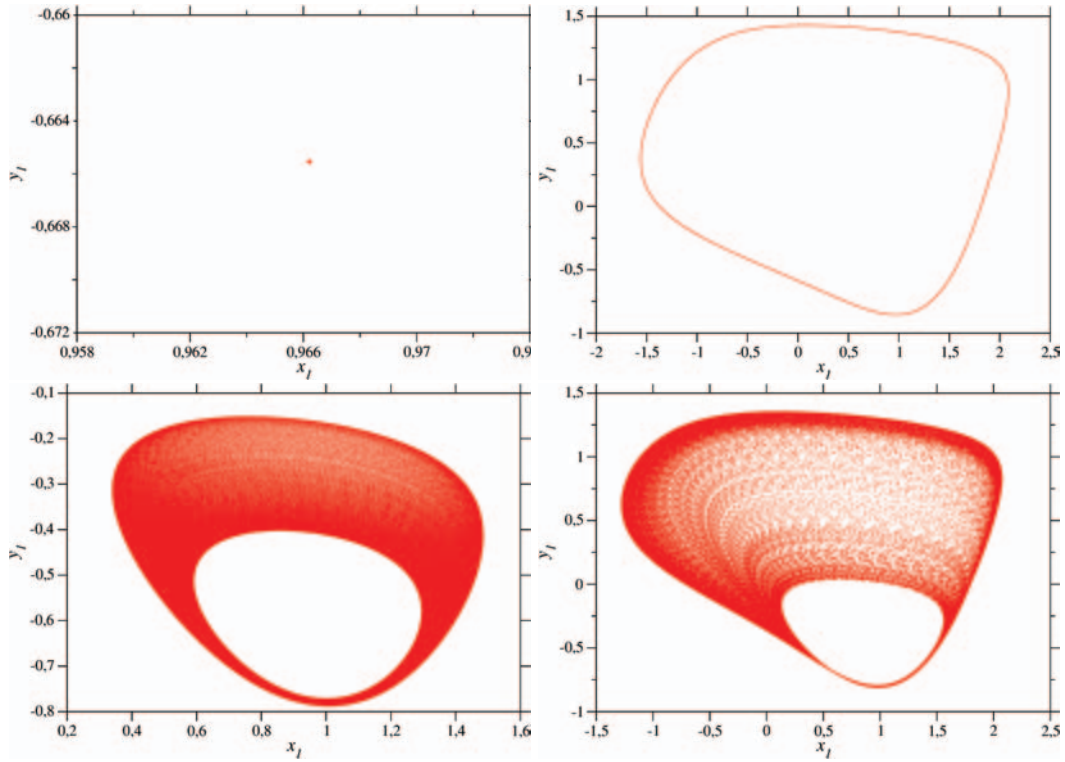


Figura 4.1: Projeções dos atratores para o caso do Modelo de Fitzhugh-Nagumo de dois neurônios. (a) Atrator ponto de equilíbrio, com  $(a, b, c, \gamma) = (0, 658764; 0, 4; 2, 0; 0, 0552852)$ . (b) Atrator periódico, com  $(a, b, c, \gamma) = (0, 64; 0, 391; 2, 0; 0, 047845)$ . (c) Atrator torus-2 com  $(a, b, c, \gamma) = (0, 7; 0, 391; 2, 0; 0, 05)$ . (d) Atrator caótico, com  $(a, b, c, \gamma) = (0, 658764; 0, 4; 2, 0; 0, 0552852)$ . As condições iniciais para todos os casos foram  $x_1 = -0, 1$ ,  $y_1 = 0, 5$ ,  $x_2 = 0, 1$  e  $y_2 = -0, 3$ .

### 4.3 Dependência sensível nas condições iniciais e Expoente de Lyapunov

A dinâmica de atratores caóticos pode ocorrer em sistemas dissipativos autônomos e não-autônomos que tenham uma força motora externa periódica ou não [29]. A dependência sensível nas condições iniciais destes atratores pode resultar em desvios das condições, em consequência da imprecisão das medidas e ruídos experimentais. Eles apresentam então comportamento caótico.

A característica do caos é a divergência exponencial das trajetórias próximas. Para medir esta taxa de afastamento entre trajetórias são utilizados os expoentes de Lyapunov [28]. Desta forma, considerando um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias, no qual existe uma

hiper-esfera de condições iniciais centrada num ponto  $x(\vec{t}_0)$ . Este sistema é descrito em termos da  $N$ -ésima dimensão, sendo  $N = (1, 2, \dots, n)$ , e com passar do tempo o volume de condições iniciais se deforma. Assumindo que o raio inicial  $d_j(t_0)$  tem variação exponencial com o tempo, de forma que o seu valor corresponda a  $d_j(t)$ , temos que

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (4.1)$$

que pode ser escrita como

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}, \quad (4.2)$$

onde os  $\lambda_j$  são chamados de expoentes de Lyapunov.

O cálculo do expoente de Lyapunov é realizado numericamente, exceto quando a derivada de cada equação do sistema é constante e o expoente pode ser calculado algebricamente. Para sistemas dissipativos o somatório dos expoentes de Lyapunov é sempre menor que *zero*.

Considerando uma solução periódica, a distância entre duas condições inicialmente próximas se mantém constante, em média, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares ao atrator periódico, há contração de volume no espaço de estados. Portanto, os expoentes de Lyapunov correspondentes a essas direções são negativos.

O comportamento caótico é caracterizado pelo afastamento exponencial das trajetórias próximas. Nesse caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica dependência sensível nas condições iniciais e a existência de um atrator caótico, no espaço de estado.

Em sistemas  $N$ -dimensionais existem  $N$  expoentes de Lyapunov, que quando colocados em ordem crescente  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ , podemos associa-los aos seguintes tipos de atratores:

1. atrator ponto de equilíbrio: tem-se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$  já que o volume de condições iniciais deve se contrair ao longo das  $N$  direções do espaço de estado, a fim de que a trajetória convirja para o ponto;
2. atrator periódico ou ciclo-limite: tem-se necessariamente um expoente nulo e os outros

negativos,  $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$  sendo que o expoente nulo corresponde à direção ao longo da órbita fechada;

3. atrator torus: tem-se pelo menos dois expoentes nulos e os outros negativos,  $\lambda_1, \lambda_2 = 0, \lambda_3, \dots, \lambda_N < 0$  de modo que a trajetória atratora situa-se sobre uma superfície.;
4. atrator caótico: tem-se  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3, \dots, \lambda_N < 0$ . Um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensível nas condições iniciais, o próximo deve ser nulo, e o restante deve ser negativo. Nos casos onde temos dois expoentes positivos, existe a ocorrência de regiões de hipercaos.

## 4.4 Espaços de parâmetros para o expoente de Lyapunov

Os espaços de parâmetros podem ser utilizados para analisar o comportamento de um sistema observando a variação de magnitude de uma dada quantidade, com as variações de dois parâmetros do sistema. Assim, o espaço de parâmetros é um gráfico tridimensional, que representa bidimensionalmente a variação de quaisquer dois parâmetros que compõem o sistema, associados a um terceiro valor de interesse, por exemplo, a magnitude do maior expoente de Lyapunov. Graficamente, é utilizado um gradiente de cores para representar o valor do expoente de Lyapunov com relação ao par de parâmetros escolhidos. Esta variação de cores associadas ao maior expoente de Lyapunov, permite verificar onde sistema apresenta regiões de pontos fixos, regiões periódicas e regiões caóticas. A Fig. 4.2 mostra a visão geral do comportamento dinâmico usando o espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov do sistemas de Fitzhugh-Nagumo para dois neurônios acoplados bidirecionalmente.



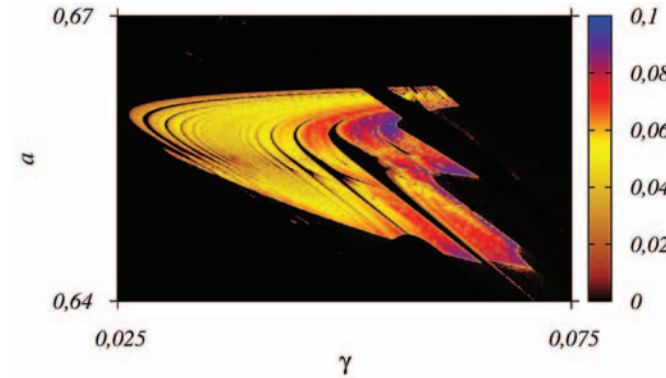


Figura 4.2: Espaço de parâmetros do sistema (3.6) para  $0,642 \leq a \leq 0,67$ ,  $0,025 \leq \gamma \leq 0,075$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$ . O gradiente de cores estão relacionados aos diferentes valores do maior expoente de Lyapunov.

## 4.5 Diagrama de Bifurcação

O comportamento dos sistemas dinâmicos depende dos valores atribuídos aos seus parâmetros, onde o sistema é uma função de um parâmetro de controle. Quando ocorre a variação deste parâmetro de controle, conseqüentemente ocorre a alteração da estabilidade estrutural do sistema, ou seja, dependendo da perturbação imposta, a estrutura do espaço de estado pode ou não mudar. Esta mudança estrutural de periódica para caótica ou de caótica para periódica é chamado de bifurcação [29].

As bifurcações possibilitam o estudo do comportamento do sistema, sua periodicidade e os tipo de rotas para o caos. O Diagrama de Bifurcação é um instrumento para estudar qual o resultado pode ocasionar no sistema, a variação de um parâmetro de controle por uma de suas variáveis. Representa de forma gráfica, o comportamento qualitativo das órbitas, onde são plotados os pontos de máximo para os quais o sistema converge após determinado tempo com a variação do parâmetro. Estes pontos podem ser pontos fixos, órbitas periódicas ou qualquer conjunto de pontos para o qual o sistema é atraído [29]. A Fig. 4.3 apresenta um exemplo de diagrama de bifurcação do sistema (3.6).

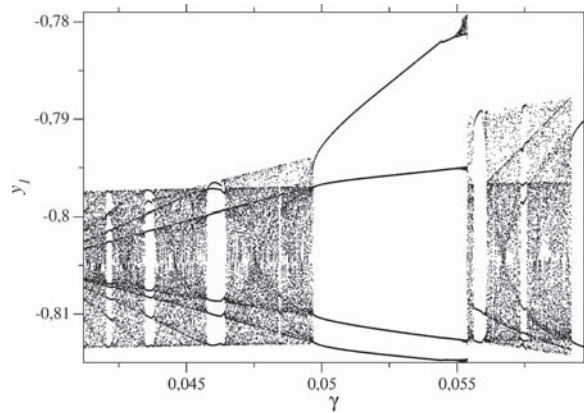


Figura 4.3: Diagrama de Bifurcação para o sistema de quatro equações diferenciais (3.6). A figura mostra a variação do parâmetro  $b$  pela variável  $y_1$  dos pontos abaixo de uma reta.

## 4.6 Diagramas Isoperiódicos

O estudo do comportamento dos sistemas, assim como a periodicidade das estruturas e as rotas para o caos, também pode ser realizado com outra ferramenta de visualização definida na literatura como diagrama isoperiódico [32,33]. O diagrama isoperiódico é obtido através da variação de dois parâmetros do sistema, plotando o número de máximos locais de uma variável, obtendo assim os períodos das estruturas periódicas presentes no intervalo escolhido. A Fig. 4.4 representa um exemplo de diagrama isoperiódico para um sistema de quatro equações diferenciais de Fitzhugh-Nagumo (3.6), e nos mostra a periodicidade das estruturas periódicas imersas no caos.

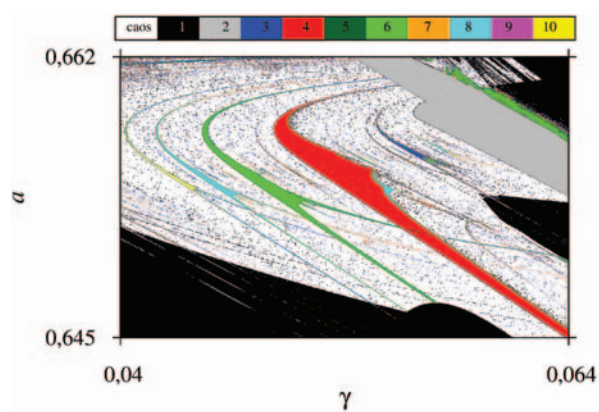


Figura 4.4: Diagrama isoperiódico do sistema(3.6) para  $0,645 \leq a \leq 0,662$ ,  $0,04 \leq \gamma \leq 0,064$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$ . A paleta de cores esta relacionado com o número de períodos, sendo a cor branca para o comportamento caótico.

## Capítulo 5

### Resultados Numéricos

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através de métodos computacionais para o modelo de Fitzhugh-Nagumo para dois, três, e quatro neurônios, acoplados de forma unidirecional e também bidirecional. O comportamento dinâmico do sistema é estudado com o uso das ferramentas de espaço de parâmetros e diagrama de bifurcação. No caso do modelo de dois neurônios acoplados, utilizamos também o diagrama isoperiódico, como mais uma ferramenta de investigação. Para os casos de três e quatro neurônios, este método não é apresentado, devido o elevado tempo computacional empregado nesta tarefa.

A construção das figuras dos espaços de parâmetros foi obtida pela combinação das variações dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  em função da variação da intensidade de acoplamento  $\gamma$  e representação gráfica do maior expoente de Lyapunov. Para cada espaço de parâmetros os expoentes de Lyapunov foram obtidos considerando a discretização destes em uma malha quadrada de  $500 \times 500$  pontos de forma igualmente espaçada. O integrador numérico utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo igual a  $10^{-1}$  e um tempo de integração de  $5 \times 10^5$  iterações para o cálculo de cada um dos  $250 \times 10^3$  expoentes de Lyapunov. Para o cálculo de cada novo expoente de Lyapunov, utilizamos as mesmas condições iniciais, ou seja, não seguimos o atrator. As condições iniciais foram selecionadas aleatoriamente e estão disponíveis na Tabela 5.1.

O gradiente de cores utilizado em cada figura está associado à magnitude do expoente de Lyapunov representado na mesma. Para os espaços de parâmetros do maior expoente de Lyapunov o branco mostra os expoentes negativos (regiões de ponto fixo), o preto expoentes

Sistema de $i$ neurônios	Condições iniciais do sistema
$i = 2$	$x_1 = -0, 1; y_1 = 0, 5; x_2 = 0, 1; y_2 = -0, 3$
$i = 3$	$x_1 = -0, 1; y_1 = 0, 5; x_2 = 0, 1; y_2 = -0, 3; x_3 = 0, 1; y_3 = 0, 3$
$i = 4$	$x_1 = -0, 1; y_1 = 0, 5; x_2 = 0, 1; y_2 = -0, 3; x_3 = 0, 1; y_3 = 0, 3; x_4 = -0, 1; y_4 = 0, 6$

Tabela 5.1: Condições iniciais para os espaço de parâmetros, diagramas de bifurcação e diagramas isoperiódicos.

nulos (regiões periódicas) e variações de marrom, amarelo vermelho e azul para expoentes positivos (regiões caóticas). Nos casos em que encontramos regiões de hipercaos, e construímos espaços de parâmetros do segundo maior expoente de Lyapunov, o gradiente de cores utilizados será branco para expoentes negativos, preto para expoente nulos e a variação de vermelho e azul ou rosa e azul para expoentes positivos.

Os diagramas de bifurcação foram construídos da observação de máximos locais da variável  $y_1$  em função do parâmetro  $b$ . O integrador numérico também foi o Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo de  $10^{-4}$  e sob as mesmas condições iniciais da Tabela 5.1, utilizadas nos espaços de parâmetros.

Da mesma forma, para os diagramas isoperiódicos, utilizamos o integrador numérico Rung-Kutta de quarta ordem com passo fixo de  $10^{-3}$  e com um tempo de integração de  $5 \times 10^6$  iterações, para o cálculo de cada período, contando o número de máximos da série temporal de cada atrator, considerando um malha quadrada de  $1000 \times 1000$  pontos de forma igualmente espaçadas. Cada cor representa os períodos correspondente a estrutura periódica.

Para os parâmetros fixos em cada caso, seus valores estão dispostos na Tabela 5.2, e a variação dos mesmos nos espaços de parâmetros giram em torno destes valores. Estes valores foram retirados da referência [25].

Parâmetros Fixos	Valores
$a$	0, 7
$b$	0, 4
$c$	2, 0

Tabela 5.2: Parâmetros fixos usados nos espaço de parâmetros, diagramas de bifurcação e diagramas isoperiódicos.

## 5.1 Análise dos resultados para uma rede de dois neurônios acoplados

### 5.1.1 Acoplamento bidirecional para os parâmetros $a \times \gamma$ , $b \times \gamma$ e $c \times \gamma$

Para análise do comportamento dinâmico da rede dois neurônios via modelo Fitzhugh-Nagumo, foram utilizados dois diferentes tipos de acoplamento. Num primeiro momento, utilizamos de acoplamento bidirecional para as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , simulando o trânsito de informações nos dois sentidos, ou seja, o neurônio 1 se comunica com o neurônio 2, e o neurônio 2 se comunica com o neurônio 1, conforme a Fig. 3.3. Desta forma, construímos os espaços de parâmetros, diagramas isoperiódicos e os diagramas de bifurcação, utilizando as condições iniciais listadas na Tabela 5.1 e os parâmetros fixos da Tabela 5.2, dependendo da combinação dos mesmos.

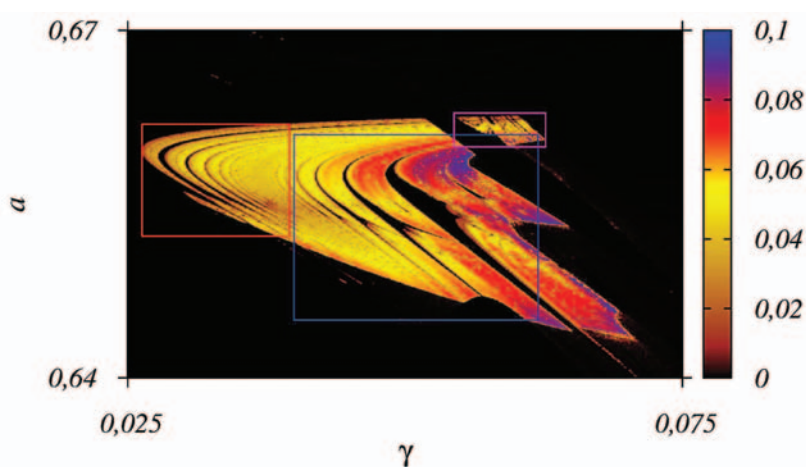


Figura 5.1: Visão geral do espaço de parâmetros  $a \times \gamma$ , sistema (3.6) para  $0,64 \leq a \leq 0,67$ ,  $0,025 \leq \gamma \leq 0,075$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do maior Expoente de Lyapunov.

O espaço de parâmetros da Fig. 5.1 mostra uma visão geral do comportamento dinâmico da rede de dois neurônios, com acoplamento bidirecional, do parâmetro  $a$  pela intensidade de acoplamento  $\gamma$ , mantendo de  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$  fixos. Podemos observar neste espaço de parâmetros uma grande região de periodicidade (em preto) e uma região de comportamento caótico ao centro (em marrom, amarelo, vermelho e azul) com janelas de periodicidade em seu

interior (estruturas periódicas em preto). A partir desta figura principal, foram feitas ampliações para que haja uma melhor visualização da configuração das estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, representadas pelas caixas vermelha, azul e magenta na Fig. 5.1.

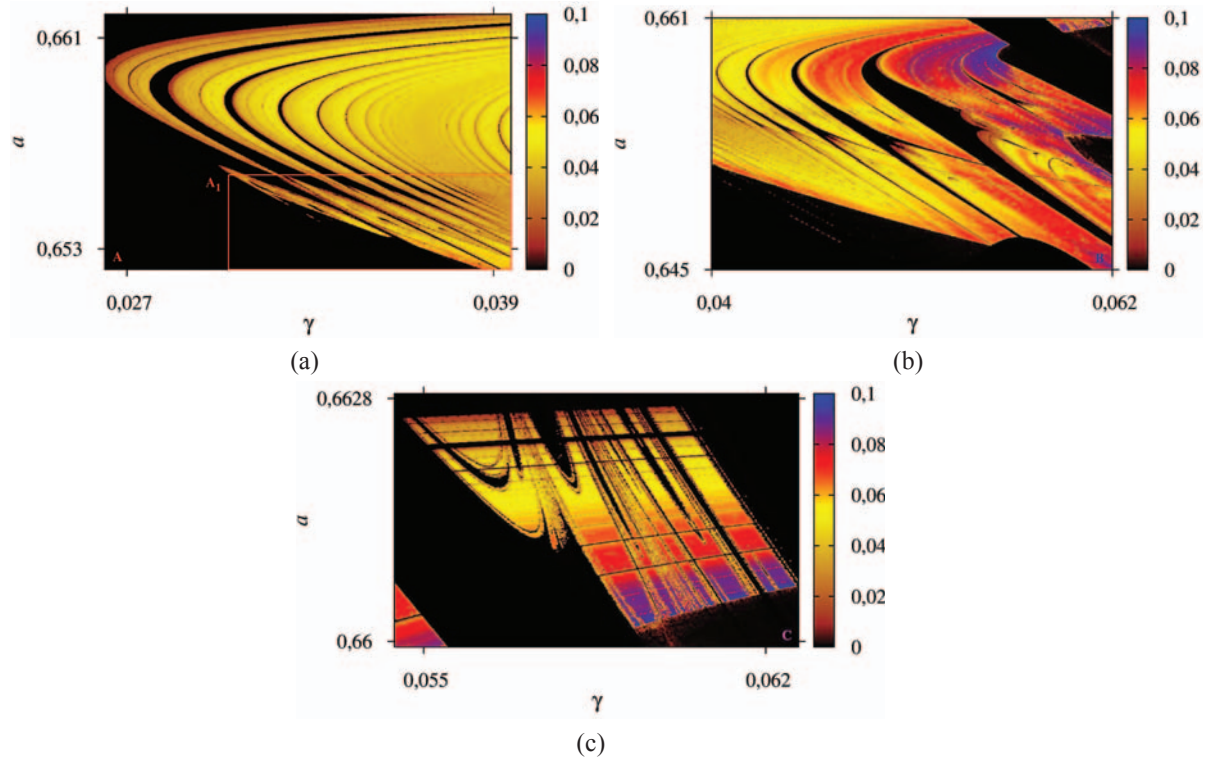


Figura 5.2: (a) Ampliação da caixa vermelha **A** da Fig. 5.1. (b) Ampliação da caixa azul **B** da Fig. 5.1. (c) Ampliação da caixa magenta **C** da Fig. 5.1.

Na Fig. 5.2, podemos observar os espaços de parâmetros que em (a) mostra a ampliação da caixa vermelha **A**, com  $0,652231 \leq a \leq 0,661895$  e  $0,026285 \leq \gamma \leq 0,039572$ , (b) mostra a ampliação da caixa azul **B**, com  $0,645 \leq a \leq 0,661$  e  $0,04 \leq \gamma \leq 0,062$ , e em (c) mostra a ampliação da caixa magenta **C**, com  $0,659936 \leq a \leq 0,662856$  e  $0,0544068 \leq \gamma \leq 0,0626712$ , todas figuras referentes à Fig. 5.1. Aparentemente na Fig. 5.2(c) o sistema apresenta uma maior sensibilidade ao fenômeno da multi-estabilidade, caracterizado pela coexistência de bacias de atração para um dado par de parâmetros de controle. Esta característica pode ser observada pelas linhas pretas em forma de arco que cruzam a região de caos de cima para baixo. Na Fig. 5.2 podemos observar que existe uma grande quantidade de estruturas periódicas imersas na região caótica, assim, para refinar ainda mais a visualização dessas es-



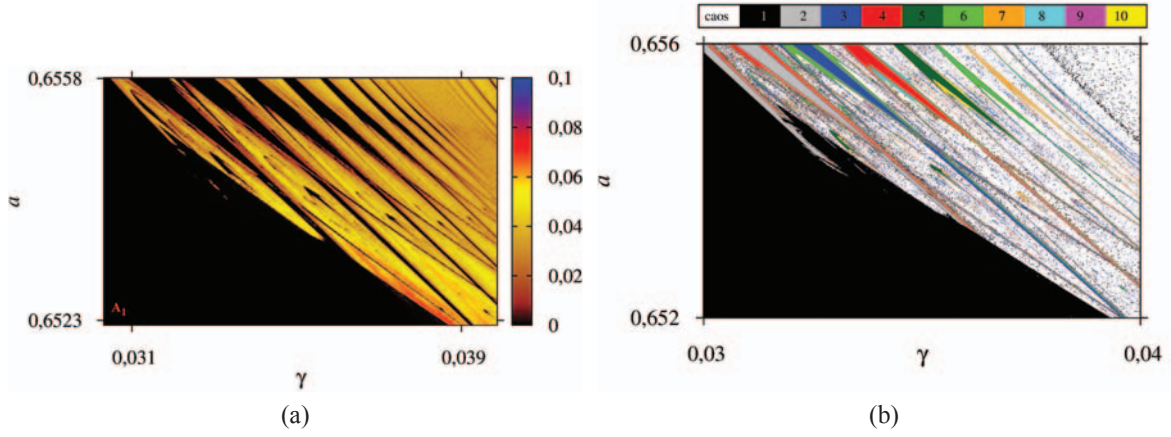


Figura 5.3: (a) Ampliação  $A_1$  da caixa vermelha da Fig. 5.2(a), para  $0,652231 \leq a \leq 0,655810$  e  $0,0303222 \leq \gamma \leq 0,0398722$ . (b) Diagrama isoperiódico da Fig. 5.3(a), para  $0,652 \leq a \leq 0,656$  e  $0,03 \leq \gamma \leq 0,04$ .

truturas periódicas e suas regras de formação, fizemos novas ampliações, uma delas mostrada na Fig. 5.3(a) referente a caixa vermelha da Fig. 5.2(a) para  $0,652231 \leq a \leq 0,655810$  e  $0,0303222 \leq \gamma \leq 0,0398722$ , e (b) o diagrama isoperiódico da Fig. 5.3(a), para  $0,652 \leq a \leq 0,656$  e  $0,03 \leq \gamma \leq 0,04$ .

Comparando a Fig. 5.3(a) com a Fig. 5.3(b), observamos no diagrama isoperiódico dois tipos de rotas para o caos. Primeiro, em cada estrutura periódica, pode ser visto uma cascata de bifurcação por dobramento de período, ou seja, uma única estrutura apresenta mais de um período. Desta forma, observamos uma estrutura cinza (período 2), com borda vermelha (período 4) comprovando o dobramento de período. A estrutura azul (período 3) dobra seu período, com borda verde (período 6), a estrutura vermelha (período 4) dobra seu período com borda ciano (período 8) e assim sucessivamente. Estas estruturas também se dispõem em uma sequência de cascata de bifurcação por adição de períodos, estrutura cinza (período 2), azul (período 3), vermelha (período 4), até uma estrutura magenta (período 9), intercaladas por regiões caóticas. Na Fig. 5.4 mostramos ampliações feitas no espaço de parâmetros da Fig. 5.2(b). Em (a) repetimos o espaço de parâmetros Fig. 5.2(b) agora colocando as caixas de ampliação. A Fig. 5.4(b) é a ampliação da caixa  $B_1$ , para  $0,650537 \leq a \leq 0,656166$  e  $0,0433804 \leq \gamma \leq 0,0535237$ , a Fig. 5.4(c) é a ampliação da caixa  $B_2$ , para  $0,651 \leq a \leq 0,655$  e  $0,052 \leq \gamma \leq 0,057$ , e a Fig. 5.4(d) é a ampliação da caixa  $B_3$ , para  $0,653 \leq a \leq 0,659$  e  $0,053 \leq \gamma \leq 0,06$ .



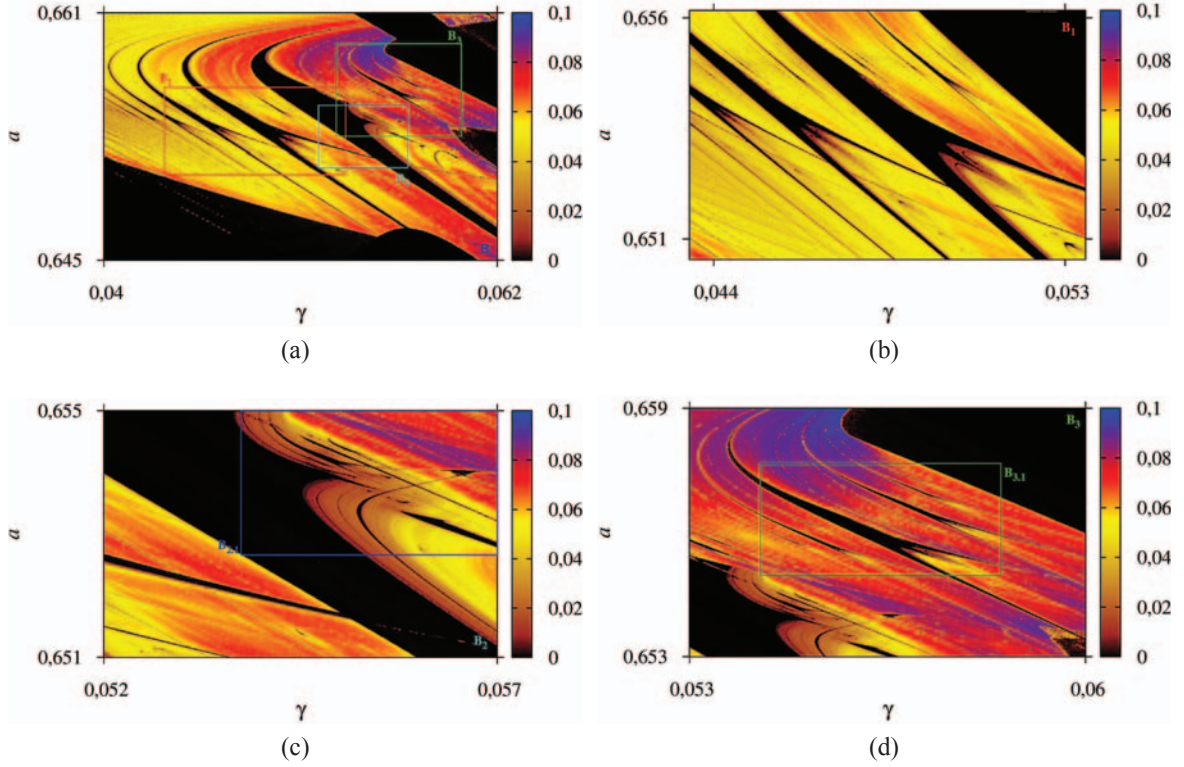


Figura 5.4: Conjunto de ampliações da Fig. 5.2(b). (a) Espaço de parâmetros com caixas de ampliação. (b) Ampliação da caixa vermelha  $B_1$ , para  $0.650537 \leq a \leq 0.656166$  e  $0.0433804 \leq \gamma \leq 0.0535237$ . (c) Ampliação da caixa ciano  $B_2$ , para  $0.651 \leq a \leq 0.655$  e  $0.052 \leq \gamma \leq 0.057$ . (d) Ampliação da caixa verde  $B_3$ , para  $0.653 \leq a \leq 0.659$  e  $0.053 \leq \gamma \leq 0.06$ .

Na Fig. 5.5(a) temos o mesmo espaço de parâmetros da Fig 5.4(b) agora com uma linha reta em vermelho sobre a qual construímos um diagrama de bifurcação, mostrado na Fig. 5.5(b), para a variável  $y_1$  entre os valores  $0,0435607 \leq \gamma \leq 0,0520584$ . A Fig. 5.5(c) mostra o diagrama isoperiódico para a mesma faixa de valores em (a).

Analisando os resultados da Fig. 5.5, observamos que nas estruturas cortadas pela reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação em (b), existe uma variação de períodos com decréscimo de duas unidades de período. Esta variação pode ser confirmada quando se observa o diagrama isoperiódico em (c), cujas estruturas estão em uma cascata de bifurcação por adição de períodos. Desta forma temos uma sequência com estrutura amarela (período 10), em seguida uma ciano (período 8), verde-claro (período 6) culminando em uma estrutura vermelha (período 4), sendo que cada estrutura está separada da outra pela região de caos. Notamos também que

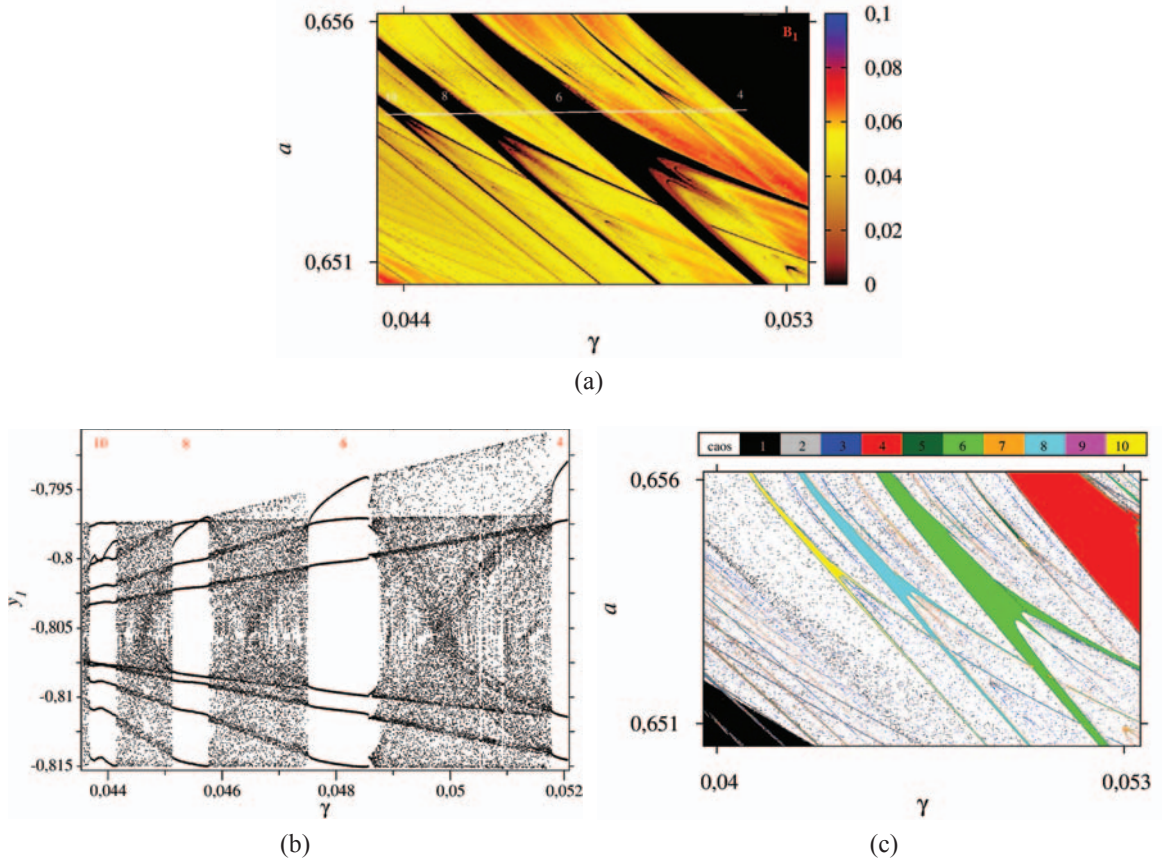


Figura 5.5: (a) Espaço de parâmetros da Fig. 5.4(b) com a reta do diagrama de bifurcação e seus respectivos períodos. (b) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para  $0,0435607 \leq \gamma \leq 0,0520584$ . (c) Diagrama isoperiódico de (a), para  $0,650537 \leq a \leq 0,656166$  e  $0,0395798 \leq \gamma \leq 0,0535237$ .

essas estruturas são auto-similares, uma vez que o espaço de parâmetros está repleto dessas estruturas e quanto mais ampliações fizermos mais estruturas, cada vez menores surgem.

Com o objetivo de analisar melhor esta aparente auto-similaridade no espaço de parâmetros, ampliamos a região delimitada pela caixa azul da Fig. 5.4(c), mostrado na Fig. 5.6. Observando esta figura, notamos que a estrutura periódica predominante, tem uma descontinuidade no seu formato e surgem novas regiões periódicas menores. Estas estruturas auto-similares também são observadas nas Figs. 5.6(b), 5.6(c) e 5.6(d), que são ampliações das caixas em ciano, amarela e verde, respectivamente, da Fig. 5.6(a).

Para termos uma ideia da organização dos períodos das estruturas presentes no espaço de parâmetros da Fig. 5.6(b), apresentamos na Fig. 5.7(a) o espaço de parâmetros com um linha reta branca sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação mostrado na Fig. 5.7(b). Os

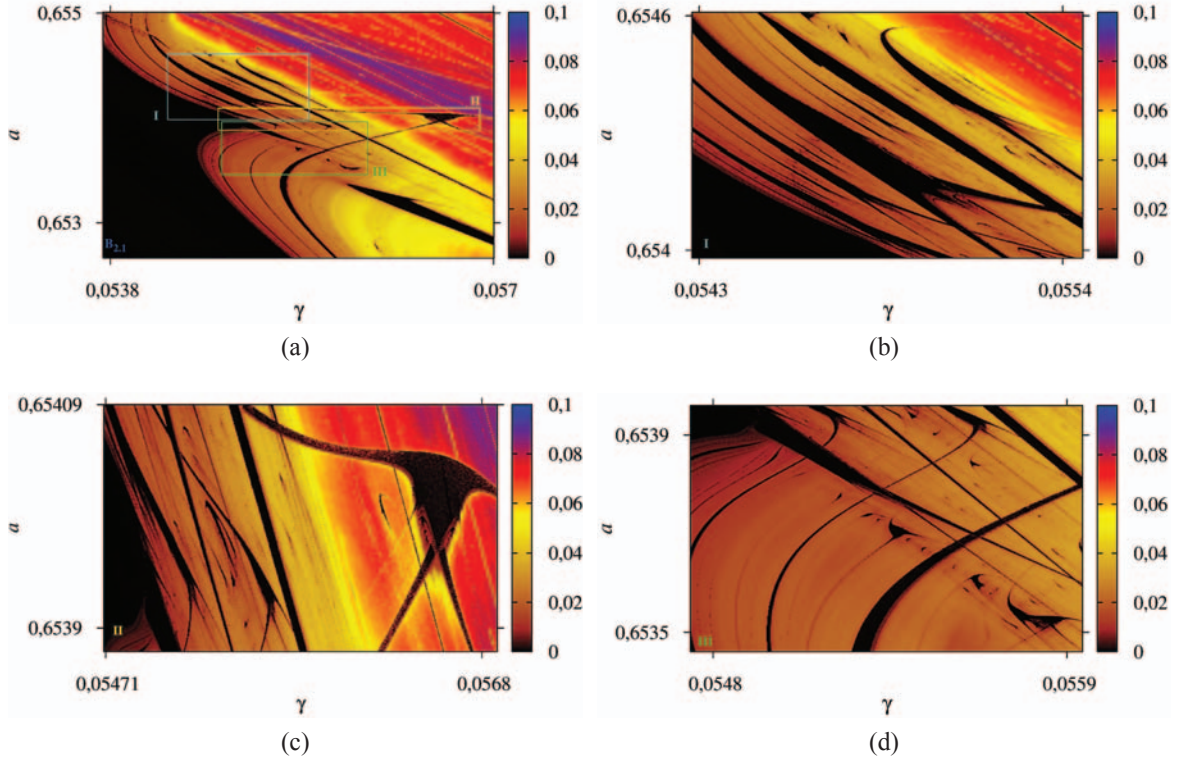


Figura 5.6: Conjunto de ampliações, (a) ampliação da Fig. 5.4(c) com caixas de ampliação. (b) Ampliação da caixa ciano I, com  $0,65398 \leq a \leq 0,654609$  e  $0,0542797 \leq \gamma \leq 0,0554609$ . (c) Ampliação da caixa amarela II com  $0,65388 \leq a \leq 0,65409$  e  $0,0547005 \leq \gamma \leq 0,0568858$ . (d) Ampliação da caixa verde III com  $0,653461 \leq a \leq 0,65396$  e  $0,05473 \leq \gamma \leq 0,0559482$ .

respectivos períodos das estruturas também são apresentados. Para essas estruturas periódicas é possível observar que as mesmas possuem uma ordem de formação por adição de período e se organizam em  $12 \rightarrow 20 \rightarrow 12$  e  $8 \rightarrow 4 \rightarrow 8$ .

Para visualizar a organização dos períodos das estruturas presentes no espaço de parâmetros da Fig. 5.6(c), apresentamos na Fig. 5.8(a) o espaço de parâmetros com um linha reta branca sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação mostrado na Fig. 5.8(c), onde os respectivos períodos das estruturas também são apresentados. As estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, identificamos uma ordem de formação por adição de período e se organizam em  $8 \rightarrow 12 \rightarrow 20 \rightarrow 12$ . Ainda na Fig. 5.8(a), fizemos a ampliação da caixa I mostrada na Fig. 5.8(b), para observarmos as estruturas auto-similares presentes neste espaço de parâmetros. Por fim, na Fig. 5.7(d) podemos observar estruturas periódicas auto-similares imersas em regiões caóticas.

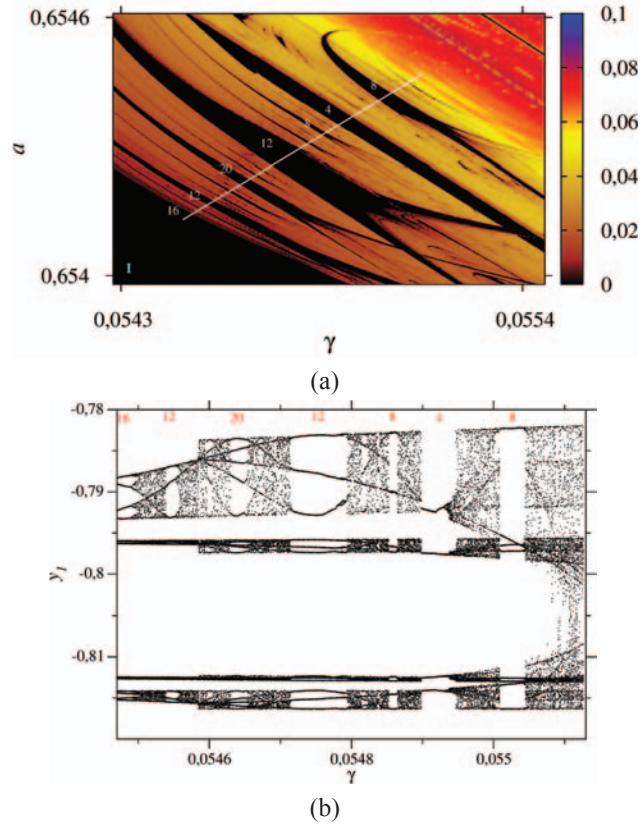


Figura 5.7: (a) Espaço de parâmetros da Fig. 5.6(b) com uma reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação, e seus respectivos períodos. (b) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para  $0,0544709 \leq \gamma \leq 0,0551265$ .

Seguindo a análise das ampliações, foram feitas uma ampliação  $B_{3,1}$  para  $0,654965 \leq a \leq 0,657671$  e  $0,0542497 \leq \gamma \leq 0,0585038$ , referente à região delimitada pela caixa verde na Fig. 5.4(d), conforme pode ser visualizado na Fig. 5.9(a), um diagrama de bifurcação ao longo da linha branca em relação a variável  $y_1$ , para  $0,054863 \leq b \leq 0,056585$ , Fig. 5.9(b) e um diagrama isoperiódico para  $0,655 \leq a \leq 0,658$  e  $0,053 \leq \gamma \leq 0,06$ , Fig. 5.9(c). Nesta ampliação, através do diagrama de bifurcação e diagrama isoperiódico, observamos que as estruturas periódicas apresentam uma formação de  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ . Verificamos também, através do diagrama isoperiódico que, cada estrutura apresenta internamente uma cascata de bifurcação do tipo dobramento de período  $5 \rightarrow 10, 4 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 6$  e assim por diante.

Construímos também os espaços de parâmetros para as combinações dos parâmetros  $b \times \gamma$  e  $c \times \gamma$ , sempre visando a variação de um parâmetro do sistema pela intensidade de



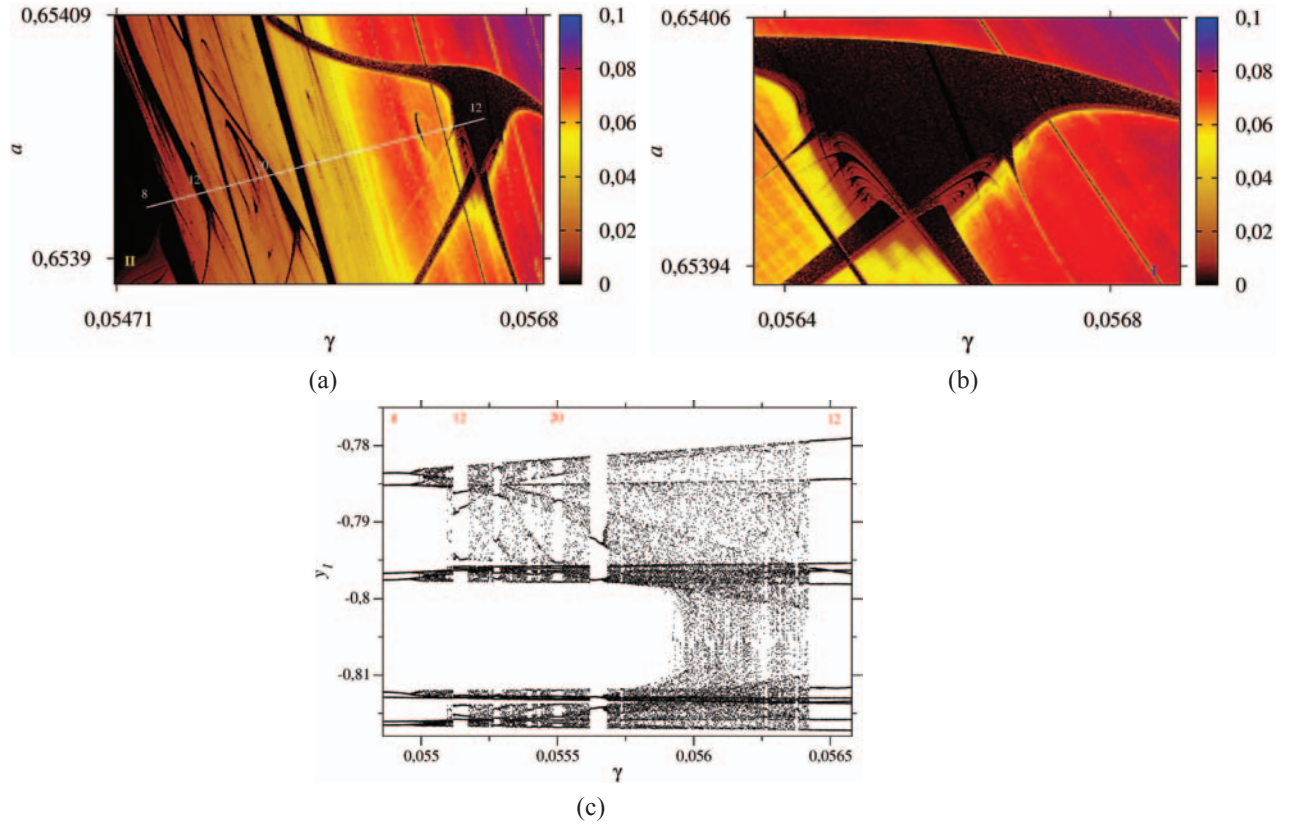


Figura 5.8: (a) Espaço de parâmetro da Fig. 5.6(c) com uma reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação e seus respectivos períodos. (b) Ampliação da caixa azul **I** com  $0,653931 \leq a \leq 0,654060$  e  $0,0563623 \leq \gamma \leq 0,0568858$ . (c) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para  $0,05486 \leq \gamma \leq 0,05658$

acoplamento. Estes espaços de parâmetros estão sob as mesmas condições iniciais de  $a \times \gamma$  e sob os parâmetros fixos, Tabela 5.1 e Tabela 5.2. Na Fig. 5.10 temos em (a) o espaço de parâmetros  $b \times \gamma$  e em (b) o espaço de parâmetro de  $c \times \gamma$ . Observamos que nestes espaços de parâmetros, a dinâmica não apresenta estruturas periódicas como as observadas no espaço de  $a \times \gamma$ . Aqui temos uma região de caos confinada em uma grande região periódica.

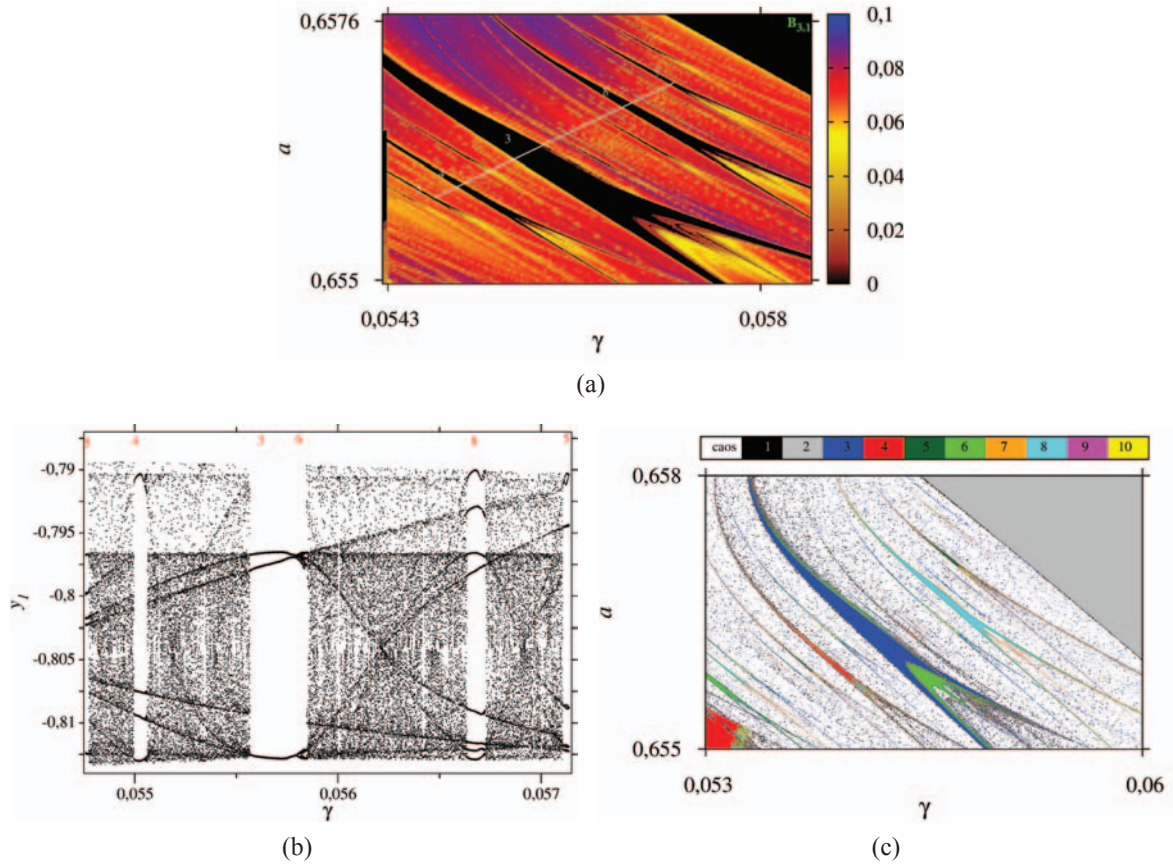


Figura 5.9: (a) Ampliação da caixa verde da Fig. 5.4(d) para  $0,654965 \leq a \leq 0,657671$  e  $0,0542497 \leq \gamma \leq 0,0585038$  e os respectivos períodos das estruturas. (b) Diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para  $0,054863 \leq b \leq 0,056585$ . (c) Diagrama isoperiódico de (a) para  $0,655 \leq a \leq 0,658$  e  $0,053 \leq \gamma \leq 0,06$ .

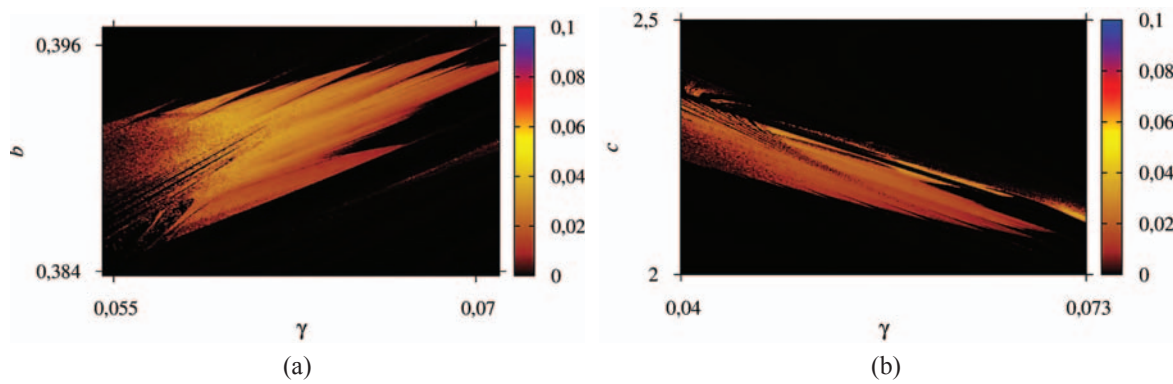


Figura 5.10: Visão geral de: (a) espaço de parâmetros  $b \times \gamma$  para  $0,383769 \leq b \leq 0,396958$  e  $0,054552 \leq \gamma \leq 0,070968$ ,  $a = 0,7$  e  $c = 2,0$  como parâmetros fixos; (b) espaço de parâmetros  $c \times \gamma$  para  $2,0 \leq c \leq 2,5$  e  $0,04 \leq \gamma \leq 0,073$ ,  $a = 0,7$  e  $b = 0,4$ .

### 5.1.2 Acoplamento unidirecional para os parâmetros $a \times \gamma$ , $b \times \gamma$ e $c \times \gamma$

Em um segundo momento foi imposto ao conjunto de equações, o regime de acoplamento unidirecional ‘mestre-escravo’ [26] para as mesmas variáveis do caso bidirecional  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja, a informação transita unidirecionalmente, o neurônio 1 se comunica com o neurônio 2, mas o neurônio 2 não pode transmitir informações ao neurônio 1, Fig. 3.4. Para gerar os espaços de parâmetros, diagramas isoperiódicos e diagramas de bifurcação do regime de acoplamento unidirecional foram utilizados as condições iniciais da Tabela 5.1 e os parâmetros fixos da Tabela 5.2 conforme combinação de parâmetros.

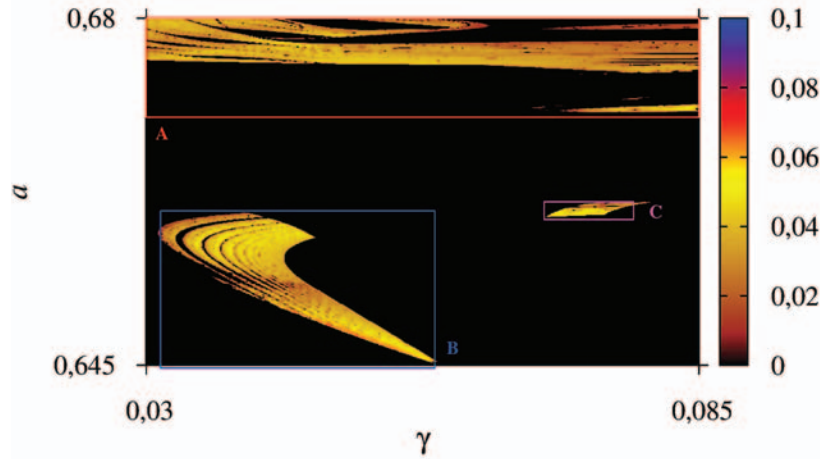


Figura 5.11: Visão geral do espaço de parâmetros  $a \times \gamma$ , sistema (3.7) para  $0,645 \leq a \leq 0,68$ ,  $0,03 \leq \gamma \leq 0,085$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do maior expoente de Lyapunov.

O comportamento dinâmico para uma rede de dois neurônios acoplados unidirecionalmente é mostrado na Fig. 5.11, resultado da combinação do parâmetro  $a$  pela intensidade de acoplamento  $\gamma$ . Podemos fazer alguns comentários com relação às diferenças entre os acoplamentos bidirecional (seção 5.1.1) e unidirecional para uma rede de dois neurônios, em termos dos espaços de parâmetros. Comparando as Figs. 5.1 (bidirecional) e 5.11 (unidirecional), observamos a reprodução da região delimitada pela caixa vermelha da Fig. 5.1, que na Fig. 5.11 está delimitada pela caixa azul. Inclusive a forma e organização dessas estruturas são semelhantes. Entretanto, boa parte das demais estruturas imersas na região de caos da Fig. 5.1 desapareceram na Fig. 5.11. E uma grande região de caos na parte superior do espaço de parâmetros surgiu no acoplamento unidirecional, Fig. 5.11 caixa vermelha, que não estava presente no caso

bidirecional, Fig. 5.1.

A partir da Fig. 5.11, foram realizadas novas ampliações que podem ser vistas nas caixas vermelha, azul e magenta, com o objetivo de entender melhor a organização das estruturas periódicas.

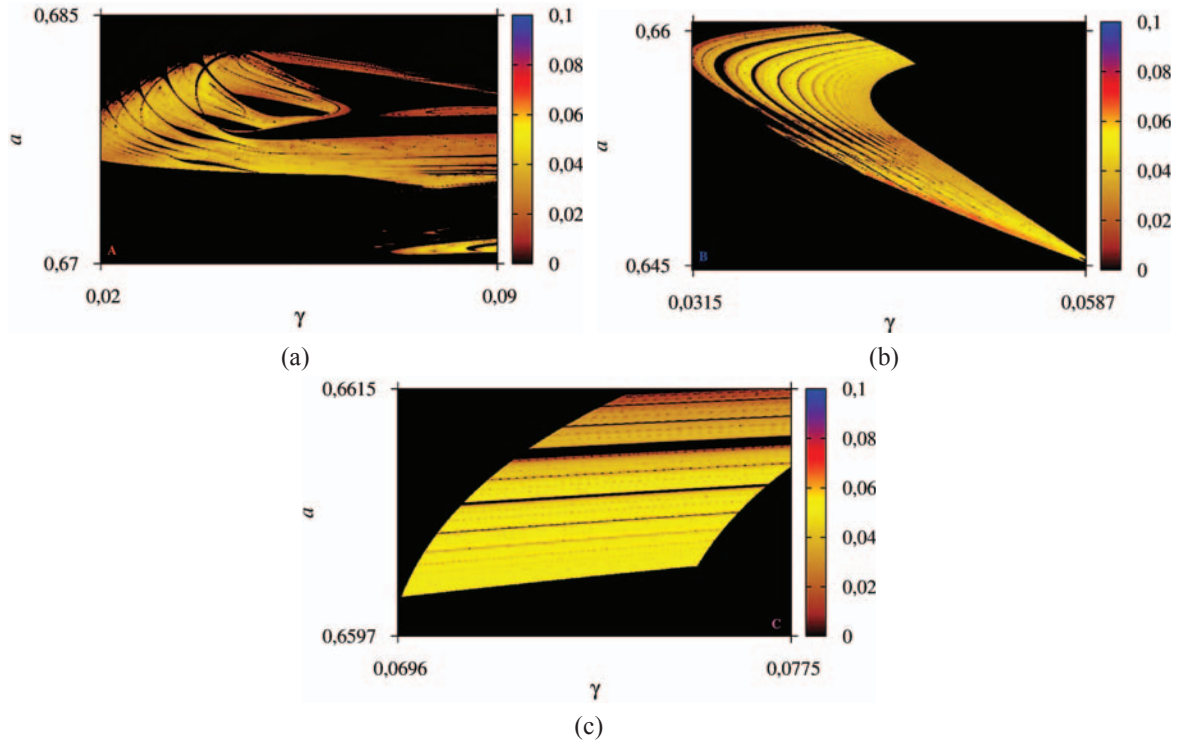


Figura 5.12: (a) Ampliação da caixa vermelha A da Fig. 5.11. (b) Ampliação da caixa azul B da Fig. 5.11. (c) Ampliação da caixa magenta C da Fig. 5.11.

Na Fig. 5.12, podemos observar em (a) o espaço de parâmetros que mostra a ampliação da caixa vermelha A, para  $0,67 \leq a \leq 0,685$  e  $0,02 \leq \gamma \leq 0,09$ , em (b) o espaço de parâmetros para a ampliação da caixa azul B, para  $0,644722 \leq a \leq 0,660569$  e  $0,0314361 \leq \gamma \leq 0,0587201$ , e em (c) o espaço de parâmetros para a ampliação da caixa magenta C, para  $0,6597 \leq a \leq 0,6615$  e  $0,0696 \leq \gamma \leq 0,0775$ , todos pertencentes a Fig. 5.11.

Para analisar as regiões na qual se apresentam estruturas periódicas e analisar sua regras de formação, foram feitas ampliações na Fig. 5.12. A partir da Fig. 5.12(a) foram construídas duas novas ampliações. A Fig. 5.13 temos em (a) a Fig. 5.12(a) com as caixas A<sub>1</sub> e A<sub>2</sub>, (b) a ampliação da caixa ciano A<sub>1</sub>, para  $0,675361 \leq a \leq 0,683157$  e  $0,02 \leq \gamma \leq 0,0442443$ ,



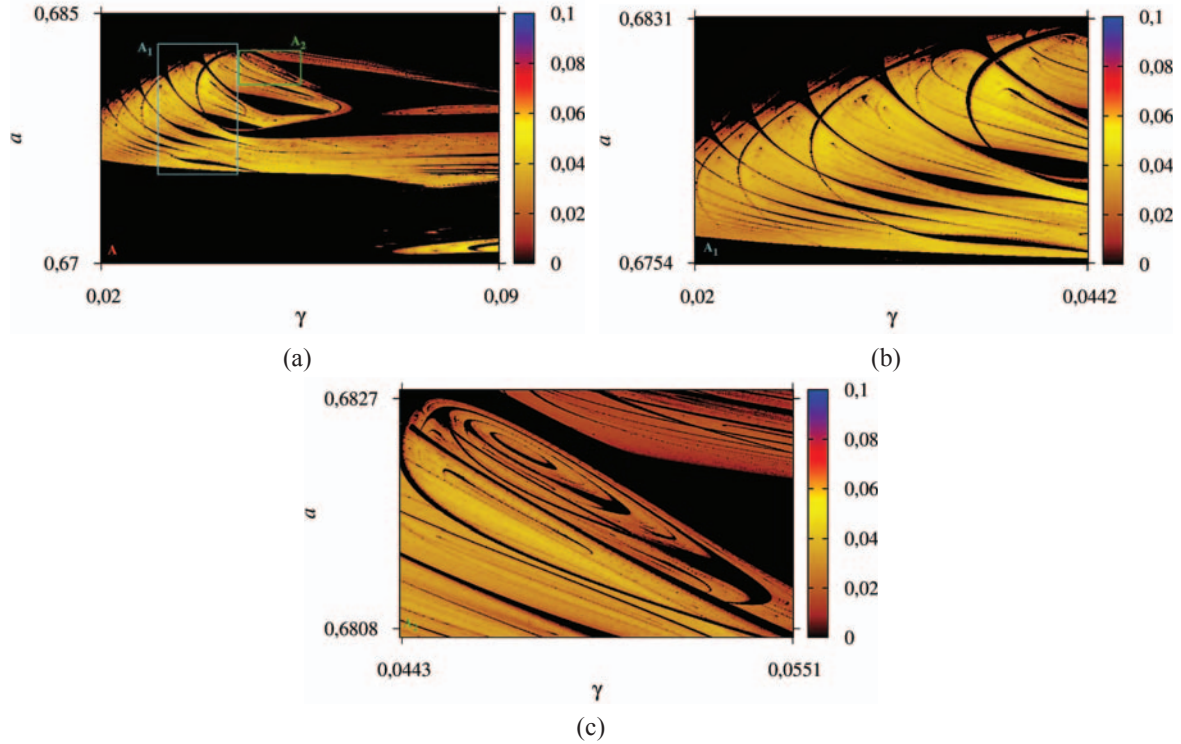


Figura 5.13: Conjunto de ampliações da Fig. 5.12(a). (a) Espaço de parâmetros com caixas de ampliação. (b) Ampliação da caixa ciano  $A_1$ , para  $0,675361 \leq a \leq 0,683157$  e  $0,02 \leq \gamma \leq 0,0442443$ . (c) Ampliação da caixa verde  $A_2$ , para  $0,680728 \leq a \leq 0,682773$  e  $0,0442443 \leq \gamma \leq 0,0551126$ .

e (c) a ampliação da caixa verde  $A_2$ , para  $0,680728 \leq a \leq 0,682773$  e  $0,0442443 \leq \gamma \leq 0,0551126$ . Nessas ampliações observamos uma rica dinâmica do sistema de dois neurônios com acoplamento unidirecional. Observamos em (b) um tipo de organização no qual alguns ramos das estruturas periódicas se estendem ao longo da região de caos e outros ramos se fundem na região periódica acima. E em (c) observamos formações circulares de estruturas periódicas em camadas, no qual pares de estruturas estão conectadas por três ramos e esta formação de repete internamente. Para uma melhor descrição dessas observações, estudamos com mais detalhes essas ampliações, conforme descrito abaixo.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Torus-2)	II (Torus-2)	III (Torus-2)	IV (Caos)
$\lambda_1$	$5,251 \times 10^{-5}$	$-8,402 \times 10^{-5}$	$-6,218 \times 10^{-5}$	$3,977 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-1,067 \times 10^{-5}$	$-1,747 \times 10^{-5}$	$-4,742 \times 10^{-5}$	$-5,023 \times 10^{-7}$
$\lambda_3$	$-7,906 \times 10^{-3}$	$-1,533 \times 10^{-3}$	$-1,034 \times 10^{-3}$	$-1,381 \times 10^{-2}$
$\lambda_4$	$-5,917 \times 10^{-2}$	$-9,92 \times 10^{-2}$	$-0,124$	$-0,397$

Tabela 5.3: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros da Fig. 5.14(a).

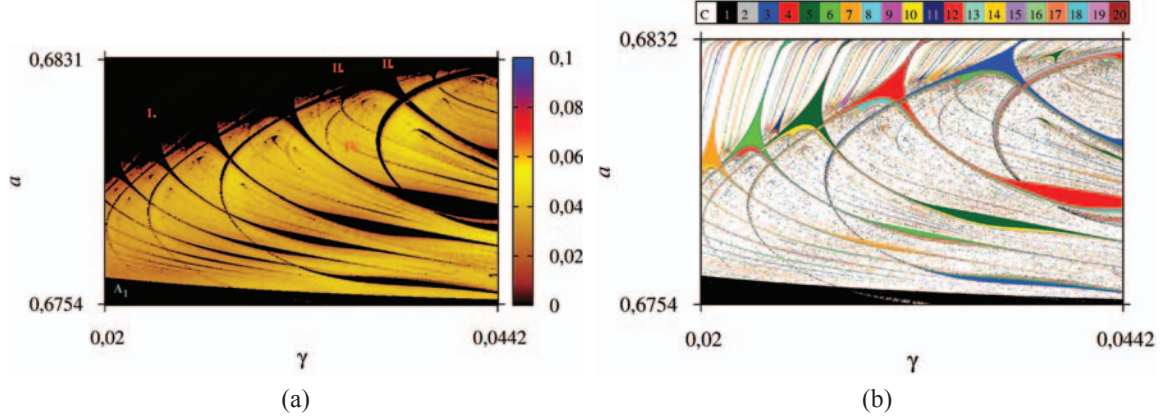


Figura 5.14: (a) Espaço de parâmetros para  $0,675361 \leq a \leq 0,683157$  e  $0,02 \leq \gamma \leq 0,0442443$ . (b) Diagrama isoperiódico com mesmos valores de (a).

A Fig. 5.14 mostra em (a) o espaço de parâmetros com quatro pontos escolhidos para analisarmos seus expoentes de Lyapunov, e (b) o diagrama isoperiódico com os mesmos valores do espaço de parâmetros em (a). Com esta figura é possível notar que as estruturas periódicas se organizam em cascata de bifurcação por adição de período  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ . Internamente as estruturas apresentam mais de um período, por cascata de bifurcação do tipo dobramento de período, sendo de  $3 \rightarrow 6$ ,  $4 \rightarrow 8$ ,  $5 \rightarrow 10$ ,  $6 \rightarrow 12$  e  $7 \rightarrow 14$ . Comparando as duas figuras observamos que a região em preto no espaço de parâmetros que é composta por ramos das estruturas periódicas que se estendem para cima, é branca no diagrama isoperiódico, contudo não significa uma região caótica e sim uma região com presença atratores tipo Torus, ou seja, a região contém dois expoentes de Lyapunov nulos, o que é comprovado pela Tabela 5.3, que mostra os valores dos expoentes de Lyapunov dos pontos (*I*, *II*, *III* e *IV*) no espaço de parâmetros. Assim, temos nesse espaço de parâmetros três tipos de comportamento: região de caos, que na Fig. 5.14(b) está abaixo de dois ramos das estruturas periódicas e está cravejada de pequenas estruturas periódicas; as regiões de Torus-2, regiões brancas intercaladas com ramos superiores das estruturas periódicas; e as próprias estruturas periódicas, delimitando as regiões de Torus-2 e caos.

Na Fig. 5.15 analisamos com mais detalhes a formação em camadas das estruturas periódicas, da Fig. 5.13(c). Observamos em (a) o espaço de parâmetros com a reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para  $0,044736 \leq \gamma \leq 0,0547789$

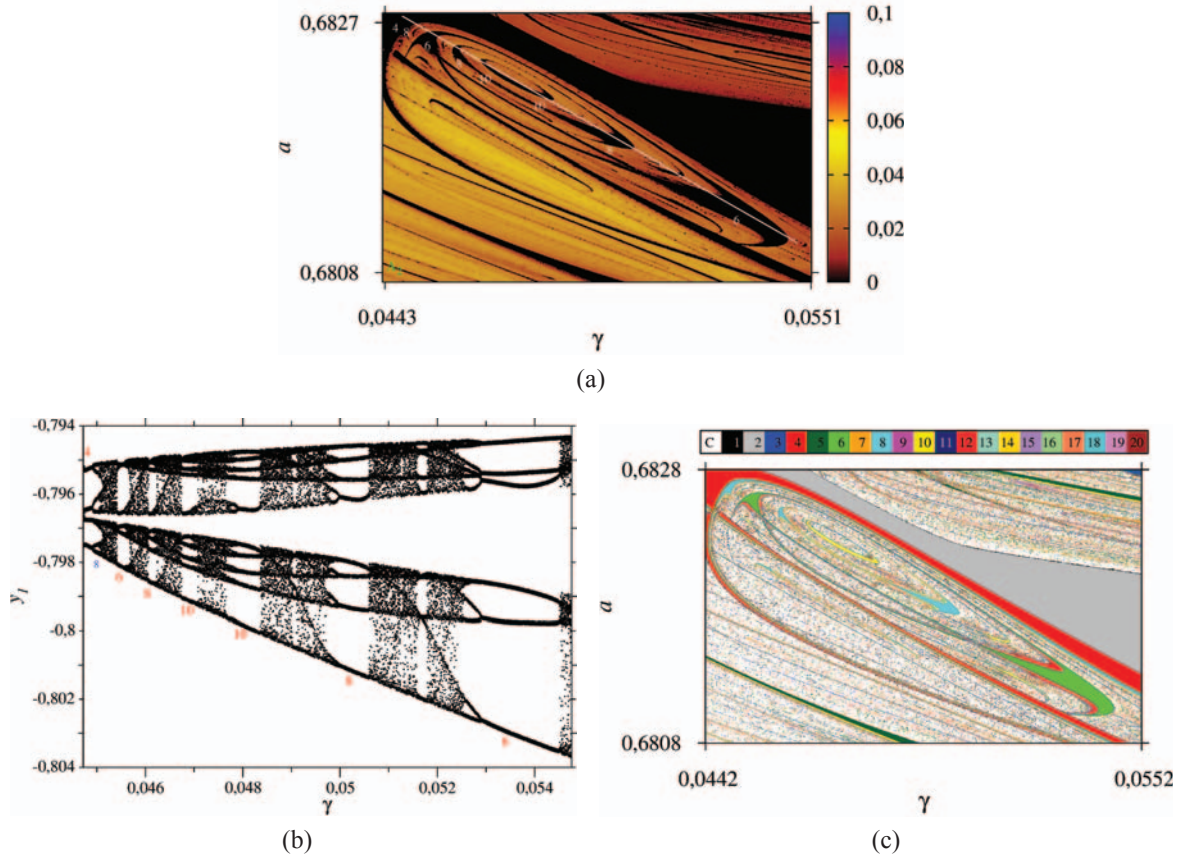


Figura 5.15: (a) Espaço de parâmetros da Fig. 5.13(c), com a reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação, e os períodos das respectivas estruturas. (b) Diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para  $0,044736 \leq \gamma \leq 0,0547789$ . (c) Diagrama isoperiódico referente a Fig. 5.13(c) com mesmos valores de (a).

em (b). E (c) o diagrama isoperiódico, com  $0,680728 \leq a \leq 0,682773$  e  $0,0442443 \leq \gamma \leq 0,0551126$ . No diagrama isoperiódico da Fig. 5.15(c), observamos que de forma independente todas as estruturas estão em uma cascata de bifurcação do tipo dobramento de período em seu interior, a saber  $4 \rightarrow 8, 6 \rightarrow 12$  e assim por diante.

Considerando os pares de estruturas periódicas nas camadas, estes possuem o mesmo período, ou seja, a estrutura de período 8 faz seu par com uma estrutura de período 8, uma estrutura de período 10, seu par apresenta período 10 até que estes pares de estruturas se deformam resultando em uma elipse central. Ainda, estes pares estão em uma regra de formação do tipo adição de período 2, assim  $4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 6$ , confirmado com o diagrama de bifurcação da Fig. 5.15b.

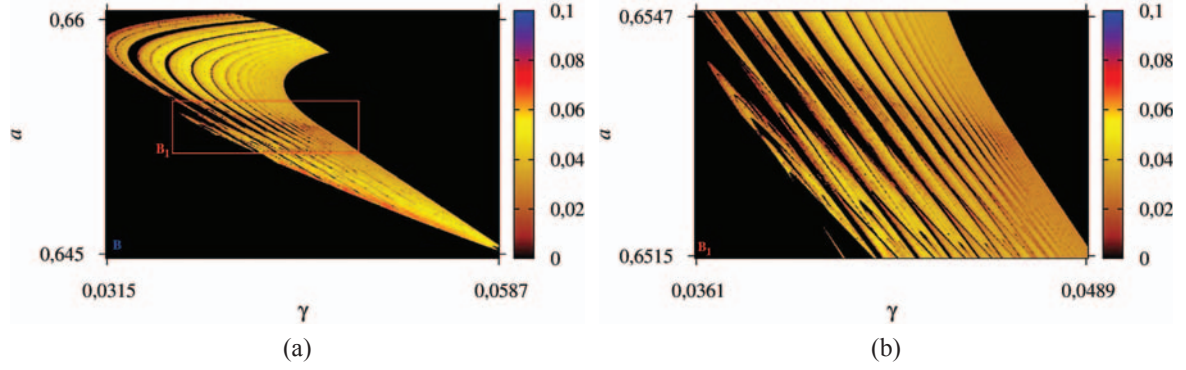


Figura 5.16: (a) Espaço de parâmetros  $B$  para caixa de ampliação. (b) Ampliação da caixa vermelha em (a), para  $0,651469 \leq a \leq 0,654777$  e  $0,0360601 \leq \gamma \leq 0,0489716$ .

Uma nova ampliação foi feita na Fig. 5.12(c), mostrado na Fig. 5.16, na qual observamos a formação de estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, semelhante ao caso de dois neurônios com acoplamento bidirecional, conforme Fig. 5.3. Um outra região caótica também pode ser observada em Fig. 5.12(c), caso similar ao que ocorre na Fig. 5.2(c).

Observamos agora o conjunto de espaços de parâmetros gerados da combinação do parâmetro  $b$  pela intensidade de acoplamento  $\gamma$ , sendo as condições iniciais e os valores dos parâmetros fixos dados pelas Tabela 5.1 e Tabela 5.2, respectivamente.

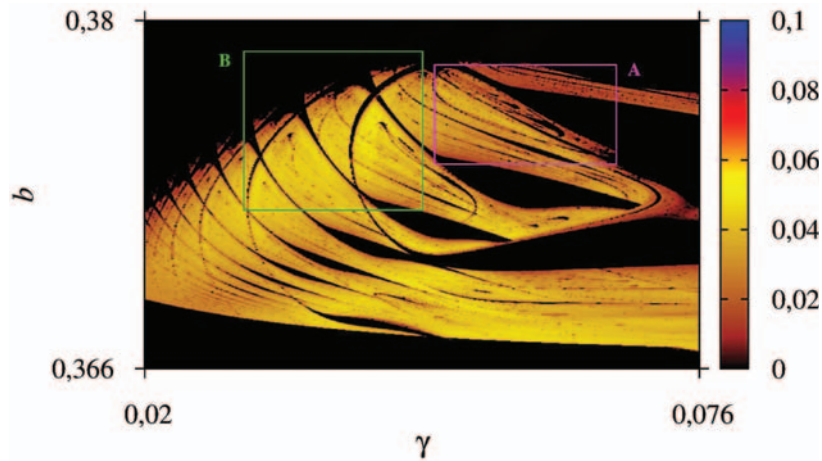


Figura 5.17: Visão geral do espaço de parâmetros  $b \times \gamma$ , sistema (3.7) para  $0,366 \leq b \leq 0,38$  e  $0,02 \leq \gamma \leq 0,076$ ,  $a = 0,7$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores diferentes estão associadas a diferentes valores do Expoente de Lyapunov.

A Fig. 5.17, representa a visão geral do espaço de parâmetros  $b \times \gamma$ , para  $0,366 \leq b \leq$

$0,38$  e  $0,02 \leq \gamma \leq 0,076$ . Nesta projeção observamos uma similaridade com o espaço de parâmetros de  $a \times \gamma$ . As ampliações da Fig. 5.17 são apresentadas na Fig. 5.18, na qual obser-

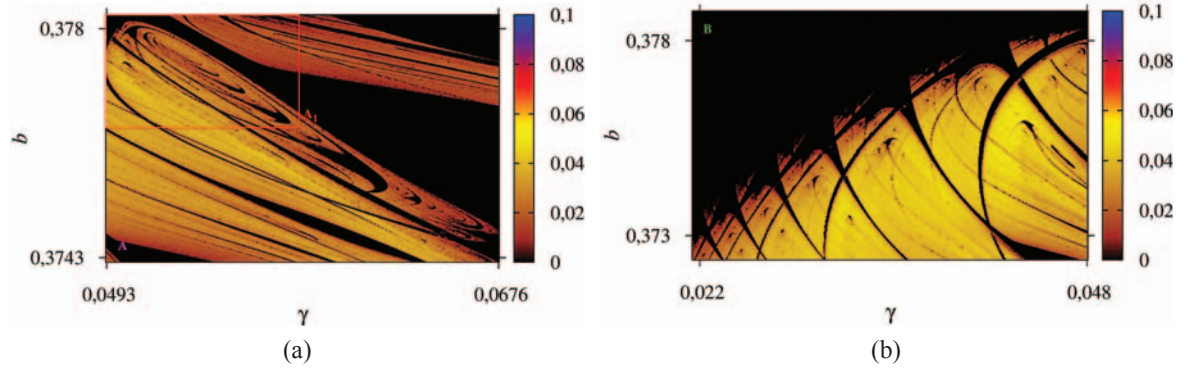


Figura 5.18: (a) Ampliação da caixa magenta A da Fig. 5.17. (b) Ampliação da caixa verde (B) da Fig. 5.17.

vamos em (a) a ampliação da caixa magenta, para  $0,374227 \leq b \leq 0,378223$  e  $0,0492685 \leq \gamma \leq 0,0676247$ , e em (b) a ampliação da caixa verde, para  $0,372378 \leq b \leq 0,37876$  e  $0,0215067 \leq \gamma \leq 0,0480549$ .



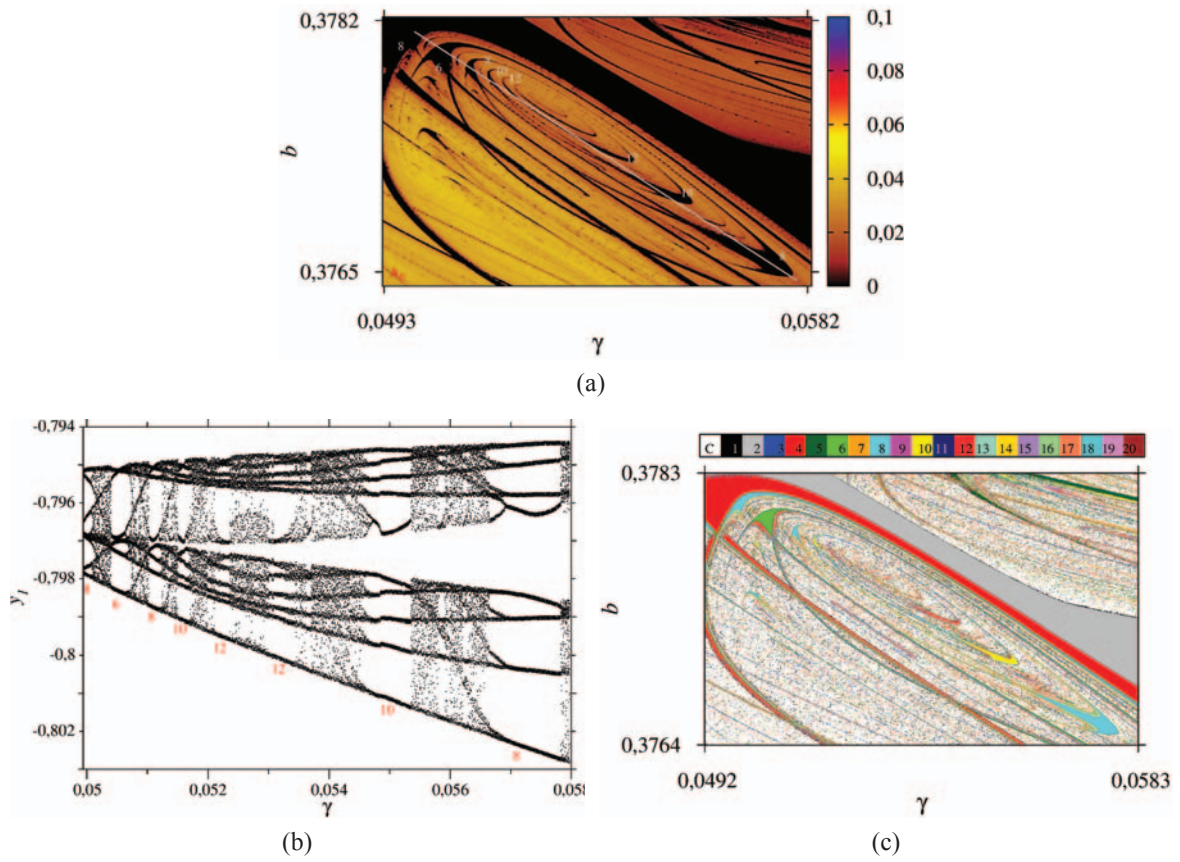


Figura 5.19: (a) Ampliação da caixa vermelha  $A_1$  da Fig. 5.18(a), com a reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação e os períodos das respectivas estruturas. (b) Diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para  $0,0499389 \leq \gamma \leq 0,0579794$ . (c) Diagrama isoperiódico referente a Fig. 5.19(a) com mesmos valores de (a).

A Fig. 5.19 mostra a ampliação das estruturas periódicas encontradas na figura Fig. 5.18(a), bem como sua ordem de formação, onde observamos em (a) a ampliação da caixa vermelha  $A_1$  para  $0,376405 \leq b \leq 0,378223$  e  $0,0492685 \leq \gamma \leq 0,0582814$ , em (b) o diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , com  $0,0499389 \leq \gamma \leq 0,0579794$  para os pontos sob a reta branca da Fig. 5.19(a), e em (c) o diagrama isoperiódico para o mesmo valores dos espaço de parâmetros.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Torus-2)	II (Torus-2)	III (Torus-2)	IV (Caos)
$\lambda_1$	$4,468 \times 10^{-5}$	$5,238 \times 10^{-5}$	$2,969 \times 10^{-5}$	$4,115 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-7,434 \times 10^{-6}$	$-1,212 \times 10^{-5}$	$-2,719 \times 10^{-5}$	$-4,018 \times 10^{-6}$
$\lambda_3$	$-1,065 \times 10^{-2}$	$-4,692 \times 10^{-3}$	$-1,371 \times 10^{-3}$	$-2,14 \times 10^{-2}$
$\lambda_4$	$-7,078 \times 10^{-2}$	$-7,222 \times 10^{-2}$	$-0,108$	$-0,36$

Tabela 5.4: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros Fig. 5.20(a).

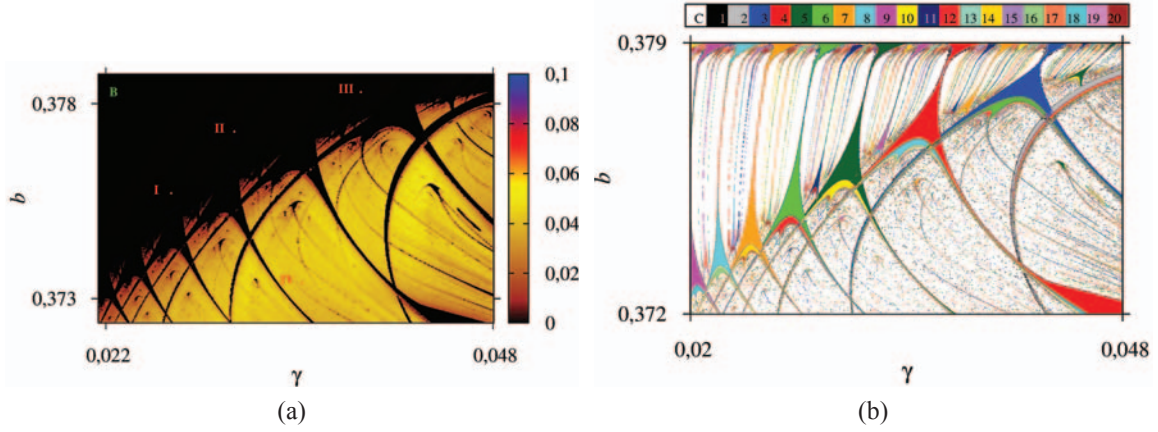


Figura 5.20: (a) Espaço de parâmetros para  $0,372378 \leq b \leq 0,37876$  e  $0,0215067 \leq \gamma \leq 0,0480549$ . (b) Diagrama isoperiódico com mesmos valores de (a). A letra C significa caos.

Na Fig. 5.19(a), é possível observar uma formação de estruturas periódicas semelhantes a encontrada na Fig. 5.15(a), com a combinação dos parâmetros  $a \times \gamma$ . Da mesma forma, observamos as estruturas periódicas imersas em regiões caóticas em camadas, ligando-se aos pares. Quanto ao diagrama isoperiódico vemos que as estruturas individualmente estão em uma cascata de bifurcação do tipo dobramento de período em seu interior, a saber  $4 \rightarrow 8$ ,  $6 \rightarrow 12$  e assim por diante. Novamente os pares de estruturas periódicas, possuem o mesmo período, ou seja, a estrutura de período 8 faz seu par com uma estrutura de período 8, uma estrutura de período 10, seu par apresenta período 10 até que estes pares de estruturas se deformam resultando em uma elipse central. Observa-se que estes pares estão em uma regra de formação do tipo adição de período 2, na sequência  $4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 6$ , confirmado com o diagrama de bifurcação Fig. 5.19(b).

Considerando a Fig. 5.18(b), construímos um diagrama isoperiódico com os mesmos valores do espaços de parâmetros, buscando observar a regra de formação das estruturas periódicas imersas em região de caos, Fig. 5.20(b). Assim cada estrutura individualmente se apresenta com uma regra de formação de dobramento de período em seu interior,  $3 \rightarrow 6$ ,  $4 \rightarrow 8$ ,  $5 \rightarrow 10$ ,  $6 \rightarrow 12$ ,  $7 \rightarrow 14$ ,  $8 \rightarrow 16$  e  $9 \rightarrow 18$ . De forma geral, se dispõe sequencialmente cascatas de bifurcação por adição de período  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ , e entre cada adição, observa-se estruturas menores com períodos variados.

De fato, observamos também que a região preta acima das estruturas periódicas da

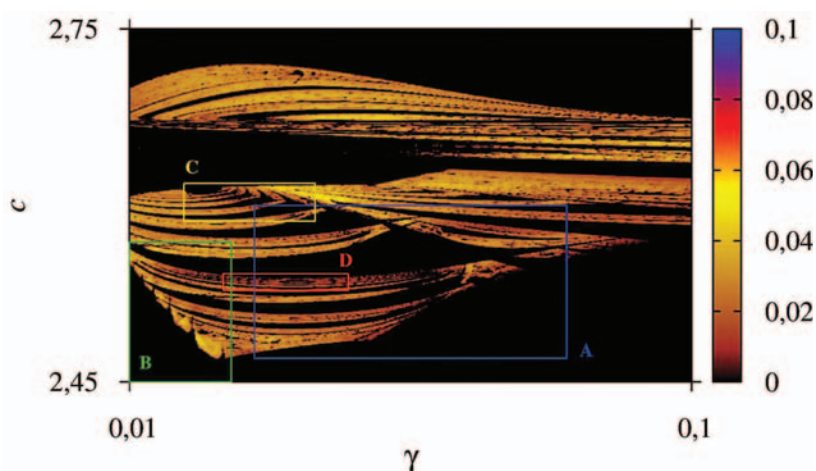


Figura 5.21: Visão geral do espaço de parâmetros  $c \times \gamma$ , sistema (3.7) para  $2,45 \leq c \leq 2,75$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,1$ ,  $a = 0,7$  e  $b = 0,4$ . As intensidades de cores diferentes estão associadas a diferentes valores do expoente de Lyapunov.

Fig. 5.20(b), é representada em branco no seu respectivo diagrama isoperiódico, mostrando que nesta região ocorre a formação de atratores do tipo Torus-2, ou seja, existem dois expoentes de Lyapunov nulos. A Tabela 5.4 mostra o espectro de Lyapunov, para os pontos nas posições (I, II, III e IV) do espaço de parâmetro Fig. 5.20(a), confirmando a existência de atratores do tipo Torus nesta região.

A combinação de parâmetros  $c \times \gamma$  para dois neurônios com acoplamento unidirecional, é mostrada na Fig. 5.21, onde se tem uma visão geral do comportamento dinâmico de  $c \times \gamma$ , com os valores de  $a = 0,7$ ,  $b = 0,4$  para os parâmetros fixos. Observamos, nesta projeção, que o espaço de parâmetros apresenta pouca similaridade com as demais projeções analisadas acima. Para essa observação foram feitas ampliações para melhor visualização das estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, representadas pelas caixas de cor azul, verde, amarela e vermelha.

Na Fig. 5.22, observamos em (a) a ampliação da caixa azul A, para  $2,47 \leq c \leq 2,6$  e  $0,03 \leq \gamma \leq 0,08$ , (b) ampliação da caixa verde B, para  $2,45 \leq c \leq 2,56879$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,0262719$ , (c) ampliação da caixa amarela C, para  $2,58668 \leq c \leq 2,61863$  e  $0,0187320 \leq \gamma \leq 0,0397215$ , e (d) ampliação da caixa vermelha D, para  $2,52789 \leq c \leq 2,54195$  e  $0,025 \leq \gamma \leq 0,045$ . Nesses espaços de parâmetros observamos uma variedade de estruturas periódicas se auto-organizando em vários padrões. Para se ter um maior detalhe dessas organizações,



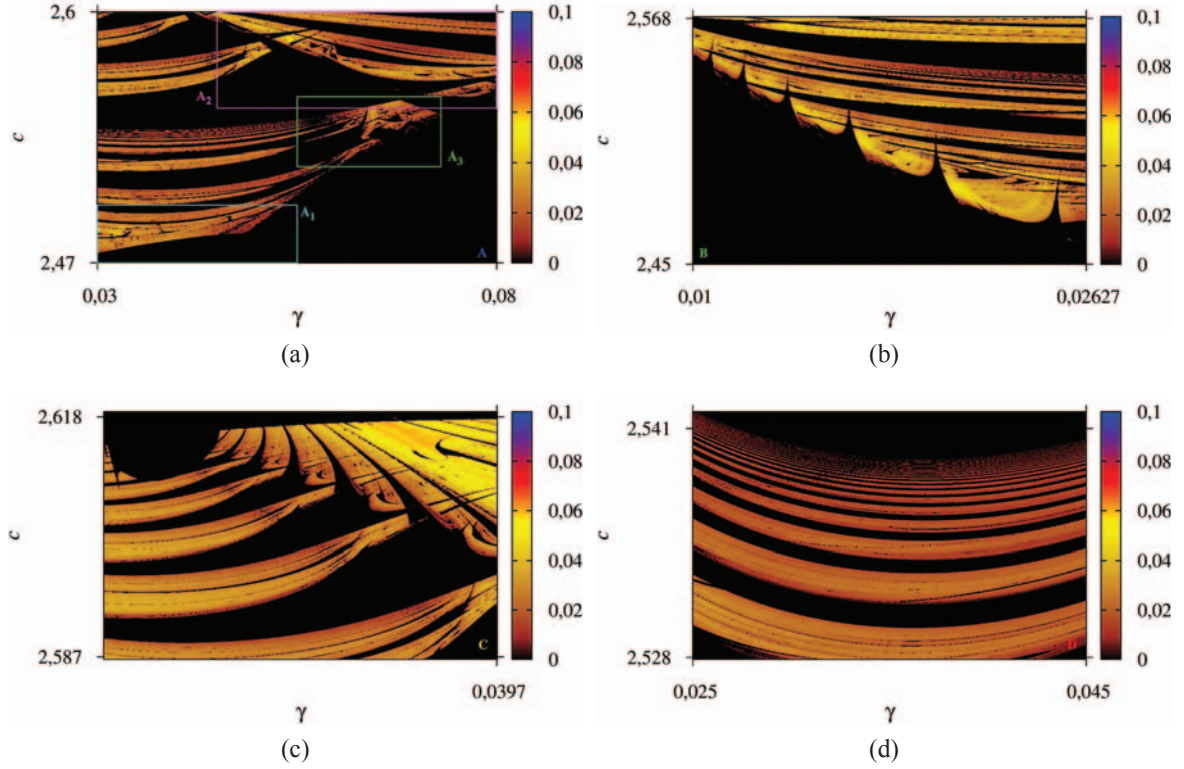


Figura 5.22: (a) Ampliação da caixa azul A da Fig. 5.21. (b) Ampliação da caixa verde B da Fig. 5.21. (c) Ampliação da caixa amarela C da Fig. 5.21. (d) Ampliação da caixa vermelha D da Fig. 5.21.

consideramos a Fig. 5.22(a), no qual ampliamos a caixa ciano  $A_1$  para  $2,47 \leq c \leq 2,5$  e  $0,03 \leq \gamma \leq 0,055$  e a caixa magenta  $A_2$  para  $2,55 \leq c \leq 2,6$  e  $0,045 \leq \gamma \leq 0,08$  mostradas na Fig. 5.23, na qual é possível verificar a existência, de estruturas periódicas auto-organizadas imersas em regiões caóticas.

Na Fig. 5.24 mostramos em (a) a ampliação da caixa verde da Fig. 5.22(a) para  $2,52 \leq c \leq 2,556$  e  $0,055 \leq \gamma \leq 0,073$ , na qual as estruturas periódicas apresentam uma regra de formação, em (b) o diagrama de bifurcação referente a reta de cor branca em (a), em relação a variável  $y_1$  e com  $0,0577246 \leq \gamma \leq 0,0626561$ , em (c) o diagrama de bifurcação referente a reta de cor amarela, em relação a variável  $y_1$ , para  $0,065132 \leq \gamma \leq 0,0677893$ , e em (d) o diagrama de bifurcação referente a reta de cor verde, em relação a variável  $y_1$ , para  $0,066155 \leq \gamma \leq 0,0709235$ .

Em todas estas sequências de estruturas periódicas, observamos que ocorre a ordenação em forma de cascata de bifurcação do tipo adição de período 2 para os períodos das retas branca

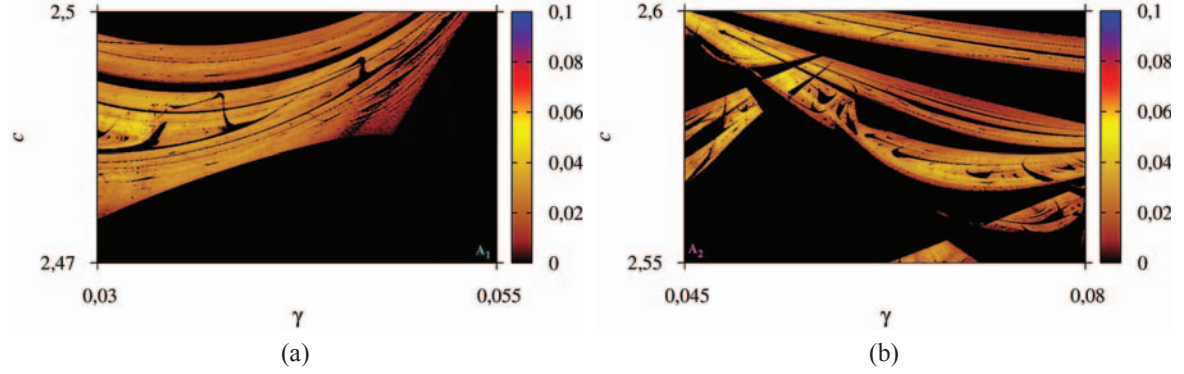


Figura 5.23: Ampliações da Fig. 5.22(a). (a) Caixa ciano  $A_1$ . (b) Caixa magenta  $A_2$ .

na sequência  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9$  e amarela em  $7 \rightarrow 9 \rightarrow 11$  e adição de período 4 na reta verde  $7 \rightarrow 11 \rightarrow 15 \rightarrow 19$ .

Para a análise das Figs. 5.22(b) e 5.25(b), foi construído os diagrama isoperiódico, conforme a Fig. 5.25. Podemos observar na Fig. 5.25(c), que as estruturas periódicas contidas na Fig. 5.25 apresentam uma regra de formação do tipo adição de período, a saber,  $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ .

Contudo, as estruturas individualmente se apresentam em uma regra de formação do tipo dobramento de período em seu interior, a saber,  $4 \rightarrow 8$ ,  $5 \rightarrow 10$ ,  $6 \rightarrow 12$ ,  $7 \rightarrow 14$  e  $8 \rightarrow 16$ . Além disso, a grande região periódica do espaço de parâmetros aparece em branco no diagrama isoperiódico, implicando que nesta região existe a ocorrência de Torus-2, ou seja, os dois maiores expoentes de Lyapunov são nulos. A Tabela 5.5 mostra os valores encontrados, confirmando os valores dos expoentes dos pontos ( $I$ ,  $II$ ,  $III$  e  $IV$ ) do espaço de parâmetros da Fig. 5.25(b).

A Fig. 5.25(d), apresenta estruturas com a regra de formação do tipo adição de período  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$  e cada estrutura individualmente possui uma regra de formação do tipo dobramento de período em seu interior,  $3 \rightarrow 6$ ,  $4 \rightarrow 8$ ,  $5 \rightarrow 10$ ,  $6 \rightarrow 12$ ,  $7 \rightarrow 14$  e  $8 \rightarrow 16$ .

Por fim, na Fig. 5.22(d) verificamos existência, nesta região de ampliação, de estruturas periódicas auto-organizadas imersas em regiões caóticas. Deste modo, os resultados apresentados nesta seção, rede de dois neurônios com acoplamentos bidirecional e unidirecional, o caso unidirecional se apresentou com uma dinâmica mais rica, no sentido da organização e formação

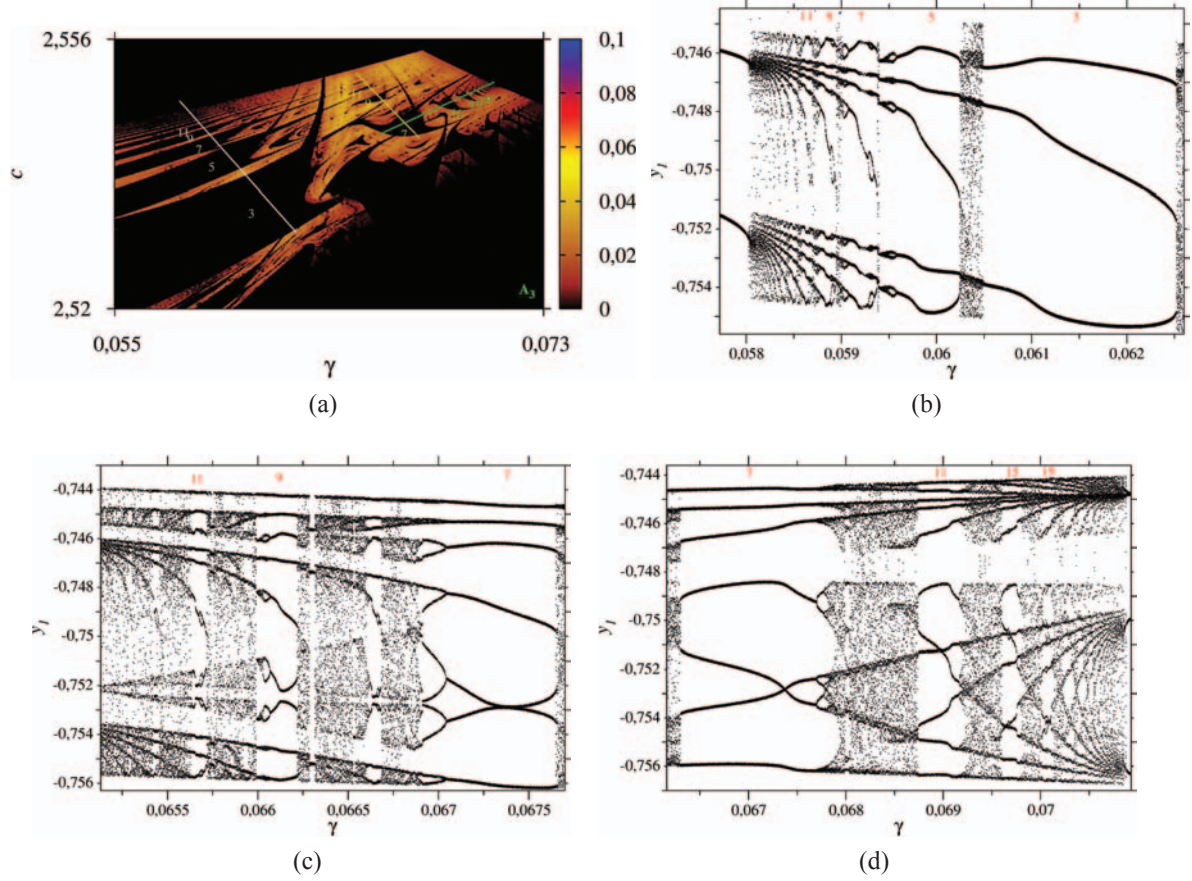


Figura 5.24: (a) Ampliação da caixa verde  $A_3$  para  $2,52 \leq c \leq 2,556$  e  $0,055 \leq \gamma \leq 0,073$ . (b) Diagrama de bifurcação da reta de cor branca para  $0,0577246 \leq \gamma \leq 0,0626561$ . (c) Diagrama de bifurcação da reta de cor amarela para  $0,065132 \leq \gamma \leq 0,0677893$ . (d) Diagrama de bifurcação da reta de cor verde para  $0,066155 \leq \gamma \leq 0,0709235$ .

de estruturas periódicas, do que o caso bidirecional, apesar de ambos os casos possuírem alguns detalhes comuns nos espaços de parâmetros. Podemos inferir que o acoplamento bidirecional perturba mais a dinâmica da rede de dois neurônios, deixando a rede menos complexa, com menos estruturas periódicas se auto-organizando nos espaços de parâmetros.

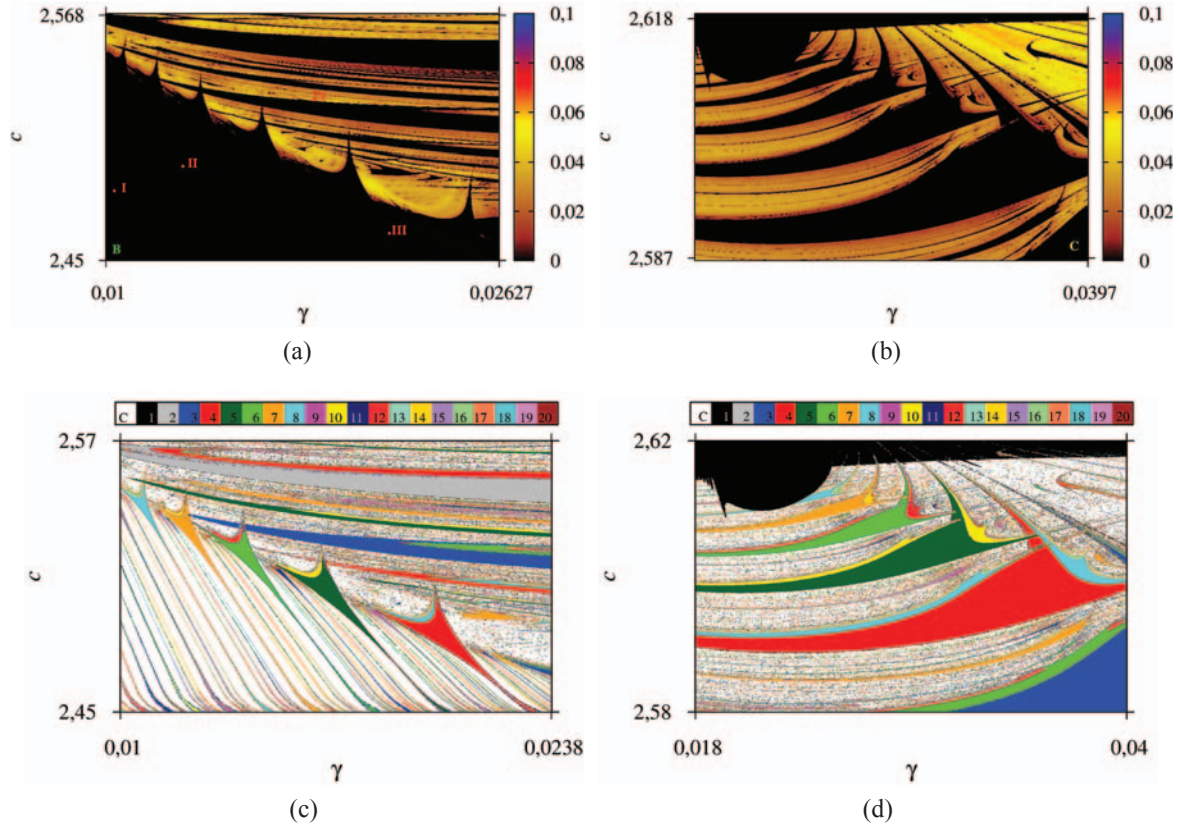


Figura 5.25: (a) Espaço de Parâmetros da caixa verde da Fig. 5.22(b) para  $2,45 \leq c \leq 2,56879$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,0262719$ . (b) Espaço de Parâmetros da caixa verde da Fig. 5.25(b) para  $2,58668 \leq c \leq 2,61863$  e  $0,0187320 \leq \gamma \leq 0,0397215$ . (c) Diagrama isoperiódico referente a figura (a). (d) Diagrama isoperiódico referente a figura (b).

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Torus-2)	II (Torus-2)	III (Torus-2)	IV (Caos)
$\lambda_1$	$1,753 \times 10^{-5}$	$1,633 \times 10^{-5}$	$8,453 \times 10^{-6}$	$3,337 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-1,587 \times 10^{-5}$	$-1,294 \times 10^{-7}$	$-3,105 \times 10^{-5}$	$-1,095 \times 10^{-5}$
$\lambda_3$	$-5,717 \times 10^{-3}$	$-7,763 \times 10^{-3}$	$-2,614 \times 10^{-3}$	$-1,426 \times 10^{-2}$
$\lambda_4$	$-2,301 \times 10^{-2}$	$-3,671 \times 10^{-2}$	$-6,229 \times 10^{-2}$	$-1,081$

Tabela 5.5: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros 5.25(b).



## 5.2 Análise dos resultados para uma rede de três neurônios acoplados

### 5.2.1 Acoplamento bidirecional para os parâmetros $a \times \gamma$ , $b \times \gamma$ e $c \times \gamma$

Para o estudo de uma rede de três neurônios, utilizando o modelo de Fitzhugh-Nagumo, consideramos um acoplamento bidirecional para as três unidades neurais, da mesma forma que fizemos para uma rede com dois neurônios, nas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . O trânsito das informações ocorre em dois sentidos, ou seja, o neurônio 1 se comunica com os neurônios 2 e 3, o neurônio 2 se comunica com os neurônios 1 e 3 e consequentemente o neurônio 3 se comunica com 1 e 2, Fig. 3.3.

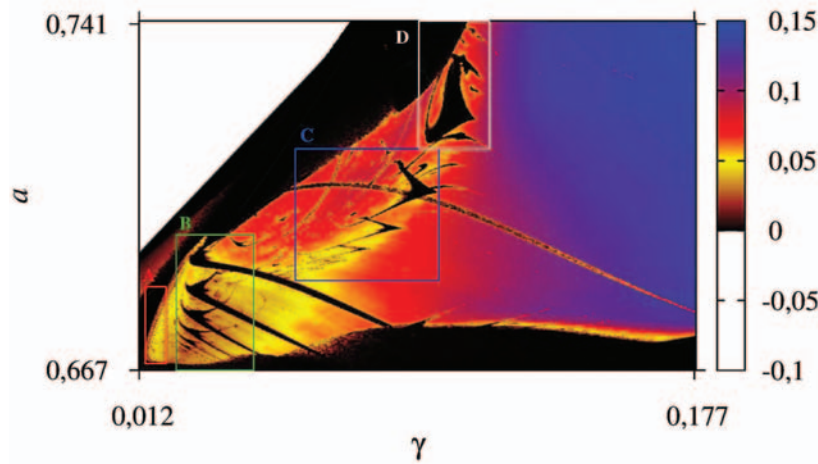


Figura 5.26: Visão geral do espaço de parâmetros do sistema (3.6) para  $0,667 \leq a \leq 0,741668$  e  $0,012 \leq \gamma \leq 0,177514$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do expoente de Lyapunov.

As condições iniciais apresentadas na Tabela 5.1 e os parâmetros fixos da Tabela 5.2 foram utilizados, assim como para o caso de dois neurônios. Uma rede de três neurônios produz um conjunto de seis equações diferenciais. O diagrama isoperiódico, uma das ferramentas para a verificação dos períodos e rotas para o caos, não foi utilizado devido ao tempo computacional necessário para a construção de cada figura. Desta forma, foi realizado apenas o estudo dos espaço de parâmetros e diagramas de bifurcação.

Iniciando a análise pelos resultados da combinação  $a \times \gamma$ , o espaço de parâmetros mos-

trado na Fig. 5.26 é visão geral do comportamento dinâmico de uma rede de três neurônios, com acoplamento bidirecional, do parâmetro  $a$  pela intensidade de acoplamento  $\gamma$ , com os valores de  $b = 0, 4$ ,  $c = 2, 0$  para os parâmetros fixos. Em uma primeira análise, observamos que para este caso, apareceu uma grande região branca, que significa região de ponto fixo, quando o maior expoente de Lyapunov é menor que zero. Outra observação é que para valores do parâmetro intensidade de acoplamento  $\gamma \leq 0,122$ , as estruturas periódicas são destruídas, surgindo uma grande região de caos (em azul).

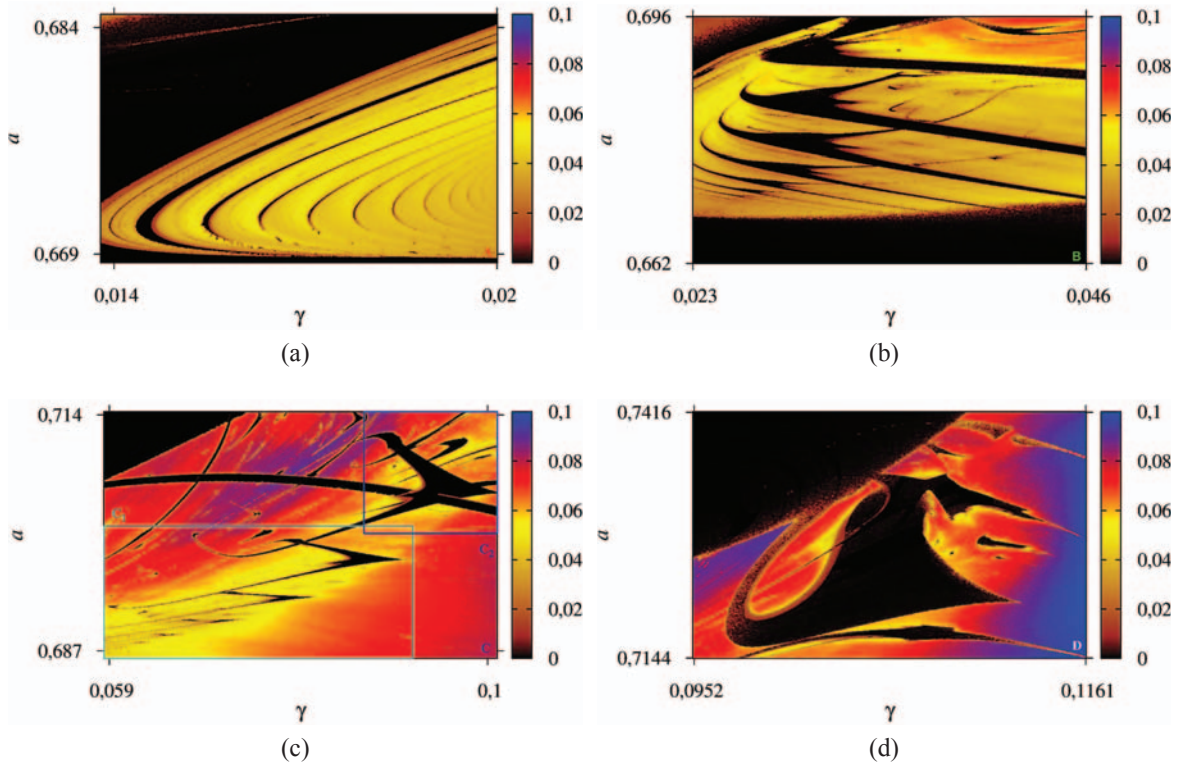


Figura 5.27: (a) Ampliação da caixa vermelha **A** da Fig. 5.26. (b) Ampliação da caixa verde **B** da Fig. 5.26. (c) Ampliação da caixa azul **C** da Fig. 5.26. (d) Ampliação da caixa branco **D** da Fig. 5.26.

Com base nesta figura, foram feitas ampliações para análise, representadas pelas caixas vistas na Fig. 5.26, para melhor visualizar as regiões periódicas, suas ordens de formação e regiões caóticas. A Fig. 5.27, mostra as figuras das quatro caixas da Fig. 5.26. Em (a) a ampliação da caixa vermelha **A** para  $0,668436 \leq a \leq 0,68488$  e  $0,0137915 \leq \gamma \leq 0,0200068$ , em (b) a ampliação da caixa verde **B** para  $0,662 \leq a \leq 0,696$  e  $0,023 \leq \gamma \leq 0,046$ , em (c) a ampliação da caixa azul **C** para  $0,686144 \leq a \leq 0,71436$  e  $0,05843 \leq \gamma \leq 0,101038$  e em (d)

a ampliação da caixa branca **D** para  $0,71436 \leq a \leq 0,741668$  e  $0,0951411 \leq \gamma \leq 0,116128$ .

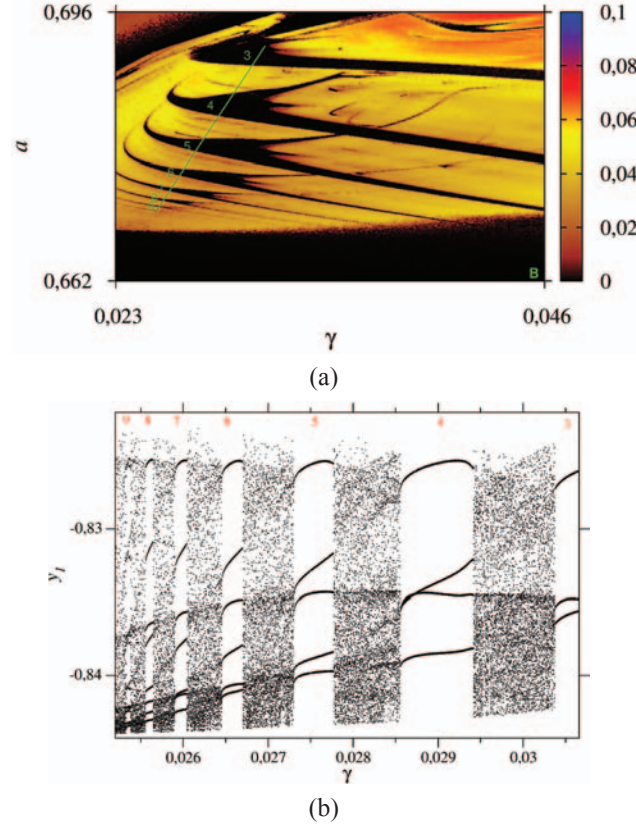


Figura 5.28: (a) Espaço de parâmetros da Fig. 5.27(b) com reta sobre a qual construímos um diagrama de bifurcação, e seus respectivos períodos. (b) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para os pontos ao longo da reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,025 \leq \gamma \leq 0,0307$ .

Na Fig. 5.27(a), observamos estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, de forma similar ao mostrado na Fig. 5.2(a), considerando o modelo de rede de dois neurônios acoplados bidirecionalmente, mas com as estruturas com maior deformação. Na Fig. 5.27(b) observamos uma sequência de estruturas de forma e organização também semelhantes ao caso de 2 neurônios acoplados bidirecionalmente, Fig. 5.2(b). Para as outras duas ampliações, Figs. 5.27(c) e 5.27(d), as estruturas periódicas são mais deformadas para valores mais altos de intensidade de acoplamento,  $\gamma$ .

A partir da ampliação da caixa B, mostrada na Fig. 5.27(b), construímos um diagrama de bifurcação para visualização das estruturas periódicas imersas em regiões caóticas e sua rota para o caos. A Fig. 5.28 mostra em (a) o espaço de parâmetros com a reta usada para

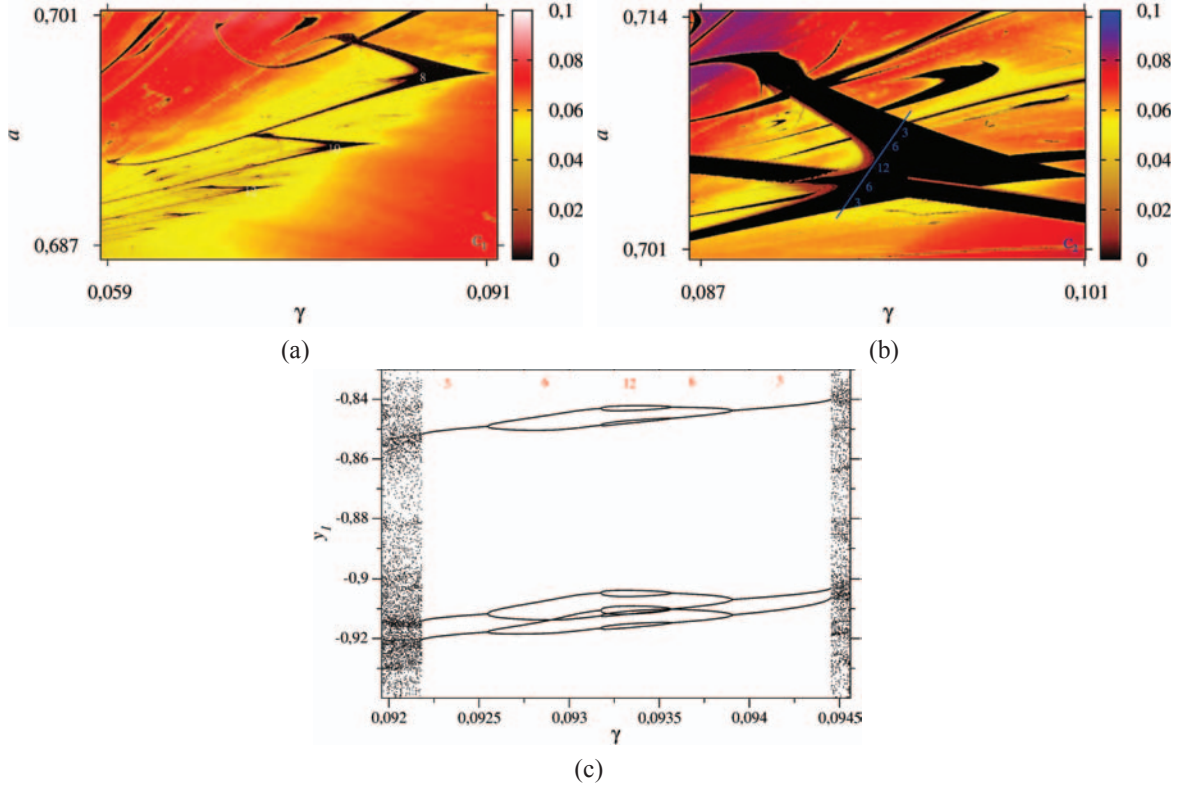


Figura 5.29: (a) Ampliação da caixa ciano da Fig. 5.27(c), para  $0,686144 \leq a \leq 0,701283$  e  $0,0584300 \leq \gamma \leq 0,0918922$ . (b) Ampliação da caixa azul da Fig. 5.27(c), para  $0,700441 \leq a \leq 0,71436$  e  $0,0865861 \leq \gamma \leq 0,101038$ . (c) Diagrama de bifurcação ao longo da reta na Fig. 5.29(b), com relação a variável  $y_1$ , para  $0,092 \leq \gamma \leq 0,0945$ .

construção do diagrama bifurcação (b), em relação a variável  $y_1$ , para  $0,025 \leq \gamma \leq 0,0307$ . Observamos através do diagrama de bifurcação, considerando este espaço de parâmetros que as estruturas periódicas seguem uma cascata de bifurcação do tipo adição de período, ou seja,  $9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ . Também através do diagrama de bifurcação e pela direção em que ele foi construído, notamos que não há cascata de bifurcação por dobramento de período dentro da estrutura e nesta direção. No caso em estudo, como mostra a Fig. 5.28, parece haver bifurcação por crise dentro das estruturas nesta direção.

Para a ampliação C, mostrada na Fig. 5.27(c), foram realizadas duas novas ampliações mostradas na Fig. 5.29. A partir desta figura foram gerados os diagramas de bifurcação sobre as estruturas para analisar suas periodicidades. Na Fig 5.29(a) observamos a ampliação da caixa ciano  $C_1$  da Fig. 5.27(c), para  $0,686144 \leq a \leq 0,701283$  e  $0,0584300 \leq \gamma \leq 0,0918922$ ,



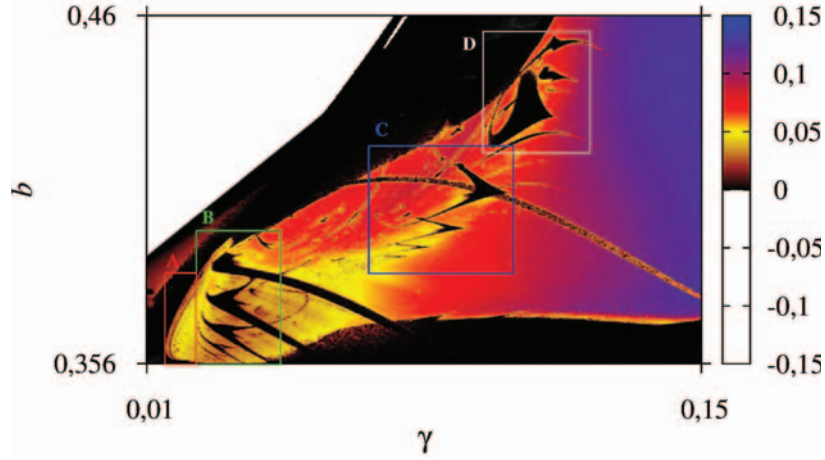


Figura 5.30: Visão geral do espaço de parâmetros do sistema (3.6) para  $0,356 \leq b \leq 0,46$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,15$ ,  $a = 0,7$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do expoente de Lyapunov.

onde é possível se observar a formação de estruturas periódicas com longos ramos os quais se ligam a uma outra estrutura. Os diagramas de bifurcação desta região não apresentam uma definição nítida dificultando a visualização dos períodos das estruturas. Por isso, foram analisadas as séries temporais em posições fixas dentro das estruturas para contagem dos períodos e verificamos que as estruturas se apresentam por adição de período  $8 \rightarrow 10 \rightarrow 12$ .

Na Fig 5.29(b), temos a ampliação da caixa azul  $C_2$  da Fig. 5.27(c) para  $0,700441 \leq a \leq 0,71436$  e  $0,0865861 \leq \gamma \leq 0,101038$ , onde se observa uma das estruturas de forma isolada e com o auxílio de uma reta traçada sobre esta estrutura, construímos um diagrama de bifurcação. A partir deste diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para  $0,092 \leq \gamma \leq 0,0945$ , mostrado na Fig. 5.29(c), observamos que esta estrutura contém mais de um período, e eles se dispõem em uma bifurcação do tipo dobramento de período, crescente e decrescente,  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ . Através da observação das Figs. 5.29(a) e 5.29(b), concluímos que dentro das estruturas também ocorrem bifurcações do tipo dobramento de período. Portanto, das Figs. 5.28 e 5.29, podemos concluir que, dependendo da direção tomada para construir diagramas de bifurcação, dentro das estruturas periódicas existem duas rotas de bifurcação para o caos, quais seja: por dobramento de período e por crise.

Como última análise do conjunto de figuras dos parâmetros  $a \times \gamma$ , temos a ampliação da caixa branca D da Fig. 5.26, mostrada na Fig. 5.27(d). Podemos observar estruturas periódicas

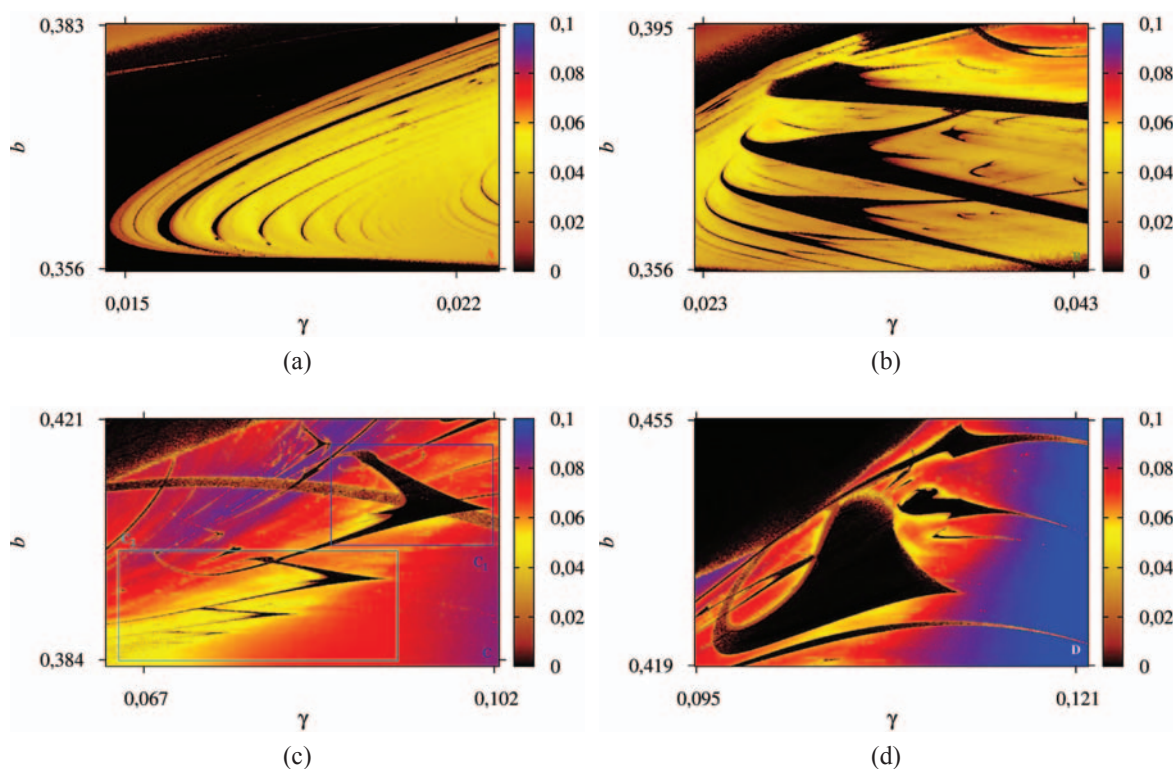


Figura 5.31: (a) Ampliação da caixa vermelha **A** da Fig. 5.30. (b) Ampliação da caixa verde **B** da Fig. 5.30. (c) Ampliação da caixa azul **C** da Fig. 5.30. (d) Ampliação da caixa branca **D** da Fig. 5.30.

de formato diferente daquelas observadas anteriormente e de tamanho limitado no espaço de parâmetros.

Passamos agora para a análise do espaço de parâmetros  $b \times \gamma$ . A Fig. 5.30 representa a visão geral do comportamento dinâmico de uma rede de três neurônios, com acoplamento bidirecional, da combinação do parâmetro  $b$  com a intensidade de acoplamento  $\gamma$  com os valores de  $b = 0, 4$ ,  $c = 2, 0$  para os parâmetros fixos. As caixas coloridas representam as ampliações feitas nesta figura.

Notamos que este espaço de parâmetro é parecido com o espaço gerado pela combinação dos parâmetros  $a$  e  $\gamma$ , exceto em algumas deformações que marcam a diferença entre a troca dos parâmetros  $a$  por  $b$ . Assim foram feitas ampliações em regiões semelhantes com as regiões encontradas em  $a \times \gamma$ , buscando não apenas observar o comportamento dinâmico destas regiões, mas também, observar as diferenças existentes entre as combinações de  $a$  com  $\gamma$  e  $b$  com  $\gamma$ .

Assim, a Fig. 5.31 mostra as caixas de ampliações referentes a Fig. 5.30. Neste con-

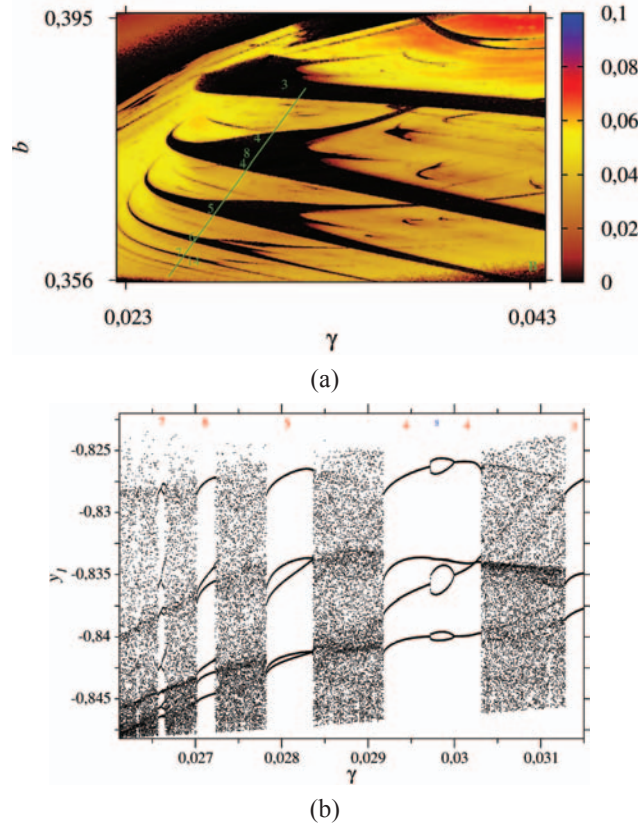


Figura 5.32: (a) Espaço de parâmetros da Fig. 5.31(b) com reta do diagrama de bifurcação e seus respectivos períodos. (b) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para pontos sobre a reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,0261 \leq \gamma \leq 0,0316$ .

junto observamos em (a) a ampliação da caixa vermelha **A**, para  $0,355734 \leq b \leq 0,383171$  e  $0,0145964 \leq \gamma \leq 0,0229016$ , em (b) a ampliação da caixa verde **B**, para  $0,355734 \leq b \leq 0,395739$  e  $0,0225529 \leq \gamma \leq 0,0437598$ , em (c) a ampliação da caixa azul **C**, para  $0,383002 \leq b \leq 0,421102$  e  $0,0632073 \leq \gamma \leq 0,102514$ , e em (d) a ampliação da caixa branca **D**, para  $0,418887 \leq b \leq 0,455215$  e  $0,0949066 \leq \gamma \leq 0,121851$ . Na Fig. 5.31(a), observamos uma região semelhante ao da Fig. 5.27(a) resultado da combinação de  $a$  com  $\gamma$ .

Observamos também que a Fig. 5.31(b) apresenta semelhança com a Fig. 5.27(b) para  $a \times \gamma$ , com estruturas periódicas sequenciais e para analisar melhor este comportamento, construímos um diagrama de bifurcação ao longo de uma reta cortando essas estruturas, mostrando a periodicidade das mesmas. Assim, mostramos na Fig. 5.32, (a) o espaço de parâmetros com a reta usada para construção do diagrama bifurcação e (b) o diagrama de bifurcação em relação

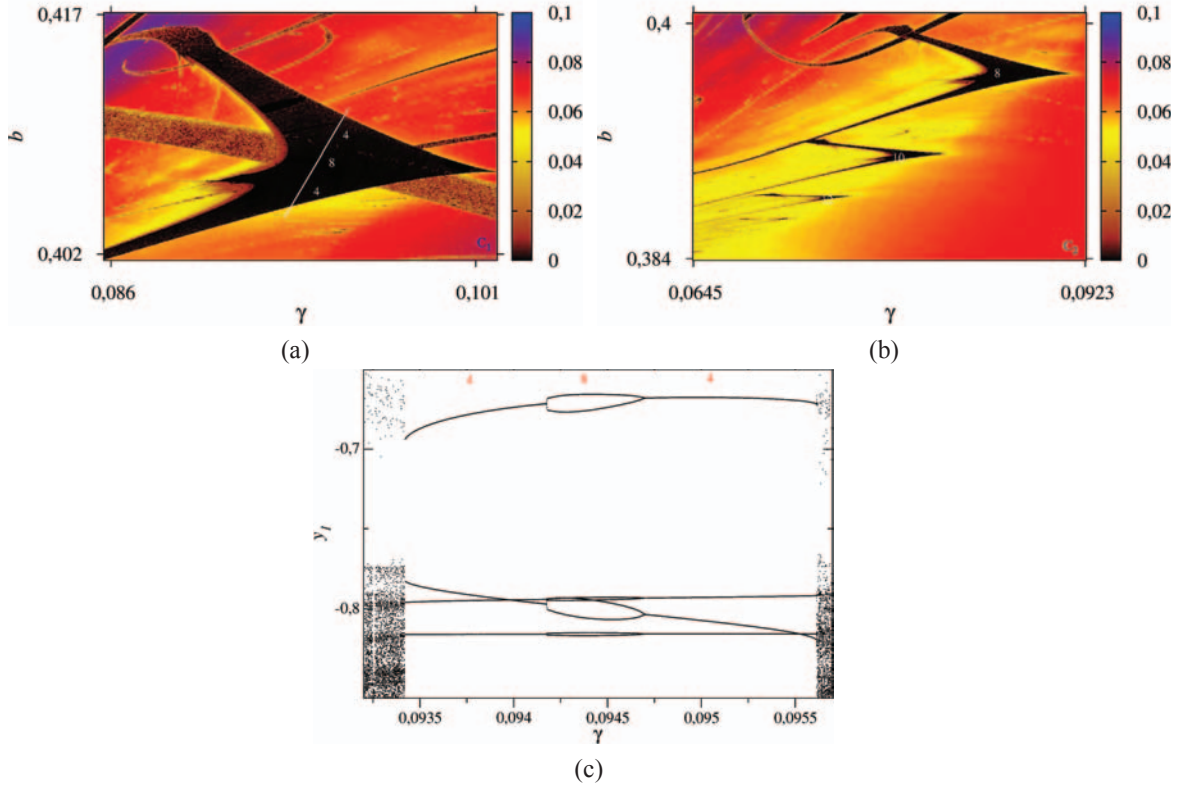


Figura 5.33: (a) Ampliação da caixa azul da Fig. 5.31(c), para  $0,401609 \leq b \leq 0,417115$  e  $0,0857138 \leq \gamma \leq 0,10188$ . (b) Ampliação da caixa ciano da Fig. 5.31(c), para  $0,383888 \leq b \leq 0,400723$  e  $0,0644753 \leq \gamma \leq 0,0923707$ . (c) Diagrama de bifurcação referente a Fig. 5.33(a) com relação a variável  $y_1$ , para os pontos sobre a reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,092 \leq \gamma \leq 0,0945$ .

a variável  $y_1$ , para  $0,0261 \leq \gamma \leq 0,0316$ . Podemos observar que dentro deste espaço de parâmetros as estruturas periódicas que formam a sequência sobre a reta verde estão numa cascata de bifurcação do tipo adição de período, ou seja,  $7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$  e também observamos que nas estruturas de período 7 e 4 ocorre um dobramento de período em suas extremidades,  $7 \rightarrow 14$  e  $4 \rightarrow 8 \rightarrow 4$ .

A Fig 5.33(a), mostra a ampliação da caixa azul  $C_1$  da Fig. 5.31(c), para  $0,401609 \leq b \leq 0,417115$  e  $0,0857138 \leq \gamma \leq 0,10188$ . Observamos uma estrutura similar aos parâmetros  $a \times \gamma$  na Fig. 5.29(b). A análise da Fig. 5.33(c), diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para  $0,092 \leq \gamma \leq 0,0945$ , mostra que esta estrutura contém mais de um período, que se dispõe em uma bifurcação do tipo dobramento de período,  $4 \rightarrow 8 \rightarrow 4$ , a mesma regra de formação encontrada em Fig. 5.28(b) mas com um período maior.

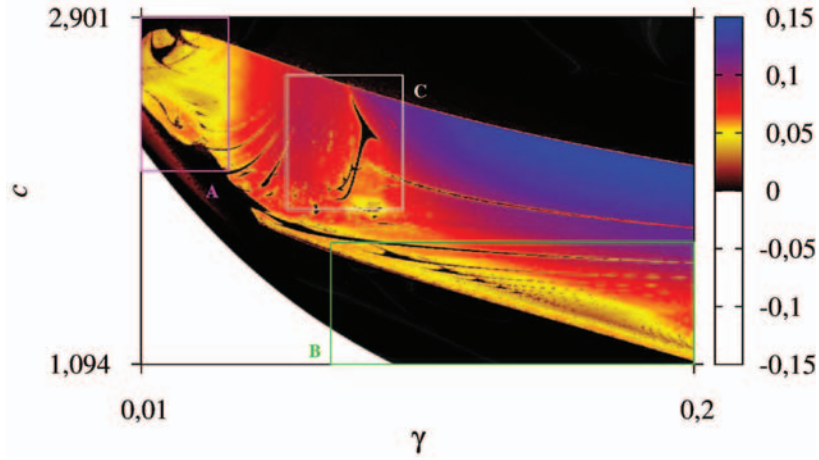


Figura 5.34: Visão geral do espaço de parâmetros do sistema (3.6) para  $1,09325 \leq c \leq 2,90198$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,2$ ,  $a = 0,7$  e  $b = 0,4$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do expoente de Lyapunov.

A Fig. 5.33(b) é a ampliação da caixa ciano  $C_2$  da Fig. 5.31(c), para  $0,383888 \leq a \leq 0,400723$  e  $0,0644753 \leq \gamma \leq 0,0923707$ . As estruturas são semelhantes às da Fig 5.29(a), onde se pode observar a formação de estruturas periódicas com longos ramos que se ligam a outra estrutura. O diagrama de bifurcação desta região não apresenta boa definição dificultando a visualização dos períodos das estruturas. Aplicando a mesma estratégia anterior, foram analisadas as séries temporais de posições fixas dentro das estruturas para contagem de períodos e se verificou que os períodos se formam por adição de período  $8 \rightarrow 10 \rightarrow 12$ .

Por último, temos no espaço de parâmetros  $b \times \gamma$  a ampliação mostrada na Fig. 5.31(d), que, mais uma vez, é bem semelhante ao caso  $a \times \gamma$ , Fig. 5.27(d).

Passamos agora para o espaço de parâmetros  $c \times \gamma$ . A Fig. 5.34 representa a visão geral do comportamento dinâmico de uma rede de três neurônios, com acoplamento bidirecional, da combinação do parâmetro  $c$  com a intensidade de acoplamento  $\gamma$ , para os valores de  $a = 0,7$ ,  $b = 0,4$ , os parâmetros fixos. As caixas coloridas representam as ampliações feitas nesta figura.

A partir da visão geral, caixas de ampliações foram construídas para melhor visualizar das estruturas periódicas. A Fig. 5.35 mostra em (a) a caixa de ampliação magenta A, para  $2,1 \leq c \leq 2,9$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,04$ , em (b) a caixa de ampliação verde B, para  $1,07 \leq c \leq 1,728$  e  $0,0753 \leq \gamma \leq 0,25$ , e em (c) a caixa de ampliação branca C, para  $1,9 \leq c \leq 2,6$  e  $0,06 \leq \gamma \leq 0,1$ . De maneira geral observamos que as estruturas periódicas imersas na



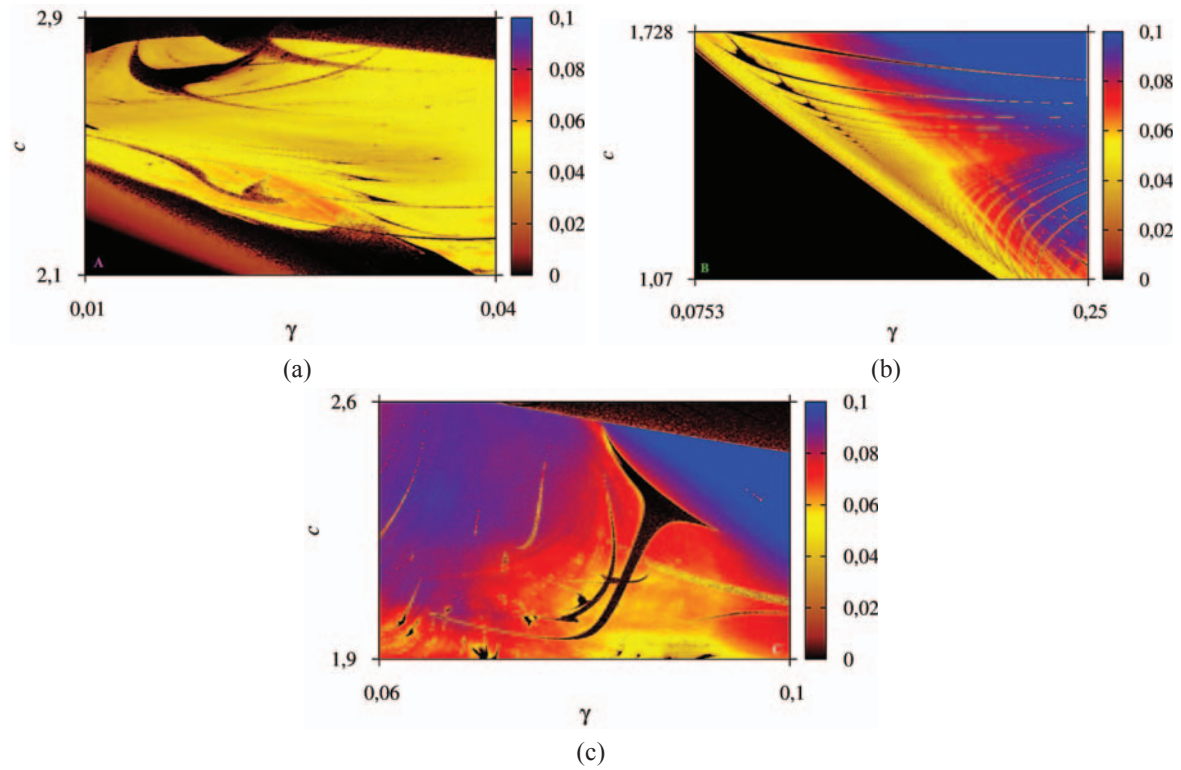


Figura 5.35: (a) Ampliação da caixa magenta **A** da Fig. 5.34. (b) Ampliação da caixa verde **B** da Fig. 5.34. (c) Ampliação da caixa branca **C** da Fig. 5.34.

região de caos apresentam formato que lembra espinhos, por exemplo a estrutura principal da Fig. 5.35(c) e suas vizinhas. Nos outros casos, Figs. 5.35(a) e 5.35(b) as estruturas periódicas diferem daquelas vistas anteriormente, por estarem achatadas devido à projeção escolhida.

### 5.2.2 Acoplamento unidirecional para os parâmetros $a \times \gamma$ , $b \times \gamma$ e $c \times \gamma$

Utilizamos também, para rede composta por três neurônios, conforme o modelo de Fitzhugh-Nagumo, um acoplamento unidirecional das unidades neurais, para observar seu comportamento dinâmico. O acoplamento foi aplicado nas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , idêntico ao realizado para uma rede de dois neurônios unidirecional. A condução das informações ocorre em apenas um sentido, o neurônio 1 se comunica com os neurônios 2, o neurônio 2 se comunica com os neurônios 3 e consequentemente o neurônio 3 se comunica com 1, Fig. 3.4.

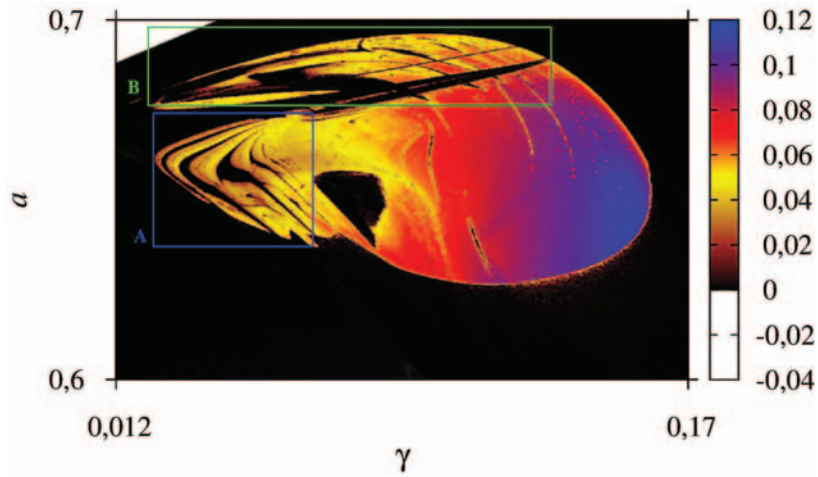


Figura 5.36: Visão geral do espaço de parâmetros do sistema (3.8) para  $0,6 \leq a \leq 0,7$  e  $0,012 \leq \gamma \leq 0,17$ ,  $b = 0,4$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores diferentes estão associadas a diferentes valores do Expoente de Lyapunov.

As condições iniciais utilizadas são apresentadas na Tabela 5.1 e parâmetros fixos na Tabela 5.2. Para esta rede de três neurônios, temos um conjunto de seis equações diferenciais. Não foram gerados diagramas isoperiódicos para verificação dos períodos e rotas para o caos, devido ao grande tempo computacional para construção de cada figura. Desta forma, utilizamos o estudo dos espaços de parâmetros e dos diagramas de bifurcação. Além disso, neste caso podemos observar regiões de hipercaos, denotado pela ocorrência de dois expoentes de Lyapunov positivos. Para melhor observar este fenômeno, foram construídos também espaços de parâmetros em relação ao segundo maior expoente de Lyapunov positivo.

Iniciamos as análises pelo conjunto de resultados da combinação  $a \times \gamma$ . Este espaço de parâmetros pode ser visualizado na Fig. 5.36, com uma visão geral do comportamento dinâmico

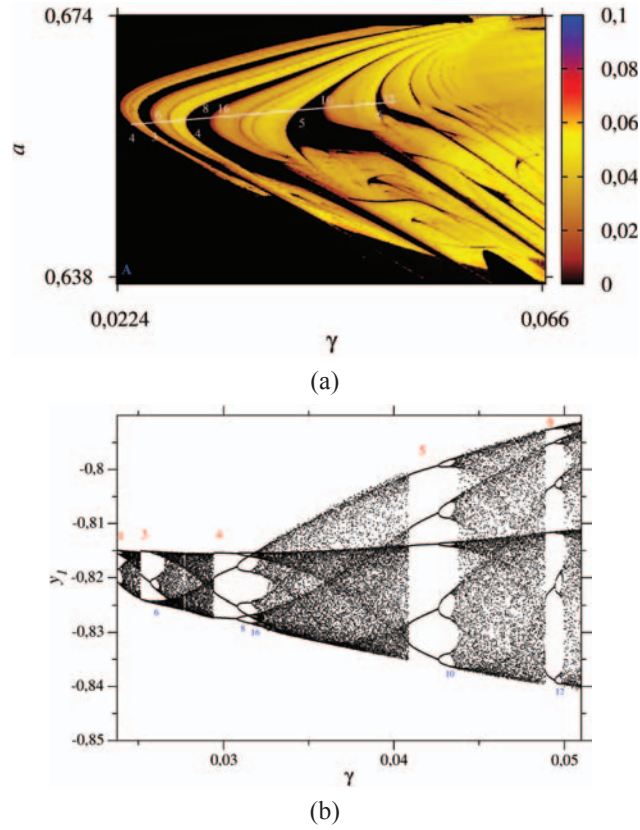


Figura 5.37: (a) Ampliação da caixa azul **A** da Fig. 5.36, para  $0,637038 \leq a \leq 0,6741$  e  $0,0223211 \leq \gamma \leq 0,0663242$  com reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação, e seus respectivos períodos. (b) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para pontos ao longo da reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,0237 \leq \gamma \leq 0,051108$ .

de uma rede de três neurônios, com acoplamento unidirecional, do parâmetro  $a$  pela intensidade de acoplamento  $\gamma$ , com os valores de  $b = 0,4$ ,  $c = 2,0$  para os parâmetros fixos. Podemos fazer alguns comentários com relação às diferenças entre este caso, rede de 3 neurônios com acoplamentos unidirecional e o bidirecional (seção 5.2.1), Fig. 5.26. Observamos que a região de caos para o caso unidirecional, Fig. 5.36, é confinada em uma grande região periódica entre os limites de 0,012 e 0,17 para o parâmetro intensidade de acoplamento  $\gamma$ , ao contrário do caso bidirecional, Fig. 5.26, na qual a região caótica é aberta e se estende além do valor de 0,177 para o mesmo parâmetro,  $\gamma$ . Observamos também que a região de pontos fixos, região branca, é menor para o acoplamento unidirecional, Fig. 5.36. Além disso, notamos uma pequena similaridade na região dentro da caixa azul da Fig. 5.36, caso unidirecional, com a região dentro das caixas vermelha e verde da Fig. 5.26, caso bidirecional.



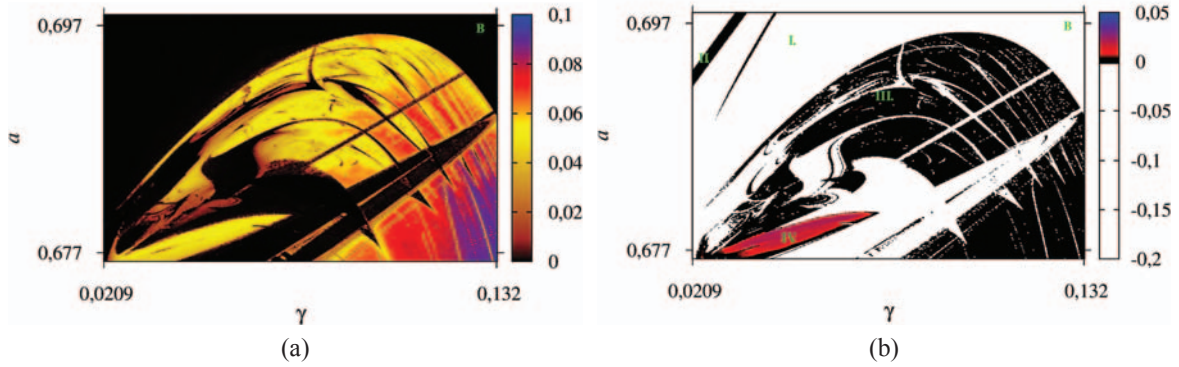


Figura 5.38: (a) Ampliação da caixa verde da Fig. 5.36. (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente. Sendo a cor branca para expoentes negativos, a cor preta para expoentes nulos e a variação de vermelho ao azul para os expoentes positivos.

Com base na visualização geral do espaço de parâmetros da Fig. 5.36, foram feitas ampliações das estruturas periódicas imersas em regiões caóticas. A Fig. 5.37, mostra em (a) a ampliação da caixa azul A, para  $0,637038 \leq a \leq 0,6741$  e  $0,0223211 \leq \gamma \leq 0,0663242$ , com a reta usada para construção do diagrama de bifurcação, e os respectivos períodos das estruturas, e em (b) o diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para pontos sobre a reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,0237 \leq \gamma \leq 0,051108$ .

Nestas figuras observamos que as estruturas periódicas, se ordenam em uma cascata de bifurcação do tipo adição de período,  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$  e cada estrutura apresenta uma cascata de bifurcação do tipo dobramento de período em uma de suas extremidades  $3 \rightarrow 6$ ,  $4 \rightarrow 8$ ,  $5 \rightarrow 10$  e  $6 \rightarrow 12$ .

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Torus-2)	III (Caos)	IV (Hipercaos)
$\lambda_1$	$2,567 \times 10^{-5}$	$-8,337 \times 10^{-4}$	$4,933 \times 10^{-2}$	$4,836 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-3,359 \times 10^{-2}$	$-9,168 \times 10^{-4}$	$1,148 \times 10^{-5}$	$1,54 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	$-3,367 \times 10^{-2}$	$-5,244 \times 10^{-3}$	$-1,22 \times 10^{-2}$	$-5,073 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	$-0,357$	$-5,340 \times 10^{-3}$	$-0,358$	$-0,347$
$\lambda_5$	$-0,709$	$-2,190 \times 10^{-2}$	$-0,723$	$-0,501$
$\lambda_6$	$-1,458$	$-2,224 \times 10^{-2}$	$-2,261$	$-2,427$

Tabela 5.6: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros 5.38(b).

A segunda ampliação da Fig. 5.36, se refere a caixa verde para  $0,67623 \leq a \leq 0,697955$  e  $0,0208901 \leq \gamma \leq 0,13215$ . A Fig. 5.38, podemos encontrar em (a) o espaço de parâmetros da ampliação da caixa verde referente ao maior expoente de Lyapunov positivo, e em (b) o es-

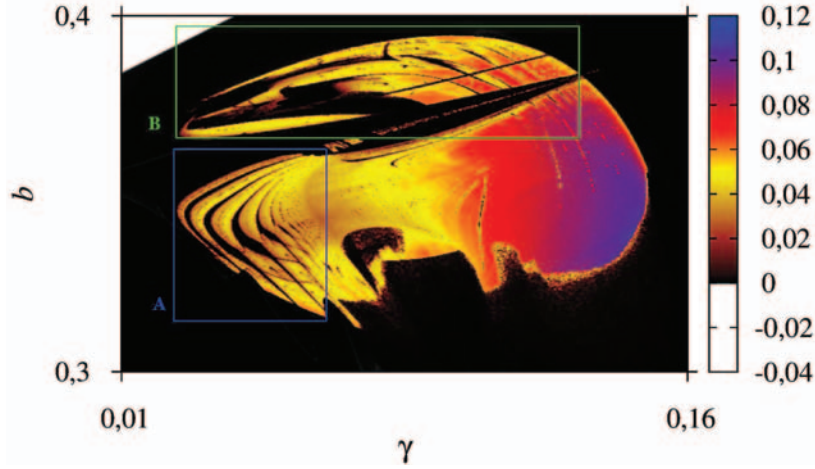


Figura 5.39: Visão geral do espaço de parâmetros do sistema (3.8), para  $0,3 \leq b \leq 0,4$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,16$ ,  $a = 0,7$  e  $c = 2,0$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do expoente de Lyapunov.

paço de parâmetro referente ao segundo maior expoente de Lyapunov positivo. No qual, a cor branca representa os expoentes de Lyapunov negativos, a cor preta os expoentes de Lyapunov nulos e as cores vermelha e azul para os expoentes de Lyapunov positivo. Esta figura mostra a existência na região em vermelho, de um segundo expoente positivo, ou seja, região de hipercaos. Esta região hipercaótica está confinada em uma pequena porção do espaço de parâmetros  $a \times \gamma$ . A Tabela 5.6, mostra o espectro de Lyapunov de alguns pontos da Fig. 5.38(b). Portanto, para uma rede de três neurônios com acoplamento unidirecional, temos uma dinâmica muito rica, estando presentes quatro tipos de comportamento no mesmo espaço de parâmetros, quais sejam: periódico, quase-periódico (Torus-2), caótico e hipercaótico. No caso de 3 neurônios bidirecional, Fig. 5.26, o comportamento hipercaótico não foi encontrado.

A Fig. 5.39, mostra uma visão geral do espaço de parâmetro da combinação de  $b$  pela intensidade de acoplamento unidirecional  $\gamma$ . Do mesmo modo do caso bidirecional, esta projeção se assemelha à projeção anterior,  $a \times \gamma$ . Além disso, a comparação deste espaço de parâmetros com o caso bidirecional, Fig. 5.30, é análoga com aquela feita anteriormente, para o espaço  $a \times \gamma$ . A partir desta figura, foram construídas duas caixas de ampliação para observar as estruturas periódicas e suas regras de formação.

De forma similar ilustrado na Fig. 5.37, a Fig. 5.40 mostra em (a) a ampliação da caixa azul A, para  $0,314275 \leq b \leq 0,362581$  e  $0,0238741 \leq \gamma \leq 0,0642907$  e a reta usada

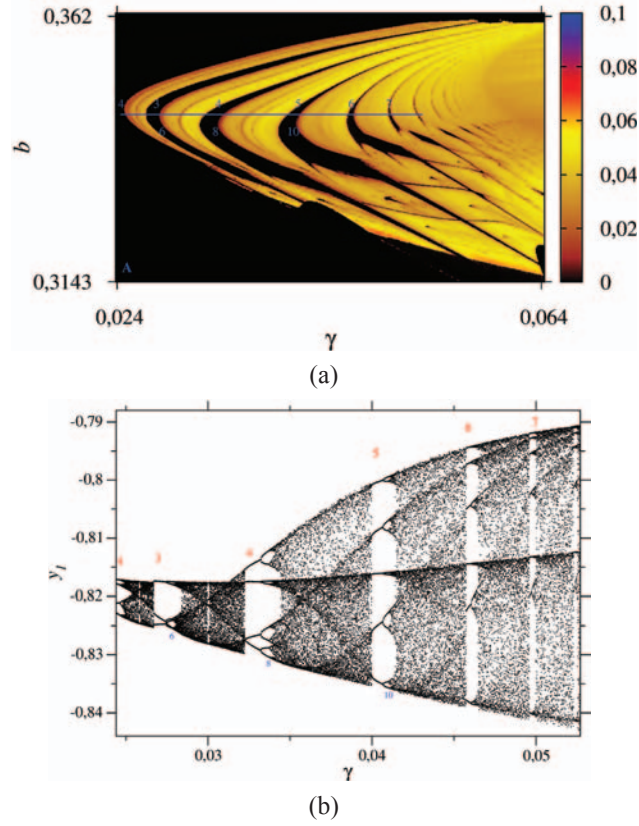


Figura 5.40: (a) Ampliação da caixa azul **A** da Fig. 5.39, para  $0,314275 \leq b \leq 0,362581$  e  $0,0238741 \leq \gamma \leq 0,0642907$  com a reta sobre a qual construímos o diagrama de bifurcação e seus respectivos períodos. (b) Diagrama de bifurcação com relação a variável  $y_1$ , para pontos sobre a reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,0243179 \leq \gamma \leq 0,0527784$ .

para construção do diagrama de bifurcação e os respectivos períodos das estruturas, e em (b) o diagrama de bifurcação em relação a variável  $y_1$ , para pontos sobre a reta traçada no espaço de parâmetros, para  $0,0243179 \leq \gamma \leq 0,0527784$ .

Observamos na Fig. 5.39 resultados semelhantes aos apresentados para a projeção  $a \times \gamma$ . Neste caso as estruturas também obedecem a regra de formação do tipo adição de período,  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$  e cada estrutura individualmente apresenta uma cascata de bifurcação do tipo dobramento de período em uma de suas extremidades  $3 \rightarrow 6$ ,  $4 \rightarrow 8$  e  $5 \rightarrow 10$ .

A segunda ampliação, mostra semelhança com a Fig. 5.38, do espaço de parâmetros  $a \times \gamma$ . Na Fig. 5.41, observamos em (a) o espaço de parâmetros da ampliação da caixa verde da Fig. 5.39, referente ao maior expoente de Lyapunov positivo, para  $0,36569 \leq b \leq 0,397086$  e  $0,0245534 \leq \gamma \leq 0,131199$ , e em (b) o espaço de parâmetro referente ao segundo maior

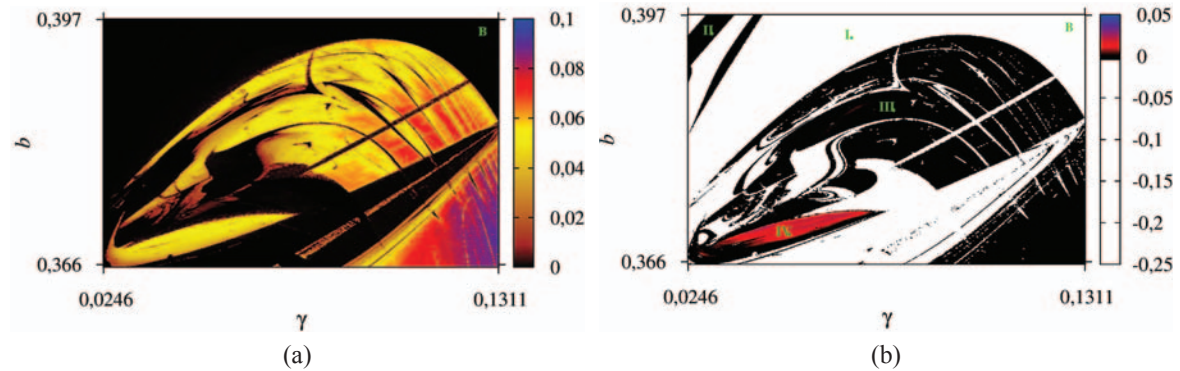


Figura 5.41: (a) Ampliação da caixa verde da Fig. 5.39. (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente. Sendo a cor branca para expoentes negativos, a cor preta para expoentes nulos e a variação de vermelho ao azul para os expoentes positivos.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Torus-2)	III (Caos)	IV (Hipercaos)
$\lambda_1$	$4,36 \times 10^{-5}$	$-3,995 \times 10^{-4}$	$4,796 \times 10^{-2}$	$4,943 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-9,382 \times 10^{-2}$	$-5,044 \times 10^{-4}$	$-6,539 \times 10^{-5}$	$1,848 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	$-9,381 \times 10^{-2}$	$-5,781 \times 10^{-3}$	$-2,238 \times 10^{-2}$	$-8,91 \times 10^{-6}$
$\lambda_4$	$-9,676 \times 10^{-2}$	$-5,858 \times 10^{-3}$	$-0,365$	$-0,315$
$\lambda_5$	$-0,746$	$-2,642 \times 10^{-2}$	$-0,743$	$-0,478$
$\lambda_6$	$-1,871$	$-2,675 \times 10^{-2}$	$-2,34$	$-2,546$

Tabela 5.7: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros 5.41(b).

expoente de Lyapunov positivo. No qual a cor branca representa os expoentes de Lyapunov negativos, a cor preta os expoentes de Lyapunov nulos e as cores vermelha e azul para os expoentes de Lyapunov positivo.

Esta figura confirma a existência, para a região em vermelho, de um segundo expoente positivo, ou seja, região de hipercaos, confinada em uma pequena porção do espaço de parâmetros  $b \times \gamma$ , da mesma forma que acontece na combinação de  $a \times \gamma$ . A Tabela 5.7, mostra o espectro de Lyapunov, de alguns pontos da Fig. 5.41(b). Nesta combinação de parâmetros também estão presentes quatro tipos de comportamento no mesmo espaço de parâmetros, quais sejam: periódico, quase-periódico (Torus-2), caótico e hipercaótico.

Conforme apresentado nos casos anteriores, construímos também o espaço de parâmetros da combinação de  $c \times \gamma$ , para três neurônios com acoplamento unidirecional. A Fig. 5.42, mostra que, para esta combinação, não temos estruturas periódicas bem visíveis e com regras de formação como vistas para o caso de 3 neurônios bidirecional, Fig. 5.34.

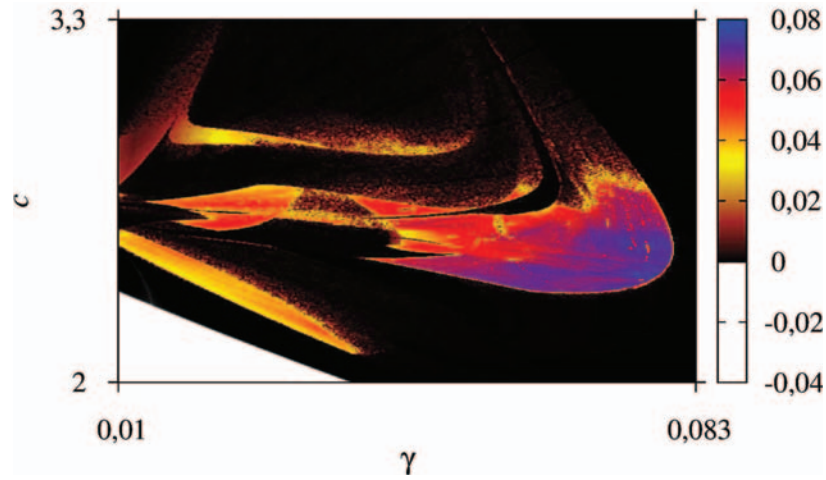


Figura 5.42: Visão geral do espaço de parâmetros do sistema (3.8), para  $2,0 \leq c \leq 3,3$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,083$ ,  $a = 0,7$  e  $b = 0,4$ . As intensidades de cores estão associadas a diferentes valores do Expoente de Lyapunov.

### 5.3 Análise dos resultados para uma rede de quatro neurônios acoplados

Nesta seção, apresentamos alguns espaços de parâmetros encontrados para o caso de quatro neurônios acoplados bidirecionalmente e unidirecionalmente, sob as mesmas condições e intervalos de parâmetros impostos aos demais casos.

#### 5.3.1 Acoplamento bidirecional para os parâmetros $a \times \gamma$ , $b \times \gamma$ e $c \times \gamma$

O modelo de rede para quatro neurônios, resulta em um sistema de oito equações diferenciais ao qual foi imposto um regime de acoplamento bidirecional, ou seja, todos os neurônios transmitem informações mutuamente, conforme Fig. 3.3.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Torus-2)	III (Hipercaos)
$\lambda_1$	$2,26 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-5}$	$2,394 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-7,99 \times 10^{-3}$	$-3,6 \times 10^{-6}$	$1,384 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	$-8,015 \times 10^{-3}$	$-3,5 \times 10^{-3}$	$2,425 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	$-4,86 \times 10^{-2}$	$-3,55 \times 10^{-3}$	$-5,556 \times 10^{-2}$
$\lambda_5$	-0,85	$-3,62 \times 10^{-3}$	-0,42
$\lambda_6$	-1,47	$-3,66 \times 10^{-3}$	-0,583
$\lambda_7$	-1,48	$-3,25 \times 10^{-2}$	-0,824
$\lambda_8$	-2,14	$-3,29 \times 10^{-2}$	-1,171

Tabela 5.8: Espectro de Lyapunov para posições no espaço de parâmetros 5.43(b).



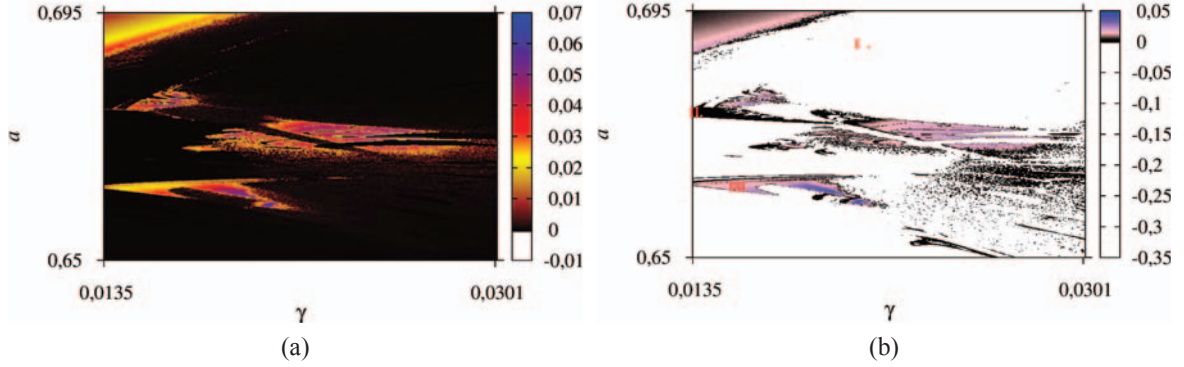


Figura 5.43: Espaço de parâmetros com relação ao maior expoente de Lyapunov do sistema (3.6), para  $0,65 \leq a \leq 0,695$  e  $0,0135 \leq \gamma \leq 0,0301903$ . (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente.

A Fig. 5.43, mostra a combinação dos parâmetros  $a \times \gamma$ , em (a) o espaço de parâmetros, para  $0,65 \leq a \leq 0,695$  e  $0,0135 \leq \gamma \leq 0,0301903$ , referente ao maior expoente de Lyapunov, e em (b) o espaço de parâmetros com os mesmos valores de parâmetros da Fig. 5.43(a), mas referente ao segundo maior expoente de Lyapunov. Estes espaços de parâmetros confirmam a existência de regiões de hipercaos para o modelo de quatro neurônios, pela região em cor de rosa e azul na Fig. 5.43(b), ou seja, existe um segundo expoente positivo. A Tabela 5.8, mostra o espectro de Lyapunov, de alguns pontos da Fig. 5.43(b), para confirmar a existência de comportamento hipercaótico.

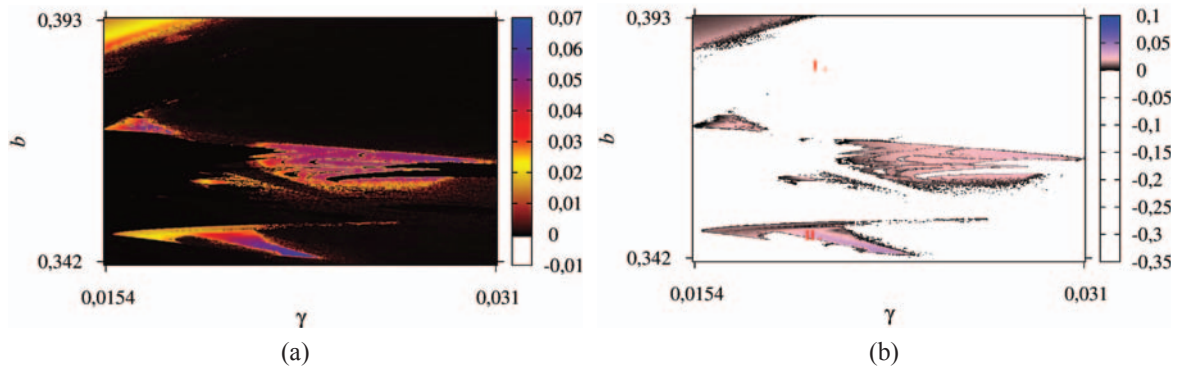


Figura 5.44: Espaço de parâmetros com relação ao maior expoente de Lyapunov do sistema (3.6), para  $0,341249 \leq b \leq 0,3935$  e  $0,0153246 \leq \gamma \leq 0,0310565$ . (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Hipercaos)
$\lambda_1$	$1,265 \times 10^{-4}$	$4,259 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-5,27 \times 10^{-3}$	$2,846 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	$-5,212 \times 10^{-3}$	$1,224 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	$-4,228 \times 10^{-2}$	$-2,554 \times 10^{-2}$
$\lambda_5$	-0,89	-0,435
$\lambda_6$	-1,491	-0,677
$\lambda_7$	-1,495	-0,847
$\lambda_8$	-2,14	-1,283

Tabela 5.9: Espectro de Lyapunov para posições no espaço de parâmetros 5.44(b).

A Fig. 5.44 mostra a combinação dos parâmetros  $b \times \gamma$ , e podemos verificar em (a) o espaço de parâmetros para  $0,341249 \leq b \leq 0,3935$  e  $0,0153246 \leq \gamma \leq 0,0310565$ , referente ao maior expoente de Lyapunov, e em (b) o espaço de parâmetros para os mesmos valores de parâmetros da Fig. 5.44(a), mas referente ao segundo maior expoente de Lyapunov. Esta figura confirma a existência de regiões de hipercaos para o modelo de quatro neurônios, pela região em cor de rosa e azul, ou seja, existe um segundo expoente positivo. A Tabela 5.9, mostra o espectro de Lyapunov, de algumas posições da Fig. 5.44(b).

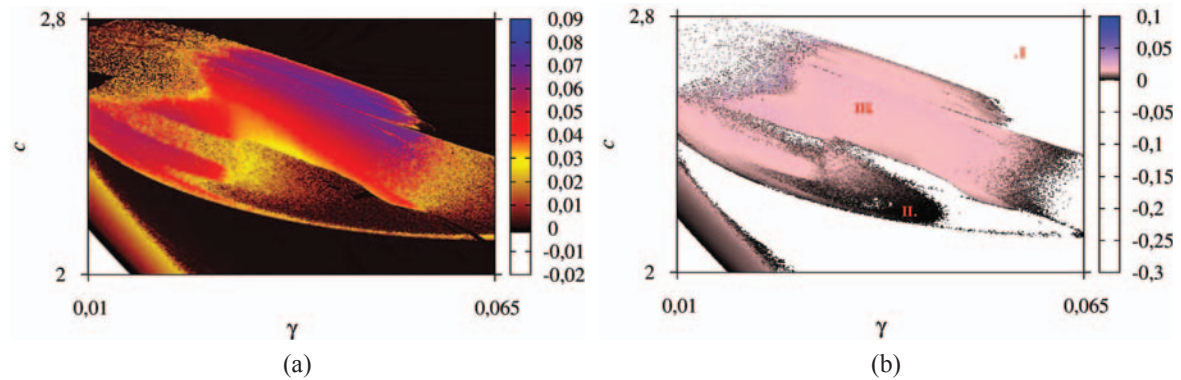


Figura 5.45: Espaço de parâmetros com relação ao maior expoente de Lyapunov do sistema (3.6), para  $2,0 \leq c \leq 2,8$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,065$ . (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente.

A Fig. 5.45, mostra a combinação dos parâmetros  $c \times \gamma$ , podemos observar em (a) o espaço de parâmetros para  $2,0 \leq c \leq 2,8$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,065$ , referente ao maior expoente de Lyapunov, e em (b) o espaço de parâmetros com os mesmos valores de parâmetros da Fig. 5.45(a), mas referente ao segundo maior expoente de Lyapunov. Nas Fig. 5.45(a) e Fig. 5.45(b), observamos a ocorrência de regiões de hipercaos, pois o sistema apresenta dois



Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Torus-2)	II (Hipercaos)
$\lambda_1$	$1,895 \times 10^{-4}$	$2,948 \times 10^{-4}$	$4,624 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	-0,121	$1,342 \times 10^{-4}$	$1,777 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	-0,2333	$-6,695 \times 10^{-3}$	$1,972 \times 10^{-6}$
$\lambda_4$	-0,2334	$-3,668 \times 10^{-2}$	$-2,233 \times 10^{-2}$
$\lambda_5$	-0,472	-0,618	-0,874
$\lambda_6$	-1,866	-0,998	-1,508
$\lambda_7$	-2,361	-1,194	-2,668
$\lambda_8$	-5,259	-4,144	-3,925

Tabela 5.10: Espectro de Lyapunov para posições no espaço de parâmetros 5.45(b).

expoente de Lyapunov positivos. A Tabela 5.10 mostra o espectro de Lyapunov, de algumas posições da Fig. 5.45(b).

### 5.3.2 Acoplamento unidirecional para os parâmetros $a \times \gamma$ , $b \times \gamma$ e $c \times \gamma$

O modelo de rede para quatro neurônios, resulta em um sistema de oito equações diferenciais ao qual foi imposto um regime de acoplamento unidirecional, ou seja, os neurônios transmitem as informações em apenas um sentido, o neurônio 1 se comunica com os neurônio 2, o neurônio 2 se comunica com os neurônio 3, o neurônio 3 se comunica com os neurônio 4 e ainda de forma cruzada, o neurônio 1 se comunica com os neurônio 3 e o neurônio 2 se comunica com os neurônio 4, Fig. 3.4.

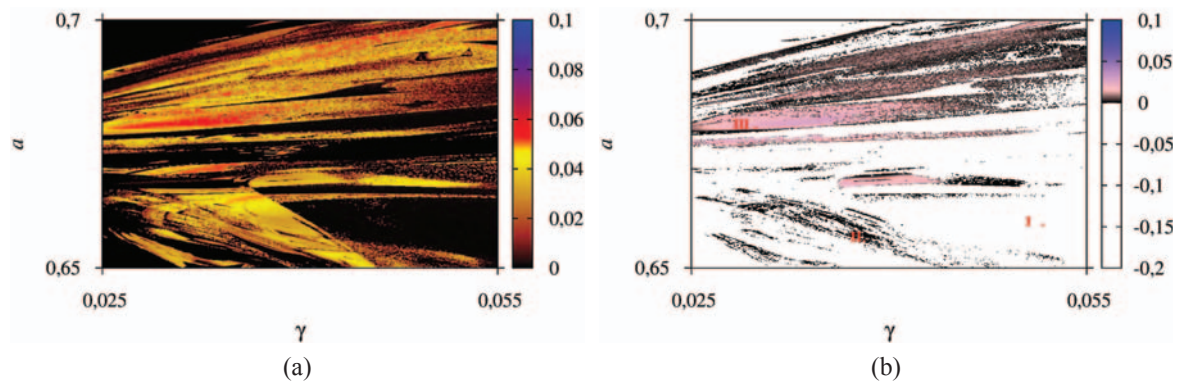


Figura 5.46: Espaço de parâmetros com relação ao maior expoente de Lyapunov do sistema (3.9), para  $0,65 \leq a \leq 0,7$  e  $0,025 \leq \gamma \leq 0,055$ . (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente.

A Fig. 5.46 mostra a combinação dos parâmetros  $a \times \gamma$ , observamos em (a) o espaço de parâmetros para  $0,65 \leq a \leq 0,7$   $0,025 \leq \gamma \leq 0,055$ , referente ao maior expoente de Lyapu-

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Caos)	II (Hipercaos)
$\lambda_1$	$1,123 \times 10^{-3}$	$3,456 \times 10^{-2}$	$5,421 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-4,688 \times 10^{-2}$	$2,763 \times 10^{-5}$	$2,021 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	-0,131	$-2,616 \times 10^{-2}$	$2,899 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	-0,133	$-4,405 \times 10^{-2}$	$-1,969 \times 10^{-2}$
$\lambda_5$	-0,755	-0,676	-0,272
$\lambda_6$	-0,768	-1,046	-0,442
$\lambda_7$	-1,51	-1,433	-0,959
$\lambda_8$	-2,606	-2,326	-2,298

Tabela 5.11: Espectro de Lyapunov para posições no espaço de parâmetros 5.46(b).

nov, e em (b) o espaço de parâmetros com os mesmos valores de parâmetros da Fig. 5.46(a), mas referente ao segundo maior expoente de Lyapunov. As Fig. 5.46(a) e Fig. 5.46(b), mostram a existência de estruturas periódicas imersas nas regiões caóticas, e verificamos a ocorrência de regiões de hipercaos, pois o sistema apresenta dois expoente de Lyapunov positivos. A Tabela 5.11, mostra o espectro de Lyapunov, de alguns pontos da Fig. 5.46(b).

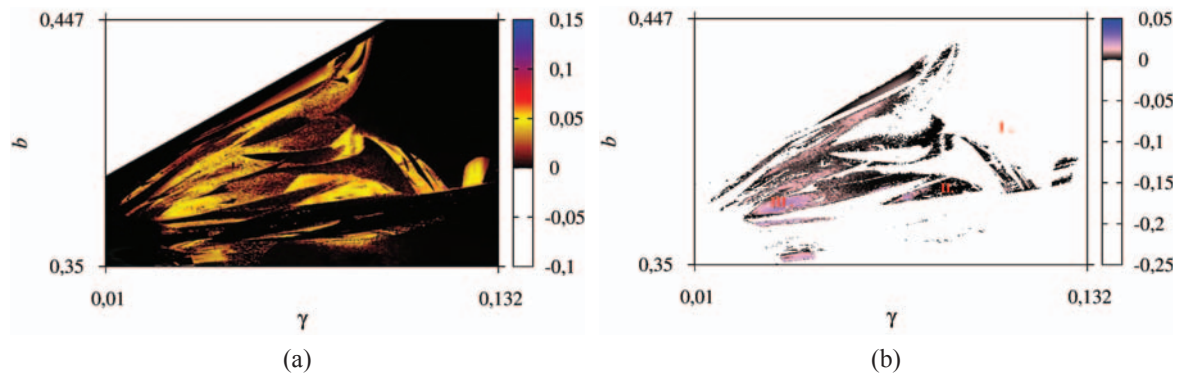


Figura 5.47: Espaço de parâmetros com relação ao maior expoente de Lyapunov do sistema (3.9), para  $0,35 \leq b \leq 0,447$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,132$ . (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Caos)	II (Hipercaos)
$\lambda_1$	$1,649 \times 10^{-4}$	$4,986 \times 10^{-2}$	$5,394 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	-0,105	$9,323 \times 10^{-5}$	$2,175 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	-0,134	$-8,120 \times 10^{-2}$	$1,781 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	-0,134	-0,189	$-1,453 \times 10^{-2}$
$\lambda_5$	-0,219	-0,518	-0,277
$\lambda_6$	-0,935	-0,787	-0,523
$\lambda_7$	-1,131	-1,948	-0,899
$\lambda_8$	-2,316	-2,919	-2,381

Tabela 5.12: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros 5.47(b).

A Fig. 5.47 mostra a combinação dos parâmetros  $b \times \gamma$ , observamos em (a) o espaço de

parâmetros para  $0,35 \leq b \leq 0,447$   $0,01 \leq \gamma \leq 0,132$ , referente ao maior expoente de Lyapunov, e em (b) o espaço de parâmetros com os mesmos valores de parâmetros da Fig. 5.47(a), mas referente ao segundo maior expoente de Lyapunov. As Fig. 5.47(a) e Fig. 5.47(b), mostram a existência estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, e mais uma vez verificamos a ocorrência de regiões de hipercaos, pois o sistema apresenta dois expoente de Lyapunov positivos. A Tabela 5.12 mostra o espectro de Lyapunov de alguns pontos da Fig. 5.47(b). Finalmente,

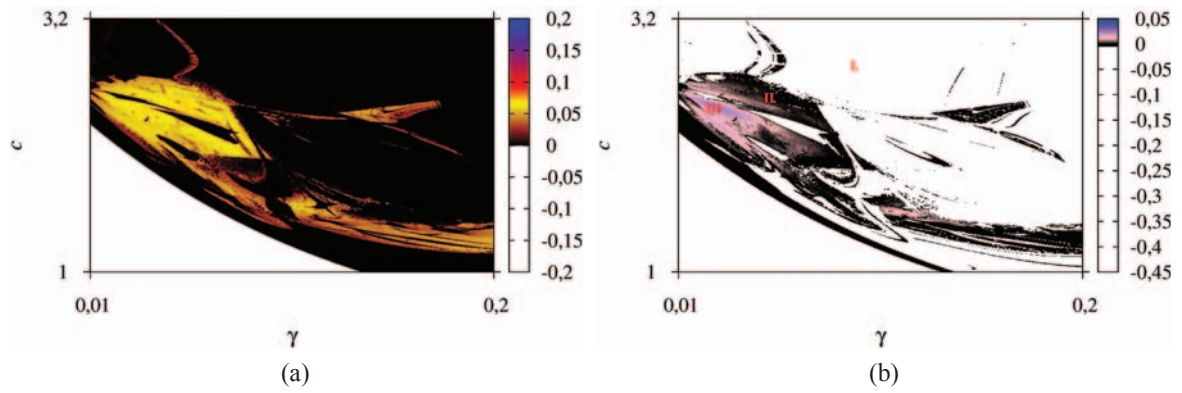


Figura 5.48: Espaço de parâmetros com relação ao maior expoente de Lyapunov do sistema (3.9), para  $1,0 \leq c \leq 3,2$  e  $0,01 \leq \gamma \leq 0,2$ . (b) Espaço de parâmetros com relação ao segundo maior expoente de Lyapunov, na qual as diferentes cores representam a magnitude do expoente.

Posição/Espectro de Lyapunov	I (Periódico)	II (Caos)	II (Hipercaos)
$\lambda_1$	$6,692 \times 10^{-5}$	$6,095 \times 10^{-2}$	$7,052 \times 10^{-2}$
$\lambda_2$	$-7,313 \times 10^{-2}$	$2,202 \times 10^{-4}$	$2,582 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	$-0,132$	$-3,699 \times 10^{-2}$	$7,416 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	$-0,133$	$-0,117$	$-1,915 \times 10^{-2}$
$\lambda_5$	$-0,721$	$-0,454$	$-0,198$
$\lambda_6$	$-1,247$	$-0,978$	$-0,487$
$\lambda_7$	$-2,69$	$-2,009$	$-1,03$
$\lambda_8$	$-3,448$	$-3,715$	$-2,435$

Tabela 5.13: Espectro de Lyapunov para pontos no espaço de parâmetros 5.48(b).

a Fig. 5.48, mostra a combinação dos parâmetros  $c \times \gamma$ , temos em (a) o espaço de parâmetros para  $1,0 \leq c \leq 3,2$   $0,01 \leq \gamma \leq 0,2$ , referente ao maior expoente de Lyapunov, e em (b) o espaço de parâmetros com os mesmos valores de parâmetros da Fig. 5.48(a), mas referente ao segundo maior expoente de Lyapunov. Como ocorre com as outras combinações de parâmetros, temos a existência estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, e regiões de hipercaos. A Tabela 5.13 mostra o espectro de Lyapunov de alguns pontos da Fig. 5.48(b).

## Capítulo 6

### Conclusões

Neste trabalho estudamos seis conjuntos de equações diferenciais que, modelam a propagação de um impulso nervoso pela membrana de um neurônio, gerando um potencial de ação e a sua recuperação ao estado de repouso. Este modelo originalmente utilizado para o caso de um neurônio é composto por duas equações diferenciais não-lineares [7]. O foco principal desse estudo baseia-se na investigação da influência do acoplamento entre sistemas, simulando as conexões entre estas células neurais, produzindo pequenas redes [25]. Assim, geramos espaços de parâmetros para redes de dois, três e quatro neurônios, variando sempre um parâmetro do sistema ( $a$ ,  $b$  ou  $c$ ) com a intensidade de acoplamento entre eles ( $\gamma$ ). Dessa forma, construímos diagramas de bifurcação para identificar o período das estruturas periódicas dos espaços de parâmetros, assim como as regras de formação, ou rotas para o caos. Realizamos também simulações numéricas modificando o tipo de acoplamento dos neurônios. Assim, utilizamos inicialmente um acoplamento bidirecional, na qual todos os elementos do sistema interagem entre si, e um acoplamento unidirecional, em que existe um sistema mestre que atua sobre a dinâmica dos demais.

Os espaços de parâmetros gerados destas combinações, mostram a existência de regiões caóticas, e também a existência de estruturas periódicas auto-organizadas. Através dos espaços de períodos e diagramas de bifurcação observamos que para a maioria dos casos foi recorrente a regra de formação das estruturas em cascatas de bifurcação do tipo adição de período. Nos casos analisados, observamos também que a maior parte das estruturas periódicas internamente apresentam cascata de bifurcação do tipo dobramento de período e estes períodos dobram de

forma crescente, de dentro para fora e outros de fora para dentro, ou seja, existe mais de um período em cada estrutura.

A comparação entre os modelos com acoplamento bidirecional e unidirecional mostra que os sistemas de equações para dois neurônios apresentam uma dinâmica um pouco diferente quando se alteram os tipos de acoplamento. Para dois neurônios com acoplamento bidirecionais observamos que as estruturas se arranjam sequencialmente em uma cascata de bifurcação do tipo de adição de período. No entanto, para o caso na qual o sistema é submetido ao acoplamento unidirecional verificamos um novo tipo de formação, estruturas periódicas que se arranjam em camadas circulares, e se deformam enquanto ocorrem bifurcações por adição de período. Em cada camada as estruturas são apresentadas aos pares, com mesmo período. Com os espaços de períodos observamos que, o modelo de dois neurônios com acoplamento unidirecional apresenta uma grande região de atratores do tipo Torus-2.

No grupo de sistemas para três neurônios primeiramente deve-se observar o fato que não foram construídos espaços de períodos, devido ao elevado tempo computacional empregado nesta tarefa. Por isso nestes conjuntos de equações, construímos espaços de parâmetros para o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov, e também diagramas de bifurcações. Observando as diferenças entre os sistemas, vemos que no caso de três neurônios bidirecionais, existem semelhanças entre as estruturas dos espaços de parâmetros quando se compara as combinações dos espaço de  $a \times \gamma$  e  $b \times \gamma$ . Isso também ocorre no caso unidimensional. Para ambos os casos, encontramos, estruturas periódicas organizadas em uma cascata de bifurcação do tipo adição de período. Uma diferença importante verificada entre os dois casos é a ocorrência de regiões de hipercaos no sistema de três neurônios acoplados unidirecionalmente. Dessa forma, encontramos no espectro de Lyapunov de alguns pontos do espaço de parâmetros, dois expoentes positivos. Observamos também que algumas regiões do sistema de três neurônios bidirecionais são semelhantes às regiões do caso de dois neurônios bidirecionais.

Considerando os sistemas de quatro neurônios, para ambos os casos de acoplamento, unidirecional e bidirecional, observamos regiões caóticas com estruturas periódicas imersas em regiões caóticas. Nestes dois casos as estruturas não se arranjam de forma bem definida para se encontrar uma regra de formação. Contudo, foi possível identificar de regiões de hipercaos, regiões onde temos dois expoentes de Lyapunov positivos.

Como conclusão da aplicação do modelo de Fitzhugh-Nagumo para redes de neurônios acoplados verificamos que o mesmo apresenta uma dinâmica bem rica, quando considerado o comportamento da variação da intensidade de acoplamento por qualquer outro parâmetro do sistema. O parâmetro intensidade de acoplamento em redes neurais é de fundamental importância, por representar as conexões entre os neurônios. Portanto, nesta dissertação, escolhemos estudar as três possíveis combinações entre o acoplamento e os outros três parâmetros do modelo de Fitzhugh-Nagumo. Como possíveis propostas de trabalhos futuros, pode-se investigar a dinâmica das combinações de  $a \times b$ ,  $a \times c$  e  $b \times c$  e também alterar os valores de intervalos dos parâmetros. Um outro estudo a ser desenvolvido é quanto aos tipos de sincronização das redes de neurônios sob baixos e altos valores de intensidades de acoplamentos. A teoria de informação de Shannon e a entropia de Kolmogorov-Sinai também são tópicos a serem considerados para os modelos estudados nesta dissertação.

## Referências

- [1] A. Peters, S. Palay, and H. Webster, *The Fine Structure of the Nervous System*. Oxford, New York, 1991.
- [2] M. Mazza, “Neurociência computacional: um instrumento na pesquisa clínica sobre o cérebro,” *Revista Einstein*, pp. 39–42, 2005.
- [3] L. Glass and D. Kaplan, “Time Series Analysis of Complex Dynamics in Physiology and Medicine,” in *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, vol. xv, pp. 11–5, Santa Fe Institute Studies in the Science of Complexity, Addison-Wesley, 1993.
- [4] H. Korn and P. Faure, “Is there chaos in the brain? Experimental evidence and related models,” *C.R.Biologies*, vol. 326, pp. 787–840, 2003.
- [5] A. Hodgkin and A. Huxley, “A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve,” *Journal of Physiology*, vol. 117, pp. 500–544, 1952.
- [6] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, “An active pulse transmission line simulating nerve axon,” *Proceedings of the IRE*, vol. 50, pp. 2061–2070, 1962.
- [7] R. FitzHugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of the nerve membrane,” *Biophysical Journal*, vol. 1, pp. 445–465, 1961.
- [8] W. Hanan, D. Mehta, G. Moroz, and S. Pouryahya, “Stability and Bifurcation Analysis of Coupled Fitzhugh-Nagumo Oscillators,” *arXiv:1001.5420v1 [q-bio.NC]*, 2010.



- [9] T. A. de Assis e José Garcia Vivas Miranda e Sílvia Larissa do Patrocínio Cavalcante, “A dinâmica de condução nervosa via modelo de Fitzhugh-Nagumo,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 32, pp. 1307–1327, 2010.
- [10] J. Hindmarsh and R. Rose, “A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations,” *Proceedings of Royal Society of London, Series B, Biological Sciences*, vol. 221, pp. 87–102, 1984.
- [11] A. C. Guyton and J. E. Hall, *Tratado de Fisiologia Médica*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2006.
- [12] G. J. Tortora, *Corpo Humano-Fundamentos de Anatomia e Fisiologia*. Artmed Editora, Porto Alegre, 2000.
- [13] R. Lent, *Cem Bilhões de Neurônios: Conceitos Fundamentais de Neurociência*. Atheneu, São, 2010.
- [14] L. J. e J. Carneiro, *Histologia Básica*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 2004.
- [15] A. Fiala, A. Suska, and O. Schlüter, “Optogenetic approaches in neuroscience,” *Current Biology*, vol. 20, pp. R897–R903, 2010.
- [16] S. Lopes, *Bio*, vol. Único. Editora Saraiva, São Paulo, 2004.
- [17] P. V. Carelli, “Modelagem estocástica de neurônios e sua interação em tempo real com neurônios biológicos,” doutorado, Universidade de São Paulo. Instituto de Física - Depto. de Física Geral, 2008.
- [18] P. C. Rech, “Dynamics in the Parameter Space of a Neuron Model,” *Chinese Physics Letters*, vol. 29, p. 060506, 2012.
- [19] R. FitzHugh, “Thresholds and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations,” *Journal of General Physiology*, vol. 43, pp. 867–896, 1960.
- [20] R. FitzHugh, “Mathematical models of excitation and propagation in nerve,” *Biological Engineering*, vol. 43, pp. 867–896, 1969.

- [21] K. Bonhoeffer, "Activation of passive iron as a model for the excitation of nerve," *Journal of General Physiology*, vol. 32, pp. 69–91, 1947.
- [22] B. Linares-Barranco, E. Sanchez-Sinencio, A. Rodriguez-Vazquez, and J. Huertas, "A CMOS Implementation of Fitzhugh-Nagumo Neuron Model," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 26, pp. 956–965, 1991.
- [23] M. Baptista, J. de Carvalho, M. Hussein, and C. Grebogi, "Active networks that maximize the amount of information transmission," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, p. 1230008, 2012.
- [24] R. F. Bageston, "Sincronização de fase em sistemas caóticos e sua aplicabilidade ao reconhecimento de padrões," doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 2011.
- [25] S. Campbell and M. Waite, "Multistability in Coupled Fitzhugh-Nagumo Oscillators," *Nonlinear Analysis*, vol. 47, pp. 1093–1104, 2001.
- [26] R. Toral, C. Massoller, C. R. Mirasso, M. Ciszak, and O. Calvo, "Characterization of the anticipated synchronization regime in the coupled Fitzhugh-Nagumo model for neurons," *Physica A*, vol. 325, pp. 192–198, 2003.
- [27] M. A. Savi, *Dinâmica não-linear e caos*. E-papers, Rio de Janeiro, 2006.
- [28] R. C. Hiborn, *Chaos and nonlinear dynamics*. Oxford University Press, New York, 2006.
- [29] N. Ferrara and C. Prado, *Caos, Uma Introdução*. Edgard Blöcher Ltda, São Paulo, 1995.
- [30] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York, 1996.
- [31] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York, 2000.
- [32] J. G. Freire and J. A. Gallas, "Stern-Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer-van der Pol and the Fitzhugh-Nagumo models of excitable systems," *Physics Letters A*, vol. 375, pp. 1097–1103, 2011.

- 
- [33] J. G. Freire, T. Poschel, and J. A. Gallas, “Stern-Brocot trees in spiking and bursting of sigmoidal maps,” *Europhysics Letters*, vol. 100, p. 48002, 2012.