UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

ANDRÉ MARTORANO KUERTEN

EQUAÇÕES DE ONDA ELETROMAGNÉTICAS EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS

JOINVILLE, SC

2011

ANDRÉ MARTORANO KUERTEN

EQUAÇÕES DE ONDA ELETROMAGNÉTICAS EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT.
Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso

JOINVILLE / SC
2011

APROVAÇÃO

FICHA CATALOGRÁFICA

A341e

Kuerten, André M.

Equações de Onda Eletromagnéticas em Espaços-tempo Curvos / André Martorano Kuerten; Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso. – Joinville-SC,

42f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2011.

1. Espinores. 2. Equações de Onda. 3. Fótons . I. Cardoso, Jorge G..

CDD 530.11

Agradecimentos

Sou grato ao Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso pela sua orientação, transmissão de conhecimentos e exposição de suas idéias, bem como a PROMOP pelo financiamento concedido. Também agradeço as pessoas que fizeram parte do desenvolvimento de meu mestrado, tais como professores, familiares e amigos. Por fim, agradeço aos colegas de mestrado e em especial a Ricardo Albrecht, companheiro de estudos e conversas sobre o projeto.

RESUMO

KUERTEN, André M. **Equações de Onda Eletromagnéticas em Espaços-tempo Curvos.** 2011. 42f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Relatividade e Cosmologia) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2011.

Este trabalho tem como um dos objetivos centrais considerar as equações de onda eletromagnéticas que estão envolvidas nas estruturas de curvatura dos formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden para a Relatividade Geral. Equações de onda para fótons com fontes que portam um caráter geométrico emergem no contexto de um dos formalismos e desempenham o papel principal aqui. Tais fontes foram condicionadas à equação da continuidade e deste modo se examinou o efeito produzido por elas no formato das equações de onda. O principal resultado obtido aqui é que as funções de onda correspondentes são espinores nulos.

PALAVRAS-CHAVE: Espinores. Equações de Onda. Fótons.

ABSTRACT

KUERTEN, André M. **Electromagnetic Wave Equations in Curved Spacetimes.** 2011. 42f. Dissertation (Master Course in Physics - Area: Relativity and Cosmology) - Santa Catarina State University, Post Graduation Program in Physics, Joinville, 2011.

The electromagnetic wave equations that occur in the two-component spinor formalisms of Infeld and van der Waerden for General Relativity are considered. Use is made of certain geometric current densities that emerge naturally within the context of one of the formalisms to show that the respective wave functions are null entities.

KEY WORDS: Spinors. Wave Equations. Photons.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os espinores mais amplamente difundidos entre os físicos são encontrados nas teorias de Pauli [1] e de Dirac [2] para o spin do elétron. No contexto de Pauli, pontua-se a estreita relação entre o grupo de matrizes unitárias $SU(2)$ e o grupo $SO(3)$, a qual repousa na existência de um homomorfismo entre os dois grupos, resultando que para toda rotação de $SO(3)$ correspondem duas matrizes de $SU(2)$. Na teoria de Dirac para o elétron, os espinores surgem naturalmente, e a descrição da dinâmica de partículas de espin $\pm 1/2$ é levada a cabo no espaço de Minkowski M da Relatividade Restrita. O grupo de tranformações que atua em M é o grupo de Lorentz L, o qual possui quatro componentes [3]. De modo similar ao caso da teoria de Pauli, pode-se mostrar que o grupo $SL(2, C)$ é homomórfico à componente ortócrona própria $L^{+\uparrow}$ de L (vide Carmeli e Malin [3]). Isto foi estabelecido por van der Waerden [4] em conexão com uma descrição em termos de espinores de duas componentes da teoria de Dirac em M.

Naturalmente, surgiu o interesse em introduzir espinores em espaços-tempo curvos, em outras palavras, em elaborar uma descrição da Relatividade Geral em termos de espinores de duas componentes. Dois formalismos espinoriais para a Relatividade Geral então emergiram no trabalho de Infeld e van der Waerden [5, 6], os quais são conhecidos como os formalismos $\gamma\varepsilon$. Assim, em cada ponto não-singular de um espaço-tempo curvo sem torção, assenta-se dois pares de espaços de espin conjugados complexos, sendo que internamente a eles atua o grupo de transformações de calibre de Weyl [7]. Deste modo é então associado a cada tensor mundo um espinor Hermitiano. O uso de espinores em Relatividade Geral leva-nos a obtenção de resultados que não são possíveis de serem obtidos com o uso de apenas tensores mundo. Os formalismos de Infeld e van der Waerden têm sido utilizados por vários autores com vários diferentes propósitos [8-14]. Uma descrição algébrico-geométrica essencialmente completa dos formalismos pode ser encontrada na Ref. [15].

Um importante resultado que não emerge na descrição tradicional puramente mundo de estruturas espaço-temporais curvas é que, quando espinores são inseridos no contexto geométrico, tensores de Maxwell intrinsicamente geométricos emergem na estrutura de curvatura dos espaços-tempo em questão [6, 8, 15], algo de fato impossível de ocorrer quando usa-se apenas tensores mundo. A exploração matemática deste resultado será o tema principal desta dissertação, onde será possível apresentar um detalhamento simbólico formal que nos levará à equações de onda para fótons com fontes geométricas, ou seja, com fontes intrínsicas à uma geometria espaço-temporal curva. No entanto, apenas no formalismo γ é possível arranjar-se as equações de onda para fótons geométricos com tais fontes, uma vez que apenas neste formalismo se pode considerar uma configuração geométrica formalmente análoga à quadricorrente eletromagnética.

Nosso trabalho tem sido dividido em sete capítulos e está organizado como segue. Nos capítulos 2 e 3, a parte dos formalismos $\gamma\varepsilon$ que é de imediata relevância aqui é revista. As equações de campo pertinentes são apresentadas no capítulo 4. As técnicas calculacionais fornecidas nas Refs. [15, 16] são consideradas no capítulo 5. Tais técnicas são necessárias para a dedução das equações de onda de interesse aqui, as quais são apresentadas no capítulo 6. No capítulo 7, algumas observações finais sobre nosso trabalho são feitas.

Componentes mundo são denotadas com o uso de índices gregos que assumem os valores 0, 1, 2 e 3. A notação usual que utiliza índices linhados e não-linhados para componentes espinoriais conjugadas complexas [14] será adotada aqui. Adotaremos a assinatura do tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ de algum espaço-tempo curvo sem torção $\mathcal{M}$ como $(+---)$. Coordenadas em $\mathcal{M}$ são denotadas por x^{μ}. Para as derivadas parciais ordinárias usaremos a notação econômica ∂_{μ}, em vez de $\partial/\partial x^{\mu}$, assim como também usaremos o símbolo indexado ∇_{μ} para derivadas covariantes em ambos os formalismos. Será também usada a convenção de Bach [17] para relações de simetrias índiciais mundo e de espin, sendo simetria nos índices denotada como, por exemplo, $(\mu\nu)$ e antissimetria como $[\mu\nu]$. Para o tensor de Ricci, usaremos a convenção de sinal

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}{}^{\sigma},$$

com $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma}$ sendo o tensor de Riemann correspondente. Algumas vezes, usaremos a notação $\{a, b; c, d\}$ para referir à um objeto espinorial que porta a índices contravariantes e b índices covariantes não-linhados, juntamente com c índices contravariantes e d índices covariantes linhados. Outras convenções serão explicadas no devido tempo.

Capítulo 2

Métricas, Afinidades e Derivadas Covariantes Espinoriais

Como foi dito anteriormente, na teoria dos espinores aqui considerada, usa-se dois formalismos designados como os formalismos $\gamma\varepsilon$. As estruturas destes formalismos exibem diferenças que muitas vezes são expressas na natureza geométrica de um determinado objeto, ou seja, em um formalismo o objeto em questão pode ser um tensor de espin enquanto que, no outro, uma densidade de espin. Obviamente, o que determinará tal natureza é o comportamento do objeto sob uma transformação de calibre de Weyl, como será visto.

De certa maneira, os espinores métricos de ambos os formalismos desempenham nos espaços de espin o papel que $g_{\mu\nu}$ desempenha em $\mathcal{M}$. No formalismo γ, um dos espinores métricos é um tensor de espin γ_{AB} de valência $\{0,2;0,0\}$ que é invariante sob transformações de coordenadas mundo. Tem-se

$$\gamma_{AB} = |\gamma|\, e^{i\Phi}\varepsilon_{AB}, \tag{2.1}$$

tal que γ_{AB} é representado matricialmente por

$$(\gamma_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

onde $\gamma = |\gamma|\, e^{i\Phi}$, sendo $|\gamma|$ e Φ funções de x^μ escalares-mundo, reais e deriváveis.[1] Temos a forma contravariante

$$\left(\gamma^{AB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

[1] O comportamento de calibre de γ será dado mais tarde neste capítulo.

sendo que este tensor de espin possui valência $\{2,0;0,0\}$, e é também invariante mundo. Os únicos espinores métricos não-linhados do formalismo ε também são invariantes mundo e representados como

$$(\varepsilon_{AB}) = \left(\varepsilon^{AB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Devido à simetria de $g_{\mu\nu}$, os espinores métricos de ambos os formalismos são de fato todos antissimétricos, o que implica em regras específicas para mover índices. Em ambos os formalismos, devemos ter procedimentos específicos para relacionar objetos covariantes com contravariantes, tais como os seguintes:

$$\beta^A = M^{AB}\beta_B, \tag{2.5}$$

e

$$\beta_A = \beta^B M_{BA}, \tag{2.6}$$

com a letra núcleo M denotando γ ou ε aqui e nos capítulos subsequentes. Temos ainda a relação

$$M^{AB}M_{AC} = M_C{}^B = -M^B{}_C = \delta_C{}^B, \tag{2.7}$$

onde $\delta_C{}^B$ é o delta de Kronecker. Para objetos de valências ampliadas, faz-se produtos exteriores tal que, para cada índice, usa-se as relações (2.5) e (2.6) juntamente com suas complexas conjugadas. Por exemplo,

$$\Pi^{AA'}{}_{B'} = M^{AB}M^{A'C'}\Pi_{BC'}{}^{D'}M_{D'B'}. \tag{2.8}$$

Para relacionarmos objetos mundo com objetos de espin em ambos os formalismos, temos os chamados objetos conectores. Em alguns casos, esses objetos podem relacionar um vetor mundo com dois vetores de espin, onde um deles está definido no espaço conjugado do outro. Explicitamente temos, por exemplo,

$$v^\mu = S^\mu_{AA'}v^{AA'}, \tag{2.9}$$

e

$$v^{AA'} = S^{AA'}_\mu v^\mu, \tag{2.10}$$

onde $S^\mu_{AA'}$ é um dos objetos conectores Hermitianos para qualquer um dos formalismos. Novamente, através de produtos exteriores, podemos obter para um objeto de valência arbitrária, a seguinte relação:

$$\Pi^{AA'}{}_{BB'}{}^\mu{}_\nu = S^{AA'}_\rho S^\sigma_{BB'}S^\mu_{CC'}S^{DD'}_\nu \Pi^\rho{}_\sigma{}^{CC'}{}_{DD'}. \tag{2.11}$$

Temos as seguintes relações entre objetos conectores, espinores métricos e o tensor métrico mundo:

$$g_{\mu\nu} = S_{\mu}^{AA'} S_{\nu}^{BB'} M_{AB} M_{A'B'}, \tag{2.12}$$

$$M_{AB} M_{A'B'} = S^{\mu}_{AA'} S^{\nu}_{BB'} g_{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

e

$$g_{\mu\nu} M_{AB} = 2 S_{AA'(\mu} S^{A'}_{\nu)B}, \tag{2.14}$$

tal que as relações (2.12) e (2.13) nos levam às expressões Hermitianas

$$S_{\rho}^{AA'} S^{\rho}_{BB'} = \delta_B{}^A \delta_{B'}{}^{A'}, \; S_{\sigma}^{AA'} S^{\rho}_{AA'} = \delta_{\sigma}{}^{\rho}. \tag{2.15}$$

A Hermiticidade dos objetos conectores pode ser indentificada pelas configurações de índices. Em ambos os formalismos, tais configurações formam o seguinte conjunto:

$$\mathbf{HS} = \left(S_{\mu AA'}, S^{\mu AA'}, S^{\mu}_{AA'}, S_{\mu}^{AA'} \right), \tag{2.16}$$

onde, falando a grosso modo, a Hermiticidade é garantida quando índices de espin linhados e não linhados se encontram no mesmo "andar". Como um exemplo, o objeto conector $S^{B'}_{\mu A}$ é de natureza não-Hermitiana.

Como mencionado anteriormente, as leis de transformação consideradas para espinores, são transformações de calibre de Weyl. Alguns dos protótipos de tais leis de transformação são

$$v'^A = v^B \Lambda^{-1A}_B, \tag{2.17}$$

e

$$v'_{A'} = \Lambda_{A'}{}^{B'} v_{B'}, \tag{2.18}$$

com

$$\Lambda_A{}^B = \sqrt{\rho} e^{i\theta} \delta_A{}^B, \; \Lambda_{A'}{}^{B'} = \sqrt{\rho} e^{-i\theta} \delta_{A'}{}^{B'}, \tag{2.19}$$

onde ρ é uma função real invariante positivo-definida, e θ é o parâmetro de calibre do grupo o qual aparece como uma função real derivável em $\mathcal{M}$. Mais uma vez, usando produtos exteriores, tem-se

$$\Pi'^{ABB'}_{A'} = \Lambda_{A'}{}^{C'} \Pi^{CDD'}_{C'} \Lambda^{-1A}_C \Lambda^{-1B}_D \Lambda^{-1B'}_{D'}. \tag{2.20}$$

São os comportamentos sob tais leis de transformação de calibre que estabelecem se quaisquer objetos de interesse são tensores de espin ou densidades tensoriais de espin. A teoria de densidades de espin foi construída por Schouten [18-20] de modo a manter uma analogia formal com a formulação geométrica mundo.

Em ambos os formalismos, a derivada covariante de um espinor elementar contravariante é expressa como

$$\nabla_\mu v^A = \partial_\mu v^A + \vartheta_{\mu B}{}^A v^B, \tag{2.21}$$

sendo oriunda do incremento

$$Dv^A = \left(\partial_\mu v^A + \vartheta_{\mu B}{}^A v^B\right) dx^\mu, \tag{2.22}$$

onde $\vartheta_{\mu B}{}^A$ é uma conexão afim de espin não-linhada para qualquer um dos formalismos. Deve-se notar a semelhança formal com a estrutura diferencial covariante mundo. Podemos obter a derivada covariante de um espinor covariante usando a regra de Leibniz e supondo que

$$D\left(v^A u_A\right) = d\left(v^A u_A\right). \tag{2.23}$$

Deste modo, obtem-se

$$\nabla_\mu u_A = \partial_\mu u_A - \vartheta_{\mu A}{}^B u_B. \tag{2.24}$$

Para um objeto misto (espin-mundo) de valência arbitrária tem-se, por exemplo,

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \Pi^{A'B'}{}_A{}^B{}_\mu = {} & \partial_\nu\left(\Pi^{A'B'}{}_A{}^B{}_\mu\right) + \vartheta_{\nu C'}{}^{A'}\Pi^{C'B'}{}_A{}^B{}_\mu \\ & + \vartheta_{\nu C'}{}^{B'}\Pi^{A'C'}{}_A{}^B{}_\mu - \vartheta_{\nu A}{}^C\Pi^{A'B'}{}_C{}^B{}_\mu \\ & + \vartheta_{\nu C}{}^B\Pi^{A'B'}{}_A{}^C{}_\mu - \Gamma_{\nu\mu}{}^\sigma\Pi^{A'B'}{}_A{}^B{}_\sigma,\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma$ é a conexão afim Christoffeliana de $g_{\mu\nu}$.

Podemos achar a expressão, a qual será de considerável utilidade mais tarde, para a conexão de espin contraída $\vartheta_{\mu A}{}^A$. Para isso usamos o fato que $\nabla_\mu\left(\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}\right) = 0$, que provém da assunção $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$ bem como da constância covariante dos objetos conectores Hermitianos e, ainda, do fato de que a regra de Leibniz se aplica à operação ∇_μ. Primeiramente, devemos encontrar a derivada covariante de γ, sendo que para isto devemos considerar a derivada covariante de γ_{AB}. Será usada agora a conexão de espin do formalismo γ, que é resultado da identificação $\vartheta_{\mu A}{}^B \longrightarrow \gamma_{\mu A}{}^B$. Ou seja, tem-se[2]

$$\nabla_\mu \gamma_{AB} = \varepsilon_{AB}\nabla_\mu\gamma, \tag{2.26}$$

que também pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\gamma_{AB} &= \partial_\mu\gamma_{AB} - \gamma_{\mu A}{}^C\gamma_{CB} - \gamma_{\mu B}{}^C\gamma_{AC} \\ &= \partial_\mu\gamma_{AB} - \gamma_{\mu AB} + \gamma_{\mu BA} \\ &= \partial_\mu\gamma_{AB} - 2\gamma_{\mu[AB]} \\ &= \partial_\mu\gamma_{AB} - \gamma_\mu\gamma_{AB} \\ &= \varepsilon_{AB}\left(\partial_\mu\gamma - \gamma\gamma_\mu\right),\end{aligned} \tag{2.27}$$

[2]Os espinores métricos do formalismo ε são covariantemente constantes.

com $\gamma_\mu = \gamma_{\mu C}{}^{C}$. Logo, por comparação direta, obtemos

$$\nabla_\mu \gamma = \partial_\mu \gamma - \gamma\gamma_\mu, \tag{2.28}$$

sendo esta o protótipo no formalismo γ para derivadas covariantes de densidades de espin escalares de peso $+1$.Um desenvolvimento sistemático da teoria de densidades de espin é dado nas Refs. [15, 18, 19, 20]. De modo geral, uma densidade escalar de espin, em que a lei de transformação é expressa como

$$\kappa' = (\Delta_\Lambda)^\alpha \kappa, \tag{2.29}$$

com

$$\Delta_\Lambda = \det\left(\Lambda_A{}^B\right) = \rho e^{2i\theta}, \tag{2.30}$$

contendo peso α, tal que sua derivada covariante é dada por

$$\nabla_\mu \kappa = \partial_\mu \kappa - \alpha\kappa\gamma_\mu, \tag{2.31}$$

sendo assim então análoga formalmente as derivadas covariantes de densidades escalares mundo. Para a complexa conjugada de κ teremos a lei de transformação dada por [3]

$$\overline{\kappa}' = (\overline{\Delta_\Lambda})^\beta \overline{\kappa}, \tag{2.32}$$

sendo β tido como antipeso. Para uma densidade escalar de espin que contém simultâneamente peso e antipeso, teremos

$$\lambda' = (\Delta_\Lambda)^\alpha (\overline{\Delta_\Lambda})^\beta \lambda. \tag{2.33}$$

Deste modo, usando (2.28), faz-se

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\left(\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}\right) &= \gamma_{AB}\nabla_\mu\gamma_{A'B'} + \gamma_{A'B'}\nabla_\mu\gamma_{AB} \\
&= \frac{\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}}{\overline{\gamma}}\nabla_\mu\overline{\gamma} + \frac{\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}}{\gamma}\nabla_\mu\gamma \\
&= \left[\frac{1}{\overline{\gamma}}\left(\partial_\mu\overline{\gamma} - \overline{\gamma_\mu\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma}\left(\partial_\mu\gamma - \gamma_\mu\gamma\right)\right]\gamma_{AB}\gamma_{A'B'} \\
&= \left(\partial_\mu \ln\overline{\gamma} + \partial_\mu\ln\gamma - \gamma_\mu - \overline{\gamma_\mu}\right)\gamma_{AB}\gamma_{A'B'} \\
&= \left(\partial_\mu \ln|\gamma|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\gamma_\mu\right)\gamma_{AB}\gamma_{A'B'} = 0,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ou seja, sendo $\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}$ arbitrário, obtemos

$$\partial_\mu \ln|\gamma|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\gamma_\mu = \gamma_{\mu D}{}^{D} + \gamma_{\mu D'}{}^{D'} = \gamma_\mu + \overline{\gamma}_\mu. \tag{2.35}$$

[3] Daqui em diante, usaremos barras para denotar conjugação complexa.

Agora, devemos considerar a equação (2.35) e implementar a seguinte relação:

$$\gamma_{\mu D}{}^{D} - \gamma_{\mu D'}{}^{D'} = -4i\Phi_{\mu}, \tag{2.36}$$

onde Φ_{μ} é um quadripotencial eletromagnético afim, e o lado direito de (2.36) é obviamente puramente imaginário. Agora, isolando $\gamma_{\nu D'}{}^{D'}$em (2.35) e (2.36), e combinando os resultados obtem-se

$$\gamma_{\mu D}{}^{D} = \partial_{\mu} \ln |\gamma| - 2i\Phi_{\mu}, \tag{2.37}$$

sendo esta a importante relação que gostaríamos de obter. Ainda, introduzimos a entidade covariante mundo

$$\theta_{\mu} = \partial_{\mu} \ln |\gamma|^{-1}, \tag{2.38}$$

para reescrevermos (2.37) como

$$\gamma_{\mu D}{}^{D} = -\left(\theta_{\mu} + 2i\Phi_{\mu}\right), \tag{2.39}$$

nos levando, então, a expressar o quadripotencial eletromagnético da seguinte forma:

$$\Phi_{\mu} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \gamma_{\mu D}{}^{D}. \tag{2.40}$$

De fato, indentifica-se Φ_{μ} com um potencial eletromagnético afim, intrínsico à geometria de $\mathcal{M}$, e que constitui a parte imaginária de uma estrutura afim contraída. A motivação para se fazer tal associação, repousa em similaridades entre comportamentos de calibre de tais estruturas, como pode ser visto em [8, 15].

No formalismo γ, é possível obter equações de autovalores que terão adiante interpretações físicas relacionadas com as fontes geométricas de interesse aqui. Temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu}\gamma_{AB} &= \left(\nabla_{\mu}\gamma\right)\varepsilon_{AB} \\
&= \left(\gamma^{-1}\nabla_{\mu}\gamma\right)\gamma_{AB} \\
&= \left[\gamma^{-1}\left(\partial_{\mu}\gamma - \gamma\gamma_{\mu}\right)\right]\gamma_{AB} \\
&= \left(\partial_{\mu}\ln\gamma - \gamma_{\mu}\right)\gamma_{AB},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

tal que, pondo

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}\ln\gamma &= \partial_{\mu}\ln\left(|\gamma|\, e^{i\Phi}\right) \\
&= \partial_{\mu}\ln|\gamma| + i\partial_{\mu}\Phi,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

e substituindo a expansão (2.42) na equação (2.41), obtem-se

$$\nabla_{\mu}\gamma_{AB} = \left(\partial_{\mu}\ln|\gamma| + i\partial_{\mu}\Phi - \gamma_{\mu}\right)\gamma_{AB}.$$

Agora, uso da equação (2.37) nos leva à seguinte relação:

$$\nabla_\mu \gamma_{AB} = \left(\gamma_\mu + 2i\Phi_\mu + i\partial_\mu \Phi - \gamma_\mu\right)\gamma_{AB},$$

tal que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \gamma_{AB} &= i\left(\partial_\mu \Phi + 2\Phi_\mu\right)\gamma_{AB} \\ &= i\beta_\mu \gamma_{AB}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

com o autovalor β_μ sendo dado por

$$\beta_\mu = \partial_\mu \Phi + 2\Phi_\mu. \tag{2.44}$$

A equação (2.43) é uma genuína equação de autovalor, e ainda podemos arranjar uma equação deste tipo para o espinor métrico contravariante. Para isso usamos a constância covariante do objeto $\delta_A{}^B$, ou seja $\nabla_\mu \delta_A{}^B = 0$, e lembramos que $\delta_A{}^B = \gamma^{CB}\gamma_{CA}$, tal que

$$\nabla_\mu \left(\gamma^{CB}\gamma_{CA}\right) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_{CA}\nabla_\mu \gamma^{CB} &= -\gamma^{CB}\nabla_\mu \gamma_{CA} \\ &= -\gamma^{CB}\left[i\left(\partial_\mu \Phi + 2\Phi_\mu\right)\gamma_{CA}\right], \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \gamma^{CB} &= -i\left(\partial_\mu \Phi + 2\Phi_\mu\right)\gamma^{CB} \\ &= -i\beta_\mu \gamma^{CB}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

que é a equação de autovalor para o espinor métrico contravariante não-linhado do formalismo γ. É fácil ver que, no formalismo ε, é impossível obter tais relações, uma vez que $\nabla_\mu \varepsilon_{AB} = 0$.

Uma elegante forma de escrever as partes θ_μ e Φ_μ da conexão afim de espin contraída (2.39), considera a estrutura diferencial

$$\gamma^{AB}(\nabla_\mu - \partial_\mu)\gamma_{AB}.$$

Para ver isto, devemos considerar a equação de autovalor para a derivada parcial, ou seja [15]

$$\partial_\mu \gamma_{AB} = \left(i\partial_\mu \Phi - \theta_\mu\right)\gamma_{AB}, \tag{2.46}$$

sendo que, assim, podemos facilmente escrever

$$\gamma^{AB}(\nabla_\mu - \partial_\mu)\gamma_{AB} = 2\left(\theta_\mu + 2i\Phi_\mu\right), \tag{2.47}$$

a qual nos fornece, então, as expressões para as partes sob consideração. Tem-se

$$2\theta_\mu = \mathrm{Re}\left[\gamma^{AB}(\nabla_\mu - \partial_\mu)\gamma_{AB}\right], \tag{2.48}$$

e

$$4\Phi_\mu = \mathrm{Im}\left[\gamma^{AB}(\nabla_\mu - \partial_\mu)\gamma_{AB}\right]. \tag{2.49}$$

Enfatizamos que uma assunção que deve ser feita antes de considerar-se a parte de curvatura dos formalismos envolve a exigência de que os objetos conectores Hermitianos sejam covariantemente constantes em cada um dos formalismos, ou seja

$$\nabla_\nu S^{\rho AA'} = 0. \tag{2.50}$$

Tal exigência será necessária para a obtenção das estruturas de curvatura de Infeld e van der Waerden.

Capítulo 3

Curvatura Espinorial

Tradicionalmente, para obter-se os objetos de curvatura na formulação mundo da Relatividade Geral, aplica-se o comutador de derivadas covariantes em vetores [21, 22, 23, 24] tal como, por exemplo,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, v^\rho = R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho v^\sigma, \tag{3.1}$$

onde v^ρ é um vetor mundo arbitrário. Um modo simples de obtermos os objetos de curvatura de ambos os contextos espinoriais de Infeld e van der Waerden, é aplicarmos um procedimento similar para um objeto conector Hermitiano [15] o qual, como vimos anteriormente, carregam índices mundo e de espin. Temos,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, S^{\rho AA'} = 0, \tag{3.2}$$

onde $S^{\rho AA'}$ é, assim, um dos elementos do conjunto (2.16). Expandindo o lado esquerdo de (3.2), obtem-se o resultado

$$S^{\rho BA'} W_{\mu\nu B}{}^A + S^{\rho AB'} W_{\mu\nu B'}{}^{A'} = -S^{\sigma AA'} R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho, \tag{3.3}$$

com

$$W_{\mu\nu B}{}^A = W_{[\mu\nu]B}{}^A = 2\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]B}{}^A - (\vartheta_{\mu B}{}^C \vartheta_{\nu C}{}^A - \vartheta_{\nu B}{}^C \vartheta_{\mu C}{}^A), \tag{3.4}$$

sendo um dos objetos de curvatura de Infeld e van der Waerden.

Para obtermos as expressões (3.3) e (3.4) a partir de (3.2), inicialmente aplicamos a derivada covariante em um objeto conector Hermitiano tal como, digamos,

$$\nabla_\nu S^{\rho AA'} = \partial_\nu S^{\rho AA'} + \Gamma_{\nu\sigma}{}^\rho S^{\rho AA'} + \vartheta_{\nu B}{}^A S^{\rho BA'} + \vartheta_{\nu B'}{}^{A'} S^{\rho AB'}, \tag{3.5}$$

e, em seguida, aplicamos novamente o operador no resultado acima para obter o seguinte conjunto de contribuições:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \left(\partial_\nu S^{\rho AA'}\right) = {} & \partial_\mu \partial_\nu S^{\rho AA'} - \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma \partial_\sigma S^{\rho AA'} + \Gamma_{\mu\sigma}{}^\rho \partial_\nu S^{\sigma AA'} \\ & + \vartheta_{\mu B}{}^A \partial_\nu S^{\rho BA'} + \vartheta_{\mu B'}{}^{A'} \partial_\nu S^{\rho AB'},\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\nabla_\mu\left(\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}\right)=\partial_\mu\left(\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}\right)-\Gamma_{\mu\nu}{}^{\beta}\Gamma_{\sigma\beta}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}+\Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\beta}S^{\sigma AA'}$$
$$+\vartheta_{\mu B}{}^{A}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma BA'}+\vartheta_{\mu B'}{}^{A'}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AB'},\qquad(3.7)$$

$$\nabla_\mu\left(\vartheta_{\nu B}{}^{A}S^{\rho BA'}\right)=\partial_\mu\left(\vartheta_{\nu B}{}^{A}S^{\rho AB'}\right)-\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}\vartheta_{\sigma B}{}^{A}S^{\rho BA'}+\Gamma_{\mu\sigma}{}^{\rho}\vartheta_{\nu B}{}^{A}S^{\sigma BA'}$$
$$+\vartheta_{\mu C}{}^{A}\vartheta_{\nu B}{}^{C}S^{\rho BA'}+\vartheta_{\mu B'}{}^{A'}\vartheta_{\nu B}{}^{A}S^{\rho BB'},\qquad(3.8)$$

e

$$\nabla_\mu\left(\vartheta_{\nu B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}\right)=\partial_\mu\left(\vartheta_{\nu B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}\right)-\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}\vartheta_{\sigma B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}+\Gamma_{\mu\sigma}{}^{\rho}\vartheta_{\nu B'}{}^{A'}S^{\sigma AB'}$$
$$+\vartheta_{\mu C'}{}^{A'}\vartheta_{\nu B'}{}^{C'}S^{\rho AB'}+\vartheta_{\mu B}{}^{A}\vartheta_{\nu B'}{}^{A'}S^{\rho BB'}.\qquad(3.9)$$

Neste estágio, antissimetrizamos os índices μ e ν, tal que

$$\nabla_{[\mu}\left(\partial_{\nu]}S^{\rho AA'}\right)=\Gamma_{[\mu|\sigma|}{}^{\rho}\partial_{\nu]}S^{\sigma AA'}+\vartheta_{[\mu B}{}^{A}\partial_{\nu]}S^{\rho BA'}+\vartheta_{[\mu B'}{}^{A'}\partial_{\nu]}S^{\rho AB'},\qquad(3.10)$$

$$\nabla_{[\mu}\left(\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}\right)=\partial_{[\mu}\left(\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}\right)+\Gamma_{[\mu|\beta|}{}^{\rho}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\beta}S^{\sigma AA'}$$
$$+\vartheta_{[\mu B}{}^{A}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma BA'}+\vartheta_{[\mu B'}{}^{A'}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AB'},\qquad(3.11)$$

$$\nabla_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B}{}^{A}S^{\rho BA'}\right)=\partial_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B}{}^{A}S^{\rho AB'}\right)+\Gamma_{[\mu|\sigma|}{}^{\rho}\vartheta_{\nu]B}{}^{A}S^{\sigma BA'}$$
$$+\vartheta_{[\mu C}{}^{A}\vartheta_{\nu]B}{}^{C}S^{\rho BA'}+\vartheta_{[\mu B'}{}^{A'}\vartheta_{\nu]B}{}^{A}S^{\rho BB'},\qquad(3.12)$$

e

$$\nabla_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}\right)=\partial_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}\right)+\Gamma_{[\mu|\sigma|}{}^{\rho}\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}S^{\sigma AB'}$$
$$+\vartheta_{[\mu C'}{}^{A'}\vartheta_{\nu]B'}{}^{C'}S^{\rho AB'}+\vartheta_{[\mu B}{}^{A}\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}S^{\rho BB'}.\qquad(3.13)$$

Portanto,

$$\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}S^{\rho AA'}=\Gamma_{[\mu|\sigma|}{}^{\rho}\partial_{\nu]}S^{\sigma AA'}+\vartheta_{[\mu B}{}^{A}\partial_{\nu]}S^{\rho BA'}+\vartheta_{[\mu B'}{}^{A'}\partial_{\nu]}S^{\rho AB'}+\partial_{[\mu}\left(\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}\right)$$
$$+\Gamma_{[\mu|\beta|}{}^{\rho}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\beta}S^{\sigma AA'}+\partial_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B}{}^{A}S^{\rho BA'}\right)+\vartheta_{[\mu C}{}^{A}\vartheta_{\nu]B}{}^{C}S^{\rho BA'}$$
$$+\partial_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}\right)+\vartheta_{[\mu C'}{}^{A'}\vartheta_{\nu]B'}{}^{C'}S^{\rho AB'},\qquad(3.14)$$

sendo que os termos que desapareceram é devido ao fato que as estruturas $\partial_\mu\partial_\nu$ e $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}$ possuem simetria em μ e ν. Para os quarto, sexto e oitavo termos a direita de (3.14) faz-se, respectivamente,

$$\partial_{[\mu}\left(\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'}\right)=\left(\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho}\right)S^{\sigma AA'}-\Gamma_{[\mu|\sigma|}{}^{\rho}\partial_{\nu]}S^{\sigma AA'},\qquad(3.15)$$

$$\partial_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B}{}^{A}S^{\rho BA'}\right) = \left(\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]B}{}^{A}\right)S^{\rho BA'} - \vartheta_{[\mu B}{}^{A}\partial_{\nu]}S^{\rho BA'}, \tag{3.16}$$

e

$$\partial_{[\mu}\left(\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}S^{\rho AB'}\right) = \left(\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'}\right)S^{\rho AB'} - \vartheta_{[\mu B'}{}^{A'}\partial_{\nu]}S^{\rho AB'}. \tag{3.17}$$

Assim, substituindo estes resultados em (3.14) e, em seguida, rearrumando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}S^{\rho AA'} &= \left(\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\rho} + \Gamma_{[\mu|\beta|}{}^{\rho}\Gamma_{\nu]\sigma}{}^{\beta}\right)S^{\sigma AA'} \\ &+ \left(\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]B}{}^{A} + \vartheta_{[\mu C}{}^{A}\vartheta_{\nu]B}{}^{C}\right)S^{\rho BA'} \\ &+ \left(\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]B'}{}^{A'} + \vartheta_{[\mu C'}{}^{A'}\vartheta_{\nu]B'}{}^{C'}\right)S^{\rho AB'}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora, lembrando das relações

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}{}^{\rho} + \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}{}^{\beta}, \tag{3.19}$$

e

$$W_{\mu\nu B}{}^{A} = 2\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]B}{}^{A} + \vartheta_{\mu C}{}^{A}\vartheta_{\nu B}{}^{C} - \vartheta_{\nu C}{}^{A}\vartheta_{\mu B}{}^{C}, \tag{3.20}$$

obtem-se

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]S^{\rho AA'} = 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}S^{\rho AA'}, \tag{3.21}$$

com

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]S^{\rho AA'} = R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}S^{\sigma AA'} + W_{\mu\nu B}{}^{A}S^{\rho BA'} + W_{\mu\nu B'}{}^{A'}S^{\rho AB'} = 0, \tag{3.22}$$

sendo que as equações (3.20) e (3.22) nos dão as expressões requeridas. Mencionamos de passagem que existem outras maneiras [15] de se obter os objetos W, uma delas sendo a seguinte:

$$[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}]\,\zeta^{C} = W_{AA'BB'M}{}^{C}\zeta^{M}. \tag{3.23}$$

Contraindo-se os índices A e B da equação (3.4), vem

$$W_{\mu\nu A}{}^{A} = 2\partial_{[\mu}\vartheta_{\nu]A}{}^{A}, \tag{3.24}$$

pois $\vartheta_{A[\mu}{}^{C}\vartheta_{\nu]C}{}^{A} = 0$. Como vimos, a parte imaginária de $\vartheta_{\nu A}{}^{A}$ está relacionada com um potencial eletromagnético enquanto que a parte real é uma derivada parcial. Consequentemente, lembrando que $2\partial_{[\mu}\partial_{\nu]} = \partial_{\mu}\partial_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu} = 0$ e ainda a relação (2.38), obtemos a expressão

$$\partial_{[\nu}\vartheta_{\mu]D}{}^{D} = -\partial_{[\nu}\left(\theta_{\mu]} + 2i\Phi_{\mu]}\right) = -2i\partial_{[\nu}\Phi_{\mu]} = -iF_{\nu\mu}, \tag{3.25}$$

a qual carrega o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Phi_{\nu]}$. Deste modo, obtem-se a seguinte relação para um objeto de curvatura contraído de qualquer formalismo:

$$W_{\mu\nu A}{}^{A} = -2iF_{\mu\nu}, \tag{3.26}$$

a qual evidentemente satisfaz

$$W_{\mu\nu A}{}^{A} = -W_{\mu\nu A'}{}^{A'} \Leftrightarrow \operatorname{Re} W_{\mu\nu A}{}^{A} = 0. \tag{3.27}$$

Podemos decompor os objetos de curvatura em suas partes simétrica e antissimétrica referentes aos índices de espin, ou seja

$$W_{\mu\nu AB} = W_{\mu\nu A}{}^{C} M_{CB} = W_{\mu\nu(AB)} + W_{\mu\nu[AB]}. \tag{3.28}$$

Para a parte antissimétrica, podemos fazer

$$W_{\mu\nu[AB]} = \frac{1}{2} W_{\mu\nu C}{}^{C} M_{AB}, \tag{3.29}$$

tal que, usando (3.26) e (3.29), podemos reescrever (3.28) como

$$W_{\mu\nu AB} = W_{\mu\nu(AB)} - iF_{\mu\nu} M_{AB}. \tag{3.30}$$

A parte simétrica $W_{\mu\nu(AB)}$ envolve o tensor de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Este fato é estabelecido em [15]. Assim sendo, o objeto $W_{\mu\nu AB}$ simultaneamente carrega em sua expressão o tensor de Riemann de $\mathcal{M}$ e um tensor de Maxwell geométrico e, então, pode ser visto como um objeto de curvatura misto em ambos os formalismos. Para deduzirmos a expressão para a parte simétrica e verificar a relação com $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, pegamos a expressão (3.3) e trabalhamos como segue:

$$\begin{aligned} S_{\rho DA'}\left(S^{\rho BA'} W_{\mu\nu B}{}^{A} + S^{\rho AB'} W_{\mu\nu B'}{}^{A'} + S^{\sigma AA'} R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}\right) &= 0, \\ 2\delta_{D}{}^{B} W_{\mu\nu B}{}^{A} + \delta_{D}{}^{A} \delta_{A'}{}^{B'} W_{\mu\nu B'}{}^{A'} + S_{\rho DA'} S^{\sigma AA'} R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} &= 0, \\ 2W_{\mu\nu D}{}^{A} + \delta_{D}{}^{A} W_{\mu\nu B'}{}^{B'} + S^{\rho}_{DA'} S^{\sigma AA'} R_{\mu\nu\sigma\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(2W_{\mu\nu D}{}^{A} + \delta_{D}{}^{A} W_{\mu\nu B'}{}^{B'} + S^{\rho}_{DA'} S^{\sigma AA'} R_{\mu\nu\sigma\rho}\right) \gamma_{AB} = 0, \tag{3.31}$$

ou seja

$$W_{\mu\nu DB} = \frac{1}{2}\left(W_{\nu\mu B'}{}^{B'} \gamma_{DB} + S^{\rho}_{DA'} S^{\sigma A'}_{B} R_{\nu\mu\sigma\rho}\right), \tag{3.32}$$

tal que a parte simétrica é

$$W_{\mu\nu(DB)} = \frac{1}{2} S^{\rho}_{DA'} S^{\sigma A'}_{B} R_{\nu\mu\sigma\rho}. \tag{3.33}$$

Deste modo, rearranjando índices, reescrevemos (3.30) como

$$W_{\mu\nu AB} = \frac{1}{2} S^{\rho}_{AA'} S^{\sigma A'}_{B} R_{\mu\nu\rho\sigma} - iF_{\mu\nu} M_{AB}. \tag{3.34}$$

Para (3.28), podemos fazer a decomposição espinorial usual de bivetores [14]. Com efeito,

$$W_{AA'BB'CD} = S^{\mu}_{AA'} S^{\nu}_{BB'} W_{\mu\nu CD} = M_{AB} w_{A'B'CD} + M_{A'B'} w_{ABCD}, \tag{3.35}$$

onde

$$w_{ABCD} = w_{(AB)CD} \doteqdot \frac{1}{2} S^{\mu}_{AA'} S^{\nu A'}_{B} W_{\mu\nu CD}, \tag{3.36}$$

e

$$w_{A'B'CD} = w_{(A'B')CD} \doteqdot \frac{1}{2} S^{\mu}_{AA'} S^{\nu A}_{B'} W_{\mu\nu CD}, \tag{3.37}$$

são os chamados espinores de curvatura. Em particular, temos

$$F_{AA'BB'} = M_{AB} \phi_{A'B'} + M_{A'B'} \phi_{AB}, \tag{3.38}$$

com as relações eletromagnéticas de definição

$$\phi_{(AB)} = \frac{i}{2} w_{(AB)C}{}^{C}, \ \phi_{(A'B')} = \frac{i}{2} w_{(A'B')C}{}^{C}. \tag{3.39}$$

Os objetos ϕ_{AB} e $\phi_{A'B'}$ são usualmente chamados de espinores de Maxwell [3]. Deve-se notar que em razão destes objetos serem simétricos e complexos, eles propiciam as seis componentes reais independentes requeridas pelo eletromagnetismo, ou seja

$$(\phi_{00}, \phi_{10} = \phi_{01}, \phi_{11}) \,. \tag{3.40}$$

No próximo capítulo, essas componentes serão usadas para obter-se as equações de Maxwell na forma espinorial de ambos os formalismos.

As expressões (3.35) e (3.39) conectam ϕ_{AB} e $\phi_{A'B'}$ com a estrutura de curvatura eletromagnética de $\mathcal{M}$, uma vez que os espinores $w_{ABC}{}^{C}$ e $w_{A'B'C}{}^{C}$ são oriundos de tal estrutura. Estes espinores satisfazem um esquema peculiar de conjugação complexa, o qual é dado por [25]

$$w_{ABC}{}^{C} = -w_{ABC'}{}^{C'}, \tag{3.41}$$

e

$$w_{A'B'C}{}^{C} = -w_{A'B'C'}{}^{C'}, \tag{3.42}$$

sendo que o estabelecimento destas relações começa simplesmente pegando-se o conjugado complexo de ϕ_{AB} dado por (3.39) e, então, comparando-se o resultado diretamente com $\phi_{A'B'}$ também dado por (3.39). Agora, pondo

$$F_{AA'BB'} = 2\nabla_{[AA'}\Phi_{BB']}, \tag{3.43}$$

com os colchetes denotando antissimetrização nos pares de índices, e usando (3.35), pode-se obter as seguintes relações entre campos covariantes e potencial:

$$\phi_{AB} = -\nabla^{C'}_{(A}\Phi_{B)C'}, \ \phi_{A'B'} = -\nabla^{C}_{(A'}\Phi_{B')C}. \tag{3.44}$$

Para obtermos o par (3.44), expandimos (3.43) e usamos (3.35) na forma

$$-2i(\nabla_{AA'}\Phi_{BB'} - \nabla_{BB'}\Phi_{AA'}) = M_{AB}w_{A'B'C}{}^{C} + M_{A'B'}w_{ABC}{}^{C}, \tag{3.45}$$

tal que, implementando o desenvolvimento

$$-2iM^{AB}(\nabla_{AA'}\Phi_{BB'} - \nabla_{BB'}\Phi_{AA'}) = M^{AB}\left(M_{AB}w_{A'B'C}{}^{C} + M_{A'B'}w_{ABC}{}^{C}\right), \tag{3.46}$$

juntamente com o complexo conjugado de (3.46), chegamos a

$$4i\nabla^{C}_{(A'}\Phi_{B')C} = 2w_{A'B'C}{}^{C}. \tag{3.47}$$

A expressão para ϕ_{AB} emerge quando contrai-se a expansão para $F_{AA'BB'}$ com $M^{A'B'}$. Para uma prescrição completa, ainda devemos considerar o par contravariante [15]

$$\phi^{AB} = \nabla^{(A}_{C'}\Phi^{B)C'},\ \phi^{A'B'} = \nabla^{(A'}_{C}\Phi^{B')C}. \tag{3.48}$$

Para o tensor dual de $F_{AA'BB'}$, temos a expansão[1]

$$F^{*}_{AA'BB'} = i\left(M_{AB}\phi_{A'B'} - M_{A'B'}\phi_{AB}\right), \tag{3.49}$$

a qual é obtida a partir da relação mundo [14]

$$F^{*}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e_{\mu\nu\xi\sigma}F^{\xi\sigma}, \tag{3.50}$$

e da forma espinorial do tensor de Levi-Civita $e_{\mu\nu\xi\sigma}$, qual é expressa como [14]

$$e_{AA'BB'CC'DD'} = i(M_{AC}M_{BD}M_{A'D'}M_{B'C'} - M_{AD}M_{BC}M_{A'C'}M_{B'D'}). \tag{3.51}$$

A contribuição gravitacional da estrutura de curvatura é dada pela equação (3.33). Uma ampla descrição deste fato é apresentada nas Refs. [15, 16]. Aqui, tal estrutura será descrita muito brevemente uma vez que nosso interesse principal repousa na contribuição eletromagnética. Como pode ser visto nas referências citadas acima, a estrutura de Riemann-Christoffel de $\mathcal{M}$ é caracterizada pelo par de espinores

$$(w_{AB(CD)},\ w_{A'B'(CD)}), \tag{3.52}$$

com $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ sendo concordantemente escrito em ambos os formalismos como[2]

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = \left(M_{A'B'}M_{C'D'}w_{AB(CD)} + M_{AB}M_{CD}w_{A'B'(CD)}\right) + \text{c.c.}. \tag{3.53}$$

[1] Asteriscos são usados aqui para denotar dualizações.

[2] O símbolo "c.c."denota uma contribuição complexa conjugada.

É conveniente introduzir-se os espinores gravitacionais

$$X_{ABCD} = w_{AB(CD)}, \tag{3.54}$$

e

$$\Xi_{CA'DB'} = w_{A'B'(CD)}, \tag{3.55}$$

tal que podemos reescrever (3.53) como

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD} + M_{AB}M_{CD}\Xi_{CA'DB'}) + \text{c.c.}, \tag{3.56}$$

onde a motivação para escrever esta última expressão envolve uma interpretação cosmológica como discutido em [14]. O chamado primeiro dual a esquerda de (3.53) é expresso por [14]

$$^{*}R_{AA'BB'CC'DD'} = [-i\,(M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD} - M_{AB}M_{CD}\Xi_{CA'DB'})] + \text{c.c.}. \tag{3.57}$$

Através da equação (3.56), podemos escrever a versão espinorial do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, a saber,

$$R_{AA'BB'} = 2\chi\,(M_{AB}M_{A'B'} + \Xi_{AA'BB'}) + \text{c.c.}, \tag{3.58}$$

com $2\chi = X_{AB}{}^{AB}$, versão esta que respeita a relação de traço extendida

$$R = 8\chi = 4\lambda + \kappa T, \tag{3.59}$$

sendo λ a constante cosmológica e κ a constante gravitacional Einsteiniana. Uma importante definição deve ser mencionada, sendo esta a seguinte:

$$\Psi_{ABCD} = X_{(ABCD)}, \tag{3.60}$$

a qual é interpretada como uma função de onda para gravitons [14]. Deve-se notar que, em razão da total simetria de Ψ_{ABCD}, tal objeto carrega os dez graus de liberdade necessários para a descrição da gravitação. Fisicamente, este objeto é visto como uma função de onda para um campo não-massivo, não-carregado e com spin ± 2. Do mesmo modo, o objeto eletromagnético ϕ_{AB} o qual carrega dois índices de espin possui spin ± 1, ou seja, para cada índice o campo referente possui spin $\pm 1/2$[3], sendo que deste modo um campo de Dirac é dado por um objeto do tipo ϖ_A [25].

[3]Obviamente índices do mesmo tipo, ou seja, linhados ou não linhados.

Capítulo 4

Equações de Campo com Fontes Geométricas

Na forma mundo clássica, as equações de Maxwell com fontes são escritas como

$$\nabla^{\mu} F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_{\nu}, \tag{4.1}$$

e

$$\nabla^{\mu} F^{*}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.2}$$

onde c denota a velocidade da luz no vácuo, e j_{ν} é uma densidade de quadri-corrente eletromagnética a qual respeita a equação da continuidade[1]

$$\nabla^{\mu} j_{\mu} = 0. \tag{4.3}$$

Deve ser notado que (4.3) é sempre equivalente a

$$\nabla^{A'}_{A} j_{BA'} = \nabla^{A'}_{(A} j_{B)A'} \text{ ou } \nabla^{A}_{A'} j_{B'A} = \nabla^{A}_{(A'} j_{B')A}. \tag{4.4}$$

Em ambos os formalismos, fontes externas não ocorrem tal que, usando mais uma vez a constância covariante dos objetos conectores Hermitianos, podemos escrever (4.1) e (4.2) em termos de espinores como

$$\nabla^{AA'} F_{AA'BB'} = 0, \tag{4.5}$$

e

$$\nabla^{AA'} F^{*}_{AA'BB'} = 0. \tag{4.6}$$

As equações de campo correspondentes emergem aqui a partir de

$$\nabla^{AA'} \left(F_{AA'BB'} + iF^{*}_{AA'BB'} \right) = 2\nabla^{AA'} \left(M_{A'B'} \phi_{AB} \right), \tag{4.7}$$

[1] A eq. (4.2) expressa a lei de conservação da carga elétrica.

e

$$\nabla^{AA'}\left(F_{AA'BB'} - iF^{*}_{AA'BB'}\right) = 2\nabla^{AA'}\left(M_{AB}\phi_{A'B'}\right), \tag{4.8}$$

tal que

$$\nabla^{AA'}\left(M_{A'B'}\phi_{AB}\right) = \nabla^{AA'}\left(M_{AB}\phi_{A'B'}\right) = 0. \tag{4.9}$$

As equações (4.9) representam espinorialmente as equações de Maxwell no vácuo em ambos os formalismos. No formalismo ε, realizamos as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned}
\nabla^{AA'}\left(\varepsilon_{A'B'}\phi_{AB}\right) &= \varepsilon^{A'C'}\nabla^{A}_{C'}\left(\varepsilon_{A'B'}\phi_{AB}\right) \\
&= \varepsilon^{A'C'}\varepsilon_{A'B'}\nabla^{A}_{C'}\phi_{AB} \\
&= \delta_{B'}{}^{C'}\nabla^{A}_{C'}\phi_{AB} \\
&= \nabla^{A}_{B'}\phi_{AB},
\end{aligned}$$

tal que, com o resultado dado pela expressão (4.9), obtemos no formalismo ε a equação

$$\nabla^{A}_{B'}\phi_{AB} = 0. \tag{4.10}$$

Agora, realizamos um procedimento análogo no formalismo γ. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\nabla^{AA'}\left(\gamma_{A'B'}\phi_{AB}\right) &= \gamma^{A'C'}\nabla^{A}_{C'}\left(\gamma_{A'B'}\phi_{AB}\right) \\
&= \gamma^{A'C'}\gamma_{A'B'}\nabla^{A}_{C'}\phi_{AB} + \gamma^{A'C'}\left(\nabla^{A}_{C'}\gamma_{A'B'}\right)\phi_{AB} \\
&= \gamma^{A'C'}\gamma_{A'B'}\nabla^{A}_{C'}\phi_{AB} - i\gamma^{A'C'}\gamma_{A'B'}\beta^{A}_{C'}\phi_{AB} \\
&= \delta_{B'}{}^{C'}\left(\nabla^{A}_{C'}\phi_{AB} - i\beta^{A}_{C'}\phi_{AB}\right) \\
&= \nabla^{A}_{B'}\phi_{AB} - i\beta^{A}_{B'}\phi_{AB}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\nabla^{AA'}\left(\gamma_{A'B'}\phi_{AB}\right) = 0$, obtemos a equação de campo no formalismo γ

$$\nabla^{A}_{B'}\phi_{AB} = i\beta^{A}_{B'}\phi_{AB}. \tag{4.11}$$

Com manipulações semelhantes, obtem-se as equações de campo conjugadas para os dois formalismos

$$\nabla^{A'}_{B}\phi_{A'B'} = 0, \tag{4.12}$$

e

$$\nabla^{A'}_{B}\phi_{A'B'} = -i\beta^{A'}_{B}\phi_{A'B'}, \tag{4.13}$$

onde o sinal negativo em (4.13) é essencialmente devido à equação de autovalor para γ_{AB}.

A partir de (4.9), podemos escrever a teoria num formato que independe dos formalismos. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\nabla^{AA'}\left(M_{A'B'}\phi_{AB}\right) &= \nabla^{AA'}\left(M_{A'B'}\phi_{A}{}^{C}M_{CB}\right) \\
&= M_{A'B'}M_{CB}\nabla^{AA'}\phi_{A}{}^{C},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

tal que

$$\nabla^{AA'}\phi_A{}^C = 0, \tag{4.15}$$

sendo então a expressão (4.15) válida em ambos os formalismos, óbviamente juntamente com sua conjugada complexa.

A principal idéia aqui é considerar os lados direitos das equações de campo (4.11) e (4.13) como fontes geométricas que satisfazem formalmente a lei de conservação expressa por (4.3), isto é,

$$\nabla^{BB'}\nabla^A_{B'}\phi_{AB} = 0, \tag{4.16}$$

ou seja,

$$\nabla^{BB'}\left(i\beta^A_{B'}\phi_{AB}\right) = 0, \tag{4.17}$$

tal que, por definição,

$$j_{AA'} \doteqdot i\beta^B_{A'}\phi_{AB}. \tag{4.18}$$

Usando as igualdades gerais (4.4), obtem-se a estrutura

$$\nabla^{A'}_A(i\beta^C_{A'}\phi_{BC}) = \nabla^{A'}_{(A}(i\beta^C_{|A'|}\phi_{B)C}) \Leftrightarrow \nabla^{A'}_{[A}(i\beta^C_{|A'|}\phi_{B]C}) = 0, \tag{4.19}$$

juntamente com sua complexa conjugada.

No capítulo 6, será conveniente usar-se a seguinte propriedade:

$$\nabla^{A'}_{[A}j_{B]A'} = -(\nabla_{A'[A}j^{A'}_{B]} + i\beta^{A'}_{[A}j_{B]A'}), \tag{4.20}$$

com $j_{AA'}$ sendo evidentemente dada por (4.18). Tal propriedade é obtida fazendo

$$\begin{aligned}
\nabla^{A'}_{[A}j_{B]A'} &= \gamma^{A'D'}\nabla_{D'[A}\left(j^{E'}_{B]}\gamma_{E'A'}\right) \\
&= -\delta_{E'}{}^{D'}\nabla_{D'[A}j^{E'}_{B]} + \gamma^{A'D'}\left(\nabla_{D'[A}\gamma_{E'A'}\right)j^{E'}_{B]} \\
&= -\nabla_{A'[A}j^{A'}_{B]} - i\gamma^{A'D'}\beta_{D'[A}j^{E'}_{B]}\gamma_{E'A'} \\
&= -\left(\nabla_{A'[A}j^{A'}_{B]} + i\beta^{A'}_{[A}j_{B]A'}\right),
\end{aligned}$$

sendo que esta implica que

$$\nabla^{A'}_{[A}j_{B]A'} = -\nabla_{A'[A}j^{A'}_{B]}, \tag{4.21}$$

porque

$$i\beta^{A'}_{[A}j_{B]A'} = \frac{1}{2}\gamma_{AB}\beta^{A'M}\beta^C_{A'}\phi_{MC} = \frac{1}{2}\gamma_{AB}\beta^{A'(M}\beta^{C)}_{A'}\phi_{MC} = 0, \tag{4.22}$$

com a última igualdade de (4.22) sendo devido ao fato que as componentes simetrizadas são numéricas e o número de seus índices contraídos é ímpar. É óbvio que (4.22) é equivalente à condição

$$\beta^\lambda j_\lambda = 0. \tag{4.23}$$

As equações (4.11) e (4.13) com as condições (4.19) são o que propiciarão a obtenção das equações de onda eletromagnéticas com as fontes geométricas (4.18). No próximo capítulo, serão levados a cabo os procedimentos que implementam esta situação.

Capítulo 5

Técnicas Computacionais

Será útil, agora, introduzirmos operadores que vão ser necessários nos procedimentos calculacionais para a obtenção das equações de onda de nosso interesse. Podemos tratar formalmente em qualquer formalismo o comutador covariante como um bivetor, e realizar a seguinte decomposição:

$$[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = M_{AB}\Delta_{A'B'} + M_{A'B'}\Delta_{AB}. \tag{5.1}$$

Os operadores delta são simétricos e satisfazem a regra de Leibniz. A passagem direta do comutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ para a forma espinorial $[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}]$ se dá com base na constância covariante dos objetos conectores Hermitianos.

A seguir, obtemos as expressões para Δ_{AB} e $\Delta_{A'B'}$ em ambos os formalismos. Com este propósito, realizamos em (5.1) o seguinte passo:

$$\begin{aligned} M^{A'B'}[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] &= M^{A'B'}(\nabla_{AA'}\nabla_{BB'} - \nabla_{BB'}\nabla_{AA'}) \\ &= -(\nabla_A^{B'}\nabla_{BB'} + \nabla_B^{B'}\nabla_{AB'}) \\ &= -2\nabla_{(A}^{C'}\nabla_{B)C'}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

e a partir do lado direito de (5.1), conseguimos

$$\begin{aligned} M^{A'B'}(M_{AB}\Delta_{A'B'} + M_{A'B'}\Delta_{AB}) &= M^{[A'B']}(M_{AB}\Delta_{(A'B')} + M_{[A'B']}\Delta_{AB}) \\ &= 2\Delta_{AB}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Assim, comparando (5.2) e (5.3), vem

$$\Delta_{AB} = -\nabla_{(A}^{C'}\nabla_{B)C'}, \tag{5.4}$$

e de maneira semelhante, obtemos

$$\Delta_{A'B'} = -\nabla_{(A'}^{C}\nabla_{B')C}. \tag{5.5}$$

A diferença formal dos deltas para os dois formalismos aparece ao manipularmos configurações indiciais. Para deixar isto claro, realizamos o seguinte procedimento no formalismo γ:

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= -\nabla^{C'}_{(A}\nabla_{B)C'} \\ &= -\gamma^{C'D'}\nabla_{D'(A}\nabla_{B)C'},\end{aligned}$$

tal que, usando-se a regra de Leibniz, vem

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= -\nabla_{D'(A}\left(\gamma^{C'D'}\nabla_{B)C'}\right) + \left(\nabla_{D'(A}\gamma^{C'D'}\right)\nabla_{B)C'} \\ &= \nabla_{D'(A}\nabla^{D'}_{B)} + i\beta_{D'(A}\gamma^{C'D'}\nabla_{B)C'} \\ &= \nabla_{D'(A}\nabla^{D'}_{B)} - i\beta_{D'(A}\nabla^{D'}_{B)}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

No formalismo ε, temos simplesmente

$$\Delta_{AB} = \nabla_{D'(A}\nabla^{D'}_{B)}, \tag{5.7}$$

uma vez que os objetos métricos do formalismo ε são covariantemente constantes. Para obtermos os operadores delta contravariantes, usa-se

$$\Delta^{AB} = M^{AC}M^{BD}\Delta_{CD}. \tag{5.8}$$

Deste modo, obtem-se em ambos os formalismos

$$\Delta^{AB} = \nabla^{(A}_{D'}\nabla^{B)D'}, \tag{5.9}$$

e para uma mudança na configuração dos índices linhados, particularmente no formalismo γ, tem-se

$$\Delta^{AB} = -\left(\nabla^{D'(A}\nabla^{B)}_{D'} + i\beta^{D'(A}\nabla^{B)}_{D'}\right). \tag{5.10}$$

É claro que ainda temos as prescrições para os deltas conjugados complexos.

Para vermos a atuação dos operadores Δ em vetores de espin, consideramos (5.1) e inicialmente fazemos

$$M^{AB}\left[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}\right] = 2\Delta_{A'B'}, \tag{5.11}$$

tal que

$$\Delta_{A'B'}\zeta^C = \frac{1}{2}M^{AB}\left[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}\right]\zeta^C. \tag{5.12}$$

Com a expressão (3.23), teremos

$$\begin{aligned}\Delta_{A'B'}\zeta^C &= \frac{1}{2}M^{AB}W_{AA'BB'M}{}^{C}\zeta^M \\ &= \frac{1}{2}M^{AB}M^{CL}W_{AA'BB'ML}\zeta^M.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Agora, empregando a expansão familiar

$$W_{AA'BB'ML} = M_{AB}w_{A'B'ML} + M_{A'B'}w_{ABML}, \tag{5.14}$$

pode-se decompor (5.14) com o uso de

$$w_{A'B'ML} = w_{A'B'(ML)} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}{}^{J}M_{ML}. \tag{5.15}$$

Assim, trabalhamos (5.13) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Delta_{A'B'}\zeta^{C} &= \frac{1}{2}M^{AB}M^{CL}\left(M_{AB}w_{A'B'ML} + M_{A'B'}w_{ABML}\right)\zeta^{M} \\
&= M^{CL}w_{A'B'ML}\zeta^{M} \\
&= M^{CL}\left(w_{A'B'(ML)} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}{}^{J}M_{ML}\right)\zeta^{M} \\
&= M^{CL}(\Xi_{A'B'ML} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}{}^{J}M_{ML})\zeta^{M} \\
&= \Xi_{A'B'M}{}^{C}\zeta^{M} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}{}^{J}\zeta^{C},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

nos dando deste modo a atuação de $\Delta_{A'B'}$ no vetor de espin ζ^{C}. De maneira semelhante, obtemos a expressão correspondente para Δ_{AB}, nos fornecendo as prescrições para a ação de tais operadores sobre ζ^{C}, de acordo com o seguinte esquema:

$$\Delta_{A'B'}\zeta^{C} = \Xi_{A'B'M}{}^{C}\zeta^{M} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}{}^{J}\zeta^{C}, \tag{5.17}$$

e

$$\Delta_{AB}\zeta^{C} = X_{ABM}{}^{C}\zeta^{M} + \frac{1}{2}w_{ABJ}{}^{J}\zeta^{C}, \tag{5.18}$$

onde foram também usadas as relações (3.54) e (3.55). Para um vetor de espin covariante, tem-se [15]

$$\Delta_{A'B'}\xi_{C} = -\left(\Xi_{A'B'C}{}^{M}\xi_{M} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}{}^{J}\xi_{C}\right), \tag{5.19}$$

e

$$\Delta_{AB}\xi_{C} = -\left(X_{ABC}{}^{M}\xi_{M} + \frac{1}{2}w_{ABJ}{}^{J}\xi_{C}\right), \tag{5.20}$$

juntamente com as (algebricamente independentes) conjugadas de (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20). Como exemplo demonstraremos a expressão (5.20). Como estamos em espaços-tempo sem torção, devemos ter

$$\Delta_{AB}\left(\zeta^{C}\xi_{C}\right) = 0, \tag{5.21}$$

e assim prontamente aplicamos a regra de Leibniz com a prescrição (5.18), tal que

$$\begin{aligned}
\zeta^C \Delta_{AB} \xi_C &= -\xi_C \Delta_{AB} \zeta^C \\
&= -\xi_C \left(X_{ABM}{}^C \zeta^M + \frac{1}{2} w_{ABJ}{}^J \zeta^C \right) \\
&= -X_{ABM}{}^C \zeta^M \xi_C - \frac{1}{2} w_{ABJ}{}^J \zeta^C \xi_C \\
&= -\zeta^C \left(X_{ABC}{}^M \xi_M + \frac{1}{2} w_{ABJ}{}^J \xi_C \right),
\end{aligned}$$

sendo deste modo então obtida (5.20).

Agora, consideramos o desdobramento indicial [25]

$$\begin{aligned}
\nabla^B_{C'} \nabla^{AC'} &= \nabla^{(B}_{C'} \nabla^{A)C'} + \nabla^{[B}_{C'} \nabla^{A]C'} \\
&= \Delta^{AB} - \frac{1}{2} M^{AB} \Box,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

juntamente com sua versão covariante e os respectivos complexos conjugados, completando assim o conjunto de artefatos matemáticos necessários para a obtenção das equações de onda para fótons geométricos.

Capítulo 6

Equações de Onda para Fótons Geométricos

Devemos agora obter as equações de onda para fótons geométricos em conjunção com a condição (4.17), a densidade de corrente (4.18) e as conjugadas complexas destas. Iniciamos com os resultados estabelecidos na literatura [15], e depois deduziremos nossos resultados com o uso de tais condições. Uma forma de iniciar a obtenção é considerar a equação de campo (4.11), levar a cabo uma manipulação de índices trivial, tal que

$$\nabla^{AA'}\phi_{AB} = i\beta^{AA'}\phi_{AB}, \tag{6.1}$$

e aplicar $\nabla^{C}_{A'}$ à (6.1), de modo que

$$\nabla^{C}_{A'}\nabla^{AA'}\phi_{AB} = i\nabla^{C}_{A'}\left(\beta^{AA'}\phi_{AB}\right). \tag{6.2}$$

Com a expressão (5.22), podemos escrever

$$\left(2\Delta^{AC} - \gamma^{AC}\square\right)\phi_{AB} = 2i\nabla^{C}_{A'}\left(\beta^{AA'}\phi_{AB}\right). \tag{6.3}$$

Tal como na referência [15], o lado esquerdo da equação (6.3) pode ser expresso como

$$\left(2\Delta^{AC} - \gamma^{AC}\square\right)\phi_{AB} = 8\Lambda\phi_{B}{}^{C} + 4i\phi^{AC}\phi_{AB} - 2\Psi_{B}{}^{CAM}\phi_{AM} - \gamma^{AC}\square\phi_{AB}, \tag{6.4}$$

com o escalar de curvatura $R = 24\Lambda$. Assim,

$$2\gamma_{CD}\Delta^{AC}\phi_{AB} + \square\phi_{DB} = 8\Lambda\phi_{BD} + 4i\phi_{D}{}^{A}\phi_{AB} - 2\Psi_{BD}{}^{AM}\phi_{AM} + \square\phi_{DB}, \tag{6.5}$$

sendo que a equação (6.4) será deduzida ao longo do capítulo. Para o lado direito de (6.3), aplica-se a regra de Leibniz

$$\nabla^{C}_{A'}\left(\beta^{AA'}\phi_{AB}\right) = \left(\nabla^{C}_{A'}\beta^{AA'}\right)\phi_{AB} + \beta^{AA'}\nabla^{C}_{A'}\phi_{AB}, \tag{6.6}$$

e considera-se as decomposições de simetria

$$\left(\nabla^{C}_{A'}\beta^{AA'}\right)\phi_{AB} = \left(\nabla^{(C}_{A'}\beta^{A)A'}\right)\phi_{AB} + \left(\nabla^{[C}_{A'}\beta^{A]A'}\right)\phi_{AB}, \tag{6.7}$$

e

$$\beta^{AA'}\nabla^{C}_{A'}\phi_{AB} = \beta^{A'(A}\nabla^{C)}_{A'}\phi_{AB} + \beta^{A'[A}\nabla^{C]}_{A'}\phi_{AB}. \tag{6.8}$$

Após utilizar-se a expansão (6.6), consegue-se reescrever (6.3) na seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
2\gamma_{CD}\Delta^{AC}\phi_{AB} + \Box\phi_{DB} &= 2i\gamma_{CD}\nabla^{C}_{A'}\left(\beta^{AA'}\phi_{AB}\right) \\
&= 2i\nabla_{DA'}\left(\beta^{AA'}\phi_{AB}\right) \\
&= 2i\left[\left(\nabla_{DA'}\beta^{AA'}\right)\phi_{AB} + \beta^{AA'}\nabla_{DA'}\phi_{AB}\right].
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Trabalhando-se explícitamente com (6.7) e (6.8) e usando-se as relações (6.9), pode-se obter as seguintes contribuições [15]:

$$\left(\nabla_{DA'}\beta^{AA'}\right)\phi_{AB} = 2\phi_{D}{}^{A}\phi_{AB} + \left(\frac{1}{2}\Box\Phi + \nabla_{\nu}\Phi^{\nu}\right)\phi_{DB}, \tag{6.10}$$

e

$$\beta^{AA'}\nabla_{DA'}\phi_{AB} = \left(\beta^{\nu}\nabla_{\nu} - \frac{i}{2}\beta^{\nu}\beta_{\nu}\right)\phi_{DB}, \tag{6.11}$$

resultando, então, que com (6.5), (6.10) e (6.11) substituídas em (6.9), somos levados à equação de onda[1]

$$\left(\Box - 2i\beta^{\nu}\nabla_{\nu} - \Upsilon_{(\mathcal{P})} + 8\Lambda\right)\phi_{AB} = 2\Psi_{AB}{}^{CD}\phi_{CD}, \tag{6.12}$$

com $\Upsilon_{(\mathcal{P})}$ sendo dada por

$$\Upsilon_{(\mathcal{P})} = \beta^{\nu}\beta_{\nu} + i\left(\Box\Phi + 2\nabla_{\nu}\Phi^{\nu}\right). \tag{6.13}$$

Pode-se arranjar uma interessante equação de autovalor que envolve a função $\Upsilon_{(\mathcal{P})}$. Para isto, aplicamos o operador $\Box$ no espinor métrico do formalismo γ. Tem-se

$$\begin{aligned}
\Box\gamma_{AB} &= \nabla^{\nu}\nabla_{\nu}\gamma_{AB} \\
&= i\nabla^{\nu}\left(\beta_{\nu}\gamma_{AB}\right) \\
&= i\left[\left(\nabla^{\nu}\beta_{\nu}\right)\gamma_{AB} + \beta_{\nu}\nabla^{\nu}\gamma_{AB}\right] \\
&= i\left[\nabla^{\nu}\beta_{\nu} + i\beta_{\nu}\beta^{\nu}\right]\gamma_{AB} \\
&= \left(i\nabla^{\nu}\beta_{\nu} - \beta_{\nu}\beta^{\nu}\right)\gamma_{AB}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

[1] Vale a pena ressaltar que a contribuição $4i\phi_{D}{}^{A}\phi_{AB}$ é cancelada quando combina-se os termos pertinentes.

A expressão para $\Upsilon_{(\mathcal{P})}$ é dada por

$$\begin{aligned}\Upsilon_{(\mathcal{P})} &= \beta^\nu\beta_\nu + i\left(\Box\Phi + 2\nabla_\nu\Phi^\nu\right)\\ &= \beta^\nu\beta_\nu + i\nabla_\nu\left(\nabla^\nu\Phi + 2\Phi^\nu\right)\\ &= \beta^\nu\beta_\nu + i\nabla_\nu\beta^\nu, \end{aligned}\tag{6.15}$$

tal que, efetuando uma conjugação complexa, temos

$$\overline{\Upsilon}_{(\mathcal{P})} = \beta^\nu\beta_\nu - i\nabla_\nu\beta^\nu, \tag{6.16}$$

e a expressão (6.14) se torna

$$\Box\gamma_{AB} = -\overline{\Upsilon}_{(\mathcal{P})}\gamma_{AB}, \tag{6.17}$$

nos dando, de fato, uma genuína equação de autovalor. Seguindo os mesmos procedimentos, arranja-se a seguinte expressão para a forma contravariante:

$$\Box\gamma^{AB} = -\Upsilon_{(\mathcal{P})}\gamma^{AB}. \tag{6.18}$$

No que segue, deduziremos a igualdade (6.5). Com (5.8) e a prescrição (5.18), escrevemos a derivada Δ do primeiro termo do lado direito de (6.5) como

$$\begin{aligned}\Delta^{AC}\phi_{AB} &= -\gamma^{AD}\gamma^{CE}\left(X_{DEA}{}^{M}\phi_{MB} + X_{DEB}{}^{M}\phi_{AM} + w_{DEM}{}^{M}\phi_{AB}\right)\\ &= \gamma^{AD}\gamma^{CE}\left(X_{DEAM}\phi_B{}^M + X_{DEBM}\phi_A{}^M\right) - w^{AC}{}_{M}{}^{M}\phi_{AB}, \end{aligned}\tag{6.19}$$

onde o espinor X_{ABCD} é dado por

$$X_{ABCD} = \Psi_{ABCD} - 2\Lambda M_{A(C}M_{D)B}, \tag{6.20}$$

como pode ser visto na Ref. [15]. Agora, devemos resolver separadamente as contribuições que ocorrem no último estágio da expansão de (6.19). Começamos com o seguinte:

$$\begin{aligned}\gamma^{AD}\gamma^{CE}X_{DEAM}\phi_B{}^M &= \gamma^{AD}\gamma^{CE}\left(\Psi_{DEAM} - 2\Lambda\gamma_{D(A}\gamma_{M)E}\right)\phi_B{}^M\\ &= \left(\gamma^{[AD]}\gamma^{CE}\Psi_{(AD)EM} - 2\Lambda\gamma^{AD}\gamma^{CE}\gamma_{D(A}\gamma_{M)E}\right)\phi_B{}^M\\ &= -2\Lambda\gamma^{MD}\gamma^{CE}\gamma_{D(A}\gamma_{M)E}\phi_B{}^A\\ &= 2\Lambda\delta_{(A}{}^{M}\delta_{M)}{}^{C}\phi_B{}^A\\ &= 3\Lambda\phi_B{}^C, \end{aligned}\tag{6.21}$$

sendo este o resultado definitivo para o primeiro termo. Quanto ao segundo termo, temos

$$\begin{aligned}\gamma^{AD}\gamma^{CE}X_{DEBM}\phi_A{}^M &= \gamma^{AD}\gamma^{CE}\left(\Psi_{DEBM} - 2\Lambda\gamma_{D(B}\gamma_{M)E}\right)\phi_A{}^M\\ &= \gamma^{AD}\gamma^{CE}\left(\Psi_{BEDM} - 2\Lambda\gamma_{D(B}\gamma_{M)E}\right)\phi_A{}^M\\ &= \Psi_B{}^{CA}{}_M\phi_A{}^M - 2\Lambda\gamma^{AD}\gamma^{CE}\gamma_{D(B}\gamma_{M)E}\phi_A{}^M\\ &= -\Psi_B{}^{CAM}\phi_{AM} + 2\Lambda\delta_{(B}{}^{A}\delta_{M)}{}^{C}\phi_A{}^M\\ &= -\Psi_B{}^{CAM}\phi_{AM} + \Lambda\phi_B{}^C. \end{aligned}\tag{6.22}$$

Para o terceiro termo, usamos (3.39), para obter

$$w^{AC}{}_{M}{}^{M} = -2i\phi^{AC}, \tag{6.23}$$

tal que, combinando os resultados (6.21), (6.22) e (6.23), reescrevemos (6.19) como

$$\Delta^{AC}\phi_{AB} = 4\Lambda\phi_{B}{}^{C} + 2i\phi^{AC}\phi_{AB} - \Psi_{B}{}^{CAM}\phi_{AM}. \tag{6.24}$$

Com o auxílio de (6.24), podemos reescrever o lado esquerdo de (6.3) como

$$\left(2\Delta^{AC} - \gamma^{AC}\Box\right)\phi_{AB} = 8\Lambda\phi_{B}{}^{C} + 4i\phi^{AC}\phi_{AB} - 2\Psi_{B}{}^{CAM}\phi_{AM} - \gamma^{AC}\Box\phi_{AB}, \tag{6.25}$$

sendo que acoplando γ_{CD}, tal como em (6.5), obtemos a igualdade considerada.

Agora, trabalhamos as condições (4.17) e (4.19). Manipulando índices com o uso de (4.21), e usando a expressão para $\beta^{B}_{A'}$ como dada a partir de (2.44), obtemos

$$\nabla_{A'[A}(i\beta^{CA'}\phi_{B]C}) = i(\beta^{CA'}\nabla_{A'[A}\phi_{B]C} - \phi_{C[A}\nabla_{B]A'}\beta^{CA'}) = 0, \tag{6.26}$$

tal que, com a equação de campo (4.11), conseguimos a contribuição

$$i\beta^{CA'}\nabla_{A'[A}\phi_{B]C} = \frac{1}{2}\gamma_{AB}\beta^{A'(C}\beta^{M)}_{A'}\phi_{CM} = 0. \tag{6.27}$$

Para calcular a outra contribuição de (6.26), utilizamos (5.10) e consideramos os desenvolvimentos

$$\nabla_{BA'}\beta^{CA'} = \gamma_{DB}\nabla^{D}_{A'}\beta^{CA'} = \gamma_{DB}(\nabla^{(D}_{A'}\beta^{C)A'} + \nabla^{[D}_{A'}\beta^{C]A'}), \tag{6.28}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^{(D}_{A'}\beta^{C)A'} &= \nabla^{(D}_{A'}\nabla^{C)A'}\Phi + 2\nabla^{(D}_{A'}\Phi^{C)A'} \\ &= \Delta^{CD}\Phi + 2\phi^{CD},\end{aligned} \tag{6.29}$$

onde fizemos uso da relação (5.9). Como os contextos de ambos os formalismos são livres de torção, concluimos que

$$\Delta^{CD}\Phi = 0, \tag{6.30}$$

tal que, combinando as relações (6.28), (6.29) e (6.30) com a expansão

$$\nabla^{[D}_{A'}\beta^{C]A'} = \frac{1}{2}\gamma^{DC}\nabla_{\mu}\beta^{\mu} = \frac{1}{2}\gamma^{DC}(\Box\Phi + 2\nabla_{\mu}\Phi^{\mu}), \tag{6.31}$$

obtemos

$$\nabla_{BA'}\beta^{CA'} = \gamma_{DB}(2\phi^{CD} + \frac{1}{2}\gamma^{DC}\nabla_{\mu}\beta^{\mu}). \tag{6.32}$$

Consequentemente, após alguns cálculos adicionais, obtemos a contribuição

$$-i\phi_{C[A}\nabla_{B]A'}\beta^{CA'} = i(2\phi^{C}_{[A}\phi_{B]C} - \frac{1}{2}\phi_{C[A}\delta_{B]}{}^{C}\nabla_{\mu}\beta^{\mu})$$
$$= 2i\phi^{C}_{[A}\phi_{B]C}, \tag{6.33}$$

posto que[2]

$$\phi_{C[A}\delta_{B]}{}^{C} = -\frac{1}{2}\gamma_{AB}\phi_{C}{}^{M}\delta_{M}{}^{C} = -\frac{1}{2}\gamma_{AB}\phi_{C}{}^{C} \equiv 0. \tag{6.34}$$

Logo, declaramos que a equação da continuidade (4.17) implica que

$$\nabla_{A'[A}(i\beta^{CA'}\phi_{B]C}) = 2i\phi^{C}_{[A}\phi_{B]C} = -i\gamma_{AB}\phi^{CD}\phi_{CD} = 0, \tag{6.35}$$

ou seja, quando a densidade de corrente (4.18) é implementada, o lado direito de (6.3) deve satisfazer a relação

$$\nabla_{A'C}(2i\beta^{AA'}\phi_{AB}) = \nabla_{A'(B}(2i\beta^{AA'}\phi_{C)A}), \tag{6.36}$$

enquanto que ϕ_{AB} deve obedecer a condição de nulidade

$$\phi^{CD}\phi_{CD} = 0. \tag{6.37}$$

Como pode ser visto na Ref. [14], um espinor totalmente simétrico do tipo $\pi_{AB...N}$ é nulo se

$$\pi_{AB...N}\pi^{AB...N} = 0, \tag{6.38}$$

o qual pode ser escrito como

$$\pi_{A...N} = \Pi\zeta_{(A}...\zeta_{N)}, \tag{6.39}$$

com Π sendo um escalar. Ainda, para um espinor simétrico de dois índices, tal como nossas funções de onda eletromagnéticas, teremos

$$\phi_{AB} = \iota_{(A}\tau_{B)} = \Pi\iota_{(A}\iota_{B)}, \tag{6.40}$$

com $\iota_A \doteqdot \Pi\tau_A$. Deste modo, a fonte geométrica (4.18) e sua complexa conjugada, são caracterizadas pelas expressões

$$\beta^{A}_{B'}\phi_{AB} = \Pi\beta^{A}_{B'}\iota_{(A}\iota_{B)}, \tag{6.41}$$

e

$$\beta^{A'}_{B}\phi_{A'B'} = \overline{\Pi}\beta^{A'}_{B}\iota_{(A'}\iota_{B')}, \tag{6.42}$$

[2]Enfatizamos que ϕ_{AB} é simétrico tal que seu traço $\phi_{C}{}^{C}$ é sempre identicamente igual a zero.

sendo que, então, as equações de campo que respeitam a equação da continuidade para tais fontes, podem ser devidamente representadas por

$$\nabla^{A}_{B'}\phi_{AB} = i\Pi\beta^{A}_{B'}\iota_{(A}\iota_{B)}, \tag{6.43}$$

e

$$\nabla^{A'}_{B}\phi_{A'B'} = -i\overline{\Pi}\beta^{A'}_{B}\iota_{(A'}\iota_{B')}, \tag{6.44}$$

com a equação da continuidade sendo

$$\nabla^{BB'}(\Pi\beta^{A}_{B'}\iota_{(A}\iota_{B)}) = \nabla^{BB'}(\overline{\Pi}\beta^{A'}_{B}\iota_{(A'}\iota_{B')}) = 0. \tag{6.45}$$

Assim, fica estabelecido que se as equações de campo forem escritas nos formatos (6.44) e (6.45), então elas estarão absorvendo a equação da continuidade com as fontes geométricas implementadas acima e, assim, envolvendo funções de onda nulas.

Capítulo 7

Conclusões

Uma das belas e motivadoras partes do estudo das teorias de espinores repousa na filosofia que tais entidades revelam aspectos ocultos da natureza, ímpossíveis de serem observados com o uso exclusivo de tensores mundo, e algumas vezes são tidas como entidades primitivas, como é cultuado por alguns autores [3]. Especìficamente nos formalismos de Infeld e van der Waerden para a teoria da Relatividade Geral de Einstein, tal filosofia se revela de modo explícito, com estruturas geométricas com caráter eletromagnético sendo incorporadas em curvaturas, em contraposição com a descrição tradicional puramente mundo, onde apenas o campo gravitacional está associado à geometria. Diante disto, emerge naturalmente um amplo cenário, uma vez que no íntimo de curvaturas espaços-temporais é possível repousar dois campos distintos e, então, com base neste fato podemos buscar novas implicações. Uma delas, que foi um dos objetos principais deste estudo, é que a partir de curvaturas eletromagnéticas pode-se admitir, em apenas um dos formalismos, a existência de uma estrutura geométrica que corresponde formalmente à uma densidade de quadricorrente eletromagnética. Assim, pode-se deduzir equações de onda para fótons geométricos nulos implementando-se uma autêntica versão da equação da continuidade para fontes geométricas. Essas novas entidades surgiram através da equação da continuidade com a densidade de corrente geométrica implementada nos capítulos 4 e 6, o que diretamente implicou que os objetos ϕ's têm efetivamente que ser considerados como espinores nulos. Assim, nossas funções de onda eletromagnéticas podem ser decompostas em termos dos espinores associados com as correspondentes direções principais nulas de $\mathcal{M}$ [14], as quais denotamos pela letra núcleo ι.

Vimos que espinores nulos podem ser de considerável importância na descrição de curvaturas eletromagnéticas de Infeld e van der Waerden. Sendo assim, nosso resultado concernente à ocorrência em curvaturas de funções de onda nulas pode propiciar a indicação a cerca de quais direções nulas de $\mathcal{M}$ devem ser diretamente associadas ao eletromagnetismo no formalismo γ. Como última observação a ser enfatizada, vimos que as relações (2.40), (3.26) e (4.18) conectam estruturas de cunho eletromagnéticas à estruturas de natureza puramente geométrica. Em (2.40) temos a relação entre o potencial eletromagnético afim e a conexão de espin contraída, sendo que (3.26) nos dá a relação entre o tensor de Maxwell intríssico ao objeto misto de curvatura contraído e ainda (4.18) conectando uma corrente de natureza geométria a uma devida estrutura geométrica, sendo que como foi visto, adaptamos formalmente a equação da continuidade. Deste modo como extensão deste projeto, pode-se buscar outros elementos teóricos do eletromagnetismo e "transportar"para os formalismos de Infeld-van der Waerden e com isso analisar as possíveis implicações no arcabouço teórico aqui presente.

Referências Bibliográficas

[1] Sakurai; J.J.: Modern Quantum Mechanics; Addison-Wesley, Manoa (1994)

[2] Bjorken; J.D, Drell; S.D.: Relativistic Quantum Mechanics, New York; McGraw-Hill, (1965)

[3] Carmeli, M., Malin, S.: Theory of Spinors, An Introduction; Word Scientific, Singapore (2000)

[4] Van der Waerden; R., B.L.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Physics. K1., 100 (1929)

[5] Infeld, L.: Physik ZS. **33,** 475 (1932)

[6] Infeld, L., Waerden, B.L.: Sitzber. Akad. Wiss., Physik-math. K1. **9**, 380 (1933)

[7] Weyl, H.: Z. Physik **56**, 330 (1929)

[8] Bade, W. L., Jehle, H.: Rev. Mod. Phys. **3**, 714 (1953)

[9] Corson, E.M.: Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, Glasgow (1953)

[10] Bergmann, P.G.: Phys. Rev. **2,** 624 (1957)

[11] Witten, L.: Phys. Rev. **1**, 357 (1959)

[12] Penrose, R.: Ann. Phys. (N.Y.) **10**, 171 (1960)

[13] Newman, E.T., Penrose, R.: Jour. Math. Phys. **3**, 566 (1962)

[14] Penrose; R., Rindler; W.: Spinors and Space-Time Vol 1, Cambridge, (1984)

[15] Cardoso, J.G.: Czech Journal of Physics **4**, 401 (2005)

[16] Cardoso, J.G.: Acta Phys. Polon. B **8**, 1001 (2007)

[17] Bach, R.: Math. Zeitschr. **9**, 110 (1921)

[18] Schouten, J. A.: Journ. of Math. and Phys. **10**, 239 (1931)

[19] Schouten, J. A.:Z. Physik. **84**, 92 (1933)

[20] Schouten, J.A.: Ricci Calculus, Heidelberg (1954)

[21] Pauli, W.: Relativity Theory, London (1958)

[22] Schrödinger, E. Space-Time Structure, Cambridge (1963)

[23] Landau, L.D., Lifchitz, L.: Théorie du Champ, Moscou (1966)

[24] Weinberg, S.: Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons (1972)

[25] Cardoso, J.G.: [arXiv:1004.5150v1 [math-ph]] (2010)