

Neste trabalho estudamos o modelo de Vallis para o fenômeno El Niño. Tal modelo é constituído por três equações diferenciais ordinárias, autônomas, de primeira ordem e acopladas, com três parâmetros que controlam a dinâmica do sistema. Investigamos um espaço de parâmetros bidimensional para o referido modelo, com a consequente fixação do terceiro parâmetro. O comportamento dinâmico de cada ponto nesse espaço de parâmetros foi definido pelo valor do maior expoente de Lyapunov. Mais especificamente, consideramos vários espaços de parâmetros bidimensionais, levando em conta uma variação discreta do terceiro parâmetro. Observamos que conforme aumentamos o valor do terceiro parâmetro a partir de zero, surge uma organização de caos e periodicidade no modelo de Vallis. Estruturas periódicas organizadas em sequência de adição de período aparecem mergulhadas em regiões de caos. Diagrama de bifurcações e atratores foram utilizados para determinação dos períodos das estruturas.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, 2017

ANO
2017

MONIK BORGHEZAN
PARA O EL NIÑO

| CAOS E PERIODICIDADE NO MODELO DE VALLIS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLOGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA -- PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
**CAOS E PERIODICIDADE NO
MODELO DE VALLIS PARA O EL
NIÑO**

MONIK BORGHEZAN

Joinville, 2017

MONIK BORGHEZAN

CAOS E PERIODICIDADE NO MODELO DE VALLIS PARA O EL NIÑO

Dissertação de mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em Física,
da Universidade do Estado de Santa Catarina Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: PAULO CESAR RECH

Joinville

2017

Borghezan, Monik.

Caos e Periodicidade no modelo de Vallis para o El Niño/ Monik Borghezan. - Joinville, 2017.

62 p.

Orientador: Paulo Cesar Rech.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2017.

1. El Niño.
 2. Modelo de Vallis.
 3. Espaço de Parâmetros.
 4. Expoente de Lyapunov.
 5. Diagrama de Bifurcação.
- I. Rech, Paulo Cesar. II. Universidade Do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Caos e Periodicidade no modelo de Vallis para o El Niño

por

Monik Borghezan

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

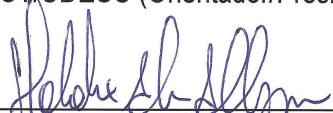
MESTRE EM FÍSICA

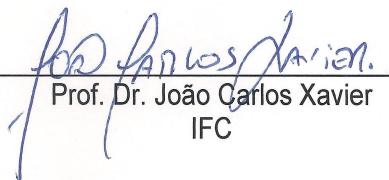
Área de concentração em “Física”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)


Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC (Coorientador/Suplente)


Prof. Dr. João Carlos Xavier

IFC

Joinville, SC, 24 de julho de 2017.

Aos meus pais Vilibaldo e Esmeralda
pela confiança, dedicação e amor. E ao
Heric por me fazer mais forte nas difi-
culdades e me proporcionar momentos
felizes.

Agradecimentos

A Deus primeiramente pelo dom da vida e por ter me dado saúde e força para superar os momentos difíceis.

Aos meus pais Vilibaldo e Esmeralda pelo incentivo, apoio, por me ajudarem nos momentos difíceis, pelo carinho, amor, dedicação, por confiarem que eu conseguia alcançar essa etapa e também pelo suporte financeiro.

Aos meus irmãos Maicon e Marcos por me incentivarem nessa etapa do estudo, por me estimular a nunca desistir e aos familiares pelo carinho.

Ao meu namorado pela paciência, pelo carinho e por me ajudar a acreditar na minha capacidade.

Ao meu orientador, professor Paulo Cesar Rech, por toda ajuda e conhecimento que me transmitiu durante o período de realização do mestrado. Pela paciência ao explicar e tirar as minhas dúvidas.

Aos professores do Departamento de Física da UDESC Joinville que foram fundamentais para minha formação e aos integrantes do Grupo de Dinâmica Não-Linear.

Aos meus amigos do mestrado Paulo, Rodrigo, Wildon, Jônatas, Alexandre, Vinicius Antunes, Jean, Márcio, Lucas e Kelli que me proporcionaram momentos de distração. Aos amigos Lia, Vinicius, Magno, Ana e Gilson pela amizade. Em especial aos amigos Nathan pela amizade, risadas, por me ajudar nas matérias e trabalhos ao longo do mestrado. A Rafael pela parceria de muitos momentos, ao Eduardo pelo conhecimento transmitido e pela ajuda neste trabalho, ao Clésio pela amizade, conversas e ajuda ao longo do mestrado e a Caroline pela presença feminina, conversas e risadas.

Aos amigos da graduação Edson, Douglas, Maíra, Irene, Lúcio, Mariana e Nayana que sempre me ajudaram, apoiaram e incentivaram, mesmo longe sempre torcendo por mim para conseguir vencer mais um obstáculo.

À Susele, secretária do Programa de Pós-Graduação em Física, pelos procedimentos administrativos, e à UDESC, por toda a sua infra-estrutura e corpo docente.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

*Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas,
mas sim preparar a mente para pensar!*

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo de Vallis para o fenômeno El Niño. Tal modelo é constituído por três equações diferenciais ordinárias, autônomas, de primeira ordem e acopladas, com três parâmetros que controlam a dinâmica do sistema. Investigamos um espaço de parâmetros bidimensional para o referido modelo, com a consequente fixação do terceiro parâmetro. O comportamento dinâmico de cada ponto nesse espaço de parâmetros foi definido pelo valor do maior expoente de Lyapunov. Mais especificamente, consideramos vários espaços de parâmetros bidimensionais, levando em conta uma variação discreta do terceiro parâmetro. Observamos que conforme aumentamos o valor do terceiro parâmetro a partir de zero, surge uma organização de caos e periodicidade no modelo de Vallis. Estruturas periódicas organizadas em sequência de adição de período aparecem mergulhadas em regiões de caos. Diagrama de bifurcações e atratores foram utilizados para determinação dos períodos das estruturas.

Palavras chaves: El Niño, Modelo de Vallis, Espaço de parâmetros, Expoente de Lyapunov, Atratores, Diagrama de Bifurcação.

Abstract

In this work we study the Vallis model for the El Niño phenomenon. This model consists of three independent, first order, coupled differential equations with three parameters that control the dynamics of the system. We investigate a two-dimensional parameter space for the said model, with the consequent fixation of the third parameter. The dynamic behavior of each point in this parameter space was defined by the value of the largest Lyapunov exponent. More specifically, we consider several two-dimensional parameter spaces, taking into account a discrete variation of the third parameter. We observe that as we increase the value of the third parameter from zero, an organization of chaos and periodicity emerges in the Vallis model. Periodic structures organized in period addition sequence appear plunged into regions of chaos. Bifurcation and attractor diagrams were used to determine the periods of the structures.

Key words: El Niño, Vallis model, Parameter-space, Lyapunov exponents, Bifurcation Diagrams, Attractors.

Listas de Figuras

Figura 2.1 Evolução de duas órbitas próximas no espaço de fase. 23

Figura 3.1 O modelo de Vallis para variações acentuadas de temperaturas no oeste-leste do Pacífico Equatorial. L tem valor de 7.500 km mas o valor de h não é especificado. 31

Figura 3.2 (a) O diagrama representa o espaço de parâmetros (B,C) para o modelo de Vallis (1.1) para $p = 0$. (b) O diagrama do espaço de parâmetros (r,σ) para o modelo de Lorenz (3.1) para $b = 1$. Em ambos os diagramas são mostrados os domínios de estabilidade no respectivo espaço de parâmetro, exibindo regiões caóticas em amarelo para a cor vermelha e regiões periódicas em preto. 33

Figura 4.1 As imagens representam o espaço de parâmetros (B,C) para o sistema de Vallis (1.1). Em ambos os diagrama de bifurcações são mostrados domínios de estabilidades no respectivo espaço de parâmetros. (a) $p = 0$, (b) $p = 0,1$, (c) $p = 0,3$, (d) $p = 0,5$, (e) $p = 1,0$, (f) $p = 2,0$, (g) $p = 3,0$, (h) $p = 4,0$, (i) $p = 5,0$, (j) $p = 7,0$, (k) $p = 9,0$, (l) $p = 11,0$, (m) $p = 13,0$, (n) $p = 14,0$, (o) $p = 15,0$ 40

Figura 4.2 (a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (d). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,00652 B + 0,965$ em (a), para $220 \leq B \leq 450$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase. 42

Figura 4.3	(a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (g). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,00241 B + 2,431$ em (a), para $200 \leq B \leq 900$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.	45
Figura 4.4	(a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (b). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,02641 B + 4,5173$ em (a), para $450 \leq B \leq 780$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.	47
Figura 4.5	(a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (c). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,03029 B - 0,06382$ em (a), para $500 \leq B \leq 850$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.	49
Figura 4.6	(a) Atrator de Lorenz. (b) Atrator do modelo de Vallis para o El Niño.	53
Figura 4.7	(a) Atrator com $p = 0,5$, (b) Atrator com $p = 2,0$, (c) Atrator com $p = 3,0$, (d) Atrator com $p = 4,0$, (e) Atrator com $p = 9,0$, (f) Atrator com $p = 11,0$ e (g) Atrator com $p = 15,0$	55

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	ESPAÇO DE FASES	19
2.2	CATEGORIAS DE SISTEMAS DINÂMICOS	20
2.3	DEPENDÊNCIA SENSÍVEL NAS CONDIÇÕES INICIAIS	23
2.4	ATRATORES	24
2.5	ESPAÇO DE PARÂMETROS	26
2.6	DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES	27
3	O MODELO	29
3.1	O MODELO DE VALLIS PARA O EL NIÑO	29
4	RESULTADOS	35
4.1	O ESPAÇO DE PARÂMETROS (B, C) DO MODELO DE VALLIS PARA O EL NIÑO	35
4.2	OS DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÕES	41
4.3	ATRATORES	51
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um sistema pode ser definido como sendo um conjunto de objetos agrupados por alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. Um sistema é *dinâmico* quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo [1].

Um modelo de determinado sistema dinâmico consiste na formulação matemática do aspecto científico de um processo determinístico. Um sistema determinístico é aquele no qual os estados futuros de muitos sistemas físicos podem ser previstos através dos estados passados (condições iniciais) e das leis que regem sua evolução (equações). Se estas leis são imutáveis no tempo, o comportamento da dinâmica do sistema é inteiramente definido pelo seu estado inicial [2]. O processo de modelar matematicamente sistemas dinâmicos determinísticos utiliza equações diferenciais, ou equações de diferenças, e tem aplicações nos mais diversos campos, como nas Engenharias, Física, Biologia, Química e etc. A área de estudo de dinâmica não-linear trata de sistemas dinâmicos que podem ser descritos por equações de diferença ou por equações diferenciais, ambos apresentando ao menos uma não linearidade [3].

Obter soluções analíticas explícitas para sistemas de equações não é uma tarefa fácil, sendo necessário o emprego de simulações numéricas para a obtenção de dados que nos permitam caracterizar qualitativamente o sistema estudado. De acordo com [4], ao contrário dos problemas lineares, a maioria dos problemas não lineares é impossível de ser resolvida de forma analítica

O estudo qualitativo de sistemas dinâmicos foi realizado pelo matemático francês Jules Henri Poincaré(1854-1912) que, inspirado por problemas em Mecânica Celeste, estudou o problema de três corpos sob interação gravitacional mútua e descobriu que os métodos utilizados para tratar o problema não forneciam soluções regulares e periódicas, as quais se imaginavam existir. O que Poincaré descobriu foi que comportamento geral de um corpo sob a influência gravitacional de outros dois muito mais pesados, por exemplo um asteroide entre o campo gravitacional do Sol e de Júpiter, era irregular, e essencialmente imprevisível, pois quaisquer duas órbitas com condições iniciais arbitrariamente próximas resultavam, no futuro, em órbitas muito diferentes [1]. Ele revitalizou o modo de se lidar com equações diferenciais não lineares. Até o final do século XIX, buscavam-se fórmulas que permitissem realizar previsões precisas, através da integração analítica das equações. Poincaré percebeu que as propriedades qualitativas das soluções podiam ser investigadas, sem que tais soluções precisassem ser determinadas explicitamente. Assim, em vez de procurar por fórmulas, ele partiu para uma abordagem qualitativa, utilizando técnicas geométricas e topológicas. Pode-se dizer que Poincaré realizou um dos primeiros trabalhos na área de dinâmica não-linear que conhecemos atualmente [3].

Com o avanço da tecnologia computacional observado no século XX, as pesquisas em Teoria do Caos ganharam um impulso significativo. Nos tempos de Poincaré não havia recursos para a realização dos estudos numéricos necessários, uma vez que as equações utilizadas para modelar diversos sistemas não apresentam soluções analíticas. Com os computadores modernos tornou-se possível a implementação de métodos numéricos, o desenvolvimento de novas técnicas e a realização de simulações, proporcionando um grande desenvolvimento da área no último século.

Nos anos sessenta o matemático americano Edward Norton Lorenz (1917-2008) estudou meteorologia após trabalhar nessa área na Segunda Guerra Mundial. Com o uso de computadores e na tentativa de fazer previsões sobre clima, selecionou um modelo de equações diferenciais não-lineares que modelavam processos de circulação e convecção de ar na atmosfera. Lorenz mostrou que um simples modelo de equações diferenciais ordinárias poderia exibir oscilações aperiódicas e dependência sensível nas condições iniciais, condição necessária para apresentar caos. Lorenz realizou aplicações dos estudos de

Poincaré, sendo um dos precursores da Teoria de Caos [3].

Para a existência do comportamento caótico em um sistema dinâmico a tempo contínuo, é necessário que o sistema seja modelado matematicamente por ao menos três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas e que exista ao menos uma não-linearidade nas equações [5].

O modelo a ser estudado nesta dissertação é o modelo de Vallis para o fenômeno El Niño [21]. Ele dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= By - C(x + p), \\ \dot{y} &= xz - y, \\ \dot{z} &= -xy - z + 1,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde x, y e z representam variáveis dinâmicas e B, C e p são parâmetros.

O objetivo do trabalho é investigar as modificações no espaço de parâmetros (B, C) do modelo de Vallis para o El Niño (1.1) como consequência de uma variação discreta no parâmetro p . Vamos mostrar nas próximas seções que, conforme p aumenta discretamente a partir de zero, estruturas periódicas típicas, não presentes nos espaços de parâmetros (B, C) em $p = 0$, começam a aparecer imersas em uma região caótica. Para analisarmos a mudança na dinâmica do sistema foram representados graficamente espaços de parâmetros e construídos diagrama de bifurcações e atratores. As simulações numéricas para a construção dos espaços de parâmetros para o expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e atratores foram computadas com programas em linguagens de programação FORTRAN e C. O integrador adotado para integrar numericamente sistema dinâmico foi o Runge-Kutta de quarta ordem [6] com passo fixo, todos em ambiente Linux. As figuras foram geradas com o auxílio dos programas Gnuplot e Xmgrace.

Desta forma, esta dissertação visa aplicar algumas ferramentas da área de Dinâmica Não-Linear no estudo do comportamento do modelo de Vallis (1.1). Organizamos a dissertação da seguinte maneira: No Capítulo 1 apresentamos uma breve introdução sobre a área de Sistemas Dinâmicos e também sobre o modelo que será estudado. No Capítulo 2 descrevemos a fundamentação teórica sobre sistemas dinâmicos e maneiras de classificar

os diversos comportamentos que este pode apresentar. Posteriormente discorremos sobre as ferramentas de análise dinâmica que serão empregadas na apresentação dos resultados numéricos obtidos. No Capítulo 3 é apresentado novamente o modelo de Vallis para o El Niño, relatamos o fenômeno e percebemos a semelhança com o modelo de Lorenz. No capítulo 4 são relatados os resultados obtidos a partir da análise dos espaços de parâmetros, mais especificamente, discorremos a respeito das estruturas periódicas imersas na região caótica. Foi descoberto em qual intervalo de valores do parâmetro p aparecem estruturas organizadas em sequência de adição de período. No último capítulo apresentamos algumas conclusões, bem como perspectivas para futuros trabalhos nesse problema.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns fundamentos teóricos necessários para a análise da dinâmica do sistema estudado. Destaque para algumas ferramentas e conceitos utilizados em dinâmica não-linear, tais como espaços de fase, mapas e fluxos, dependência sensível nas condições iniciais, expoentes de Lyapunov, atratores, espaços de parâmetros e diagrama de bifurcações.

2.1 ESPAÇO DE FASES

O estado de um sistema dinâmico com n dimensões é descrito pelo seu conjunto de n coordenadas, as quais indicam, em um tempo t , um ponto em um espaço n -dimensional, denominado espaço de fases [3]. Sendo um estado representado pelas coordenadas $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ no espaço de fases, a evolução temporal do sistema pode ser determinada por um conjunto de equações diferenciais como

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde as funções f_j representam as variações temporais das variáveis de estado x_j . Ainda, podemos empregar a notação vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t).$$

O caminho seguido pelo sistema no espaço de fases, conforme ele evolui no tempo, é chamado órbita ou trajetória. Observa-se em muitas trajetórias, passado um tempo suficientemente longo, convergência para uma certa região limitada do espaço de fases, denominada atrator [3]. Este comportamento será melhor discutido na seção 2.4.

Notamos que a dimensão do espaço de fases equivale ao número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever o sistema, ou seja, ao número de variáveis de estado. No caso do modelo de Vallis para o El Niño, sistema (1.1), a dimensão do espaço de fases é $n = 3$, pois temos três equações diferenciais de primeira ordem.

2.2 CATEGORIAS DE SISTEMAS DINÂMICOS

O estudo de sistemas dinâmicos tem importância na descrição de fenômenos naturais e desempenhou um papel significativo no desenvolvimento científico visto nas últimas décadas. É possível subdividir os sistemas dinâmicos em duas categorias, de acordo com o tipo de variável que designa o tempo. São ditos mapas os sistemas que apresentam o tempo como variável discreta. Já aqueles em que o tempo é uma variável contínua são

chamados de fluxos [1].

A forma geral de um mapa m -dimensional é dada por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= f^{(1)}(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}), \\ &\vdots \\ x_{n+1}^{(m)} &= f^{(m)}(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)})$ são as variáveis de estado do sistema e $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ funções de $(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)})$. Neste caso o tempo assume apenas valores discretos ($n = 0, 1, 2, \dots$). Dado um estado inicial $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m)})$, obtemos o estado em $n = 1$ por fazer $\vec{x}_1 = \vec{f}(\vec{x}_{(0)})$, agora escrito na forma vetorial. Tendo determinado \vec{x}_1 agora podemos determinar \vec{x}_2 e assim sucessivamente. Um mapa pode ser obtido a partir de uma simplificação de um modelo inicialmente representado por um determinado fluxo, o que permite reduzir o estudo da estabilidade de uma órbita periódica ao estudo da estabilidade de pontos fixos periódicos [3].

Um fluxo m -dimensional é descrito na forma de um sistema de m equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= f^{(1)}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(m)}}{dt} &= f^{(m)}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo $(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ as variáveis dependentes do tempo e $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ funções arbitrárias dessas variáveis. Nesse caso temos um conjunto de equações diferenciais acopladas [7]. Para determinarmos a trajetória do sistema no espaço de fases necessitamos integrá-lo no tempo, o que nem sempre é possível de se realizar analiticamente. Um *sistema autônomo* é um conjunto de equações diferenciais, lineares ou não lineares, a parâmetros constantes, sujeitas a funções de entrada que não dependem explicitamente do tempo t . Se o tempo aparece explicitamente em algum coeficiente ou em alguma função de entrada, o sistema

de equações é chamado de não autônomo [3]. Para o caso de ao menos uma das equações diferenciais de (2.3) apresentar dependência explícita no tempo, ou seja, o sistema não ser autônomo, podemos escrever um sistema não autônomo na forma autônoma [8].

Destacamos três técnicas empregadas na investigação do comportamento de sistemas dinâmicos [3]:

1. *Técnica analítica*: integram-se analiticamente as equações e determinam-se as soluções em termos de fórmulas gerais. Desta maneira pode-se obter fórmulas que valem para quaisquer condições iniciais e valores dos parâmetros. Nem sempre é possível aplicar este método.
2. *Técnica numérica*: integram-se numericamente as equações, calculando valores para as variáveis dependentes ($x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$). Utilizando esse método o trabalho de calcular é todo realizado pelo computador. As soluções obtidas são aproximadas e somente são válidas para as condições iniciais e os parâmetros utilizados na integração.
3. *Técnica qualitativa*: através de cálculos analíticos obtemos pistas de como o sistema evolui. Esses cálculos, em geral, são mais simples do que os necessários para a integração analítica. Determinamos as soluções assintóticas, os possíveis comportamentos do sistema quando $t \rightarrow \infty$, e a estabilidade dessas soluções. Utilizando esse método, perdemos parte da informação quantitativa, e da informação do comportamento transiente do sistema.

Para a maioria dos sistemas dinâmicos multidimensionais há grande dificuldade, ou até mesmo impossibilidade, em se obter resultados analíticos. Este é o motivo pelo qual se utilizam métodos numéricos e ferramentas computacionais para a análise dos mesmos.

Quanto à evolução temporal, os sistemas podem ser classificados como conservativos ou dissipativos. Se delimitarmos um determinado volume de condições iniciais num espaço de fases, com o objetivo de estudar o que acontece com esse volume conforme o tempo passa [3]. Por meio do teorema de Liouville [9], fica estabelecido que sistemas conservativos preservam o volume no espaço de fases durante sua evolução temporal, já sistemas dissipativos apresentam a contração do mesmo.

2.3 DEPENDÊNCIA SENSÍVEL NAS CONDIÇÕES INICIAIS

Uma das características mais conhecidas de sistemas caóticos é a sensibilidade nas condições iniciais, a qual pode ser avaliada por meio dos expoentes de Lyapunov. O expoente de Lyapunov é uma grandeza que quantifica a taxa de divergência entre trajetórias, de um mesmo sistema, obtidas a partir de condições iniciais ligeiramente diferentes [10].

Consideremos duas condições iniciais próximas, $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \vec{\Delta}(0)$, ambas atribuídas a um fluxo. A evolução temporal do sistema gera as órbitas $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$, como mostra a Fig 2.1. Consideremos ainda que, no tempo t , a separação entre as duas órbitas é $\vec{\Delta}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$. Se a distância entre as órbitas, $|\vec{\Delta}(t)|$, cresce exponencialmente com o tempo, ou seja, se $|\vec{\Delta}(t)| = |\vec{\Delta}(0)|e^{\lambda t}$, com $\lambda > 0$, sendo λ o exponente de Lyapunov, dizemos que o sistema apresenta dependência sensível nas condições iniciais e é caótico [3]. Assim, depois de algum tempo, perturbações, tais como ruídos, podem mudar drasticamente a solução, alterando a trajetória do sistema no espaço de fases.

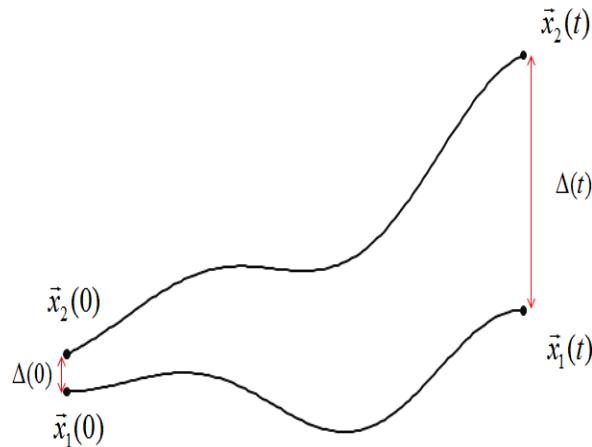


Figura 2.1 – Evolução de duas órbitas próximas no espaço de fase.

Com o intuito de determinarmos os expoentes de Lyapunov para um sistema de n equações diferenciais ordinárias, consideramos uma hiperesfera de condições iniciais centrada em $\vec{x}(t_0)$ com raio $d_j(t_0)$ e evoluímos o sistema no tempo. Uma vez que ao longo da j -ésima dimensão ($j = 1, \dots, n$), o raio inicial tenha variado exponencialmente no tempo, estabelecemos

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (2.4)$$

que também pode ser reescrita como

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}, \quad (2.5)$$

onde os λ_j são chamados de *expoente de Lyapunov*.

Em sistemas dissipativos o somatório dos expoentes de Lyapunov deve ser negativo [3],

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j < 0. \quad (2.6)$$

Se o sistema for conservativo, a soma dos expoentes de Lyapunov é nula [3],

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0. \quad (2.7)$$

O cálculo dos expoentes na maioria dos casos é realizado numericamente, exceto em raras exceções, quando pode ser obtido analiticamente.

2.4 ATRATORES

Seja A um conjunto fechado de pontos no espaço de fases. Defini-se A como um *atrator* se são cumpridas:

- A é um conjunto invariante: ou seja, qualquer trajetória $\vec{x}(t)$ que começa em A , permanece em A [3];
- A atrai um conjunto aberto de condições iniciais: isto é um hipervolume B , que contém A , tal que para qualquer condição inicial $\vec{x}(0)$ pertencente a B , a distância entre a trajetória $\vec{x}(t)$ correspondente e A tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado *bacia de*

atração de A [3];

- A é mínimo: ou seja, não há subconjunto de A que satisfaça as duas condições anteriores [3].

A condição necessária para a existência de atratores é que o sistema seja dissipativo [11]. Uma forma prática de definir se um sistema é dissipativo se dá pelo cálculo e análise do divergente: se o divergente do sistema for negativo, o sistema é dissipativo. Para um fluxo tridimensional temos [3]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}.$$

Os atratores estão intimamente ligados à noção de *estabilidade*. Um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico possui um atrator estranho no seu espaço de fases. Logo, se ao menos um dos expoentes de Lyapunov for positivo, verificar-se-á um atrator estranho. O nome *atrator estranho* foi introduzido por D. Ruelle e F. Takens, em 1971, num trabalho sobre o processo de transição de fluxo laminar para fluxo turbulento em fluidos [3].

Abaixo, destacamos quatro tipos de atratores [3]:

- Ponto de equilíbrio estável: é um ponto fixo no espaço de fases, cujo comportamento do sistema converge e independe do tempo;
- Atrator periódico ou ciclo-limite: descreve um comportamento periódico no tempo (movimento regular);
- Atrator quase-periódico (torus): com duas frequências fundamentais independentes, o comportamento quase-periódico oferece uma situação dinâmica na qual órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, sem que apresente dependência sensível nas condições iniciais;
- Atrator caótico: apresenta comportamento aperiódico e dependência sensível nas condições iniciais.

Para o caso tridimensional, podemos classificar os atratores, conforme os expoentes de Lyapunov, como segue [3]:

- ponto de equilíbrio (ou ponto fixo): tem-se $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, o volume no espaço de fases contrai ao longo das três direções, a fim que a trajetória converja para o ponto;
- atrator periódico ou ciclo limite: tem-se $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$, tendo pelo menos um expoente nulo que corresponde a direção ao longo do ciclo limite;
- atrator quase-periódico (torus bidimensional): tem-se $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$, de modo que a trajetória atratora situa-se sobre uma superfície;
- atrator estranho ou caótico: tem-se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$. Observa-se um expoente de Lyapunov positivo, o qual está relacionado com a direção em que a trajetória diverge no espaço de fases. Há ainda um expoente nulo e o restante deve ser negativo, sendo que a soma das magnitudes dos expoentes positivos não pode exceder a soma das magnitudes dos expoentes negativos, a fim de garantir o somatório negativo e, portanto um sistema dissipativo. Isto é

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_3 < 0.$$

2.5 ESPAÇO DE PARÂMETROS

Quando calculamos os valores dos expoentes de Lyapunov, podemos gerar numericamente um gráfico conhecido em dinâmica não-linear como espaço de parâmetros bidimensional. Os espaço de parâmetros podem ser utilizados para analisar o comportamento de um sistema observando a variação da magnitude de uma dada quantidade, com as variações de dois parâmetros do sistema. De maneira geral, espaços de parâmetros são representações da variação de uma grandeza, como por exemplo o maior expoente de Lyapunov, em função de quaisquer dois parâmetros do sistema. Graficamente, utiliza-se um gradiente de cores que representa a variação da grandeza estudada. Para o caso do maior expoente de Lyapunov, a figura gerada nos fornece informações a respeito do comportamento dinâmico do sistema, ou seja, as regiões no espaço de parâmetros em que ele

apresenta caos, periodicidade e pontos fixos [8].

Os espaços de parâmetros apresentados para esta dissertação foram obtidos mediante a resolução numérica de equações adimensionais. Para isso, o modelo de Vallis (1.1) foi integrado utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo igual a 0,001. Foram excluídas as primeiras 100.000 etapas de integração, consideradas transiente. Esses valores foram discretizados em uma malha de 1.000 x 1.000 pontos equidistantes, realizados 50.000,00 de passos de integração para cada ponto. Foram definidas as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (1,4, 0,1, 0,3)$, em seguida, para cada incremento aos parâmetros, utilizamos o último valor de (x, y, z) como novas condições iniciais, método conhecido como seguir o atrator.

2.6 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES

O termo bifurcação, introduzido por Poincaré em 1885, refere-se a mudança qualitativa na estrutura topológica do retrato de fases de um sistema dinâmico, conforme um parâmetro do sistema passa por valores críticos [3].

As equações que modelam um sistema físico real apresentam parâmetros de controle, podendo ser pensadas como funções desses parâmetros. Com efeito, o comportamento dinâmico do sistema pode ser modificado se o valor dos parâmetros for alterado. Os diagrama de bifurcações ilustram como a dinâmica de um sistema muda conforme a variação de um dos parâmetros de controle, evidenciam o nascimento, a evolução e a morte dos atratores [5].

Para o caso de fluxos, diagrama de bifurcações são geralmente construídos plotando os máximos locais de uma variável x^i no eixo vertical, sendo o eixo horizontal atribuído ao parâmetro de controle. Nesse caso, para cada valor do parâmetro, um único valor de x^i pode representar um ponto fixo ou ciclo-1, dois valores distintos de x^i indicam ciclo-2, e assim sucessivamente [12]. Assim, valendo-nos dessa ferramenta conseguimos determinar os períodos e as rotas para o caos.

As bifurcações podem ser classificada como:

- Bifurcações locais: são aquelas que podem ser prevista estudando o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de uma trajetória fechada. É possível

prever essa forma de bifurcação via autovalores da matriz Jacobiana para o sistema. Bifurcações de Hopf, dobramento de período e sela-nó são importantes tipos de bifurcações locais [13].

- Bifurcações globais: são aquelas que não podem ser identificadas a partir de uma análise local, exemplos dessas bifurcações são as bifurcações homoclínicas e heteroclínicas [13].

Capítulo 3

O MODELO

Neste capítulo tratamos brevemente do fenômeno El Niño introduzindo o modelo matemático, a saber o modelo Vallis para o El Niño [14]. Como veremos o sistema de equações aqui investigado foi derivado a partir de um sistema convectivo numa caixa de fluido.

3.1 O MODELO DE VALLIS PARA O EL NIÑO

O El Niño é um fenômeno climático de escala global de caráter atmosférico oceânico, caracterizado por um aquecimento anormal das águas superficiais no oceano Pacífico Equatorial. Ele pode afetar o clima regional e global, mudando os padrões de vento a nível mundial e afetando assim os regimes de chuva em regiões tropicais e de latitudes médias. O El Niño ocorre em intervalos médios de três a seis anos, e é observado no mês de dezembro [14].

Alguns efeitos dos seus efeitos são: ventos alísios que sopram de leste para oeste com menos força na região central do oceano Pacífico, acúmulo de águas mais quentes do que o normal na costa oeste da América do Sul, aumento do índice de chuvas na costa oeste da América do Sul, intensificação da seca no nordeste brasileiro, entre outros. O nome foi dado por pescadores da costa do Peru e Equador, pois na época do Natal a região costuma receber uma corrente marítima de águas quentes. Por aparecer no período natalino, El

Niño “o menino” Jesus foi homenageado, pelos pescadores, com o nome do fenômeno climático. O termo popular foi adotado também pelos climatologistas [15].

Os modelos matemáticos que existem para o fenômeno apresentam diferentes graus de complexidade. Um dos menos complexos é o modelo de Vallis a tempo contínuo, que é constituído por um conjunto de três equações diferenciais autônomas não-lineares de primeira ordem. O modelo de Vallis para o fenômeno El Niño é dado pelo conjunto de equações (1.1) como descrito na introdução,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= By - C(x + p) \\ \dot{y} &= xz - y \\ \dot{z} &= -xy - z + 1\end{aligned}$$

onde x, y e z representam variáveis dinâmicas, e B, C e p são parâmetros. As equações (1.1) do modelo de Vallis para o El Niño foram derivadas por meio de um modelo para o oceano equatorial construído a partir de uma caixa de líquido, como mostra a Figura 3.1. Essa caixa é caracterizada por diferentes temperaturas, na parte superior do oceano Y_w e Y_e , essas temperaturas são da superfície do oceano oeste e leste. É suposto que o oceano profundo tenha uma temperatura constante F . Supomos ainda que a temperatura seja afetada por uma corrente superficial de vento X que impulsiona o fluido na superfície, ocasionando o movimento circular da água [16].

De acordo com a Figura 3.1, $X \simeq x$ que representa a velocidade da corrente oceânica gerada pelo gradiente de temperatura, $y \simeq Y_e - Y_w$ representa a diferença de temperaturas do leste e no oeste da camada superior do oceano e $z \simeq Y_e + Y_w - 2F$ é a soma dessas temperaturas. A corrente oceânica é conduzida pelo vento de superfície, que por sua vez é gerado pelo gradiente da temperatura. A simetria entre a *upwelling* também conhecida como afloramento e *downwelling* chamado de ressurgência é o resultado de conservação da massa. A temperatura do oceano profundo sob a *termocline* é dada por $F = \text{constante}$.

Upwelling é o movimento ascendente de água fria vindas das profundezas, muitas vezes rica em nutrientes. Ocorre essencialmente no verão, em situações de anticiclone em que as águas superficiais são empurradas para a superfície, sendo substituídas pelas águas profundas, frias e ricas em nutrientes [17].

Downwelling é o movimento da água da superfície para as regiões mais profundas do

oceano. Ocorre quando as águas superficiais convergem, empurrando a água da superfície para baixo. As regiões onde ocorrem o downwelling têm baixa produtividade devido à escassez dos nutrientes, uma vez que a água fria rica em nutrientes é empurrada para o fundo do oceano, sendo substituída por uma água mais quente e pobre em nutrientes [17].

Termocline é a camada de transição entre a camada mista na superfície e a camada de água profunda. As definições destas camadas são baseadas na temperatura. A camada mista está próxima da superfície, onde a temperatura é aproximadamente a da água superficial. A camada mista e a camada de água profunda são relativamente uniformes em temperatura, enquanto a termocline representa a zona de transição entre os dois. Na termocline, a temperatura da camada mista diminui mais rápido do que a temperatura da água do oceano profundo [17].

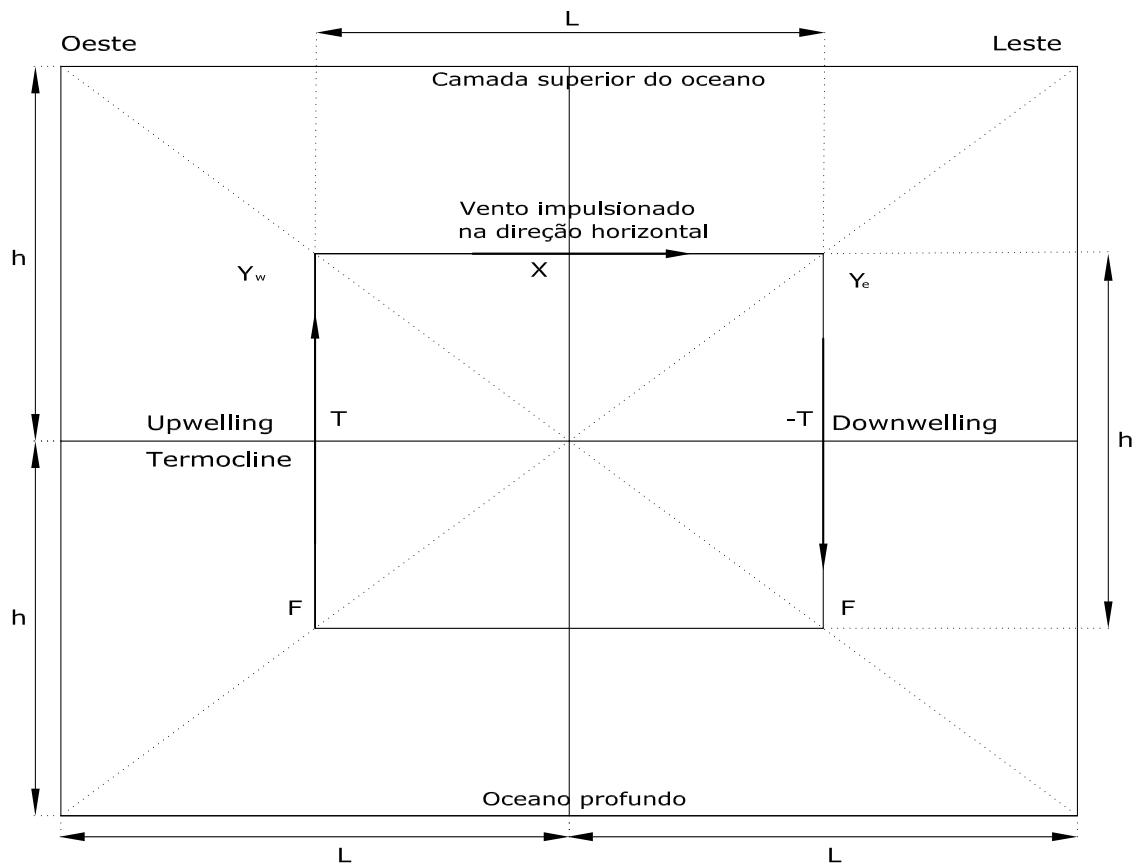


Figura 3.1 – O modelo de Vallis para variações acentuadas de temperaturas no oeste-leste do Pacífico Equatorial. L tem valor de 7.500 km mas o valor de h não é especificado.

O modelo clássico de Lorenz [18]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y + xy, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{3.1}$$

pode ser obtido a partir do modelo de Vallis (1.1), fazendo $p = 0$, $b = 1$ e com as relações adequadas entre as variáveis de ambos os sistemas [19], ou seja, o modelo de Lorenz (3.1), com $b = 1$, pode ser obtido por uma transformação linear das variáveis do modelo de Vallis (1.1) com $p = 0$.

Caso $p = 0$, o sistema (1.1) pode ser transformado no sistema de Lorenz (3.1) com $\sigma = C$, $b = 1$ e $r = \frac{B}{C}$ por meio das substituições

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -\frac{C}{B}y, \quad z \rightarrow -\frac{C}{B}z + 1\tag{3.2}$$

Então, por meio das transformações de (3.2) temos

$$\begin{aligned}x \rightarrow -x &\implies \dot{x} \rightarrow -\dot{x} \\ y \rightarrow -\frac{C}{B}y &\implies \dot{y} \rightarrow -\frac{C}{B}\dot{y} \\ z \rightarrow -\frac{C}{B}z + 1 &\implies \dot{z} \rightarrow -\frac{C}{B}\dot{z}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Assim, fazendo as transformações de (3.3) em (1.1) e simplificando as expressões, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cy - Cx, \\ \dot{y} &= -xz + \frac{Bx}{C} - y, \\ \dot{z} &= xy - z.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Sendo $\sigma = C$, $r = \frac{B}{C}$ e $b = 1$ em (3.4), resulta

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

Assim fica provado que o modelo de Vallis (1.1) pode ser obtido a partir do modelo de Lorenz (3.1) por meio de algumas transformações lineares das variáveis.

Essa semelhança entre os dois sistemas é justificada pelo fato de ambos descreverem fenômenos convectivos e é evidenciada na Figura 3.2, que mostra em (a) uma visão global do espaço de parâmetros (B, C) para o modelo de Vallis com $p = 0$, e em (b) uma visão

global do espaço de parâmetros (r, σ) do modelo de Lorenz com $b = 1$. Cada cor nos diagramas da Figura 3.2 está associada com o valor do maior expoente de Lyapunov, de acordo com a escala na coluna da direita. Por conseguinte, as regiões em amarelo para vermelho correspondem ao maior expoente de Lyapunov positivo, indicando pares de parâmetros para os quais a trajetória seguida pelo sistema no espaço de fases é caótica. As regiões em preto indicam o maior expoente de Lyapunov igual a zero, consequentemente os pares de parâmetros correspondentes estão associados às trajetórias periódicas. Detalhes de como as Figuras 3.2 foram constituídas são apresentados na próxima seção.

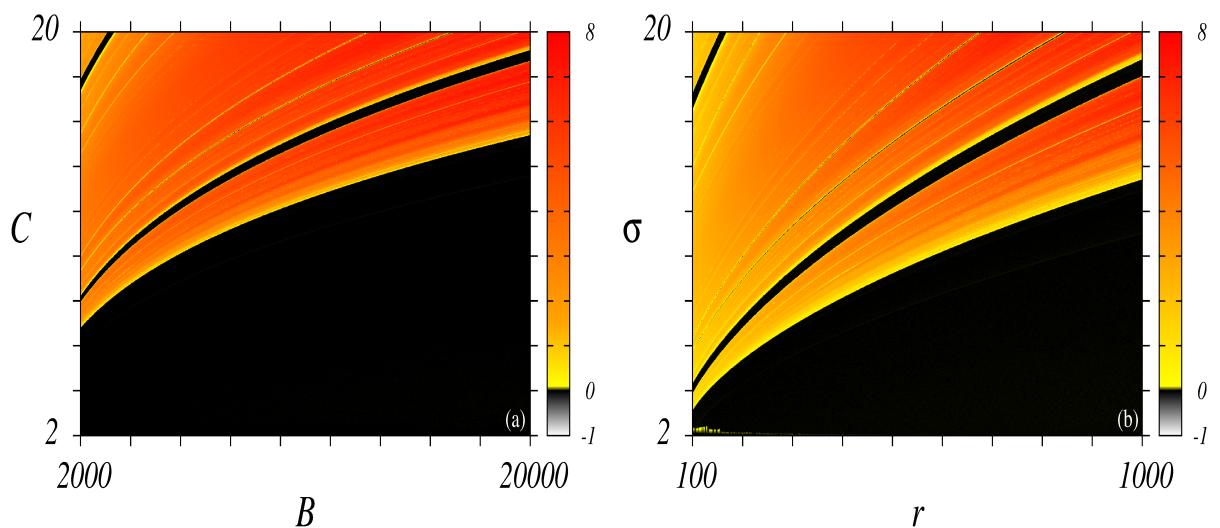


Figura 3.2 – (a) O diagrama representa o espaço de parâmetros (B,C) para o modelo de Vallis (1.1) para $p = 0$. (b) O diagrama do espaço de parâmetros (r,σ) para o modelo de Lorenz (3.1) para $b = 1$. Em ambos os diagramas são mostrados os domínios de estabilidade no respectivo espaço de parâmetro, exibindo regiões caóticas em amarelo para a cor vermelha e regiões periódicas em preto.

Capítulo 4

RESULTADOS

Neste capítulo iremos falar sobre o que já foi investigado no modelo de Vallis para o El Niño. Vamos descrever sobre a construção de espaços de parâmetros, diagrama de bifurações e atratores. Finalmente, vamos mostrar resultados inéditos obtidos com a variação dos parâmetros B , C e p para este modelo. Alguns desses resultados mereceram publicação em revista científica [20].

4.1 O ESPAÇO DE PARÂMETROS (B,C) DO MODELO DE VALLIS PARA O EL NIÑO

Algumas propriedades do modelo de Vallis para o El Niño (1.1) já foram relatadas envolvendo investigações analíticas e numéricas [21], [22], [23], [16], [24]. Mais especificamente, em [21] é abordada a ocorrência de caos no referido sistema para $B = 102$, $C = 3$ e $p = 0$. Em [22] é investigado o problema de localização de conjuntos compactos invariantes de sistemas não-lineares, onde o modelo de Vallis (1.1) é considerado como um exemplo. Soluções periódicas do modelo El Niño através do sistema diferencial de Vallis são apresentadas em [23]. Uma prova assistida por computador para o caos no modelo de Vallis (1.1) é relatada por Garay e Indig [16] para $B = 102$, $C = 3$ e $p = 0$ e $p = 0,8$. Além disso, ferraduras foram localizadas usando mapas de Poincaré. Em [24] investigou-se caos no modelo de Vallis com operadores fracionários, foram comparados os modelos usando derivadas de ordem inteira e não-inteira e examinados os modelos no âmbito das derivadas de ordem fracionárias.

Nesta seção apresentamos espaços de parâmetros (B,C) para o modelo de Vallis (1.1),

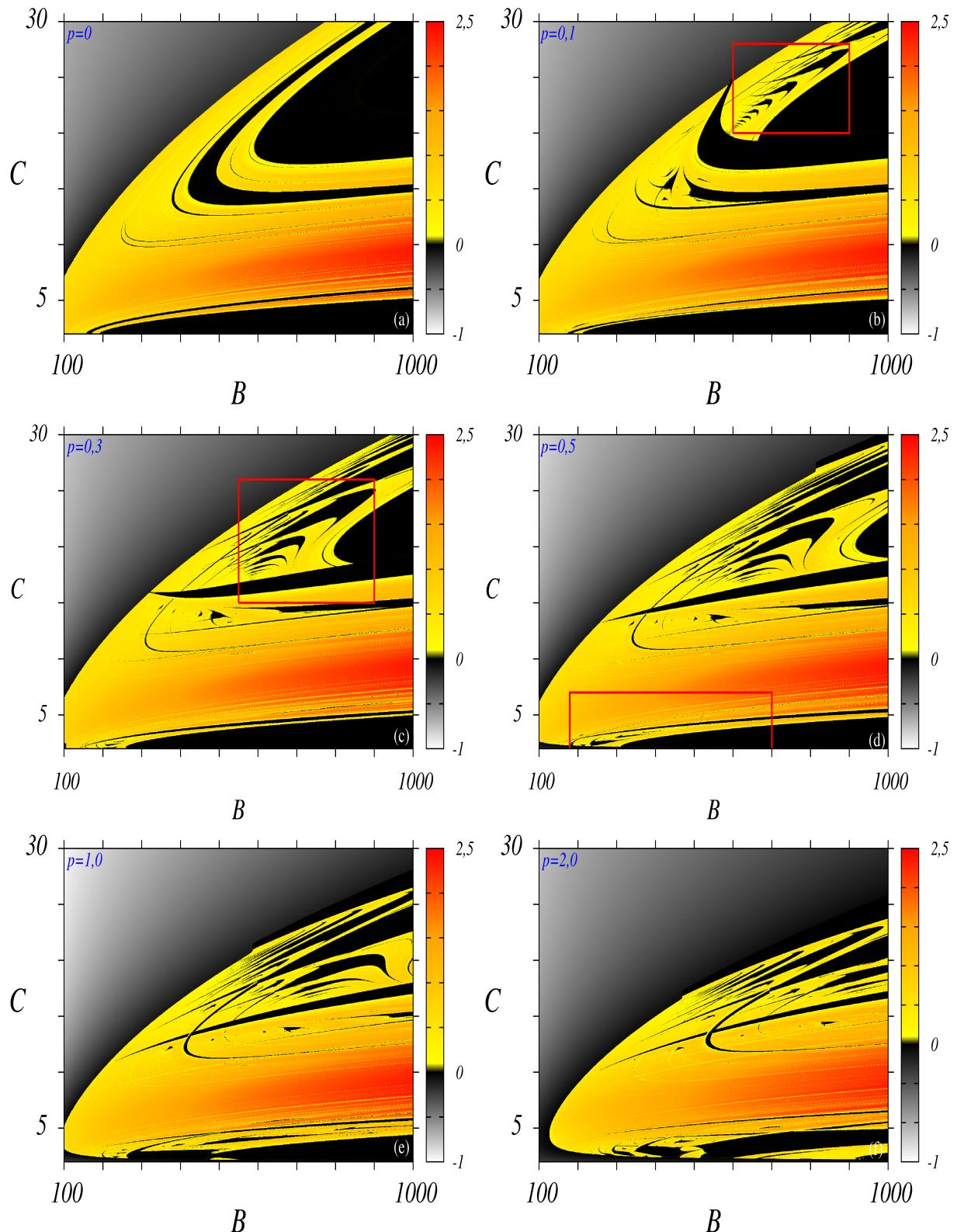
obtidos considerando o valor do maior expoente de Lyapunov. As malhas em todos os espaços de parâmetros mostrados são constituídas de 1.000 x 1.000 pontos equidistantes. Os diagramas dos espaços de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov, apresentados neste trabalho, são projeções bidimensionais de gráficos tridimensionais, compostas por dois eixos referentes aos dois parâmetros que são variados, neste caso B e C . Para cada figura de espaço de parâmetros gerada, fixamos um valor diferente para o parâmetro p . O maior expoente de Lyapunov é representado em cores. Em outras palavras, para cada caso fixamos o valor de p e variamos os outros dois parâmetros, B e C . Assim, associamos a cada par (B,C) um terceiro valor de interesse, aqui o maior expoente de Lyapunov. Independentemente do valor atribuído a p , os intervalos para os parâmetros B e C são mantidos os mesmos, $B \in [100,1.000]$ e $C \in [2,30]$.

Fora empregado o método de Runge-Kutta de quarta ordem para a integração do sistema (1.1), com o passo de tempo fixo igual a 0,001. Para o cálculo do expoente de Lyapunov foram descartados os primeiros 100.000 passos de integração, assumidos como transiente, e considerados os subsequentes 49.000,00 passos. O espaço de parâmetros foi varrido em sentido crescente dos valores de B e C . Como condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (1,4, 0,1, 0,3)$ e seguindo o atrator, ou seja, para cada par (B,C) , exceto o primeiro, a condição inicial do sistema foi assumida como o último valor atribuído às variáveis (x,y,z) para o par anterior. A escala de cores utilizada em cada figura está associada ao valor do maior expoente de Lyapunov, representada na coluna ao lado direito de cada diagrama.

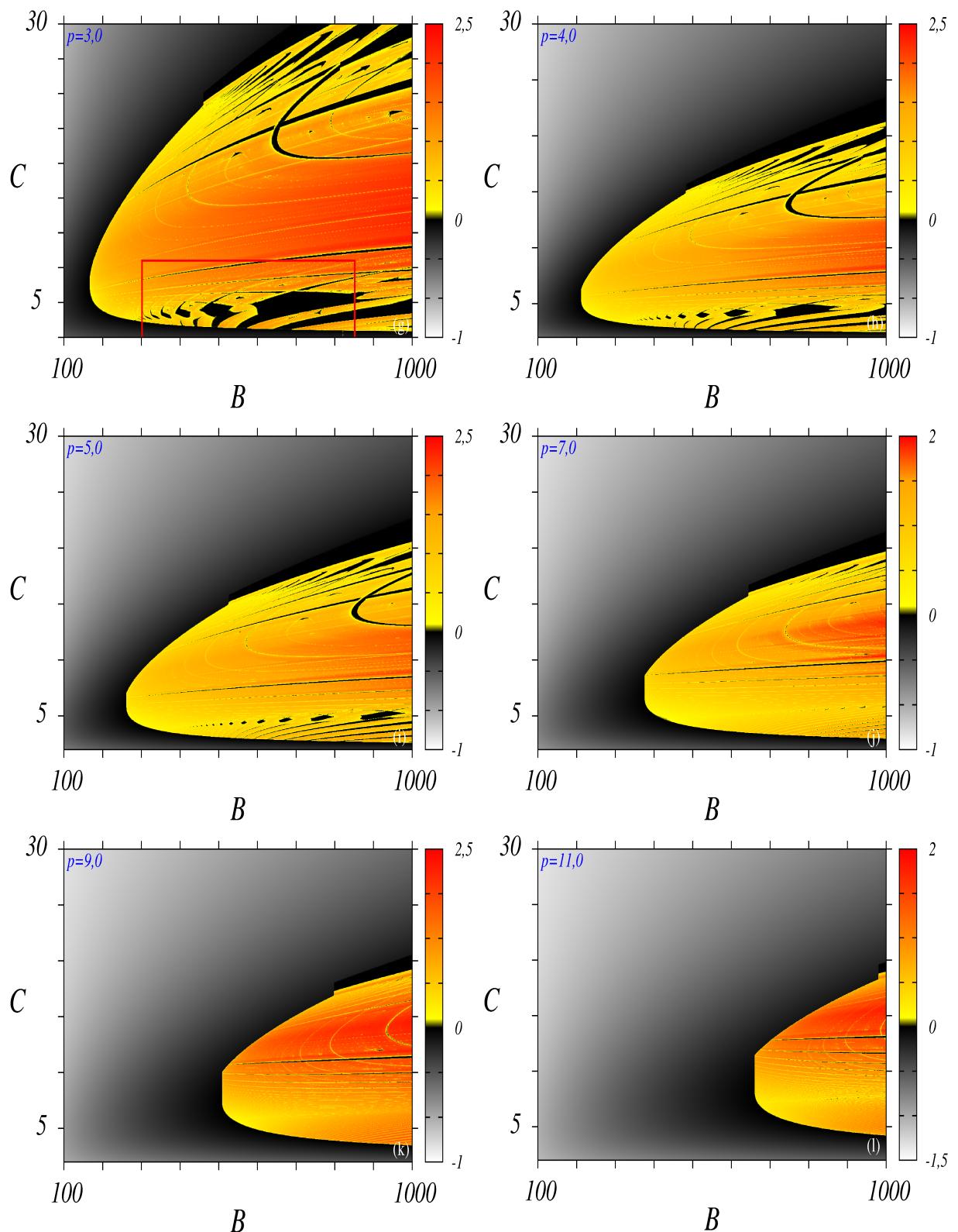
Como já abordado, o maior expoente de Lyapunov positivo é indicativo de comportamento caótico, sendo representado nas figuras a seguir pelo degradê de amarelo até vermelho. Expoentes de Lyapunov negativos, correspondentes a pontos fixos estáveis, estão representados pelo degradê de branco para preto. Em preto encontram-se os expoentes nulos, correspondentes a regiões periódicas [25].

Os diagramas da Figura 4.1 mostram mudanças nas imagens dos espaços de parâmetros (B,C) do modelo de Vallis (1.1) para o El Niño, em função do parâmetro p , o qual foi aumentado discretamente de zero a quinze. Tal como no caso da Figura 3.2 a cor dos diagramas da Figura 4.1 está relacionada com o valor do maior expoente de Lyapunov. Identificamos uma cor para cada maior expoente de Lyapunov variando continuamente

o espectro, desde a mudança da cor preta para a branca onde estão representados por expoentes negativos, passando pelo preto que são expoentes nulos, até chegar na mudança da cor amarela para vermelha que representam expoentes positivos. Conseguimos identificar as regiões de comportamentos caótico, periódico e de pontos fixos atrativos. Os valores atribuídos ao parâmetros p estão identificados na parte superior esquerda de cada imagem.



Continuação da Figura 4.1



Continuação da Figura 4.1

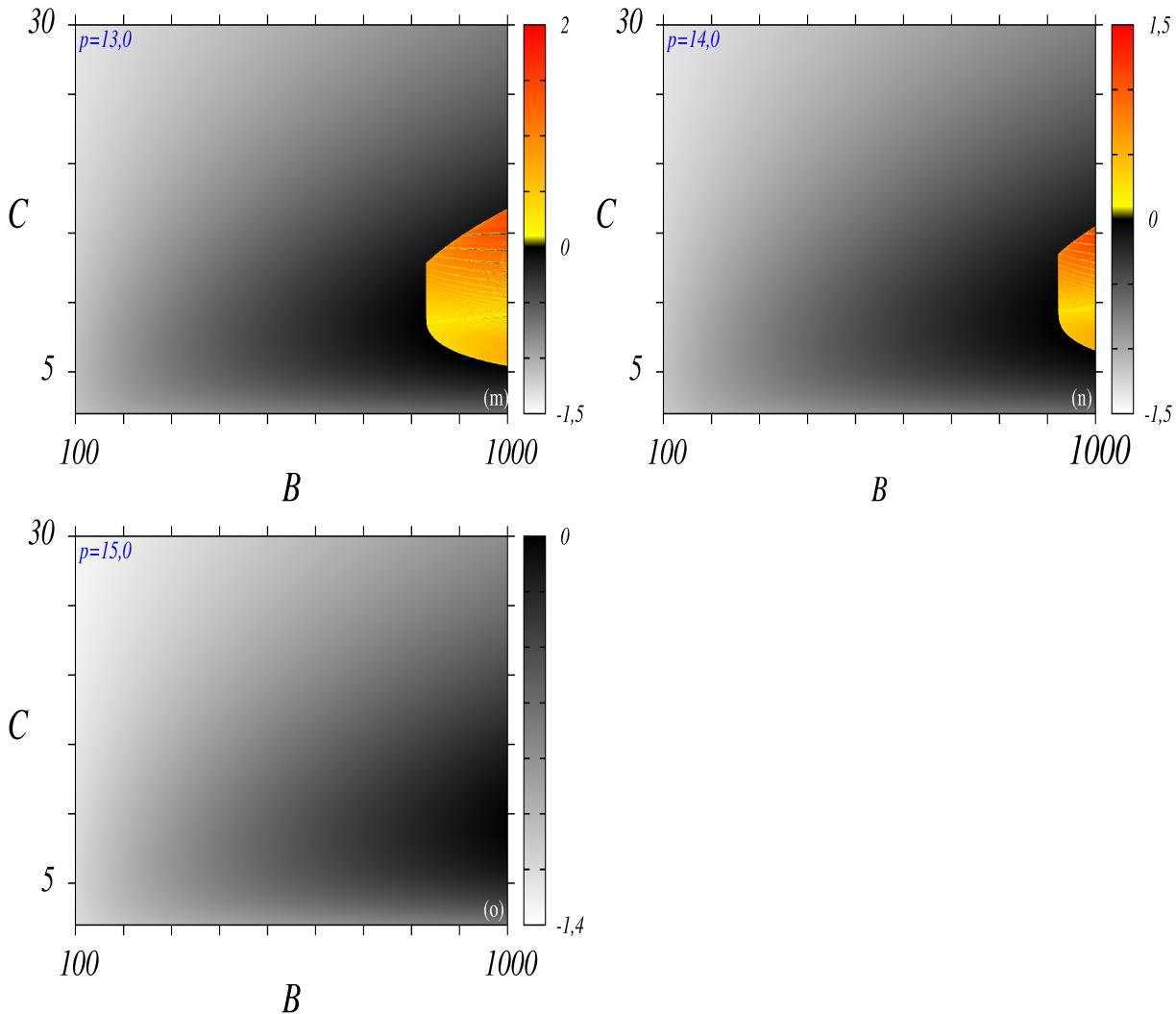


Figura 4.1 – As imagens representam o espaço de parâmetros (B,C) para o sistema de Vallis (1.1).

Em ambos os diagrama de bifurcações são mostrados domínios de estabilidades no respectivo espaço de parâmetros. (a) $p = 0$, (b) $p = 0,1$, (c) $p = 0,3$, (d) $p = 0,5$, (e) $p = 1,0$, (f) $p = 2,0$, (g) $p = 3,0$, (h) $p = 4,0$, (i) $p = 5,0$, (j) $p = 7,0$, (k) $p = 9,0$, (l) $p = 11,0$, (m) $p = 13,0$, (n) $p = 14,0$, (o) $p = 15,0$.

O espaço de parâmetros representado na Figura 4.1 (a), gerado para $p = 0$, mostra as regiões caóticas, em gradiente de cores de amarelo para vermelho, margeadas por faixas periódicas, exceto no lado direito. A pequena região em cinza, na parte superior esquerda, corresponde aos parâmetros para os quais o sistema apresenta pontos de equilíbrio estáveis. Observamos a semelhança entre a Figura 4.1 (a) e a Figura 3.2 (a), as quais diferenciam-se apenas pelo intervalo do parâmetro B . Conforme fixamos valores para p maiores do que zero, de forma crescente, como representado na sequência de imagens Figura 4.1 [(b) - (n)], o cenário começa a mudar e surgem estruturas periódicas organizadas em sequência

de adição de períodos mergulhadas em uma região caótica. Quanto maior o valor do parâmetro p , mais estruturas periódicas, menores e mais espalhadas, são observadas em meio ao caos. Para $p = 15$ já não se observa a existência de regiões caóticas. Detalhamos mais sobre as mudanças no comportamento do sistema, decorrentes do aumento de p , na próxima seção.

4.2 OS DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÕES

O termo bifurcação foi introduzido pela primeira vez por Poincaré em 1885 e refere-se à mudança qualitativa na estrutura topológica do diagrama de fase de um sistema dinâmico, conforme um ou mais parâmetros do sistema passam por valores críticos [3]. Podemos dizer que o diagrama de fase depende do parâmetro. Quando variamos o valor desse parâmetro, pode-se destruir ou criar pontos de equilíbrio e ciclos limites assim alterando sua estabilidade. O fenômeno da bifurcação está relacionado com a existência de caos, onde um sistema dinâmico que apresentar uma resposta caótica terá bifurcação. Já a recíproca não é verdadeira, um sistema que apresentar bifurcações pode não apresentar uma resposta caótica [5].

É muito comum analisar as estruturas apresentadas no espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, utilizando os diagrama de bifurcações. Escolhemos uma reta que cruza o espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, esta reta refere-se ao domínio de parâmetros para representá-lo graficamente pelo diagrama de bifurcação. Iniciamos o estudo no espaço de parâmetros analisando a Figura 4.1 (d), que considera $p = 0,5$ e onde pode ser visto, na parte inferior do lado esquerdo lateral, uma arranjo de estruturas periódicas desconectadas numa região caótica. Essas estruturas se tornam menores em tamanho à medida que se acumulam no sentido de uma faixa periódica preta, localizada acima deles. Esta situação é melhor visualizada em Figura 4.2 (a), uma ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (d).

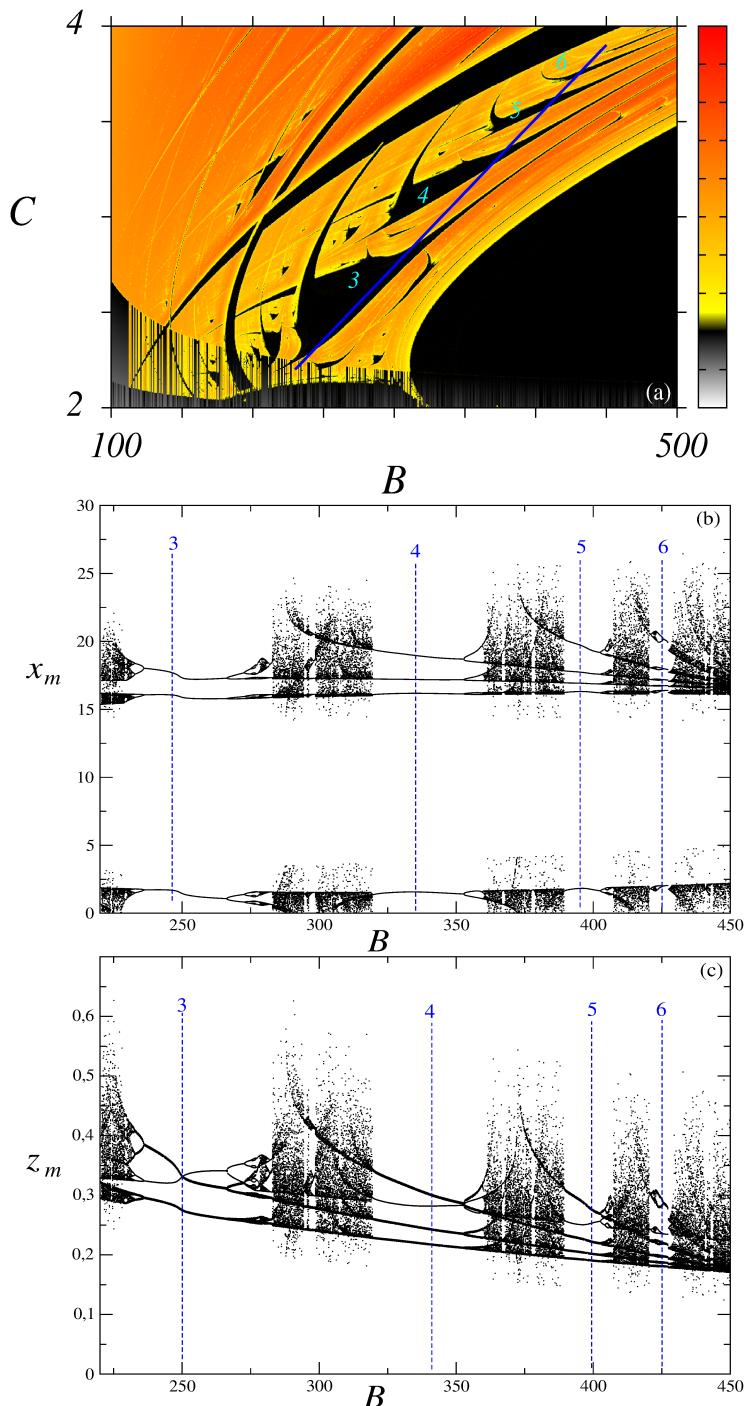


Figura 4.2 – (a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (d). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,00652B + 0,965$ em (a), para $220 \leq B \leq 450$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.

Observe que à medida que avançamos a partir do lado esquerdo para o lado direito ao longo da linha reta $C = 0,00652B + 0,965$ na Figura 4.2 (a), um conjunto de números provavelmente infinito de estruturas periódicas numeradas como 3, 4, 5, 6... é atravessado. Estas estruturas em preto que são separadas por regiões caóticas em amarelo para o vermelho, ficam cada vez menores e acumulam-se na fronteira de uma região de período-1. Também temos esse acúmulo de estruturas em cima no lado direito, que não é mostrado claramente na escala adotada para a Figura 4.2 (a). Eles são apenas uma parte de uma adição de períodos infinito em sequência de $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6\dots$, que aumenta a periodicidade de um montante igual à unidade, com o aumento dos parâmetros B e C . Este fenômeno acontece no espaço de parâmetros bidimensional, onde estruturas periódicas estão separadas por regiões caóticas que estão dispostas numa sequência, cujo o período da seguinte estrutura é aumentada por um número igual ao período da região de acumulação das estruturas. Tal fenômeno já foi observado antes em diferentes modelos matemáticos de tempo contínuo. Alguns exemplos são os modelos simulando um circuito de Chua [26], um laser de semicondutor [27], um laser de fibra de dois anéis dopado a érbio [28], uma rede neural de Hopfield [29, 30], um oscilador amortecido-forçado [31], crescimento de tumores [32], uma junção Josephson forçada [33], crescimento populacional [34] e osciladores forçados [35], além do sistema de Lorenz-Stenflo [36].

O número que identifica o período de cada estrutura na Figura 4.2 (a) foi definido a partir do diagrama de bifurcação na Figura 4.2 (b) e (c), o qual foi construído variando simultaneamente B e C ao longo da mesma linha reta $C = 0,00652B + 0,965$ que atravessa as estruturas, e considerando 1.000 valores do parâmetro B . Para a construção destes diagrama de bifurcações, e eventuais outros que aparecerão mais adiante, o sistema 1.1 foi integrado utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem com tamanho de passo igual a 0,001. O diagrama Figura da 4.2 (b), considera o número de máximos locais da variável $x(t)$, nomeadamente como x_m , em uma trajetória completa sobre o espaço de fase do atrator, como uma função do parâmetro B , neste caso para $220 \leq B \leq 450$. Para cada parâmetro B foram plotados graficamente sessenta valores para os máximos locais de x_m . O diagrama da Figura 4.2 (c) considera o número de máximos locais da variável $z(t)$ ou conforme escrito na figura z_m , esse diagrama de bifurcação da Figura 4.2 (c) terá as mesmas propriedades do diagrama de bifurcação da Figura 4.2 (b). Podemos observar que os dois diagrama de bifurcações tem as mesmas propriedades mas não são

iguais, a mudança esta no eixo, pois a Figura 4.2 (b) será no eixo x e a Figura 4.2 (c) é no eixo z . Podemos perceber que a mudança é apenas no eixo, mas as duas figuras tem a mesma sequência de adição de períodos. Observe que cada janela periódica enumerada no diagrama de bifurcações da Figura 4.2 (b) e (c) está relacionada com a estrutura periódica igualmente numerada na sequência de adição de período da Figura 4.2 (a).

Também pode ser visto nos diagramas da Figura 4.1 que, conforme o parâmetro p aumenta, vamos tendo mais conjuntos de estruturas periódicas que cresce mais sobre a região caótica do espaço de parâmetros (B,C) . Esta propagação pode ser vista melhor na Figura 4.3 (a), uma ampliação da região de dentro da caixa na Figura 4.1 (g) para o caso particular em que $p = 3,0$. Desta vez, à medida que avançamos a partir do lado direito para o lado esquerdo ao longo da linha reta $C = 0,00241 B + 2,431$ na Figura 4.3 (a), um conjunto de estruturas periódicas enumeradas como 3, 4, 5, 6, 7, é atravessado. Diferentemente do caso anterior ($p = 0,5$), agora as estruturas periódicas em preto tornam-se cada vez maior, e se acumulam na fronteira de uma região de período-1 na parte inferior, no lado esquerdo. No presente caso, eles constituem apenas uma parte de uma sequência de adição de período infinito $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$, que aumenta a periodicidade de um montante igual a unidade, como parâmetros B e C . Como antes no caso $p = 0,5$, os diagrama de bifurcações na Figura 4.3 (b) e (c) é útil para determinar os períodos (números) anotados na Figura 4.3 (a). A Figura 4.3 (c) é o mesmo diagrama de bifurcação de (b) com apenas uma mudança no eixo, no caso para z_m , onde podemos perceber que os períodos são exatamente os mesmo do diagrama de bifurcações com x_m da Figura (b). Os diagramas de bifurcações da Figura 4.4 (b) e (c) para os pontos ao longo da linha reta $C = 0,00241 B + 2,431$ para $200 \leq B \leq 900$. Concluímos que os dois diagramas de bifurcações da Figura 4.3 (b) e (c) identificam os mesmos períodos da Figura 4.3 (a) observando que eles corroboram com o resultado.

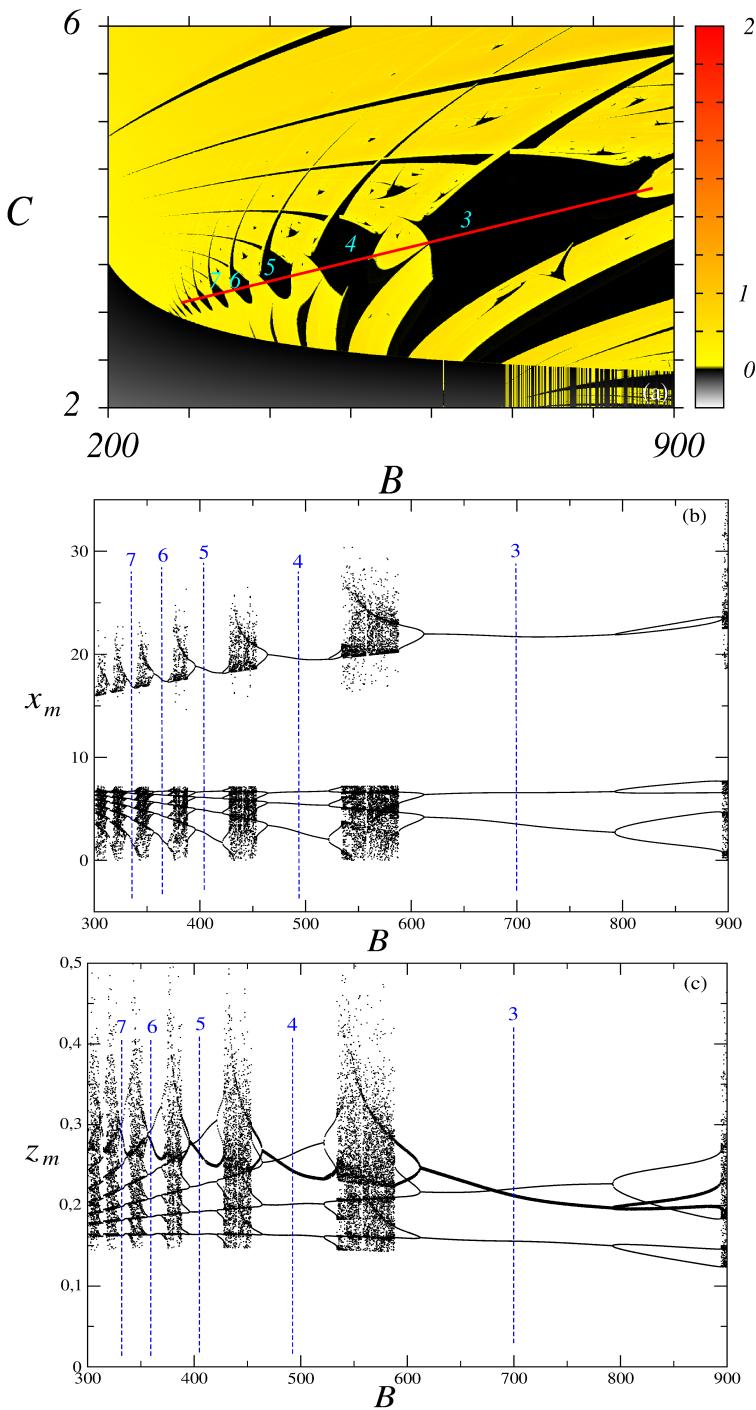


Figura 4.3 – (a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (g). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,00241 B + 2,431$ em (a), para $200 \leq B \leq 900$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.

Podemos perceber que também acontece um arranjo de estruturas periódicas na parte de cima do espaço de parâmetros, como observado na Figura 4.1 (b), onde considera $p = 0,1$, que pode ser visto, na parte superior do lado direito, um arranjo de estruturas periódicas desconectadas numa região caótica. Essas estruturas se tornam cada vez menores em tamanho à medida que se acumulam no sentido de uma faixa periódica preta. Esta situação é melhor visualizada na Figura 4.4 (a), uma ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (b). Observe que à medida que avançamos a partir do lado direito para o lado esquerdo ao longo da linha reta $C = 0,02641 B + 4,5173$ na Figura 4.4 (a), um conjunto de um número provavelmente infinito de estruturas periódicas numeradas como 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ..., é atravessado. Estas estruturas em preto que são separadas por regiões caóticas em amarelo para o vermelho, ficam cada vez menores e acumulam-se na fronteira de uma região de período-2. Eles são apenas uma parte de uma adição infinita de período em sequência de $11 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \dots$, que aumenta a periodicidade de um montante igual à unidade, com o aumento dos parâmetros B e C . Podemos perceber que é uma sequência de adição de período. Temos ainda na região da fronteira de acumulação uma região de período-2 faixa maior em preto, onde termina o arranjo de estruturas periódicas. Analisando as Figuras 4.4 (b) e (c), onde temos os diagramas de bifurcações que são úteis para determinarmos os períodos da nossa Figura 4.4 (a). Os diagramas de bifurcações tem as mesmas propriedades dos anteriores apenas mudando o eixo de cada figura. Os diagramas de bifurcações da Figura 4.4 (b) e (c) para os pontos ao longo da linha reta $C = 0,02641 B + 4,5173$ para $450 \leq B \leq 780$. Observamos que os dois diagramas de bifurcações identificam os mesmos períodos concluindo que eles tem as mesmas propriedades mudando apenas o eixo.

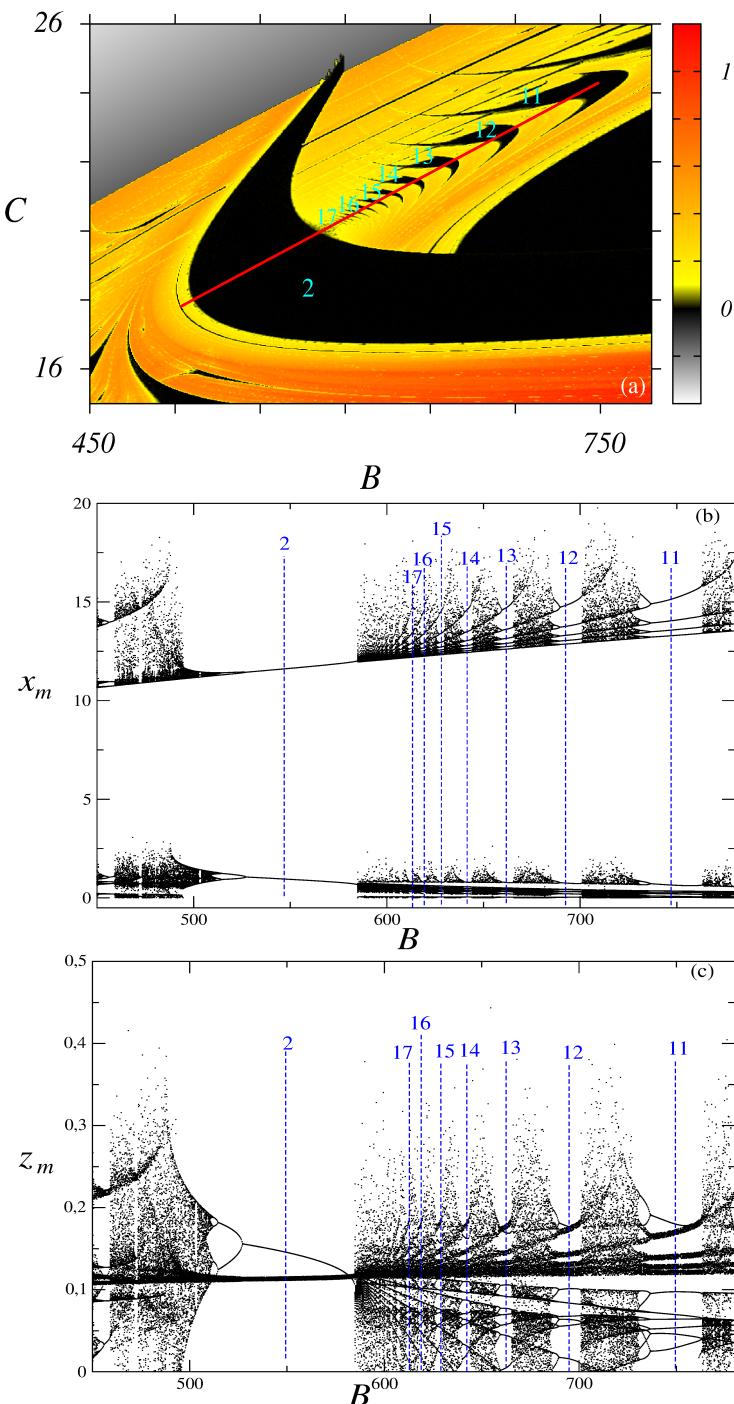


Figura 4.4 – (a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (b). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,02641B + 4,5173$ em (a), para $450 \leq B \leq 780$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.

Podemos analisar também os diagramas da Figura 4.1 (c) para o caso que $p = 0,3$, onde temos na parte superior do lado direito, um arranjo de estruturas periódicas desconectadas numa região caótica. Esta situação é melhor visualizada na Figura 4.5 (a), uma ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (c). Observe que à medida que avançamos a partir do lado direito para o lado esquerdo ao longo da linha reta $C = 0,03029 B - 0,06382$ na Figura 4.5 (a), um conjunto de um número provavelmente infinito de estruturas periódicas se tornam cada vez menores e acumulam-se na borda da região do período-2. Essas estruturas periódicas são constituídas de dois conjuntos misturados de bifurcações por adição de período: (i) o primeiro conjunto, representado pela sequência $4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow \dots$, e (ii) o segundo conjunto, com uma sequência $6 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow \dots$. Em termos da sequência completa, as estruturas periódicas imersas na região caótica da Figura 4.5 (a), e que se acumulam na fronteira da região de período-2, são organizadas como

$$4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow \dots \quad (4.1)$$

À primeira vista, não existe qualquer regularidade na sequência (4.1), ou seja, dado um termo é impossível antecipar o anterior ou o seguinte. No entanto, se olharmos para a sequência com mais atenção, alguma regularidade pode ser discernida. Utilizando o software Wolfram Alpha disponível na página da internet <http://www.wolframalpha.com>, verificamos a possibilidade das sequências de períodos encontradas terem uma lei de formação. Para a Figura 4.5 (a), que apresenta os seguintes períodos $4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, \dots$ encontramos uma sequência que determina sua formação, sendo dada por

$$\frac{1}{4}(6n + (-1)^n + 11)$$

onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Como podemos observar, para algumas sequências de períodos encontradas obtivemos uma relação que governa a organização das estruturas periódicas. Aparentemente, cada uma das relações são válidas apenas para os números de n informados, ou seja, extrapolações não são garantidas. O diagrama de bifurcação na Figura 4.5 (b) e (c) corrobora com as observações referidas acima, e com as sequências de adição de períodos de cada conjunto e com a sequência completa.

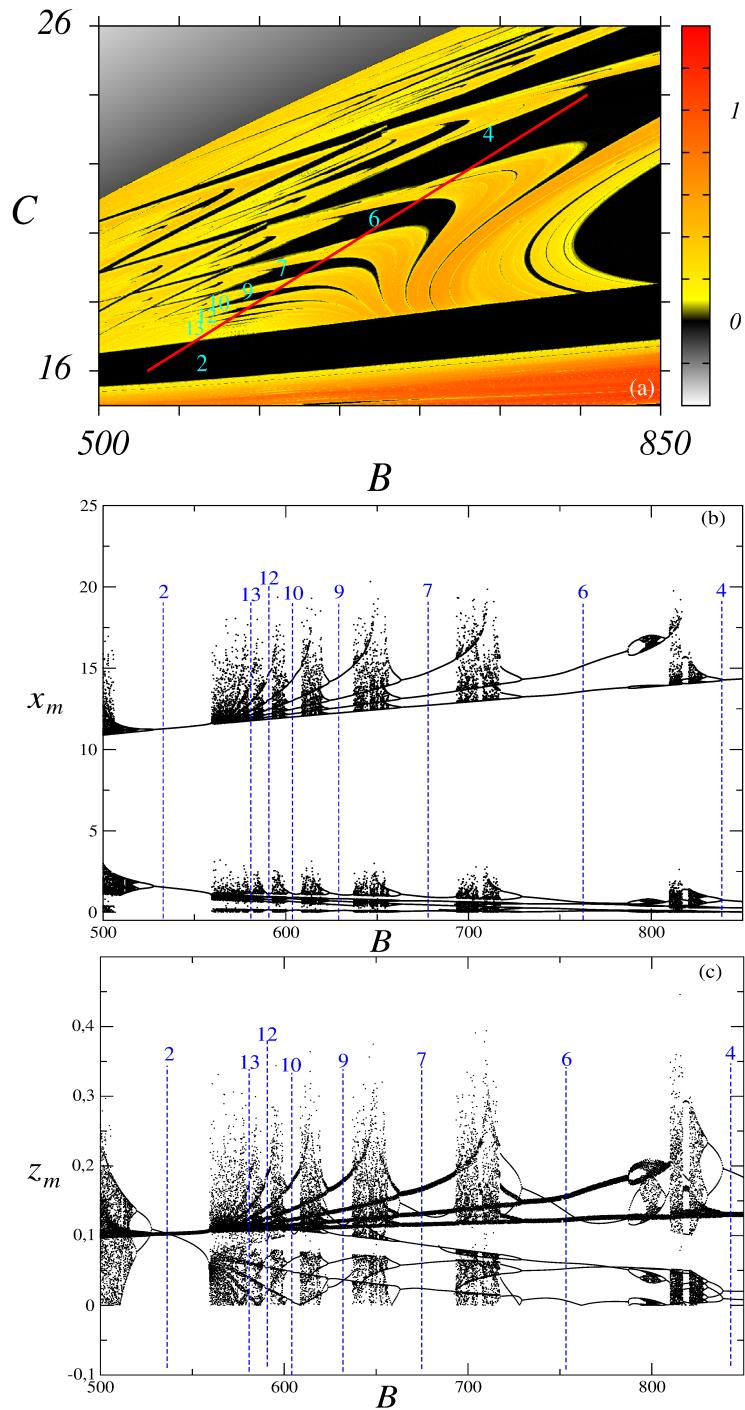


Figura 4.5 – (a) Ampliação da região dentro da caixa na Figura 4.1 (c). (b) Diagrama de Bifurcações para pontos ao longo da linha reta $C = 0,03029B - 0,06382$ em (a), para $500 \leq B \leq 850$. Os números plotados é de máximos locais na variável x , em uma trajetória completa no espaço de fase. (c) É o mesmo diagrama de bifurcações de (b) mas com uma diferença onde os números plotados é de máximos locais na variável z , em uma trajetória completa no espaço de fase.

Observando as imagens da Figura 4.1 que representam o espaço de parâmetros (B,C) do modelo de Vallis 1.1, podemos perceber que conforme aumentamos o parâmetro p , cada vez mais vão surgindo conjuntos de estruturas periódicas que se espalham mais e mais sobre a região caótica do espaço de parâmetros (B,C) . Esse acúmulo de estruturas periódicas aparecem e se tornam cada vez mais sobre o espaço de parâmetros (B,C) , e em menores tamanho conforme podemos observar nas Figuras 4.1 (j), (k) e (l). Ainda notamos que conforme p cresce, como nas Figuras 4.1 (m) com $p = 13,0$ e (n) com $p = 14,0$, essas regiões com acúmulo de estruturas periódicas desconectadas em uma região caótica vão diminuindo e aparecem mais regiões com pontos de equilíbrios. Conforme mostra a Figura 4.1 (o), onde temos $p = 15,0$, o espaço de parâmetros (B,C) tem apenas regiões com pontos de equilíbrios. E não temos mais regiões com acúmulos de estruturas periódicas desconectadas imersas em uma região caótica.

Podemos concluir, observando as imagens da Figura 4.1 que representam o espaço de parâmetros (B,C) do modelo de Vallis (1.1), que com o aumento do parâmetro p aparecem algumas regiões com o acúmulo de estruturas periódicas. No caso da Figura 4.1 (b) onde $p = 0,1$, conforme aumentamos o parâmetro p essas estruturas aumentam. Aumentamos tanto o parâmetro p em que chegamos na Figura 4.1 (o) em que só temos regiões com pontos de equilíbrios. Observando as Figuras 4.1 (d) e a (g), onde analisamos a parte inferior de cada uma delas, observamos ter uma região de acúmulo de período-1. Já nas Figuras 4.1 (b) e a (c), onde foi analisado a parte superior de cada figura, observamos que elas tem uma região com acúmulo de período-2. No caso da Figura 4.1 (c) encontramos uma sequência de formação dos períodos.

4.3 ATRATORES

Um aspecto importante da explicação de fenômenos dinâmicos é a descrição de atratores [37]. O espaço formado pelas variáveis dinâmicas do sistema (x, y, z) no sistema 1.1 é o chamado Espaço de Fases, e o caminho traçado pelo sistema neste espaço de fases, à medida que ele evolui no tempo, é chamado órbita ou trajetória.

Podemos caracterizar um sistema como dissipativo ou conservativo. Se delimitarmos um determinado “volume” de condições iniciais num espaço de fases, vamos querer saber o que acontece com esse “volume” ¶ conforme o tempo passa. Um sistema é chamado de conservativo, durante a sua evolução temporal, se houver preservação de volume no espaço de fase. Então num sistema conservativo, os pontos num dado volume se movem, com o passar do tempo, mas de tal modo que num instante posterior, o volume ocupado por esses pontos ficará inalterado. Chama-se um sistema dissipativo, quando esse volume se contrai com o passar do tempo [3].

A condição necessária para a existência de atratores é que o sistema seja dissipativo. Para um sistema tridimensional, tomamos um volume de condições iniciais no espaço de fases e estudamos o que acontece com ele à medida que o tempo passa. Então podemos dizer que atratores comparecem em sistemas dinâmicos dissipativos; com efeito, nesses sistemas ocorre contração do elemento de volume no espaço de fases, o que não é possível então para sistemas conservativos. À medida que descrevemos o comportamento de sistemas físicos para tempos longos, os atratores estão intimamente ligados à noção de *estabilidade*.

Podemos determinar a região dissipativa do sistema (1.1) calculando o seu divergente, como mostrado na seguinte expressão:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

¶ A palavra volume está entre aspas para informar que só irá ter volume, quando o sistema for tridimensional. Caso o sistema for bidimensional, utiliza-se uma área de condições iniciais; se for unidimensional refere-se a um comprimento de condições iniciais

Este cálculo nos dá como resultado

$$-c - 1 - 1$$

tal que para este sistema ser dissipativo, as variáveis e os parâmetros devem obedecer a seguinte condição

$$-c - 1 - 1 < 0$$

Podemos obter um comportamento caótico em sistemas autônomos, dissipativos e a tempo contínuo como no caso do nosso modelo de Vallis (1.1). Em sistemas dinâmicos dissipativos o estudo de atratores é um aspecto importante. Atratores são conjuntos invariantes de pontos que estão em um volume de condições iniciais, para um sistema tridimensional, no qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. O conjunto completo de condições iniciais que convergem para um dado atrator é definido como sua bacia de atração [1].

Para o sistema de estudo, o modelo de Vallis (1.1), foram realizadas os atratores e podemos perceber que as imagens geradas, como mostra a Figura 4.6, são parecidas com o atrator de Lorenz. O atrator de Lorenz lembra as asas de uma borboleta [38], assim como as figuras do modelo de Vallis (1.1) que também tem o mesmo formato. A Figura 4.6 (a) é o atrator de Lorenz com os seguintes valores, $\sigma = 10$, $b = 1$, $r = 28$ e as inicializações de (x, y, z) com $(1, 2, 3)$. Para construção dos mesmos, e para os próximos que estarão nessa última sessão, o sistema de Vallis (1.1) foi integrado utilizando um algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo igual a 0,001, considerando 50.000,00 passos, dos quais foram plotados os últimos 100.000 pontos. Para a Figura 4.6 (b) e as próximas desta sessão as seguintes inicializações de (x, y, z) foram $(1,4, 0,1, 0,3)$.

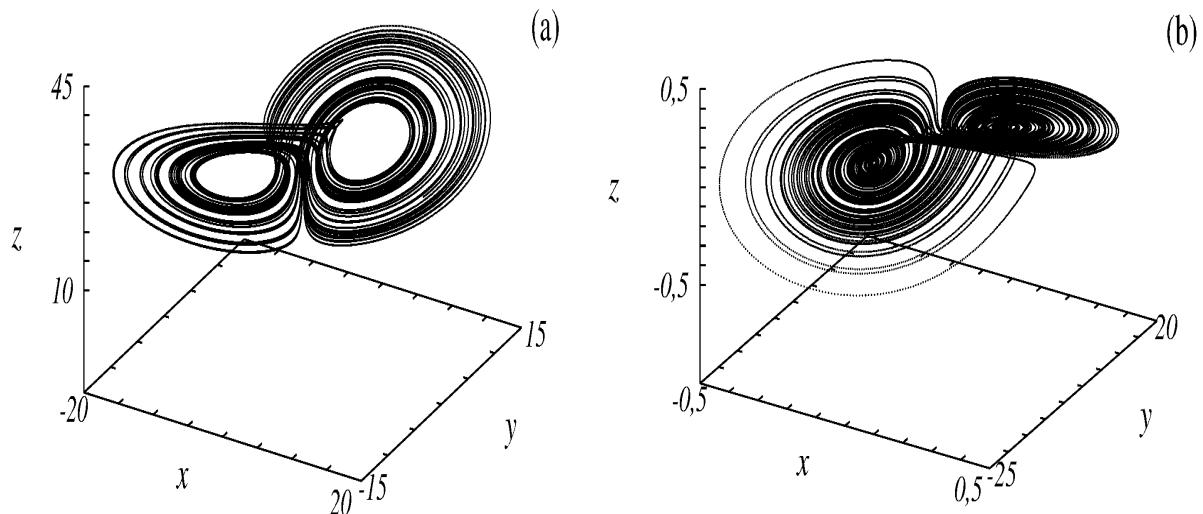
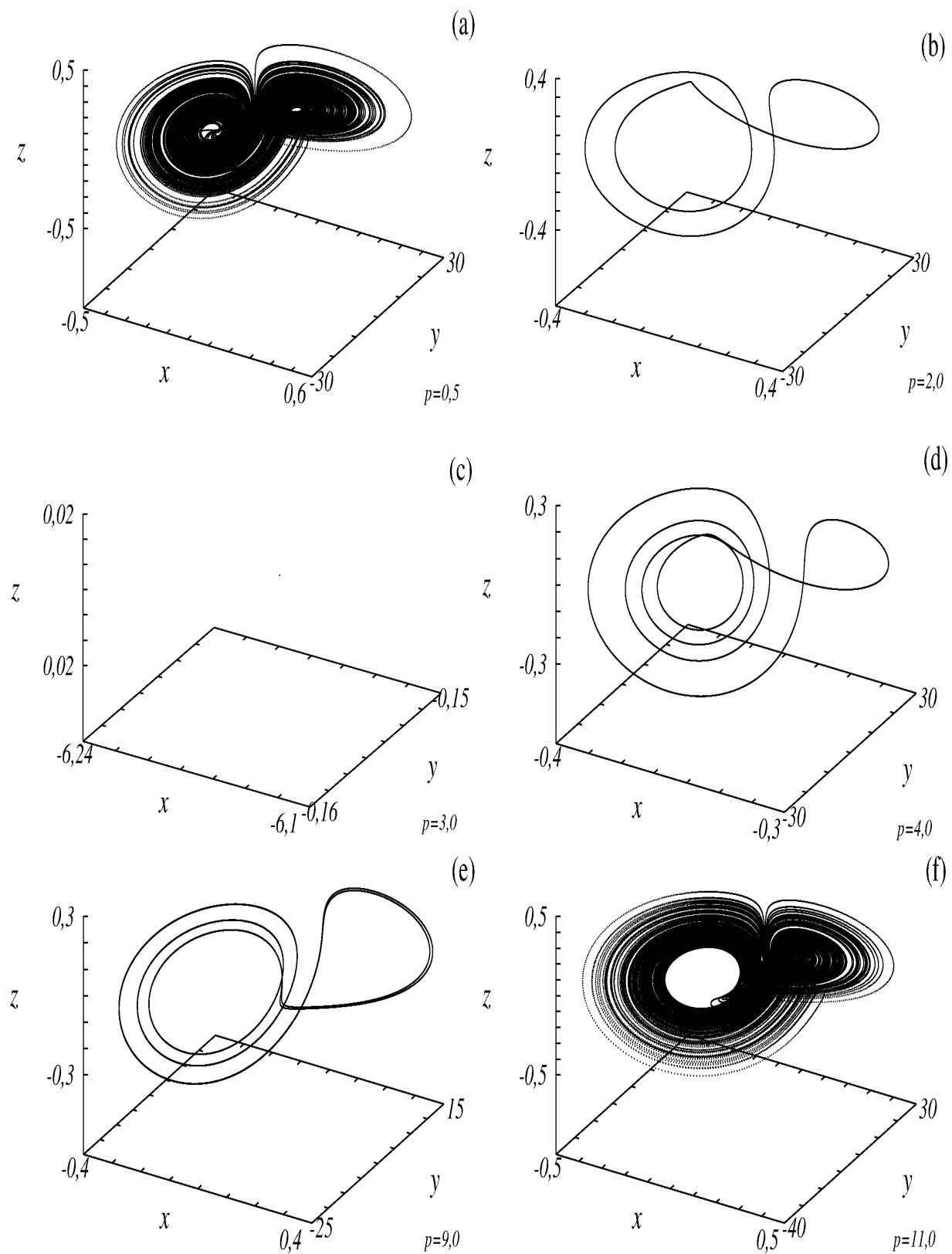


Figura 4.6 – (a) Atrator de Lorenz. (b) Atrator do modelo de Vallis para o El Niño.

A Figura 4.6 mostra em (a) o atrator de Lorenz conforme descrito na página anterior, em (b) o atrator para o modelo de Vallis (1.1) com $p = 0$, $b = 600$ e $c = 8,0$. Podemos perceber que a Figura 4.6 (b) com os parâmetros descritos acima é um atrator caótico e conforme sabemos o atrator de Lorenz também é um atrator caótico. Percebemos que o modelo de Vallis 1.1 apresenta atratores parecido com o do modelo de Lorenz (3.1), essa coincidência já relatamos acima sobre algumas semelhança entre esses dois modelos. Nos atratores essa semelhança também houve, sendo que o atrator de Vallis para o El Niño também se parece com asas de borboleta como o atrator de Lorenz. O sistema de Vallis (1.1) ainda apresenta outros tipos de atratores com outros valores de parâmetros conforme mostra a Figura 4.7.



Continuação da Figura 4.7

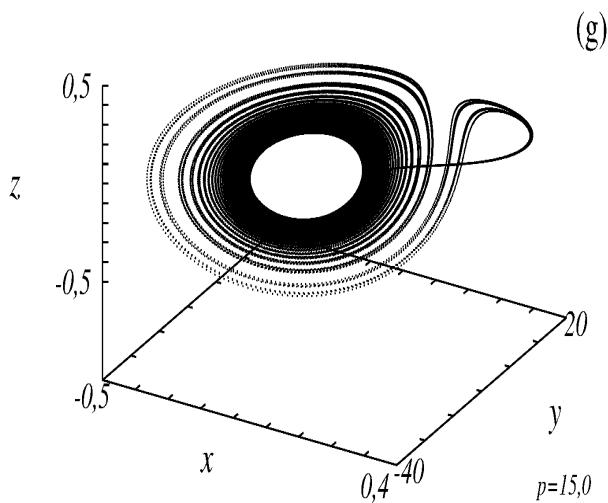


Figura 4.7 – (a) Atrator com $p = 0,5$, (b) Atrator com $p = 2,0$, (c) Atrator com $p = 3,0$, (d) Atrator com $p = 4,0$, (e) Atrator com $p = 9,0$, (f) Atrator com $p = 11,0$ e (g) Atrator com $p = 15,0$.

As imagens da Figura 4.7 do modelo de Vallis apresenta outros tipos de atratores. Na Figura 4.7 (a) temos um atrator caótico com os seguintes parâmetros $p = 0,5$, $b = 800$ e $c = 10,0$. Na Figura (b) temos um atrator periódico com $p = 2,0$, $b = 600$ e $c = 3,0$ sendo esse atrator de período três. Em (c) temos um atrator de ponto fixo com $p = 3,0$, $b = 100$ e $c = 5,0$. Em (d) um atrator periódico com os seguintes parâmetros $p = 4,0$, $b = 800$ e $c = 4,3$, onde esse atrator periódico é de cinco períodos. Em (e) temos outro atrator periódico com cinco períodos com os seguintes parâmetros $p = 9,0$, $b = 950$ e $c = 13,0$. Em (f) é um atrator caótico com os seguintes parâmetros $p = 11,0$, $b = 986$ e $c = 13,0$ e finalmente em (g) também temos um atrator caótico com $p = 15,0$, $b = 980$ e $c = 9,6$.

Podemos ter algumas conclusões, conforme vamos aumentando o parâmetro p podemos ter atratores de ponto fixo, caótico e periódico, mas a sua forma também não muda muito conforme percebemos com a Figura 4.6 (b) onde $p = 0$ e a Figura 4.7 (g) com $p = 15,0$. As figuras mostram que os atratores possuem o mesmo formato apesar de pequenas mudanças.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Nessa dissertação propomos uma investigação sobre o espaço de parâmetros (B, C) do modelo de Vallis para o El Niño (1.1), constituído por um conjunto de três equações diferenciais autônomas, não-lineares, de primeira ordem. Para alcançar este objetivo, foram utilizadas diferentes ferramentas através de simulações computacionais, com o intuito de analisar e caracterizar os aspectos principais da dinâmica deste sistema.

Através de simulações numéricas, observamos que podemos ter muitos resultados que podem ser gerados através dos espaços de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcações e atratores, onde o sistema pode apresentar diferentes comportamentos, conforme a variação dos parâmetros.

Espaços de parâmetros foram construídos considerando sempre dois deles, a saber B e C . Alguns valores do terceiro parâmetro, p , foram considerados. Para caracterizar o comportamento dinâmico de cada ponto nestes espaços de parâmetros, foi utilizado o maior expoente de Lyapunov. Através do diagrama de bifurcações contamos os períodos das estruturas encontradas nos espaços de parâmetros e conseguimos verificar que certas sequências que descrevem a organização de alguns períodos obedecem uma lei de formação. O estudo da periodicidade nos mostrou que as estruturas periódicas estão auto-organizadas em direções específicas no espaço de parâmetros e são arranjadas em uma cascata de bifurcações por adição de período.

Verificou-se nos diagrama de bifurcações que independente do parâmetro escolhido, exceto $p = 0$ e $p = 15$, existem várias estruturas periódicas imersas em uma região caótica que aparecem organizadas por adição de período. Essas estruturas organizadas em adição de período aparecem nas figuras na parte superior e inferior. Das figuras estudadas

observamos que na parte inferior elas vão ter uma diferença de adição de período-1, já na parte superior vão ter uma diferença de adição de período-2. Também verificamos se ocorreria mudança fazendo o parâmetro p negativo, mas percebemos que ele conserva as estruturas em uma cascata de bifurcação por adição de período.

Em resumo, espaços de parâmetros bidimensionais do modelo de Vallis para o El Niño, apresentam estruturas periódicas auto-organizadas, imersas em regiões caóticas. A organização de tais estruturas pode, em alguns casos, ser descrita por uma lei de formação específica. É comum encontrar nestes espaços bidimensionais de parâmetros as estruturas periódicas organizadas em cascata de bifurcação por adição de período.

Também analisamos a forma dos atratores, onde tivemos os mais diferenciados tipos de atratores como ponto fixo, periódico e caótico, tendo sido verificada a semelhança entre os atratores do modelo de Lorenz e do modelo de Vallis. Percebemos que se aumentarmos o parâmetro p os espaços de parâmetros mantém o mesmo formato tendo pequenas alterações.

Para uma perspectiva futura, estudaremos o comportamento de outros sistemas dinâmicos utilizando estas ferramentas de análise, que se mostraram bem ilustrativas. Alguns dos resultados mostrados neste trabalho ajudaram a compor o artigo Chaos and periodicity in Vallis model for El Niño Ref. [20].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems.** Cambridge University Press, Nova York, 2000.
- 2 KUZNETSOV, I. **Elements of applied bifurcation theory.**[S.1]: Springer, 1998.
- 3 MONTEIRO, L.H.A. **Sistemas Dinâmicos.** Ed.3, Livraria da Física, 2011.
- 4 TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics.** University Science Books, 2005.
- 5 ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D.; YORKE,J.A. **Chaos An Introduction to Dynamical Systems.** Nova York:Springer, 1996.
- 6 RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.D.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** Ed. 2, São Paulo: MAKRON Books, 1996.
- 7 HILBORN, R.C. **Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers.** Ed.2, Oxford University Press, 2006.
- 8 FERRARA, N.F.; PRADO, C.P.C. **Caos, Uma Introdução.** São Paulo:Edgard Blücher Ltda, 1995.

- 9 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO,J. **Classical Mechanics.** Ed.3a, Prentice Hall, 2002.
- 10 ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. **Ergodic theory of chaos and strange attractors.** Reviews of Modern Physics, v. 57, p. 617, 1985.
- 11 BARRIO, R.; BLESÁ, F.; SERRANO, S. **Qualitative analysis of the Rössler equations: Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors.** Physica D, v. 238, p. 1087, 2009.
- 12 GULICK, D. **Encounters with Chaos and Fractals.** Ed.2, University of Maryland, College Park, USA, 2012.
- 13 HOLMES, J.G.P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.** Applied mathematical sciences. Springer-Verlag New York, v.42, 2002.
- 14 VALLIS, G.K. **El Niño: a chaotic dynamical system?** Science, 1986.
- 15 CANE, M.A.; ZEBIAK, S.E. **A Theory for El Niño and the Southern Oscillation.** Science, Vol. 228, 1985.
- 16 GARAY, B.M.; INDIG, B. **Chaos in Vallis asymmetric Lorenz model for El Niño.** Chaos, Solitons & Fractals 75, 253-262, 2015.
- 17 ALVAREZ, I.; GÓMEZ-GESTEIRA, M.; CASTRO DE, M.; DIAS.J.M. **Spatiotemporal evolution of upwelling regime along the western coast of the Iberian Peninsula.** Journal of Geophysics. Research., 2008, 113, C07020, DOI: 10.1029/2008JC004744.
- 18 LORENZ, E.N. **Deterministic Nonperiodic Flow.** Journal of the Atmospheric Sciences, v.20, 1963.
- 19 TUNG, K.K. **Topics in mathematical modelling.** Princeton University Press, 2007.

- 20 BORGHEZAN, M.; RECH, P.C. **Chaos and periodicity in Vallis model for El Niño.** Chaos, Solitons Fractals, & Volume 97, pp. 15–18, 2017.
- 21 VALLIS, G.K. **Conceptual models of El Niño and the Southern Oscillation.** Jornal Geophys Res Oceans, 1988:93(C11): 13979-91, 2012.
- 22 KRISHCHENKO, A.P.; KANATNIKOV, A. N. **Localization of compact invariant sets of nonlinear time-varying systems.** International Journal of Bifurcation and Chaos, v.18, 2008.
- 23 EUZÉBIO, R.D.; LLIBRE, J. **Periodic Solutions of El Niño Model Through the Vallis Differential System.** Discret. Contin. Dyn, v.34, n.9, 2014.
- 24 ALKAHTANI, B.S.T.; ATANGANA, A. **Chaos on the Vallis Model for El Niño with Fractional Operators.** Entropy, 2016.
- 25 WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.** Springer, New York, 2003.
- 26 ALBUQUERQUE, H.A.; RUBINGER, R.M.; RECH, P.C. **Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit.** Physics Letters A, v. 372, p. 4793, 2008.
- 27 BONATTO, C.; GALLAS, J.C.A. **Accumulation horizons and period adding cascades in optically injected semiconductor lasers.** Physics Letters E 75,055204(R), 2007.
- 28 KRÜGER, T.S.; RECH, P.C. **Dynamics of an erbium-doped fiber dual-ring laser.** European Physical Journal D, v. 66(1), p. 12, 2012.
- 29 MATHIAS, A.C.; RECH, P.C. **Hopfield neural network: the hyperbolic tangent and the piecewise-linear activation functions.** Neural Networks, vol. 34, p. 42, 2012.

- 30 RECH, P.C. **Period-adding and spiral organization of the periodicity in a Hopfield neural network.** International Journal of Machine Learning and Cybernetics, vol.6, 2015.
- 31 PRANTS, F.G.; RECH, P.C. **Organization of periodic structures in a damped-forced oscillator.** European Physical Journal B, v. 87, 196, 2014.
- 32 STEGEMANN, C.; RECH, P.C. **Organization of chaos and periodicity in a three-dimensional cancer model.** International Journal of Bifurcation and Chaos v. 24(2), 1450023, 2014.
- 33 RECH, P.C. **Period-Adding Structures in the Parameter-Space of a Driven Josephson Junction.** International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 25, 1530035, 2015.
- 34 SILVA, R.A da.; RECH, P.C. **Spiral periodic structures in a parameter plane of an ecological model.** Applied Mathematics and Computation, v. 254, p. 9-13, 2015.
- 35 CARDOSO, J.C.D.A. **Estudo Numérico da Dinâmica de Osciladores Forçados no Espaço de Parâmetros.** Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Pós Graduação em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, 2012.
- 36 RECH, P.C. **Spiral organization of periodic structures in the Lorenz-Stenflo system.** Physica Scripta, vol. 91, 075201, 2016.
- 37 BYRNE, G.; GILMORE, R.; LETEKKIER, C. **Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors.** Physical Review, 2004.
- 38 LETELLIER, C.; TSANKOV, T.D.; BYRNE, G.; GILMORE, R. **Large-scale structural reorganization of strange attractors.** Physical Review, 2005.