

Neste trabalho, é sistematicamente enfatizado que a descrição tradicional da estrutura geométrica da teoria da relatividade geral (RG) em termos de espinores de duas componentes possibilita a obtenção de funções de onda para grávitons. De fato, os procedimentos pertinentes são essencialmente levados a cabo com base na descrição espinorial das estruturas de curvaturas espaços-temporais portada pelo contexto teórico dos formalismos espinoriais  $\Upsilon$  de Infeld e van der Waerden. A versão espinorial da identidade de Bianchi gravitacional produz um conjunto de equações de campo para grávitons em ambos os formalismos. Adicionalmente, com base na implementação de certos mecanismos calculacionais algébricos, estas equações de campo são subsequentemente utilizadas em ambos os formalismos em conjunção com a obtenção de um conjunto de equações de onda para grávitons, num cenário com fontes fisicamente arbitrarias. Enfatiza-se, então, que tais equações de onda governam a propagação de grávitons como partículas em espaços-tempo da RG.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso

Joinville, 2017

ANO  
2017

CLÉSIO EVANGELISTA MOTA | FUNÇÕES DE ONDA CLÁSSICAS PARA GRÁVITONS  
EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO



**UDESC**

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## **FUNÇÕES DE ONDA CLÁSSICAS PARA GRÁVITONS EM ESPAÇOS- TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO**

CLÉSIO EVANGELISTA MOTA

JOINVILLE, 2017

CLÉSIO EVANGELISTA MOTA

FUNÇÕES DE ONDA CLÁSSICAS PARA GRÁVITONS EM  
ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, em complemento aos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso

Joinville

2017

Evangelista Mota, Clésio.

Funções de onda clássicas para grávitons em espaços-tempo curvos sem torção/ Clésio Evangelista Mota. - Joinville, 2017.

65 p.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2017.

1. Relatividade geral. 2. Formalismos de Infeld e van der Waerden. 3. Funções de onda. 4. Grávitons. I. Gonçalves Cardoso, Jorge. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

**Funções de Onda Clássicas para Grávitons em Espaços-Tempo Curvos sem  
Torção**

por

**Clésio Evangelista Mota**

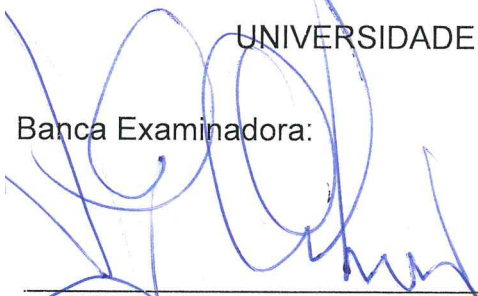
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**


Área de concentração em “Física”  
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

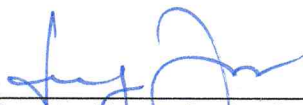
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso  
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse  
CCT/UDESC



Prof. Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer  
Jorás - UFRJ

**Joinville.SC. 24 de julho de 2017.**



À minha existência.



# Agradecimentos

A Deus, pela sua graça em minha vida, pela dádiva do conhecimento, pela oportunidade de viver nesta era e pelo júbilo de desfrutar da sua criação como Físico.

Aos meus *Pais*, por serem o que são, pelo apoio, pelo amor, carinho e por tudo que tenho. Meu agradecimento em especial a eles. À minha Esposa *Murriel Fonsêca*, em ter cruzado o meu destino, pelo incentivo, companheirismo e por todas as emoções da vida.

Agradecimentos ao meu orientador *Prof. Dr. Jorge Cardoso*, por me orientar, pelos ensinamentos neste trabalho e ao longo do curso. Agradeço em especial a ele pela sua dedicação no ato de disseminar o conhecimento. Também de coração aos demais professores do CCT, e ainda a CAPES pelo apoio financeiro, pois sem isto eu não teria conseguido!

A minha gratidão aos meus grandes amigos *José Roberto Silva* e *Johnyefeson Oliveira*. Também sou grato aos caros colegas de curso, pelos momentos agradáveis e pelos pensamentos científicos em conjunto. São eles: *Nathan Nicolau, Eduardo Brugnago, Rafael Fróis, Vinicius Antunes, Monik Borghezan, Alexandre Orthey, Rodrigo Schmidt, Caroline Felicio, Liana Graciela, Darlene Lobo, Heitor Wilker, Jean Bracht, Jônatas Steinbach, Flávio Rusch, José Wildon, Paulo Zancan, David William*. Enfim a todos que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Dedico aos colegas: *Gilson Würz, Ana Radavelli, Vinicius Brito, José Magno, Lilian Ferreira* e *Jhonaton Paes*.

Estou - lhes grato!





*Em um breve insight de raio de luz, assim me movo  
pelo cosmos em uma viagem ditada pelas conveniências  
físicas do pensamento.*

Clésio E. Mota, 2016.



# Resumo

Neste trabalho, é sistematicamente enfatizado que a descrição tradicional da estrutura geométrica da teoria da relatividade geral (RG) em termos de espinores de duas componentes possibilita a obtenção de funções de onda para grávitons. De fato, os procedimentos pertinentes são essencialmente levados a cabo com base na descrição espinorial das estruturas de curvaturas espaços-temporais portada pelo contexto teórico dos formalismos espinoriais  $\gamma\varepsilon$  de Infeld e van der Waerden. A versão espinorial da identidade de Bianchi gravitacional produz um conjunto de equações de campo para grávitons em ambos os formalismos. Adicionalmente, com base na implementação de certos mecanismos calculacionais algébricos, estas equações de campo são subsequentemente utilizadas em ambos os formalismos em conjunção com a obtenção de um conjunto de equações de onda para grávitons, num cenário com fontes fisicamente arbitrárias. Enfatiza-se, então, que tais equações de onda governam a propagação de grávitons como partículas em espaços-tempo da RG.

Palavras chaves: **Relatividade geral. Formalismos de Infeld e van der Waerden. Funções de onda. Grávitons**



# Abstract

In this work, it is systematically emphasized that the traditional two-component spinor description of the geometric structure of general relativity (GR) allows the definition of wave functions for gravitons. Indeed, the pertinent procedures are essentially carried out on the basis of the spinor description of spacetime curvature structures borne by the spinor formalisms  $\gamma\varepsilon$  of Infeld and van der Waerden. The spinor version of the gravitational Bianchi identity gives rise to a system of field equations for gravitons in both the formalisms. In addition, based on the implementation of certain algebraic calculational techniques, these field equations are subsequently utilized in both formalisms in conjunction with the derivation of a set of wave equations for gravitons, within a framework having physically arbitrary sources. It is then emphasized that such wave equations govern the propagation of gravitons as particles in GR spacetimes.

**Keywords:** General relativity. Formalisms of Infeld and van der Waerden. Wave functions. Gravitons



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>ESPINORES EM MINKOWSKI</b>	<b>22</b>
<b>3</b>	<b>AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES DE ONDA E EQUAÇÕES DE CAMPO PARA GRÁVITONS</b>	<b>38</b>
4.1	EQUAÇÕES DE CAMPO PARA GRÁVITONS . . . . .	46
4.1.1	Equações de Campo no Formalismo $\gamma$ . . . . .	46
4.1.2	Equações de Campo no Formalismo $\varepsilon$ . . . . .	48
<b>5</b>	<b>TÉCNICAS CALCULACIONAIS</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>EQUAÇÕES DE ONDA PARA GRÁVITONS</b>	<b>55</b>
6.1	EQUAÇÕES DE ONDA NO FORMALISMO $\gamma$ . . . . .	56
6.2	EQUAÇÕES DE ONDA NO FORMALISMO $\varepsilon$ . . . . .	59
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>63</b>





# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Espinores de duas componentes foram implementados no contexto do espaço-tempo de Minkowski  $M$  da relatividade restrita por van der Waerden [1]. Tal formalismo relativístico foi desenvolvido em concomitância com uma descrição espinorial de duas componentes da teoria de Dirac para o espin do elétron em espaço-tempo plano, e surgiu a partir da existência de um homomorfismo bivalual local entre o grupo de matrizes complexas  $(2 \times 2)$  unimodulares denotado por  $SL(2, \mathbb{C})$  e a componente ortócrona própria do grupo de Lorentz [1]. Os espinores deste contexto emergiram como elementos de espaços vetoriais de duas dimensões complexas, com cada um dos quais carregando um espinor métrico antissimétrico invariante sob o grupo unimodular.

No âmbito da relatividade geral (RG), a teoria de espinores foi inicialmente introduzida por Infeld [2]. Nesta formulação (vide Refs.[2,3]), a componente independente de um típico espinor métrico aparece como uma função real de coordenadas espaço-temporais. Uma extensão do formalismo de Infeld foi subsequentemente apresentada por Infeld e van der Waerden [4] com base na existência local de objetos conectores Hermitianos, com dois formalismos tendo então sido construídos em conexão com esta extensão, os quais foram designados originalmente como os formalismos  $\gamma\varepsilon$ . Estes objetos conectores são matrizes complexas  $(2 \times 2)$ , cujas componentes geralmente dependem de coordenadas espaço-temporais, que estabelecem uma correspondência entre tensores mundo e tensores de espin em ambos os formalismos. Possibilitou-se, então, uma descrição mais completa das estruturas geométricas dos espaços-tempo curvos da RG. Em ambos os formalismos, em cada ponto não-singular de um dado espaço-tempo curvo, são assentados dois pares de espaços de espin complexos conjugados, com as chamadas transformações de calibre de

Weyl [3,5] agindo efetivamente sobre tais espaços. No formalismo  $\gamma$ , um espinor métrico aparece então como um tensor de espin enquanto que, no formalismo  $\varepsilon$ , espinores métricos aparecem como densidades tensoriais de espin de peso  $\pm 1$  que portam invariância sob a ação do grupo de Weyl. Qualquer objeto conector para o formalismo  $\gamma$  possui um caráter misto de tensor de espin e de vetor mundo. No formalismo  $\varepsilon$ , os objetos conectores são vistos como entidades que portam o mesmo caráter mundo daqueles do formalismo  $\gamma$ , mas um atributo de densidade de espin é efetivamente associado à eles.

Particularmente, a significância dos formalismos  $\gamma\varepsilon$  está relacionada com a possibilidade de definir-se funções de onda para grávitons e de formular-se uma descrição formalmente mais simples, em termos de espinores de duas componentes, da geometria mundo da RG. Em 1959, Witten [6] efetuou pela primeira vez a decomposição espinorial irreduzível de um tensor de curvatura de Riemann. Ele estabeleceu que qualquer tensor de Riemann é associado a um par de espinores de curvatura que restituem adequadamente o número de graus de liberdade de quaisquer tensores de curvatura característicos da RG. Posteriormente, Penrose [7] obteve a decomposição espinorial irreduzível de um tensor de Weyl e, daí, definiu funções de onda para grávitons. Ele observou que tais funções de onda em algum espaço-tempo típico da RG são definidas como os espinores ocorrentes nesta decomposição espinorial do tensor de Weyl. Penrose formulou a teoria de grávitons no formalismo  $\varepsilon$  sem levar em conta a teoria de densidade de espin de Schouten [8-10] que, tal como mencionado anteriormente, está intimamente envolvida neste formalismo. Ele foi o primeiro a implementar funções de onda para grávitons de algum espaço-tempo da RG. Ficou explicitamente posto que estas funções de onda constituem a parte totalmente simétrica de um dos espinores de curvatura que ocorrem na decomposição de Witten [6] de um tensor de Riemann. De fato, por intermédio de expansões algébricas apropriadamente obtidas de acordo com certos mecanismos de redução de valências, Penrose [11] obteve uma decomposição irreduzível de um dos espinores de curvatura de Witten e, então, estabeleceu pela primeira vez uma transcrição das equações de Einstein sem fontes em termos de espinores de duas componentes no formalismo  $\varepsilon$ .

Uma completeza contextual foi dada mais recentemente por Cardoso (vide Refs.[3,12]), que mostrou que funções de onda para grávitons surgem em ambos os formalismos a partir de partes espinoriais simétricas de certos objetos mistos de curvaturas [3,12]. Ficou estabelecido, com efeito, que típicas funções de onda gravitacionais para os formalismos

$\gamma\varepsilon$  aparecem, respectivamente, como tensores de espin e como densidades de espin invariantes de pesos  $\pm 2$ . Tornou-se, então, viável a obtenção de uma transcrição espinorial mais completa das equações de Einstein, bem como de uma interpretação geométrica mais transparente da formulação das equações de campo e de onda para grávitons [3,12]. Como um particular resultado, com a inclusão da implementação de certas técnicas calculacionais [3,12,13], foi obtido um conjunto de equações de onda para grávitons. Tais equações de onda foram primeiramente deduzidas no caso da propagação no vácuo [3,12] e, posteriormente, extendidas ao caso envolvendo fontes arbitrárias [14]. Assim, em essência, funções de onda para grávitons ocorrem em ambos os formalismos na estrutura interna de curvaturas espinoriais.

Esta presente obra constitui um trabalho de revisão e tem por objetivo principal rever sistematicamente a teoria de grávitons como partículas, dentro do contexto dos formalismos  $\gamma\varepsilon$ , considerando a respectiva propagação espaço-temporal na presença de fontes fisicamente arbitrárias [14]. Adicionalmente, é utilizado aqui o caráter de primeira quantização da formulação espinorial existente na literatura, resultando que todas as funções de ondas com as quais lidamos aqui, serão efetivamente consideradas como clássicas. A dedução das equações de onda pertinentes será levada a cabo com base no uso das técnicas calculacionais mencionadas anteriormente.

As convenções adotadas no trabalho são as mesmas que aquelas utilizadas na Ref.[3], a saber, as componentes de quaisquer quantidades mundo e de espin, num dado espaço-tempo curvo  $\mathfrak{M}$  do contexto da RG, serão denotadas por letras Latinas minúsculas e maiúsculas, respectivamente. Componentes espinoriais linhadas denotarão componentes complexas conjugadas. Assumiremos desde o início que a assinatura métrica espaço-temporal é  $(+ - - -)$ . Representaremos o operador derivada parcial  $\frac{\partial}{\partial x^a}$  para algumas coordenadas locais  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  em  $\mathfrak{M}$  por  $\partial_a$ . Sem qualquer risco de ambiguidades, utilizaremos o mesmo símbolo  $\nabla_a$  usado para denotar um operador derivada covariante em  $\mathfrak{M}$  ao tratarmos de derivadas covariantes em ambos os formalismos. Índices mundo (tensoriais) assumirão os valores 0, 1, 2, 3, e índices espinoriais assumirão os valores 0, 1 ou 0', 1'.

Parênteses e colchetes envolvendo quaisquer blocos de índices denotarão as operações de simetrização e de antissimetrização, respectivamente. Estas são as chamadas operações de simetria utilizadas no formalismo mundo [15,16,17]. Um objeto geométrico é dito ser

simétrico se  $A_{(ab)} = A_{(ba)}$  e antissimétrico se  $A_{[ab]} = -A_{[ba]}$ . Vejamos as expansões:

$$A_{(ab)} = \frac{1}{2!}(A_{ab} + A_{ba}), \quad (1.1)$$

e

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2!}(A_{ab} - A_{ba}). \quad (1.2)$$

Para  $n$  índices tem-se as prescrições:

$$A_{(ab\dots c)} = \frac{1}{n!}(A_{ab\dots c} + A_{ba\dots c} + \dots + A_{c\dots ab}), \quad (1.3)$$

e ainda

$$A_{[ab\dots c]} = \frac{1}{n!}(A_{ab\dots c} - A_{ba\dots c} + \dots + (-1)^{n-1}A_{c\dots ab}), \quad (1.4)$$

onde estão envolvidas as chamadas permutações cíclicas, e ainda um termo do tipo  $(-1)^{n-1}$  controla as paridades para a operação de antissimetrização. O uso de barras verticais envolvendo blocos de índices designará que os índices absorvidos não estão implementados em eventuais operações de simetria. O símbolo “c.c.” sempre irá referir à contribuições complexo-conjugadas. Representaremos a operação de conjugação complexa por uma barra horizontal sobre letras núcleo. Se necessário, outras convenções serão explicadas ocasionalmente.

As equações de Einstein serão escritas na forma

$$\Xi_{ab} = \frac{k}{2}(T_{ab} - \frac{1}{4}Tg_{ab}), \quad T = g_{ab}T^{ab}, \quad (1.5)$$

com  $k$  sendo a constante gravitacional de Einstein,  $g_{ab}$  sendo o tensor métrico covariante de  $\mathfrak{M}$  e  $T_{ab}$  sendo o tensor energia-momento de algumas fontes juntamente com seu traço  $T$ . A presença da constante cosmológica  $\lambda$  nas equações de Einstein será implicitamente implementada, concordantemente à seguinte relação de traço estendida

$$R = 4\lambda + kT, \quad (1.6)$$

com  $R$  sendo o escalar de Ricci ou escalar de curvatura, com a definição

$$R = g^{ab}R_{ab}. \quad (1.7)$$

O tensor de Ricci  $R_{ab}$  construído a partir do tensor de Riemann  $R_{abcd}$  de  $\nabla_a$  é expresso por

$$R_{ab} = g^{cd}R_{acbd} = R_{acb}{}^c = R_{(ab)}, \quad (1.8)$$

o qual envolve a mesma convenção de sinal que aquela adotada na Ref.[11]. O objeto  $\Xi_{ab}$  que ocorre em (1.5) é proporcional à parte livre de traço de  $R_{ab}$  e, em adição, possui traço nulo [11]. Isto será visto em mais detalhes no Capítulo 3.

Nosso trabalho está dividido em sete Capítulos como segue: no Capítulo 2 é feita uma abordagem sobre a teoria de espinores de duas componentes em espaço-tempo plano. No Capítulo 3 são apresentadas as equações de Einstein na formulação mundo tradicional. No Capítulo 4 veremos que, dentro da teoria de grávitons, as equações de campo são postas a partir da transcrição espinorial da identidade de Bianchi gravitacional [14], a qual é elegantemente escrita na versão mundo em termos da divergência covariante do chamado primeiro dual à esquerda do tensor de Riemann [11,12]. No Capítulo 5, apresentaremos as técnicas calculacionais necessárias para levar-se a cabo a dedução das equações de onda de nosso interesse, tal como exibidas nas Refs.[3,12,14]. A dedução explícita de tais equações de onda é, então, desenvolvida no Capítulo 6. No Capítulo 7, discutiremos algumas conclusões relacionadas ao trabalho.

## Capítulo 2

# ESPINORES EM MINKOWSKI

Neste Capítulo faremos uma sucinta abordagem sobre a teoria de espinores de duas componentes em  $M$ . Deve-se enfatizar que não iremos expor todos os detalhes envolvidos neste contexto, devido haver uma grande quantidade de requisitos subjacentes necessários para realizar-se tal feito. Uma investigação mais clara e completa de como os espinores de duas componentes surgem na relatividade restrita, envolve um estudo mais aprofundado de teoria de grupos, álgebra de Lie e representações (vide Refs.[18-20]), e este não é o nosso objetivo. Será visto apenas os pressupostos básicos da formulação espinorial de van der Waerden, no intuito de proporcionar uma melhor compreensão dos procedimentos que serão desenvolvidos ao longo do trabalho.

Os espinores de duas componentes em  $M$  emergiram naturalmente quando tentou-se uma formulação matematicamente mais consistente e completa da teoria de Dirac para partículas de spin  $\frac{1}{2}$  e, em adição, com o uso do princípio da relatividade. No cenário da relatividade restrita onde o grupo de Lorentz exerce o papel fundamental,  $M$  é um espaço-tempo vetorial, quadridimensional, topologicamente representado por  $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , com esta topologia sendo a mesma para todos os observadores inerciais. Cada ponto em  $M$  é designado como um evento, e é representado por três coordenadas espaciais e uma temporal. As coordenadas contravariantes são dadas pelo quadrivetor  $x^a$

$$x^a = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (2.1)$$

onde  $x^0 \equiv ct$  representa a coordenada temporal,  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  representam as coordenadas espaciais e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Define-se também as coordenadas

covariantes

$$x_a = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z), \quad (2.2)$$

com as devidas correspondências:  $x_0 \equiv x^0 \equiv ct, x_1 \equiv -x^1 \equiv -x, x_2 \equiv -x^2 \equiv -y$  e  $x_3 \equiv -x^3 \equiv -z$ . A assinatura métrica aqui utilizada é a mesma definida anteriormente, a saber,  $(+ - - -)$ . Tem-se o tensor métrico Minkowskiano covariante  $\eta_{ab}$

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta^{ab}), \quad (2.3)$$

onde  $\eta^{ab}$  é o tensor métrico contravariante de  $M$ . Nota-se a seguinte propriedade:

$$\eta_{ab}\eta^{bc} = \delta_a^c, \quad (2.4)$$

onde  $\delta_a^c$  é o delta de Kronecker. Para dois eventos que sejam infinitesimalmente próximos, a distância entre eles ou, por assim dizer, o intervalo, é dado explicitamente pelo elemento de linha

$$ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (2.5)$$

O tensor métrico dado em (2.3) nos permite passar de um quadrivetor contravariante a um covariante, e vice-versa, de acordo com movimentos indiciais do tipo:

$$x^a = \eta^{ab}x_b = \eta^{a0}x_0 + \eta^{a1}x_1 + \eta^{a2}x_2 + \eta^{a3}x_3, \quad (2.6)$$

e

$$x_a = \eta_{ab}x^b = \eta_{a0}x^0 + \eta_{a1}x^1 + \eta_{a2}x^2 + \eta_{a3}x^3. \quad (2.7)$$

Podemos ainda definir as chamadas transformações de Lorentz em  $M$ . Estas transformações ocorrem quando passamos de um referencial para outro, e o conjunto destas forma o chamado grupo de Lorentz  $L$ , no qual possui quatro componentes [21]. Este grupo estabelece as correlações observacionais entre quaisquer observadores inerciais. Os protótipos destas transformações são:

$$x'^a = L^a_b x^b; \quad x'_a = x_b L^{-1b}_a. \quad (2.8)$$

As matrizes de Lorentz, por definição, deixam  $\eta_{ab}$  e  $\eta^{ab}$  invariantes, a saber

$$\eta'^{ab} = L^a_c L^b_d \eta^{cd} = \eta^{ab}, \quad \eta'_{ab} = \eta_{cd} L^{-1c}_a L^{-1d}_b = \eta_{ab}, \quad (2.9)$$



e, conseqüentemente, também tem-se a propriedade

$$ds'^2 = \eta'_{ab} dx'^a dx'^b = \eta_{cd} L^{-1c}{}_a L^{-1d}{}_b L^a{}_h L^b{}_m dx^h dx^m = \eta_{cd} dx^c dx^d = ds^2. \quad (2.10)$$

Ou seja, o grupo de Lorentz é o conjunto de todas as matrizes  $(4 \times 4)$  inversíveis, reais e constantes que satisfazem a relação

$$\eta^{ab} = L^a{}_c \eta^{cd} L_d{}^b \Rightarrow \eta = L^T \eta L, \quad (2.11)$$

com a convenção que  $L_a{}^c$  denota a transposta de  $L^c{}_a$ , juntamente com a matriz diagonal  $\eta$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Tomando o determinante da eq.(2.11), temos<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} (\det \eta) &= (\det L)(\det \eta)(\det L^T), \\ 1 &= (\det L)(\det L^T) \Rightarrow \det L = \pm 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

a qual implica que os elementos de  $L$  só podem ter determinantes  $\pm 1$ . Logo, podemos reescrever as transformações de Lorentz como

$$\{L^a{}_c \text{ com } \det L = +1\} = L_+, \quad (2.14)$$

$$\{L^a{}_c \text{ com } \det L = -1\} = L_-. \quad (2.15)$$

Ainda mais, podemos decompor as transformações de Lorentz de acordo com o esquema

$$L_+^\uparrow = \{L^a{}_c \text{ com } \det L = +1 \text{ e } L^0{}_0 \geq 1\}, \quad (2.16)$$

$$L_+^\downarrow = \{L^a{}_c \text{ com } \det L = +1 \text{ e } L^0{}_0 \leq -1\}, \quad (2.17)$$

$$L_-^\uparrow = \{L^a{}_c \text{ com } \det L = -1 \text{ e } L^0{}_0 \geq 1\}, \quad (2.18)$$

$$L_-^\downarrow = \{L^a{}_c \text{ com } \det L = -1 \text{ e } L^0{}_0 \leq -1\}. \quad (2.19)$$

Em particular, a componente  $L_+^\uparrow$  é chamada de ortócrona própria, a qual ocorre no homomorfismo de van der Waerden mencionado anteriormente.

---

<sup>1</sup>Neste estágio, leva-se em conta que para uma dada matriz  $L$ , tem-se a propriedade:  $\det(L^T) = \det(L)$ .

Os espinores de duas componentes são formalmente introduzidos em espaço de Minkowski quando se estuda os espaços vetoriais de duas dimensões complexas  $S_2$ , chamados espaços de espin. Nestes espaços vetoriais, o grupo unimodular  $SL(2, \mathbb{C})$  realiza mudanças de base. Define-se também espaços de espin conjugados, onde quaisquer dois espinores geradores de um destes espaços possuem componentes complexas conjugadas das correspondentes assentadas em  $S_2$ . Uma elaboração mais detalhada destas definições é claramente exibida na Ref.[22].

Como já foi discutido anteriormente, a formulação espinorial em espaço de Minkowski emergiu a partir da existência de um homomorfismo (uma aplicação que preserva operacionalidades) bivalual local [1,22,23] entre  $SL(2, \mathbb{C})$  e  $L_+^\uparrow$ . Ou seja, o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  constitui a representação bivalual da componente  $L_+^\uparrow$ , sendo  $S_2$  o respectivo espaço de representação. Isso foi estabelecido originalmente por van der Waerden na Ref.[1]. Com efeito, tem-se o homomorfismo

$$h : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow L_+^\uparrow. \quad (2.20)$$

Formalmente, uma transformação de espin típica é escrita assim

$$\psi'_A = S_A^B \psi_B, \quad (2.21)$$

com a matriz de transformação  $S_A^B \in SL(2, \mathbb{C})$ . Inversamente,  $\psi_A$  se transforma como

$$\psi_A = S_A^{-1B} \psi'_B, \quad (2.22)$$

tal que  $S_A^{-1B}$  é a inversa de  $S_A^B$ . Tem-se também a relação para o delta de Kronecker espinorial

$$S_A^B S_B^{-1D} = \delta_A^D. \quad (2.23)$$

A lei de transformação para um espinor contravariante  $\psi^A$  é obtida realizando-se procedimentos similares ao caso covariante.

Ao introduzirmos a “métrica” no espaço de espin, dispomos de um mecanismo que permite relacionar componentes covariantes de espinores com as respectivas contravariantes e vice-versa. Em adição, neste contexto, utilizamos o chamado espinor “métrico”, sob a exigência de que este seja invariante [22] sob a operacionalidade do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . No entanto, apenas os espinores antissimétricos são invariantes sob tais transformações.

Portanto, dispomos de um objeto geométrico  $\epsilon$  antissimétrico e invariante. Daí, o espinor métrico na versão covariante é

$$\begin{aligned}\epsilon'_{AB} &= \epsilon_{AB} \quad (\text{invariante}), \\ \epsilon_{AB} &= -\epsilon_{BA} \quad (\text{antissimétrico}),\end{aligned}\tag{2.24}$$

e ainda levando em conta as mesmas exigências feitas na forma covariante, construímos também a versão contravariante, a saber

$$\begin{aligned}\epsilon'^{AB} &= \epsilon^{AB} \quad (\text{invariante}), \\ \epsilon^{AB} &= -\epsilon^{BA} \quad (\text{antissimétrico}),\end{aligned}\tag{2.25}$$

e as respectivas contribuições linhadas de (2.24) e (2.25).

A invariancia de  $\epsilon_{AB}$  sob  $SL(2, \mathbb{C})$  é vista por

$$\epsilon'_{AB} = S_A^C S_B^D \epsilon_{CD} = \| S_L^M \| \epsilon_{AB} = \epsilon_{AB}.\tag{2.26}$$

Pode ser observado que esta invariancia é devido à unimodularidade  $\| S_L^M \| = +1$  dos elementos de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Isto implica que  $\epsilon_{AB}$  é um símbolo de Levi-civita que, na sua forma canônica, é matricialmente representado por

$$(\epsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon_{A'B'}),\tag{2.27}$$

e, consequentemente, para  $\epsilon^{AB}$  temos

$$(\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon^{A'B'}).\tag{2.28}$$

Utilizando-se as eqs.(2.24) e (2.25), dispomos dos mecanismos necessários para levantamento e abaixamento de índices espinoriais. Sendo assim, dado um objeto pertencente a  $S_2$  ou a seu conjugado  $\overline{S}_2$ , tem-se os seguintes esquemas [22]

$$\epsilon^{AB} \xi_{\dots B \dots} = \xi_{\dots}^{A \dots},\tag{2.29}$$

e

$$\epsilon^{A'B'} \eta_{\dots B' \dots} = \eta_{\dots}^{A' \dots}.\tag{2.30}$$

Em particular, temos

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B, \quad \eta^{A'} = \epsilon^{A'B'} \eta_{B'}.\tag{2.31}$$

Analogamente, para o espinor métrico covariante  $\epsilon_{AB}$ , obtem-se

$$\xi^{\dots A \dots} \epsilon_{AB} = \xi^{\dots B \dots}, \quad (2.32)$$

e ainda

$$\eta^{\dots A' \dots} \epsilon_{A'B'} = \eta^{\dots B' \dots}. \quad (2.33)$$

Particularmente,

$$\xi_B = \xi^A \epsilon_{AB}, \quad \eta_{B'} = \eta^{A'} \epsilon_{A'B'}. \quad (2.34)$$

Em adição, usando a propriedade de antissimetria de  $\epsilon_{AB}$  e  $\epsilon^{AB}$ , bem como aquela de  $\epsilon_{A'B'}$  e  $\epsilon^{A'B'}$ , a saber

$$\epsilon_{A'B'} = -\epsilon_{B'A'}, \quad \epsilon^{A'B'} = -\epsilon^{B'A'}, \quad (2.35)$$

reescrevemos as equações (2.31) e (2.34) do seguinte modo

$$\xi^A = -\xi_B \epsilon^{BA}, \quad \eta^{A'} = -\eta_{B'} \epsilon^{B'A'}, \quad (2.36)$$

e

$$\xi_B = -\epsilon_{BA} \xi^A, \quad \eta_{B'} = -\epsilon_{B'A'} \eta^{A'}. \quad (2.37)$$

As quantidades que permitem a conexão entre tensores mundo e espinores são designadas como objetos conectores de Infeld-van der Waerden [22,23]. Tais objetos conectores são quantidades “mistas” denotadas tipicamente por  $\sigma_{AB'}^a$ . De fato, as correspondências entre tensores mundo e de espin são estabelecidas com base no homomorfismo (2.20). Coletivamente, o objeto  $\sigma_{AB'}^a$  representa quatro matrizes Hermitianas ( $2 \times 2$ ), ou seja, as três matrizes de espin de Pauli e a matriz identidade ( $2 \times 2$ ), juntamente com um fator de normalização  $2^{-\frac{1}{2}}$  (vide Ref.[24])

$$\sigma_{AB'}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{AB'}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\sigma_{AB'}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{AB'}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

O objeto  $\sigma_{AB'}^a$  transforma-se sobre o índice mundo  $a$  como um vetor-mundo e sobre os índices espinoriais  $AB'$  como um espinor ou um tensor de espin [24]. Em adição, a Hermiticidade de  $\sigma_{AB'}^a$  significa que

$$\bar{\sigma}_{AB'}^a \longrightarrow \sigma_{BA'}^a, \quad (2.40)$$

onde, por definição,

$$\bar{\sigma}_{AB'}^a \longrightarrow \sigma_{A'B}^a. \quad (2.41)$$

Esta Hermiticidade também é aplicável às seguintes configurações indiciais:

$$\{\sigma_{AB'}^a, \sigma_{aAB'}, \sigma^{aAB'}, \sigma_a^{AB'}\}. \quad (2.42)$$

Em resumo, a Hermiticidade é garantida quando o par de índices espinoriais linhados e não linhados  $AB'$  ocupam o mesmo “andar”. Ou seja, por exemplo, podemos observar que o objeto conector  $\sigma_{B'}^{aA}$  é não-Hermitiano. Também temos a relação de anticomutação típica entre objetos conectores:

$$\sigma_{aAA'}\sigma_b^{BA'} + \sigma_{bAA'}\sigma_a^{BA'} = \epsilon_A^B \eta_{ab}, \quad (2.43)$$

onde

$$\epsilon_A^B = \delta_A^B = -\epsilon^B_A \implies \epsilon_A^A = -\epsilon^A_A = 2, \quad (2.44)$$

tal que, por exemplo,

$$\sigma_{aAA'}\sigma_b^{AA'} = \eta_{ab} \quad ; \quad \sigma_{aAA'}\sigma_B^{bA'} = 2\epsilon_{AB}. \quad (2.45)$$

Portanto, os objetos  $\sigma'$ s possuem um carácter métrico. De fato,

$$\eta_{ab} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}\sigma_a^{AA'}\sigma_b^{BB'}, \quad (2.46)$$

onde, introduzindo-se as relações,

$$\sigma_a^{AA'}\sigma_{AA'}^b = \delta_a^b \quad ; \quad \sigma_{AA'}^a\sigma_a^{BB'} = \epsilon_A^B\epsilon_{A'}^{B'}, \quad (2.47)$$

nota-se que (2.46) é equivalente à equação

$$\eta_{ab}\sigma_{AA'}^a\sigma_{BB'}^b = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}. \quad (2.48)$$

Podemos observar que de fato as quantidades  $\sigma_{AA'}^a$  e  $\sigma_b^{BB'}$  estabelecem algumas das conexões espin-mundo referidas acima, bem como suas inversas. Portanto, num sistema de coordenadas cartesianas retangulares Minkowskiano, a vetores mundo de componentes  $x_a$  e  $x^a$  correspondem espinores de componentes  $x_{AA'}$  e  $x^{AA'}$ , de acordo com as prescrições elementares

$$x_a = \sigma_a^{AA'}x_{AA'}, \quad (2.49)$$

e

$$x^a = \sigma_{AA'}^a x^{AA'}, \quad (2.50)$$

com as respectivas correspondências inversas

$$x_{AA'} = \sigma_{AA'}^a x_a, \quad (2.51)$$

e

$$x^{AA'} = \sigma_a^{AA'} x^a. \quad (2.52)$$

Então,

$$x^a x_a = x^{AA'} x_{AA'}, \quad (2.53)$$

tal que cada índice mundo corresponde a um par de índices espinoriais, um linhado e outro não-linhado, de modo que a hermiticidade dos objetos conectores garante a preservação do número de componentes independentes de  $x^a$  e de  $x_a$ . A recíproca também é verdadeira: se  $v_a$  e  $v^a$  são as componentes de vetores mundo, teremos que  $v_{AA'}$  e  $v^{AA'}$  são as componentes de um espinor hermitiano. De fato, isto é garantido pelo fato que as matrizes  $\sigma_a$ , de componentes  $\sigma_a^{AA'}$ , são hermitianas, assim como as matrizes  $\sigma^a$  de componentes  $\sigma_{AA'}^a$ , e que cada uma destas possui quatro componentes reais independentes.

Em resumo, os espinores de duas componentes são introduzidos em espaço de Minkowski com base no homomorfismo (2.20). Já na RG, o que ocorre é a existência local de estruturas espinoriais de acordo com os teoremas de Geroch [25,26], e que em espaços-tempo curvos *não* existem homomorfismos alguns, e sim as chamadas estruturas espinoriais de Geroch. Na formulação original dos formalismos  $\gamma\varepsilon$  de Infeld e van der Waerden, já tinha sido assumido a existência destas estruturas em RG, muito antes dos teoremas de Geroch.

## Capítulo 3

# AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Neste Capítulo, faremos uma abordagem sobre as equações de Einstein, as quais são a base para a teoria da relatividade geral (TRG). Deve ser enfatizado que não temos o intuito de fazer uma dedução explícita de todas as passagens matemáticas que leva à dedução de tais equações, mais sim uma análise de como podemos escrevê-las da forma como aparece na expressão (1.5). Caso o leitor tenha o interesse em visualizar esses prodecimentos, vide as Refs.[15,27-32]. A TRG é uma teoria que descreve como a gravidade é gerada a partir da curvatura do espaço-tempo causada pela distribuição da matéria-energia no universo e, inversamente, como a gravidade afeta este conteúdo. É uma generalização para referenciais não-inerciais (ou seja, acelerados) da teoria da relatividade restrita, em conjunção com uma extensão do formalismo Minkowskiano para espaços-tempo curvos onde grupos de transformações de coordenadas, chamados de grupos de mapeamentos da variedade (GMV's), atuam. A TRG nos fornece um conjunto de dez equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem (do tipo hiperbólico), denominadas de equações de campo da gravitação ou equações de Einstein. Estas equações portam um caráter manifestamente covariante sob a atuação de GMV's, e podem ser deduzidas utilizando-se um princípio variacional ou, como é mais comumente conhecido na literatura, a partir de um princípio de mínima ação  $\delta S_T = 0$ , onde  $S_T$  é a denominada ação de Einstein-Hilbert.

De maneira geral, uma ação  $S$  em quatro dimensões espaços-temporais tem a seguinte forma:

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{L}$  representa a densidade Lagrangeana do sistema a qual, presumivelmente, é in-

variante sob a atuação de GMV's. Tem-se que  $\Omega$  que aparece em (3.1) representa um quadrivolume, uma região limitada em  $\mathfrak{M}$ , e  $d^4x$  é um elemento de  $\Omega$  cuja expressão segundo Ref.[27] é dada na seguinte forma

$$d^4x = \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d, \quad (3.2)$$

com o símbolo  $\wedge$  denotando o produto cunha (“wedge product”). No contexto da RG, no vácuo e na ausência de termos cosmológicos [28-32], a ação  $S_T$  que leva às equações de Einstein é definida por:

$$S_T = k \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R. \quad (3.3)$$

O termo  $\sqrt{-g}$  envolve o determinante  $g$  do tensor métrico  $g_{ab}$  de  $\mathfrak{M}$ , tal que  $\sqrt{-g}d^4x$  é um elemento de volume invariante de  $\mathfrak{M}$ . Agora, considerando um universo com, além de curvatura, preenchido por matéria,  $S_T$  torna-se:

$$S_T = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \mathcal{L}_m(g^{ab}, \partial_c g^{ab}) + \frac{c^3}{16\pi G} R \right], \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{L}_m(g^{ab}, \partial_c g^{ab})$  representa a pertinente densidade Lagrangeana da matéria e energia. Ou seja, assim, tem-se informação sobre o conteúdo do universo. A quantidade  $G$  é a constante gravitacional de Newton. Enfatizamos que  $S_T$  ainda pode ser vista como a soma de duas contribuições, uma destas sendo a ação do campo gravitacional representada por  $S_g$  e a outra sendo a ação do campo de matéria  $S_m$ , de acordo com

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_g, \quad (3.5)$$

e

$$S_m = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (3.6)$$

com  $\mathcal{L}_g(g^{ab}, \partial_c g^{ab})$  sendo a densidade Lagrangeana do campo gravitacional. Portanto,

$$S_T = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (3.7)$$

Utilizando-se a definição (1.7) para o escalar Ricci, reescrevemos (3.7) como

$$S_T = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{ab} R_{ab} + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (3.8)$$

Neste estágio, faremos uma pequena perturbação na ação  $S_T$  e analisaremos separadamente o efeito em cada contribuição presente em (3.8). Estamos interessados na resposta da ação  $S_T$  ao se realizar pequenas variações com respeito a métrica  $g_{ab}$ . Com efeito,

$$S_T \longrightarrow S_T + \delta S_T, \quad (3.9)$$



onde a variação da contribuição  $S_g$  é

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left( R_{ab} \sqrt{-g} \delta g^{ab} + g^{ab} R_{ab} \delta \sqrt{-g} + g^{ab} \sqrt{-g} \delta R_{ab} \right). \quad (3.10)$$

Agora, vamos encontrar a contribuição  $\delta \sqrt{-g}$ . Utilizaremos a seguinte análise com base na álgebra de matrizes. Para uma matriz  $A$ , inversível, tem-se a propriedade<sup>(1)</sup>.

$$\ln[\det(A)] = \text{Tr}[\ln(A)], \quad (3.11)$$

tal que aplicando  $\delta$  nesta expressão, obtemos

$$\frac{\delta \det(A)}{\det(A)} = \text{Tr}(A^{-1} \delta A). \quad (3.12)$$

Renomeando  $A$  como  $g_{ab}$  e  $A^{-1}$  como  $g^{ab}$ , tem-se a equação

$$\frac{\delta g}{g} = \text{Tr}(g^{ac} \delta g_{cb}) = g^{ab} \delta g_{ab}, \quad (3.13)$$

de modo que

$$\delta g = g g^{ab} \delta g_{ab}. \quad (3.14)$$

Portanto, para  $\sqrt{-g}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(-g) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g) g^{ab} \delta g_{ab}, \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde, em vista da propriedade  $g^{ab} \delta g_{ab} = -g_{ab} \delta g^{ab}$ , obtem-se

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (3.16)$$

Daí, reescrevemos (3.10) como segue

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} + \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \delta R_{ab} g^{ab}. \quad (3.17)$$

É necessário que encontremos a variação  $\delta R_{ab}$  presente na expressão (3.17). Para isto, utilizamos a definição do tensor de Riemann covariante  $R_{abcd}$ , um tensor de quatro índices descrito em termos dos símbolos de Christoffel<sup>(2)</sup> como:

$$R_{abcd} = \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ec}^d \Gamma_{ab}^e - \Gamma_{eb}^d \Gamma_{ac}^e, \quad (3.18)$$

<sup>1</sup>A propriedade (3.11) é originada da identidade  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ .

<sup>2</sup>A quantidade  $\Gamma_{ab}^c$  constitui uma típica conexão afim mundo associada a  $\nabla_a$ , e é comumente designada como símbolo de Christoffel [27].

com os símbolos de Christoffel sendo definidos pela seguinte relação:

$$\Gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_b g_{da} + \partial_a g_{db} - \partial_d g_{ab}). \quad (3.19)$$

Partindo da eq.(3.18) juntamente com (1.8), obtemos

$$\delta R_{ab} = \frac{\partial \delta \Gamma_{ac}{}^c}{\partial x^b} - \frac{\partial \delta \Gamma_{ab}{}^c}{\partial x^c} + \delta \Gamma_{ac}{}^d \Gamma_{bd}{}^c + \delta \Gamma_{bc}{}^d \Gamma_{ad}{}^c - \delta \Gamma_{ab}{}^d \Gamma_{cd}{}^c - \delta \Gamma_{cd}{}^c \Gamma_{ab}{}^d. \quad (3.20)$$

Segundo a Ref.[15], pode ser mostrado que uma típica conexão afim  $\Gamma_{ab}{}^c$  não se transforma homogeneamente quando muda-se sistemas de coordenadas em  $\mathfrak{M}$ , ou seja,  $\Gamma_{ab}{}^c$  não é um tensor. Entretanto, sua diferencial  $\delta \Gamma_{ab}{}^c$  é um tensor. Assim sendo, definimos a derivada covariante da quantidade  $\delta \Gamma_{ab}{}^c$  da seguinte forma

$$\nabla_d(\delta \Gamma_{ab}{}^c) = \frac{\partial \delta \Gamma_{ab}{}^c}{\partial x^d} + \Gamma_{de}{}^c \delta \Gamma_{ab}{}^e - \Gamma_{ad}{}^e \delta \Gamma_{eb}{}^c - \Gamma_{bd}{}^e \delta \Gamma_{ae}{}^c, \quad (3.21)$$

onde, fazendo a substituição de (3.21) em (3.20), encontramos

$$\delta R_{ab} = \nabla_b(\delta \Gamma_{ac}{}^c) - \nabla_c(\delta \Gamma_{ab}{}^c). \quad (3.22)$$

Portanto, substituindo este resultado no segundo termo em (3.17), vem

$$\int d^4x \sqrt{-g} \delta R_{ab} g^{ab} = \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_b(\delta \Gamma_{ac}{}^c) - \nabla_c(\delta \Gamma_{ab}{}^c)] g^{ab}. \quad (3.23)$$

De acordo com a condição de compatibilidade métrica [15,27], tem-se que  $\nabla_c g^{ab} = 0$ . Deste modo, podemos mover índices mundo de quantidades sujeitas à derivadas covariantes facilmente sem a necessidade de quaisquer compensadores diferenciais. Agora, realizamos uma substituição indicial ( $b \longleftrightarrow c$ ) apenas no primeiro termo no lado direito da igualdade

$$\int d^4x \sqrt{-g} \delta R_{ab} g^{ab} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_c (g^{ac} \delta \Gamma_{ab}{}^b - g^{ab} \delta \Gamma_{ab}{}^c), \quad (3.24)$$

tal que podemos utilizar o teorema de Gauss, e transformar a integral de volume em uma integral de superfície, isto é,

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_c (g^{ac} \delta \Gamma_{ab}{}^b - g^{ab} \delta \Gamma_{ab}{}^c) = \oint_{\partial\Omega} d\Omega_a \sqrt{-g} (g^{ac} \delta \Gamma_{ab}{}^b - g^{ab} \delta \Gamma_{ab}{}^c), \quad (3.25)$$

onde  $\partial\Omega$  representa a fronteira de  $\Omega$ , região no qual a integral será feita. Em princípio, a prescrição variacional da teoria em pauta realça a condição de que a variação da métrica

$\delta g_{ab}$  é tomada como uma quantidade arbitrária [27] em  $\Omega$  e por hipótese  $\delta g_{ab} \equiv 0$  sobre a fronteira  $\partial\Omega$ . Deste modo, o lado direito da igualdade acima é nula em  $\partial\Omega$ . Portanto,

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_c (g^{ac} \delta \Gamma_{ab}^b - g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c) = \oint_{\partial\Omega} d\Omega_a \sqrt{-g} (g^{ac} \delta \Gamma_{ab}^b - g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c) = 0, \quad (3.26)$$

e, conseqüentemente, o segundo termo de (3.17) é nulo enquanto que a variação do campo gravitacional  $\delta S_g$  resulta ser apenas

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab}. \quad (3.27)$$

No que segue, analisaremos a variação da ação do campo de matéria  $S_m$  dada em (3.6). Como já foi posto, estamos variando com respeito a  $g_{ab}$ . Com efeito,

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{ab} \delta g^{ab} = 0, \quad (3.28)$$

com  $T_{ab}$  escrito da seguinte forma

$$T_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}}. \quad (3.29)$$

A obtenção explícita de  $\delta \mathcal{L}_m$  em (3.29) depende da forma específica da densidade Lagrangeana que se está utilizando. Portanto, deixemos  $\delta \mathcal{L}_m$  da forma que está, representando a variação de uma densidade Lagrangeana geral. Substituindo os resultados (3.27) e (3.28) em (3.8), a variação  $\delta S_T$  fica posta da seguinte maneira:

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \right) \delta g^{ab} = 0, \quad (3.30)$$

visto que a variação da métrica  $\delta g_{ab}$  é tomada como uma quantidade arbitrária em  $\Omega$ , com base no princípio de mínima ação da RG. Assim, para que a expressão acima seja satisfeita, é necessário que tenhamos

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} = 0, \quad (3.31)$$

ou ainda,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -k T_{ab}, \quad (3.32)$$

onde  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$  é a constante gravitacional de Einstein que aparece na introdução deste trabalho. As equações (3.32) são as equações de Einstein, ou as equações de campo da gravitação mencionadas na introdução deste Capítulo. O lado esquerdo destas equações está associado com a geometria de  $\mathfrak{M}$ , e o lado direito com o conteúdo de matéria-energia.

Ainda mais, ambos os lados se relacionam mutualmente, como propõe a TRG. Em outras palavras, a TRG descreve o campo gravitacional em termos da curvatura espaço-temporal e de uma distribuição física de matéria-energia representada por  $T_{ab}$ , tal como expresso em (3.32).

Deve-se ser mencionado que ainda podemos reescrever as eqs.(3.32) da seguinte forma:

$$G_{ab} = -kT_{ab}, \quad (3.33)$$

onde  $G_{ab}$  é o chamado tensor de Einstein. Podemos obter  $G_{ab}$  a partir de  $R_{ab}$  utilizando o operador [11] de reversão de traço  $\hat{\tau}$ , a saber<sup>(3)</sup>

$$G_{ab} = \hat{\tau}R_{ab} \doteq R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}. \quad (3.34)$$

Com efeito

$$g^{ab}G_{ab} = g^{ab} \left( R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \right) = R - \frac{1}{2}R = -R, \quad (3.35)$$

tal que podemos observar que  $\hat{\tau}$  reverte o sinal do traço, em particular,

$$G = -R. \quad (3.36)$$

Um importante resultado que ainda pode ser obtido das equações de Einstein é a lei de conservação da energia-momento [15] representada pela equação

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (3.37)$$

Esta lei de conservação pode ser verificada realizando-se o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} \nabla^a \left( R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \right) &= \nabla^a R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^a R, \\ &= g^{ac}\nabla_c R_{ab} - \frac{1}{2}\partial_b R, \\ &= g^{ac}\nabla_c (g^{de}R_{daeb}) - \frac{1}{2}\partial_b R, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde, das propriedades de simetrias de  $R_{abcd}$ ,

$$R_{abcd} = R_{cdab} ; R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}, \quad (3.39)$$

e da identidade de Bianchi gravitacional

$$\nabla_{[a}R_{bc]dh} = 0 \Rightarrow \nabla_a R_{bcdh} + \nabla_b R_{cadh} + \nabla_c R_{abd h} = 0, \quad (3.40)$$

---

<sup>3</sup>O operador  $\hat{\tau}$  é linear e satisfaz a propriedade  $\hat{\tau}^2 = \text{identidade}$ .

conclui-se que

$$\begin{aligned}\nabla^a \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) &= \frac{1}{2} \partial_b R - \nabla^d R_{db}, \\ &= -\nabla^a \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right).\end{aligned}\quad (3.41)$$

Logo

$$\nabla^a \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) = 0 = \nabla^a G_{ab} \Rightarrow \nabla^a T_{ab} = 0. \quad (3.42)$$

No vácuo,  $T_{ab} \equiv 0$ , as equações de Einstein reduzem-se à:

$$R_{ab} = 0. \quad (3.43)$$

Visto que  $g_{ab}$  possui derivada covariante nula [15], podemos introduzir um termo cosmológico  $\lambda$  em (3.32), de acordo com

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \lambda g_{ab} = -k T_{ab}, \quad (3.44)$$

tal que contraindo (3.44) com  $g^{ab}$  obtém-se a relação de traço estendida mencionada anteriormente como (1.6), a saber,

$$R = 4\lambda + kT. \quad (3.45)$$

É de considerável interesse definir a relação

$$(-2)\Xi_{ab} \doteq \hat{s}R_{ab}. \quad (3.46)$$

onde  $\hat{s}$  é o operador de partes livres de traços [11], definido por

$$\hat{s}R_{ab} \doteq R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab}. \quad (3.47)$$

Portanto, da equação (3.44), escrevemos

$$\begin{aligned}R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} + \lambda g_{ab} &= -k T_{ab}, \\ (-2)\Xi_{ab} + \left( \lambda - \frac{1}{4} R \right) g_{ab} &= -k T_{ab}, \\ (-2)\Xi_{ab} &= \frac{k}{4} T g_{ab} - k T_{ab} = -k \hat{s} T_{ab}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Logo, obtemos as equações de campo

$$\Xi_{ab} = \frac{k}{2} \hat{s} T_{ab}. \quad (3.49)$$

Deve ser notado que a eq.(3.49) é a mesma definida em (1.5). A principal motivação que nos levou a reescrever as equações de Einstein em termos do tensor  $\Xi_{ab}$ , é que este tensor carrega toda a informação de qualquer contexto físico relacionado com a presença ou ausência do termo cosmológico, e com a presença ou ausência de fontes (vide Refs.[11,27]). Será visto nos próximos Capítulos que  $\Xi_{ab}$  constitui a versão espinorial em ambos os formalismos de um dos espinores gravitacionais de Witten [6], tal que a versão espinorial de (1.5) permitirá reescrevermos com mais naturalidade o lado direito das equações de Einstein e também as equações de onda para grávitons na presença de fontes fisicamente arbitrárias.

## Capítulo 4

# FUNÇÕES DE ONDA E EQUAÇÕES DE CAMPO PARA GRÁVITONS

No presente Capítulo, apresentaremos a versão espinorial da teoria do campo gravitacional tal como ocorrente nos formalismos  $\gamma\varepsilon$ , a qual exhibe a teoria de grávitons de nosso imediato interesse aqui. Inicialmente, introduziremos as funções de onda para grávitons em  $\mathfrak{M}$ , em ambos os formalismos. Um dos procedimentos usuais para obtermos as estruturas de curvatura de espin de  $\mathfrak{M}$ , em ambos os contextos espinoriais [3], consiste em permitir a ação do comutador de derivadas covariantes sobre um objeto conector Hermitiano, a saber,

$$[\nabla_a, \nabla_b] S^{cAA'} = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) S^{cAA'} = 2\nabla_{[a} \nabla_{b]} S^{cAA'} = 2\nabla_{[a} \left( \nabla_{b]} S^{cAA'} \right), \quad (4.1)$$

onde  $S^{cAA'}$  uns dos típicos objetos conectores<sup>(1)</sup> de Infeld e van der Waerden Hermitianos para os formalismos (vide Ref.[3]), sendo os responsáveis pela correspondência entre mundo e espin. Levando em conta o fato de que os  $S'$ s são covariantemente constantes em ambos os formalismos<sup>(2)</sup>, ou seja,  $\nabla_a S^{cAA'} = 0$ , tem-se

$$[\nabla_a, \nabla_b] S^{cAA'} = 0, \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>A letra núcleo S tem sido usada aqui para denotar os objetos conectores de cada um dos formalismos.

<sup>2</sup>No formalismo  $\varepsilon$  todos os objetos conectores são covariantemente constantes, enquanto no formalismo  $\gamma$ , a priori, apenas os Hermitianos são [23].

tal que expandindo o lado esquerdo de (4.2), obtemos a seguinte contribuição,

$$[\nabla_a, \nabla_b] S^{cAA'} = R_{ab}{}^c S^{dAA'} + W_{abB}{}^A S^{cBA'} + W_{abB'}{}^{A'} S^{cAB'} = 0, \quad (4.3)$$

sendo  $W_{abB}{}^A$  um objeto de curvatura misto de Infeld e van der Waerden [3,12], cuja definição<sup>(3)</sup> é dada como

$$W_{abB}{}^A = W_{[ab]B}{}^A = 2\partial_{[a}\vartheta_{b]B}{}^A - (\vartheta_{aB}{}^C \vartheta_{bC}{}^A - \vartheta_{bB}{}^C \vartheta_{aC}{}^A). \quad (4.4)$$

Utilizando-se a expressão (4.2), deduziremos agora a equação (4.4). Inicialmente, o procedimento a ser realizado consiste em tomar o operador derivada covariante sobre um objeto conector Hermitiano, tem-se

$$\nabla_b S^{cAA'} = \partial_b S^{cAA'} + \Gamma_{bd}{}^c S^{dAA'} + \vartheta_{bB}{}^A S^{cBA'} + \vartheta_{bB'}{}^{A'} S^{cAB'}, \quad (4.5)$$

onde, aqui neste estágio, usa-se particularmente as prescrições para diferenciais covariantes em  $\mathfrak{M}$  de vetores arbitrários mundo  $\zeta^a$  e  $\eta_b$  (vide Ref.[27]),

$$D\zeta^a \doteq d\zeta^a + \Gamma_{bc}{}^a \zeta^c dx^b \Rightarrow \nabla_a \zeta^b = \partial_a \zeta^b + \Gamma_{ac}{}^b \zeta^c, \quad (4.6)$$

e

$$D\eta_a \doteq d\eta_a - \Gamma_{ba}{}^c \eta_c dx^b \Rightarrow \nabla_a \eta_b = \partial_a \eta_b - \Gamma_{ab}{}^c \eta_c. \quad (4.7)$$

Agora, aplicamos novamente o operador  $\nabla_a$  em cada termo presente no lado direito da contribuição (4.5) de acordo com a relação  $\nabla_{[a} (\nabla_{b]} S^{cAA'})$  e, em adição, levando em conta a operação de antissimetrização presente nos índices  $a$  e  $b$ , obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \nabla_{[a} (\partial_{b]} S^{cAA'}) &= \partial_{[a} \partial_{b]} S^{cAA'} - \Gamma_{[ab]}{}^d \partial_d S^{cAA'} + \Gamma_{[a|d]}{}^c \partial_{b]} S^{dAA'} + \\ &\quad \vartheta_{[aB}{}^A \partial_{b]} S^{cBA'} + \vartheta_{[aB'}{}^{A'} \partial_{b]} S^{cAB'}, \\ &= \Gamma_{[a|d]}{}^c \partial_{b]} S^{dAA'} + \vartheta_{[aB}{}^A \partial_{b]} S^{cBA'} + \vartheta_{[aB'}{}^{A'} \partial_{b]} S^{cAB'}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{[a} (\Gamma_{b]d}{}^c S^{dAA'}) &= \partial_{[a} (\Gamma_{b]d}{}^c S^{dAA'}) - \Gamma_{[ab]}{}^e \Gamma_{ed}{}^c S^{dAA'} + \Gamma_{[a|e]}{}^c \Gamma_{b]d}{}^e S^{dAA'} + \\ &\quad \vartheta_{[aB}{}^A \Gamma_{b]d}{}^c S^{dBA'} + \vartheta_{[aB'}{}^{A'} \Gamma_{b]d}{}^c S^{dAB'}, \\ &= \partial_{[a} (\Gamma_{b]d}{}^c S^{dAA'}) + \Gamma_{[a|e]}{}^c \Gamma_{b]d}{}^e S^{dAA'} + \vartheta_{[aB}{}^A \Gamma_{b]d}{}^c S^{dBA'} + \\ &\quad \vartheta_{[aB'}{}^{A'} \Gamma_{b]d}{}^c S^{dAB'}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

---

<sup>3</sup>A quantidade  $\vartheta_{aB}{}^A$  representa a conexão afim de spin em ambos os formalismos [3,13].



$$\begin{aligned}
\nabla_{[a} \left( \vartheta_{b]B}^A S^{cBA'} \right) &= \partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B}^A S^{cBA'} \right) - \Gamma_{[ab]}^d \vartheta_{dB}^A S^{cBA'} + \Gamma_{[a|d]}^c \vartheta_{b]B}^A S^{dBA'} + \\
&\quad \vartheta_{[aD}^A \vartheta_{b]B}^D S^{cBA'} + \vartheta_{[aB'}^{A'} \vartheta_{b]B}^A S^{cBB'}, \\
&= \partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B}^A S^{cBA'} \right) + \Gamma_{[a|d]}^c \vartheta_{b]B}^A S^{dBA'} + \vartheta_{[aD}^A \vartheta_{b]B}^D S^{cBA'} + \\
&\quad \vartheta_{[aB'}^{A'} \vartheta_{b]B}^A S^{cBB'}, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_{[a} \left( \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cAB'} \right) &= \partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cAB'} \right) - \Gamma_{[ab]}^d \vartheta_{dB'}^{A'} S^{cAB'} + \Gamma_{[a|d]}^c \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{dAB'} + \\
&\quad \vartheta_{[aD'}^{A'} \vartheta_{b]B'}^{D'} S^{cAB'} + \vartheta_{[aB}^A \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cBB'}, \\
&= \partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cAB'} \right) + \Gamma_{[a|d]}^c \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{dAB'} + \vartheta_{[aD'}^{A'} \vartheta_{b]B'}^{D'} S^{cAB'} + \\
&\quad \vartheta_{[aB}^A \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cBB'}, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

onde, os termos que se anula nos resultados acima vem do fato de que uma típica conexão afim mundo é simétrica nos dois primeiros índices, a saber  $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{(ab)}^c$ , e em adição, os  $\partial'$ s comutam no mesmo sistema de coordenadas, ou seja,  $\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a$ . Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{[a} \nabla_{b]} S^{cAA'} &= \Gamma_{[a|d]}^c \partial_{b]} S^{dAA'} + \vartheta_{[aB}^A \partial_{b]} S^{cBA'} + \vartheta_{[aB'}^{A'} \partial_{b]} S^{cAB'} + \\
&\quad \partial_{[a} \left( \Gamma_{b]d}^c S^{dAA'} \right) + \Gamma_{[a|e]}^c \Gamma_{b]d}^e S^{dAA'} + \partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B}^A S^{cBA'} \right) + \\
&\quad \vartheta_{[aD}^A \vartheta_{b]B}^D S^{cBA'} + \partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cAB'} \right) + \vartheta_{[aD'}^{A'} \vartheta_{b]B'}^{D'} S^{cAB'}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Agora, reescrevendo alguns termos presentes em (4.12), vejamos

$$\partial_{[a} \left( \Gamma_{b]d}^c S^{dAA'} \right) = (\partial_{[a} \Gamma_{b]d}^c) S^{dAA'} - \Gamma_{[a|d]}^c \partial_{b]} S^{dAA'}, \tag{4.13}$$

$$\partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B}^A S^{cBA'} \right) = (\partial_{[a} \vartheta_{b]B}^A) S^{cBA'} - \vartheta_{[aB}^A \partial_{b]} S^{cBA'}, \tag{4.14}$$

e

$$\partial_{[a} \left( \vartheta_{b]B'}^{A'} S^{cAB'} \right) = \left( \partial_{[a} \vartheta_{b]B'}^{A'} \right) S^{cAB'} - \vartheta_{[aB'}^{A'} \partial_{b]} S^{cAB'}, \tag{4.15}$$

tal que, em uso destes termos os quais foram reescritos, substituindo-os em (4.12), encontramos

$$\begin{aligned}
\nabla_{[a} \nabla_{b]} S^{cAA'} &= (\partial_{[a} \Gamma_{b]d}^c + \Gamma_{[a|e]}^c \Gamma_{b]d}^e) S^{dAA'} + (\partial_{[a} \vartheta_{b]B}^A + \vartheta_{[aD}^A \vartheta_{b]B}^D) S^{cBA'} + \\
&\quad \left( \partial_{[a} \vartheta_{b]B'}^{A'} + \vartheta_{[aD'}^{A'} \vartheta_{b]B'}^{D'} \right) S^{cAB'}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Assim, comparando as equações (4.16) e (4.3), concluimos que [13]

$$W_{abB}{}^A = 2\partial_{[a}\partial_{b]B}{}^A + \vartheta_{aC}{}^A\vartheta_{bB}{}^C - \vartheta_{bC}{}^A\vartheta_{aB}{}^C, \quad (4.17)$$

juntamente com a conhecida expressão mundo do tensor [15] de Riemann  $R_{abc}{}^d$ ,

$$R_{abc}{}^d = \partial_a\Gamma_{bc}{}^d - \partial_b\Gamma_{ac}{}^d + \Gamma_{ae}{}^d\Gamma_{bc}{}^e - \Gamma_{be}{}^d\Gamma_{ac}{}^e. \quad (4.18)$$

Deve ser enfatizado que os objectos  $W$  podem ser obtidos alternativamente a partir de (vide Refs.[3,13]):

$$S_{AA'}^a S_{BB'}^b [\nabla_a, \nabla_b] \xi^C = [\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] \xi^C = W_{AA'BB'M}{}^C \xi^M. \quad (4.19)$$

onde  $\xi^C$  é um vector de espin arbitrário contravariante.

O desdobramento de  $W_{abAB}$  em suas partes simétrica e antissimétrica em seus índices espinoriais, isto é<sup>(4)</sup>

$$W_{abAB} = W_{abA}{}^C M_{CB} = W_{ab(AB)} + W_{ab[AB]}, \quad (4.20)$$

é tal que a parte simétrica  $W_{ab(AB)}$  nos dá a contribuição gravitacional para a estrutura de curvatura de  $\mathfrak{M}$  em ambos os formalismos, estando esta relacionada com  $R_{abcd}$  de acordo com

$$W_{ab(AB)} = \frac{1}{2} S_{AB'}^c S_B^{dB'} R_{abcd}, \quad (4.21)$$

e a parte antissimétrica  $W_{ab[AB]}$  está relacionada com um tensor de Maxwell geométrico  $F_{ab}$  de  $\mathfrak{M}$ , como detalhadamente discute a Ref.[3], e esta nos dá a contribuição eletromagnética para a estrutura de curvatura de  $\mathfrak{M}$ . Ou seja, quando se “espinorializa” a RG, surge tanto uma contribuição gravitacional quanto uma eletromagnética dentro de curvaturas espaço-temporais. De modo que esses resultados não são vistos quando apenas se estuda a formulação mundo tradicional. Devo reforçar que o intuito aqui deste trabalho é fazer uma abordagem estritamente gravitacional. Entretanto, vale a pena enfatizar-se alguns resultados que não são comumente vistos na literatura. Dentre estes, estão as funções de onda para grávitons, como já foi mencionado. Falaremos mais a respeito desta contribuição eletromagnética ao longo dos procedimentos.

No intuito de expor uma maior clareza ao leitor dos desenvolvimentos calculacionais, deduziremos agora a relação (4.21). Partindo da equação (4.3), tem-se

$$R_{abd}{}^c S^{dAA'} + W_{abB}{}^A S^{cBA'} + W_{abB'}{}^{A'} S^{cAB'} = 0, \quad (4.22)$$

---

<sup>4</sup>Daqui em diante, a letra núcleo  $M$  denotará  $\gamma$  ou  $\varepsilon$ .

tal que acoplando (4.22) com  $S_{dDA'}$ , isto é,

$$S_{cDA'} \left( R_{abd}{}^c S^{dAA'} + W_{abB}{}^A S^{cBA'} + W_{abB'}{}^{A'} S^{cAB'} \right) = 0, \quad (4.23)$$

obtem-se

$$S_{cDA'} S^{dAA'} R_{abd}{}^c + 2\delta_D{}^B W_{abB}{}^A + \delta_D{}^A \delta_{A'}{}^{B'} W_{abB'}{}^{A'} = 0, \quad (4.24)$$

ou ainda

$$S_{cDA'} S^{dAA'} R_{abd}{}^c + 2W_{abD}{}^A + \delta_D{}^A W_{abA'}{}^{A'} = 0. \quad (4.25)$$

Em adição, fazendo

$$\left( S_{cDA'} S^{dAA'} R_{abdc} + 2W_{abD}{}^A + \delta_D{}^A W_{abA'}{}^{A'} \right) M_{AB} = 0, \quad (4.26)$$

obtemos

$$W_{abDB} = \frac{1}{2} \left( S_{cDA'} S_B^{dA'} R_{abdc} + W_{abA'}{}^{A'} M_{DB} \right), \quad (4.27)$$

a qual, devido à algumas propriedades de simetria dos objetos conectores (vide Ref.[3]), a saber

$$S_{B'}{}^A S_B^{d]B'} = S_{B'}^{[c} S_{B)}^{d]B'}, \quad (4.28)$$

é identificada com a parte simétrica  $W_{ab(AB)}$  que, portanto, é relacionada com o tensor de Riemann  $R_{abcd}$ .

A parte antissimétrica  $W_{ab[AB]}$  pode ser trabalhada com mais detalhes a partir da equação (4.4). Contraíndo os índices  $A$  e  $B$  em (4.4), obtemos o desenvolvimento

$$\begin{aligned} W_{abA}{}^A &= W_{[ab]A}{}^A = 2\partial_{[a}\vartheta_{b]A}{}^A - (\vartheta_{aA}{}^C \vartheta_{bC}{}^A - \vartheta_{bA}{}^C \vartheta_{aC}{}^A), \\ &= 2\partial_{[a}\vartheta_{b]A}{}^A = (-4i)\partial_{[a}\Phi_{b]}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

posto que  $\vartheta_{[aA}{}^C \vartheta_{b]C}{}^A \equiv 0$ , e  $\Phi_b$  sendo um potencial afim<sup>(5)</sup> que é identificado no contexto de ambos os formalismos com um potencial eletromagnético geométrico, o qual está relacionado com o tensor  $F_{ab}$  de  $\mathfrak{M}$ , mencionado anteriormente, por

$$F_{ab} \doteq 2\partial_{[a}\Phi_{b]}. \quad (4.30)$$

Daí, em ambos os formalismos, obtemos a expressão para o objeto de curvatura contraído

$$W_{abA}{}^A = (-2i)F_{ab}, \quad (4.31)$$

---

<sup>5</sup>Para maiores detalhes sobre a estrutura afim dos formalismos, vide Ref.[3].

tal que, utilizando a relação (4.31) escrevemos  $W_{ab[AB]}$  da seguinte forma

$$W_{ab[AB]} = \frac{1}{2} W_{abC}{}^C M_{AB} = (-i) F_{ab} M_{AB}, \quad (4.32)$$

e, portanto, a eq.(4.20) pode ser reescrita como

$$W_{abAB} = \frac{1}{2} S_{AB'}^C S_B^{dB'} R_{abcd} + (-i) F_{ab} M_{AB}. \quad (4.33)$$

Deste modo, fica posto que um objeto de curvatura misto de Infeld e van der Waerden  $W_{abAB}$  envolve em sua expressão o tensor de Riemann de  $\mathfrak{M}$  e também um tensor de Maxwell geométrico. Assim sendo, em ambos os formalismos,  $W_{abAB}$  pode ser identificado como um objeto de curvatura misto.

Os espinores de curvatura de  $\mathfrak{M}$  surgem, em cada formalismo, a partir da seguinte expansão de bivetor<sup>(6)</sup>:

$$W_{AA'BB'CD} = S_{AA'}^a S_{BB'}^b W_{abCD} = M_{A'B'} \omega_{ABCD} + M_{AB} \omega_{A'B'CD}, \quad (4.34)$$

onde  $\omega_{ABCD}$  e  $\omega_{A'B'CD}$  são os acima referidos espinores de curvatura, os quais são explicitamente definidos por

$$\omega_{ABCD} = \omega_{(AB)CD} \doteq \frac{1}{2} S_{AA'}^a S_B^{bA'} W_{abCD}, \quad (4.35)$$

e

$$\omega_{A'B'CD} = \omega_{(A'B')CD} \doteq \frac{1}{2} S_{AA'}^a S_B^{bA'} W_{abCD}. \quad (4.36)$$

A estrutura de curvatura gravitacional de  $\mathfrak{M}$  pode ser completamente descrita pelo par de objetos espinoriais

$$G = (\omega_{AB(CD)}, \omega_{A'B'(CD)}). \quad (4.37)$$

Em cada formalismo, os elementos do respectivo par entram na correspondente decomposição espinorial irredutível de Witten [6] para  $R_{abcd}$ , de acordo com a expansão Hermiana

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'} M_{C'D'} \omega_{AB(CD)} + M_{AB} M_{C'D'} \omega_{A'B'(CD)}) + c.c., \quad (4.38)$$

a qual, implementando-se a seguinte definição dos espinores gravitacionais

$$X_{ABCD} = \omega_{AB(CD)} ; \Xi_{A'B'CD} = \omega_{A'B'(CD)}, \quad (4.39)$$

---

<sup>6</sup>Um bivetor é um tensor de segunda ordem totalmente antissimétrico [22]. Como exemplo temos o tensor de Maxwell  $F_{ab}$ .

pode ser convenientemente reescrita como

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD} + M_{AB}M_{C'D'}\Xi_{A'B'CD}) + c.c.. \quad (4.40)$$

Tem-se que enfatizar aqui que, devido às simetrias de  $R_{abcd}$ , pode-se afirmar que  $\Xi_{A'B'CD}$  porta Hermiticidade e, ainda mais, constitui em ambos os formalismos a versão espinorial do tensor mundo  $\Xi_{ab}$  que ocorre em (1.5). Em adição, devido à simetria

$$R_{abcd} = R_{cdab}, \quad (4.41)$$

e à propriedade

$${}^*R_{abc}{}^b = 0, \quad (4.42)$$

com  ${}^*R_{abc}{}^d$  sendo [11] o primeiro dual à esquerda de  $R_{abc}{}^d$ , o espinor  $X_{ABCD}$  possui as seguintes propriedades adicionais:

$$X_{ABCD} = X_{CDAB} \Rightarrow X_{ABC}{}^A = X_{A[BC]}{}^A, \quad Im X_{AB}{}^{AB} = 0, \quad (4.43)$$

e, portanto, em cada formalismo, também tem-se

$$X_{(ABCD)} = X_{A(BCD)} = X_{(ABC)D}, \quad X_{A[BC]}{}^A = \chi M_{BC} \Rightarrow \chi = \frac{1}{2}X_{AB}{}^{AB}. \quad (4.44)$$

Consequentemente, pode-se dizer [6] que  $X_{ABCD}$  possui onze componentes reais independentes enquanto que  $\Xi_{A'B'CD}$  possui nove, sendo que o número de componentes independentes de  $R_{abcd}$  é inteiramente restituído em ambos os formalismos a partir do respectivo par tal como definido pela eq.(4.37).

Conforme observado originalmente por Penrose [7], uma típica função de onda para grávitons em  $\mathfrak{M}$  constitui, em cada formalismo, a parte totalmente simétrica do respectivo espinor  $X_{ABCD}$ . Isto é claramente exibido pela expansão de Penrose [11]

$$X_{ABCD} = X_{(ABCD)} - 2\Lambda M_{A(C}M_{D)B}, \quad (4.45)$$

a qual emerge a partir da utilização do seguinte mecanismo de redução [12]

$$\begin{aligned} X_{ABCD} = X_{(ABCD)} - \frac{1}{4}(M_{AB}X^M{}_{(MCD)} + M_{AC}X^M{}_{(MBD)} + M_{AD}X^M{}_{(MBC)}) \\ - \frac{1}{3}(M_{BC}X^M{}_{A(MD)} + M_{BD}X^M{}_{A(MC)}) - \frac{1}{2}M_{CD}X_{AB}{}^M{}_M, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde, com efeito, tem-se as relações<sup>(7)</sup>

$$R = 8\chi = 24\Lambda, \quad (4.47)$$

juntamente com a definição

$$\Psi_{ABCD} \doteq X_{(ABCD)}. \quad (4.48)$$

Em ambos os formalismos, o objeto  $\Psi_{ABCD}$  é frequentemente designado como um dos espinores de Weyl de  $\mathfrak{M}$  e, juntamente com seu complexo conjugado  $\Psi_{A'B'C'D'}$ , entra na expressão espinorial para o tensor de Weyl  $C_{abcd}$  de  $\mathfrak{M}$  de acordo com a expansão [7,11]

$$S_{AA'}^a S_{BB'}^b S_{CC'}^c S_{DD'}^d C_{abcd} = M_{A'B'} M_{C'D'} \Psi_{ABCD} + c.c.. \quad (4.49)$$

Assim, em ambos os formalismos,  $\Psi_{ABCD}$  possui cinco componentes complexas independentes e, deste modo, recupera as dez componentes reais independentes tradicionalmente postas por  $g_{ab}$ . Em adição, tal objeto é fisicamente interpretado como uma função de onda a qual possui massa de repouso nula, sendo também eletricamente neutra e portando spin  $\pm 2$ . Deve ser enfatizado que os graus de liberdades ondulatorios tradicionais são reformulados aqui em termos de estados de helicidades de grávitons. Estados de helicidades são claramente postos na literatura com base num teorema da teoria quântica de campos chamado de teorema de Streater-Wightman [21], e tais estados são vistos explicitamente quando se estuda teoria de representação em espaço-tempo plano.

---

<sup>7</sup>A quantidade  $\Lambda$  é sempre igual à  $\frac{R}{24}$ , e é proporcional à constante cosmológica  $\lambda$  somente no caso onde  $T = 0$ , de acordo com a relação de traço estendida mencionada no Capítulo 1.

## 4.1 EQUAÇÕES DE CAMPO PARA GRÁVITONS

Apresentaremos agora as equações de campo para grávitons em ambos os formalismos, na presença de fontes fisicamente arbitrárias, tal como desenvolvidas na Ref.[14]. De fato, tais equações são constituídas pela versão espinorial da identidade de Bianchi gravitacional a qual, no contexto mundo [11,15], é usualmente escrita como

$$\nabla_{[a}R_{bc]dh} = 0 \Leftrightarrow \nabla^{a*}R_{abcd} = 0, \quad (4.50)$$

onde  $*R_{abcd}$  está envolvido na eq.(4.42), e é definido como

$$*R_{abcd} = \frac{1}{2}e_{ab}{}^{pq}R_{pqcd} \quad (4.51)$$

e cuja expressão espinorial é posta como [6,11]

$$*R_{AA'BB'CC'DD'} = [(-i)(M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD} + M_{CD}M_{A'B'}\Xi_{ABC'D'})] + c.c.. \quad (4.52)$$

Tem-se, com efeito, a expressão

$$(-i)[\nabla^{AA'}(M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD}) + \nabla^{AA'}(M_{CD}M_{A'B'}\Xi_{ABC'D'})] + c.c. = 0, \quad (4.53)$$

a qual, tendo em vista as contribuições conjugadas complexas

$$M^{C'D'}\nabla^{AA'*}R_{AA'BB'CC'DD'} = 0, \quad M^{CD}\nabla^{AA'*}R_{AA'BB'CC'DD'} = 0, \quad (4.54)$$

nos leva à

$$M^{C'D'}\nabla^{AA'}(M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD}) = M^{C'D'}\nabla^{AA'}(M_{AB}M_{C'D'}\Xi_{A'B'CD}), \quad (4.55)$$

a qual, por sua vez e juntamente com sua complexa conjugada, constitui a versão espinorial de (4.50).

### 4.1.1 Equações de Campo no Formalismo $\gamma$

Levaremos agora a cabo os procedimentos para deduzir as equações de campo no formalismo  $\gamma$ . Inicialmente, deve-se levar em conta que os espinores métricos no formalismo  $\gamma$  não são geralmente covariantemente constantes [3,23]. Devido a esta característica geométrica, estes espinores métricos satisfazem as equações de autovalores<sup>(8)</sup>

$$\nabla_a\gamma_{BC} = i\beta_a\gamma_{BC}, \quad \nabla_a\gamma^{BC} = (-i)\beta_a\gamma^{BC}, \quad (4.56)$$

---

<sup>8</sup>A quantidade  $\beta_a$  ocorrente nas eqs.(4.56) é um vetor mundo invariante de calibre cuja expressão envolve o argumento polar da componente independente de  $\gamma_{AB}$  e um potencial eletromagnético para o formalismo  $\gamma$ .

juntamente com suas complexas conjugadas. Consequentemente, usando-se a condição de compatibilidade métrica

$$\nabla^{AA'}(\gamma_{RS}\gamma_{R'S'}) = 0, \quad (4.57)$$

conclui-se que a eq.(4.55) torna-se

$$\nabla^{AA'}(\gamma_{A'B'}X_{ABC}{}^D) = \nabla^{AA'}(\gamma_{AB}\Xi_{A'B'C}{}^D), \quad (4.58)$$

ou, mais explicitamente,

$$\nabla_{B'}^A X_{ABCD} - 2i\beta_{B'}^A X_{ABCD} = \nabla_B^{A'} \Xi_{A'B'CD}. \quad (4.59)$$

Portanto, simetrizando os índices  $B$ ,  $C$  e  $D$  que ocorrem em (4.59), e usando (4.44) juntamente com (4.48), resulta

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD} - 2i\beta_{B'}^A \Psi_{ABCD} = \nabla_{(B}^{A'} \Xi_{CD)A'B'}. \quad (4.60)$$

Neste estágio, trabalharemos com o lado direito da eq.(4.60) com base na utilização das equações de Einstein dadas em (1.5). Então, no formalismo  $\gamma$ , tem-se

$$\Xi_{CDA'B'} = \frac{k}{2}(T_{CDA'B'} - \frac{1}{4}T\gamma_{CD}\gamma_{A'B'}). \quad (4.61)$$

É evidente que a simetria envolvida no lado direito de (4.60), aniquila a parte de traço presente em (4.61), tal que obtem-se a equação de campo para  $\Psi_{ABCD}$

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD} - 2i\beta_{B'}^A \Psi_{ABCD} = \frac{k}{2}\nabla_{(B}^{A'} T_{CD)A'B'}. \quad (4.62)$$

As equações de campo para as funções de onda  $\Psi^{ABCD}$  e  $\Psi_{AB}{}^{CD}$  são usualmente obtidas a partir da eq.(4.62) implementando-se prescrições métricas adequadas. Para  $\Psi^{ABCD}$ , por exemplo, tem-se

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD} = \nabla_{B'}^A (\Psi^{LMNS} \gamma_{LA} \gamma_{MB} \gamma_{NC} \gamma_{SD}), \quad (4.63)$$

e

$$\nabla_B^{A'} T_{CDA'B'} = \nabla_B^{A'} (T^{MN}{}_{A'B'} \gamma_{MC} \gamma_{ND}), \quad (4.64)$$

tal que

$$\nabla_{AB'} \Psi^{ABCD} + 2i\beta_{AB'} \Psi^{ABCD} = -\frac{k}{2}(\nabla^{A'(B} T^{CD)}_{A'B'} + 2i\beta^{A'(B} T^{CD)}_{A'B'}). \quad (4.65)$$



Similarmente, para  $\Psi_{AB}{}^{CD}$ , obtem-se

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{k}{2} (\gamma^{CM} \gamma^{DN} \nabla_{(B}^{A'} T_{MN)A'B'}), \quad (4.66)$$

com a expressão (4.66) podendo ser reescrita utilizando-se como ferramenta a seguinte expansão:

$$T_{CDA'B'} = T_{(CD)(A'B')} + \frac{1}{4} T \gamma_{CD} \gamma_{A'B'}. \quad (4.67)$$

Consequentemente, também obtem-se [14]

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{k}{6} \gamma^{CM} \gamma^{DN} (\nabla_B^{A'} T_{(MN)A'B'} + \nabla_M^{A'} T_{(BN)A'B'} + \nabla_N^{A'} T_{(BM)A'B'}). \quad (4.68)$$

### 4.1.2 Equações de Campo no Formalismo $\varepsilon$

As equações de campo no formalismo  $\varepsilon$  são obtidas realizando-se procedimentos semelhantes aos descritos na Subseção anterior. Neste caso, os espinores métricos são covariantemente constantes, o que implica numa simplificação considerável em nossos procedimentos. Assim sendo, a identidade de Bianchi gravitacional neste formalismo

$$\nabla^{AA'} (\varepsilon_{A'B'} X_{ABC}{}^D) = \nabla^{AA'} (\varepsilon_{AB} \Xi_{A'B'C}{}^D), \quad (4.69)$$

torna-se simplesmente

$$\nabla_{B'}^A X_{ABCD} = \nabla_B^{A'} \Xi_{A'B'CD}. \quad (4.70)$$

Daí, levando-se a cabo uma simetrização nos índices  $B$ ,  $C$  e  $D$  da eq.(4.70), obtém-se

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD} = \nabla_{(B}^{A'} \Xi_{CD)A'B'}. \quad (4.71)$$

Agora, utilizando-se a forma espinorial das equações de Einstein neste formalismo, vem

$$\Xi_{CDA'B'} = \frac{k}{2} (T_{CDA'B'} - \frac{1}{4} T \varepsilon_{CD} \varepsilon_{A'B'}), \quad (4.72)$$

de modo que obtemos a equação de campo para  $\Psi_{ABCD}$

$$\nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD} = \frac{k}{2} \nabla_{(B}^{A'} T_{CD)A'B'}. \quad (4.73)$$

Vale a pena enfatizar que, no formalismo  $\varepsilon$ , a expressão (4.67) é escrita como

$$T_{CDA'B'} = T_{(MN)(A'B')} + \frac{1}{4} T \varepsilon_{CD} \varepsilon_{A'B'}. \quad (4.74)$$

No formalismo sob consideração, as equações de campo para  $\Psi^{ABCD}$  e  $\Psi_{AB}{}^{CD}$  são imediatamente obtidas, de fato, por causa da constância covariante dos respectivos espinores métricos. Tem-se, com efeito,

$$\nabla_{AB'}\Psi^{ABCD} = -\frac{k}{2}\nabla^{A'(B}T^{CD)}_{A'B'}, \quad (4.75)$$

e

$$\nabla_{B'}^A\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{k}{2}\varepsilon^{CM}\varepsilon^{DN}\nabla_{(B}^{A'}T_{MN)A'B'}. \quad (4.76)$$

Portanto, trabalhando a equação (4.76), resulta

$$\nabla_{B'}^A\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{k}{6}(\nabla_B^{A'}T^{(CD)}_{(A'B')} + 2\nabla^{A'(C}T_B{}^{D)}_{(A'B')}). \quad (4.77)$$

Podemos observar neste estágio que, se levássemos em conta as conjugadas complexas das equações de campo obtidas na presente Subseção, e na anterior, obteríamos o conjunto completo de equações de campo espinoriais gravitacionais. Estas equações de campo constituem a teoria de grávitons em  $\mathfrak{M}$ .

## Capítulo 5

# TÉCNICAS CALCULACIONAIS

No presente Capítulo, introduziremos os mecanismos algébricos calculacionais necessários para a obtenção das equações de onda para grávitons em ambos os formalismos. Um dos principais procedimentos pertinentes, consiste [3,12,13] em tomar o comutador entre operadores derivada covariante de acordo com a seguinte expansão bivetorial:

$$S_{AA'}^a S_{BB'}^b [\nabla_a, \nabla_b] = [\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = M_{A'B'} \Delta_{AB} + M_{AB} \Delta_{A'B'}, \quad (5.1)$$

onde os objetos  $\Delta$  são operadores diferenciais lineares de segunda ordem, simétricos e que satisfazem a regra de Leibniz [3]. Assim sendo, em cada formalismo,

$$\begin{aligned} M^{A'B'} (\nabla_{AA'} \nabla_{BB'} - \nabla_{BB'} \nabla_{AA'}) &= M^{A'B'} (M_{A'B'} \Delta_{AB} + M_{AB} \Delta_{A'B'}), \\ - \left( \nabla_A^{B'} \nabla_{BB'} + \nabla_B^{B'} \nabla_{AB'} \right) &= 2\Delta_{AB}, \\ -2\nabla_{(A}^{C'} \nabla_{B)C'} &= 2\Delta_{AB}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

obtem-se a expressão

$$\Delta_{AB} = -\nabla_{(A}^{C'} \nabla_{B)C'}, \quad (5.3)$$

juntamente com sua complexa conjugada

$$\Delta_{A'B'} = -\nabla_{(A'}^C \nabla_{B')C}. \quad (5.4)$$

Vale a pena notar que pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= -\nabla_{(A}^{C'} \left( \gamma_{|D'C'|} \nabla_{B)}^{D'} \right) \\ &= - \left[ \gamma_{D'C'} \nabla_{(A}^{C'} \nabla_{B)}^{D'} + \left( \nabla_{(A}^{C'} \gamma_{|D'C'|} \right) \nabla_{B)}^{D'} \right], \\ &= \nabla_{C'(A} \nabla_{B)}^{C'} - i\beta_{C'(A} \nabla_{B)}^{C'}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

juntamente com a conjugada de (5.5).

$$\Delta_{A'B'} = \nabla_{C(A'} \nabla_{B')}^C + i\beta_{C(A'} \nabla_{B')}^C. \quad (5.6)$$

No formalismo  $\varepsilon$ , temos simplesmente as seguintes configurações conjugadas:

$$\Delta_{AB} = -\nabla_{(A}^{C'} \nabla_{B)C'} = \nabla_{C'(A} \nabla_{B)}^{C'}, \quad \Delta_{A'B'} = -\nabla_{(A'}^C \nabla_{B')C} = \nabla_{C(A'} \nabla_{B')}^C, \quad (5.7)$$

com  $\Delta_{AB}$  e  $\Delta_{A'B'}$  sendo, respectivamente, densidades espinoriais invariantes de calibre de peso  $-1$  e anti-peso  $-1$ .

Em ambos os formalismos, a forma contravariante dos operadores  $\Delta$  é formalmente definida por

$$\Delta^{AB} = M^{AC} M^{BD} \Delta_{CD}, \quad (5.8)$$

juntamente com a conjugada de (5.8). No formalismo  $\gamma$ , após algumas manipulações, a saber

$$\begin{aligned} \Delta^{AB} &= \gamma^{AC} \gamma^{BD} \Delta_{CD}, \\ &= -\gamma^{AC} \gamma^{BD} \nabla_{(C}^{E'} \nabla_{D)E'}, \\ &= -\gamma^{AC} \gamma^{BD} \frac{1}{2} \left( \nabla_C^{E'} \nabla_{DE'} + \nabla_D^{E'} \nabla_{CE'} \right), \\ &= -\frac{1}{2} \left( \gamma^{BD} \nabla^{AE'} \nabla_{DE'} + \gamma^{AC} \nabla^{BE'} \nabla_{CE'} \right), \\ &= -\frac{1}{2} \left( \gamma^{BD} \nabla^{AE'} \nabla_{DE'} + \gamma^{AC} \nabla^{BE'} \nabla_{CE'} \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

obtem-se, digamos,

$$\Delta^{AB} = - \left( \nabla^{C'(A} \nabla_{C'}^{B)} + i\beta^{C'(A} \nabla_{C'}^{B)} \right) = \nabla_{C'}^{(A} \nabla^{B)C'}. \quad (5.10)$$

No formalismo  $\varepsilon$ , tem-se

$$\Delta^{AB} = -\nabla^{C'(A} \nabla_{C'}^{B)} = \nabla_{C'}^{(A} \nabla^{B)C'}, \quad (5.11)$$

bem como a conjugada de (5.11).

Em ambos os formalismos, a ação dos operadores  $\Delta$  sobre vetores de espin  $\zeta^C$  e  $\eta_C$  arbitrários, é prescrita por meio das seguintes expressões:

$$\Delta_{AB} \zeta^C = \omega_{ABM}{}^C \zeta^M, \quad \Delta_{A'B'} \zeta^C = \omega_{A'B'M}{}^C \zeta^M, \quad (5.12)$$

e

$$\Delta_{AB} \eta_C = -\omega_{ABC}{}^M \eta_M, \quad \Delta_{A'B'} \eta_C = -\omega_{A'B'C}{}^M \eta_M, \quad (5.13)$$

e de suas respectivas conjugadas complexas. Os objetos  $\omega$  que aparecem nas expressões acima são, de fato, os mesmos que aqueles da expansão exibida pela eq.(4.34). Daí segue que, realizando-se algumas manipulações, obtemos as seguintes derivadas:

$$\Delta_{AB}\zeta^C = X_{ABD}{}^C\zeta^D + \frac{1}{2}\omega_{ABD}{}^D\zeta^C, \quad (5.14)$$

$$\Delta_{A'B'}\zeta^C = \Xi_{A'B'D}{}^C\zeta^D + \frac{1}{2}\omega_{A'B'D}{}^D\zeta^C, \quad (5.15)$$

$$\Delta_{AB}\eta_C = -\left(X_{ABC}{}^D\eta_D + \frac{1}{2}\omega_{ABD}{}^D\eta_C\right), \quad (5.16)$$

e

$$\Delta_{A'B'}\eta_C = -\left(\Xi_{A'B'C}{}^D\eta_D + \frac{1}{2}\omega_{A'B'D}{}^D\eta_C\right), \quad (5.17)$$

juntamente com suas algebricamente independentes conjugadas complexas.

Para melhor entendermos a ação dos operadores  $\Delta$  sobre  $\zeta^C$  e  $\eta_C$ , deduziremos a expressão (5.15). Utilizando-se a eq.(5.1), temos

$$M^{AB}[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = 2\Delta_{A'B'}, \quad (5.18)$$

implementando  $\zeta^C$

$$\Delta_{A'B'}\zeta^C = \frac{1}{2}M^{AB}[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}]\zeta^C, \quad (5.19)$$

tal que, em uso da expressão (4.19), obtemos

$$\Delta_{A'B'}\zeta^C = \frac{1}{2}M^{AB}W_{AA'BB'M}{}^C\zeta^M = \frac{1}{2}M^{AB}M^{CD}W_{AA'BB'MD}\zeta^M. \quad (5.20)$$

Empregando a expansão de bivector em  $W_{AA'BB'MD}$ ,

$$W_{AA'BB'MD} = M_{AB}\omega_{A'B'MD} + M_{A'B'}\omega_{ABMD}, \quad (5.21)$$

e juntamente com a relação

$$\omega_{A'B'MD} = \omega_{A'B'(MD)} + \omega_{A'B'[MD]} = \omega_{A'B'(MD)} + \frac{1}{2}\omega_{A'B'L}{}^LM_{MD}, \quad (5.22)$$

a eq.(5.20), resulta

$$\begin{aligned} \Delta_{A'B'}\zeta^C &= \frac{1}{2}M^{AB}M^{CD}(M_{AB}\omega_{A'B'MD} + M_{A'B'}\omega_{ABMD})\zeta^M, \\ &= M^{CD}\omega_{A'B'MD}\zeta^M, \\ &= M^{CD}\left(\omega_{A'B'(MD)} + \frac{1}{2}\omega_{A'B'L}{}^LM_{MD}\right)\zeta^M, \\ &= M^{CD}\left(\Xi_{A'B'MD} + \frac{1}{2}\omega_{A'B'L}{}^LM_{MD}\right)\zeta^M, \\ &= \Xi_{A'B'D}{}^C\zeta^D + \frac{1}{2}\omega_{A'B'D}{}^D\zeta^C. \end{aligned} \quad (5.23)$$

De maneira análoga é feito para as outras expressões das derivadas envolvendo  $\Delta$ .

Pode ser mostrado [3] que as estruturas contraídas  $\omega_{ABD}{}^D$  e  $\omega_{A'B'D}{}^D$  descrevem a curvatura eletromagnética de  $\mathfrak{M}$  e são, em ambos os formalismos, proporcionais às funções de onda para fótons geométricos de acordo com as prescrições

$$\phi_{AB} \doteq \frac{i}{2} \omega_{ABD}{}^D, \quad \phi_{A'B'} \doteq \frac{i}{2} \omega_{A'B'D}{}^D. \quad (5.24)$$

Tais curvaturas espinoriais contraídas são provenientes da parte antissimétrica  $W_{ab[AB]}$  envolvida em (4.20), que como já foi visto, estando esta relacionada com o tensor de Maxwell  $F_{ab}$  de  $\mathfrak{M}$  de acordo com (vide, por exemplo, Ref.[3])

$$W_{ab[AB]} = (-i)F_{ab}M_{AB}. \quad (5.25)$$

Enfatizamos que as derivadas  $\Delta$  exibidas acima, ocorrem nos procedimentos que levam às nossas equações de onda gravitacionais, tal como será claramente exibido no Capítulo subsequente.

É de considerável interesse implementar-se os seguintes desdobramentos envolvendo os operadores derivadas covariantes de ambos os formalismos:

$$\begin{aligned} \nabla_{C'}^B \nabla^{AC'} &= \nabla_{C'}^{(B} \nabla^{A)C'} + \nabla_{C'}^{[B} \nabla^{A]C'} \\ &= \Delta^{AB} - \frac{1}{2} M^{AB} \square, \end{aligned} \quad (5.26)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_B^{C'} \nabla_{AC'} &= \nabla_{(B}^{C'} \nabla_{A)C'} + \nabla_{[B}^{C'} \nabla_{A]C'} \\ &= \frac{1}{2} M_{AB} \square - \Delta_{AB}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

juntamente com os respectivos conjugados complexos . Em adição, tem-se as seguintes regras [3,12]

$$2\nabla_{C'}^{[B} \nabla^{A]C'} = M^{BA} \square = \nabla_{C'}^D (M^{AB} \nabla_D^{C'}), \quad (5.28)$$

$$2\nabla_{[B}^{C'} \nabla_{A]C'} = M_{AB} \square = \nabla_D^{C'} (M_{BA} \nabla_{C'}^D), \quad (5.29)$$

onde, o objeto  $\square$  que aparece nas expressões acima é o operador D'Alembertiano covariante, invariante de calibre, cuja definição é dada por

$$\square \doteq g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Leftrightarrow \square = S_{CC'}^a S^{bCC'} \nabla_a \nabla_b = \nabla_{CC'} \nabla^{CC'} = \nabla^{CC'} \nabla_{CC'}. \quad (5.30)$$

Tem-se também, em particular, a regra de deslocamento indicial contravariante [3]

$$\nabla^{L(A' \nabla^{B'})S} = \nabla^{S(A' \nabla^{B'})L} + M^{LS} \Delta^{A'B'}, \quad (5.31)$$

juntamente com sua versão covariante.

## Capítulo 6

# EQUAÇÕES DE ONDA PARA GRÁVITONS

No presente Capítulo, deduziremos as equações de onda para grávitons em ambos os formalismos na presença de fontes fisicamente arbitrárias, tal como foram desenvolvidas na Ref.[14]. Vale ressaltar, que as deduções pertinentes serão levadas a cabo com base nas equações de campo apresentadas anteriormente. Inicialmente, no formalismo  $\gamma$ , com base no uso dos mecanismos algébricos calculacionais postos previamente, obteremos as equações de onda para  $\Psi_{AB}{}^{CD}$  da eq.(4.66). As equações de onda para os campos  $\Psi_{ABCD}$  e  $\Psi^{ABCD}$  das eqs.(4.62) e (4.65) serão obtidas utilizando-se certos mecanismos diferenciais covariantes de troca de valências, tais como são descritos nas Refs.[3,13]. É de considerável interesse notar que, devido à configuração indicial de  $\Psi_{AB}{}^{CD}$ , esta fornece em ambos os formalismos uma função de onda com caráter geométrico de tensor de espin, que é adicionalmente invariante sob as transformações de calibre de Weyl [3]. Desta forma, a equação de onda para este campo no formalismo  $\varepsilon$ , a princípio é formalmente a mesma que a correspondente do formalismo  $\gamma$ . As demais equações de onda no formalismo  $\varepsilon$  serão deduzidas com base na propriedade geral de que os espinores métricos  $\varepsilon$  são covariantemente constantes. Similarmente aos Capítulos anteriores, apresentaremos as deduções referidas acima em duas Seções.



## 6.1 EQUAÇÕES DE ONDA NO FORMALISMO $\gamma$

Iniciamos nossos procedimentos calculacionais reescrevendo o lado direito da equação (4.66) como

$$\gamma^{CM}\gamma^{DN}\nabla_{(B}^{A'}T_{MN)A'B'} = \gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{S(B}\nabla^{SA'}T_{MN)A'D'}. \quad (6.1)$$

Ainda, a partir da equação (4.66), tem-se

$$\nabla^{AB'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{k}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{S(B}\nabla^{SA'}T_{MN)A'D'}, \quad (6.2)$$

tal que, operando com  $\nabla_{B'}^L$ , na equação (6.2), utilizando a regra de deslocamento indicial explícita

$$\nabla^{L(A'}\nabla^{B')S} = \nabla^{S(A'}\nabla^{B')L} + \gamma^{LS}\Delta^{A'B'}, \quad (6.3)$$

e, ainda, levando em conta o resultado

$$\nabla_{B'}^L \left( \gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{SB} \right) = 0, \quad (6.4)$$

concluimos que<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^L \nabla^{AB'}\Psi_{AB}{}^{CD} &= \frac{k}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{S(B}\nabla_{B'}^L\nabla^{SA'}T_{MN)A'D'} \\ &= -\frac{k}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{S(B}\nabla^{LB'}\nabla^{SA'}T_{MN)A'B'} \\ &= -\frac{k}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{S(B}\nabla^{L(A'}\nabla^{B')S}T_{MN)A'B'} \\ &= -\frac{k}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{S(B}\left(\nabla^{S(A'}\nabla^{B')L} + \gamma^{LS}\Delta^{A'B'}\right)T_{MN)A'B'}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

O lado esquerdo de (6.5) pode ser reescrito com o auxílio da expressão (5.26), a saber,<sup>(2)</sup>

$$\nabla_{B'}^L \nabla^{AB'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \left( \Delta^{LA} + \frac{1}{2}\gamma^{LA}\square \right) \Psi_{AB}{}^{CD}. \quad (6.6)$$

Agora, devemos expressar a contribuição que envolve a derivada  $\Delta$  em (6.6). Com efeito,

<sup>1</sup> Aqui, é conveniente usar-se o fato que a simetria  $T_{ab} = T_{(ab)}$  implica que  $T_{(AB)A'B'} = T_{AB(A'B')} = T_{(AB)(A'B')}$ .

<sup>2</sup>Na Ref.[14], há uma troca de sinal no termo entre parênteses do lado direito da eq.(6.6). Isto foi relatado pela primeira vez na Ref.[33].

tal como expresso na Ref.[3], tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta^{LA}\Psi_{AB}{}^{CD} &= (X^{LA}{}_M{}^C\Psi_{AB}{}^{MD} + X^{LA}{}_M{}^D\Psi_{AB}{}^{CM}) \\
&\quad - (X^{LA}{}_A{}^M\Psi_{MB}{}^{CD} + X^{LA}{}_B{}^M\Psi_{AM}{}^{CD}) \\
&= 6\Lambda\Psi^{CDL}{}_B - (Q^{CDL}{}_B + Q^{CLD}{}_B + Q^{DLC}{}_B) \\
&= 6\Lambda\Psi^{CDL}{}_B - 3Q^{(CDL)S}\gamma_{SB} \\
&= 6\Lambda\Psi^{CDL}{}_B - 3Q^{(CDLS)}\gamma_{SB},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

com a definição

$$Q^{CDLS} \doteq \Psi_{MN}{}^{CD}\Psi^{LSMN}, \tag{6.8}$$

e a quantidade  $\Lambda$  sendo a mesma que aquela definida em (4.47). Deve ser observado aqui que, devido a simetria total de  $\Psi_{ABCD}$ , a eq.(6.8) nos fornece a computação

$$4Q^{(CDLS)} = Q^{(CDL)S} + Q^{(CDS)L} + Q^{(CLS)D} + Q^{(DLS)C} = 4Q^{(CDL)S}. \tag{6.9}$$

Daí, obtemos a contribuição

$$\Delta^{LA}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{R}{4}\Psi^{CDL}{}_B - 3\Psi_{MN}{}^{(CD}\Psi^{LS)MN}\gamma_{SB}. \tag{6.10}$$

O desenvolvimento que nos permite calcular a derivada  $\Delta$  presente no lado direito da equação (6.5), é dado na Ref.[14]. O correspondente resultado é

$$\Delta^{A'B'}T_{MNA'B'} = -2\Xi^{A'B'S}{}_{(M}T_{N)SA'B'}, \tag{6.11}$$

tal que, utilizando-se a expressão (4.61), resulta

$$\Delta^{A'B'}T_{MNA'B'} = -kT^{A'B'S}{}_{(M}T_{N)SA'B'} = 0. \tag{6.12}$$

Substituindo os resultados (6.10) e (6.12) na eq. (6.5), obtém-se

$$\left(\square + \frac{R}{2}\right)\Psi_{AB}{}^{CD} - 6\Psi_{MN}{}^{(CD}\Psi^{LS)MN}\gamma_{LA}\gamma_{SB} = S_{AB}{}^{CD}, \tag{6.13}$$

juntamente com a definição<sup>(3)</sup>

$$S_{AB}{}^{CD} \doteq -k\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{LA}\nabla_{(B}^{(A'}\nabla^{B')L}T_{MN)A'B'}. \tag{6.14}$$

---

<sup>3</sup>Observamos que na Ref.[14] ocorre um fator  $\frac{1}{2}$  inadequado na definição de  $S_{AB}{}^{CD}$ . Isto foi relatado pela primeira vez na Ref.[33].

A configuração (6.14) é obviamente simétrica nos índices  $C$  e  $D$ . A simetria nos índices  $A$  e  $B$ , tal como supostamente imposta pela contribuição (6.13), pode ser facilmente verificada pelo desenvolvimento

$$\begin{aligned} & \gamma_{L[A} \left( \nabla_{|B|}^{(A'} \nabla^{B')L} T_{MNA'B'} + \nabla_{|M|}^{(A'} \nabla^{B')L} T_{B]NA'B'} + \nabla_{|N|}^{(A'} \nabla^{B')L} T_{B]MA'B'} \right) \\ &= \gamma_{BA} \nabla_{(M}^{(A'} \nabla^{B')L} T_{N)LA'B'} \equiv 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

O resultado das computações em (6.15) é justificado mediante a implementação da expressão (6.12) e ainda pelo fato que  $T_{ab}$  possui divergência covariante nula [15]. A propriedade de simetria em  $A$  e  $B$  exibida pela eq.(6.15) também é válida para os índices  $A, M$  e  $A, N$ , resultando que o espinor  $S_{ABCD}$  é totalmente simétrico [14]. Observe que este resultado é de extrema importância, já que, a total simetria de  $S_{ABCD}$  exprime a lei de conservação dada em (3.37).

Deduziremos agora as equações de onda para  $\Psi_{ABCD}$  e  $\Psi^{ABCD}$  com base nas correlações diferenciais covariantes postas a seguir. Tais correlações foram dadas pela primeira vez na Ref.[3]. Com efeito, para  $\Psi_{ABCD}$ , tem-se

$$\square \Psi_{ABCD} = \square(\Psi_{AB}{}^{LM} \gamma_{LC} \gamma_{MD}), \quad \square(\gamma_{LC} \gamma_{MD}) = -\bar{\Upsilon}_{(g)} \gamma_{LC} \gamma_{MD}, \quad (6.16)$$

$$2(\nabla_h \Psi_{AB}{}^{LM}) \nabla^h (\gamma_{LC} \gamma_{MD}) = 4(2\beta^h \beta_h + i\beta^h \nabla_h) \Psi_{ABCD}, \quad (6.17)$$

e, similarmente, para  $\Psi^{ABCD}$ , tem-se

$$\square \Psi^{ABCD} = \square(\gamma^{AL} \gamma^{BM} \Psi_{LM}{}^{CD}), \quad \square(\gamma^{AL} \gamma^{BM}) = -\Upsilon_{(g)} \gamma^{AL} \gamma^{BM}, \quad (6.18)$$

$$2\nabla^h (\gamma^{AL} \gamma^{BM}) (\nabla_h \Psi_{LM}{}^{CD}) = 4(2\beta^h \beta_h - i\beta^h \nabla_h) \Psi^{ABCD}, \quad (6.19)$$

com  $\Upsilon_{(g)}$  sendo definido por<sup>(4)</sup>

$$\Upsilon_{(g)} \doteq 4\beta^h \beta_h + 2i(\square \Phi + 2\nabla_h \Phi^h). \quad (6.20)$$

Na expressão (6.20), a quantidade  $\Phi^h$  é um potencial eletromagnético para o formalismo sob consideração, e a quantidade  $\Phi$  é o argumento polar da componente independente de  $\gamma_{AB}$ . Assim, após realizar-se algumas manipulações calculacionais, obtém-se as equações

$$\left( \square - 4i\beta^h \nabla_h - \Upsilon_{(g)} + \frac{R}{2} \right) \Psi_{ABCD} - 6\Psi_{MN(AB} \Psi_{CD)}{}^{MN} = -kS_{ABCD}, \quad (6.21)$$

---

<sup>4</sup>Deve ser notado que a função  $\Upsilon_{(g)}$  é invariante de calibre.

com

$$S_{ABCD} = \gamma_{L(A} \nabla_B^{(A'} \nabla^{B')L} T_{CD)A'B'} = S_{(ABCD)}, \quad (6.22)$$

e

$$\left( \square + 4i\beta^h \nabla_h - \overline{\Upsilon}_{(g)} + \frac{R}{2} \right) \Psi^{ABCD} - 6\Psi_{MN}^{(AB} \Psi^{CD)MN} = -kS^{ABCD}, \quad (6.23)$$

onde

$$S^{ABCD} = \gamma^{AP} \gamma^{BH} \gamma^{CM} \gamma^{DN} \gamma_{L(P} \nabla_H^{(A'} \nabla^{B')L} T_{MN)A'B'}, \quad (6.24)$$

juntamente com os complexos conjugados de (6.21) e (6.23). Vale ressaltar, também, que as eqs.(6.21) e (6.23) estão correlacionadas entre si de acordo com a seguinte regra de troca [3]

$$i\beta^h \nabla_h \leftrightarrow (-i)\beta^h \nabla_h, \quad \Upsilon_{(g)} \leftrightarrow \overline{\Upsilon}_{(g)}. \quad (6.25)$$

## 6.2 EQUAÇÕES DE ONDA NO FORMALISMO $\varepsilon$

Como já foi mencionado anteriormente, uma vez que a configuração indicial de  $\Psi_{AB}^{CD}$  produz a mesma natureza de tensor de espin em ambos os formalismos, a equação de onda para o campo  $\Psi_{AB}^{CD}$  no formalismo  $\varepsilon$  é formalmente a mesma que aquela dada como eq.(6.13). Deste modo, a contribuição  $\Delta^{LA} \Psi_{AB}^{CD}$  possui o mesmo caráter puramente gravitacional que a do lado direito da equação (6.10). Em adição, devido ao fato de que a quantidade  $T_{ABA'B'}$  no formalismo  $\varepsilon$  é uma densidade de espin Hermitiana de peso absoluto  $w = -2$ , a contribuição (6.11) também é nula neste contexto. Deste modo, pode-se escrever a equação de onda para  $\Psi_{AB}^{CD}$  como

$$\left( \square + \frac{R}{2} \right) \Psi_{AB}^{CD} - 6\Psi_{MN}^{CD} \Psi_{AB}^{MN} = S_{AB}^{CD}, \quad (6.26)$$

com a definição correspondente

$$S_{AB}^{CD} \doteq -k\varepsilon^{CM} \varepsilon^{DN} \nabla_{(A}^{(A'} \nabla_{B}^{B')} T_{MN)A'B'}. \quad (6.27)$$

De fato, no formalismo sob consideração aqui, podemos obter as equações de onda para  $\Psi_{ABCD}$  e  $\Psi^{ABCD}$  a partir da equação (6.26) simplesmente realizando-se algumas manipulações indiciais com base na constância covariante dos espinores  $\varepsilon$ . Tem-se, com efeito,

$$\left( \square + \frac{R}{2} \right) \Psi_{ABCD} - 6\Psi_{MN(AB} \Psi_{CD)}^{MN} = S_{ABCD}, \quad (6.28)$$

juntamente com

$$S_{ABCD} \doteq -k \nabla_{(A}^{(A'} \nabla_{B}^{B')} T_{CD)A'B'}, \quad (6.29)$$

e, ainda,

$$\left( \square + \frac{R}{2} \right) \Psi^{ABCD} - 6 \Psi_{MN}^{(AB} \Psi^{CD)MN} = S^{ABCD}, \quad (6.30)$$

com<sup>(5)</sup>

$$S^{ABCD} \doteq -k \nabla^{(A(A'} \nabla^{B')B} T^{CD)}_{A'B'}. \quad (6.31)$$

---

<sup>5</sup>Na Ref.[14] existe um fator  $\frac{1}{2}$  “em excesso” no lado direito das equações de onda (6.28) e (6.30). Isto foi relatado na Ref.[33].

## Capítulo 7

# CONCLUSÕES

Concernente ao trabalho de revisão apresentado aqui, vimos que a teoria de espinores de duas componentes pode ser utilizada para descrever-se as estruturas de curvaturas espaço-temporais da RG. Em particular, a utilização dos formalismos  $\gamma\varepsilon$  neste contexto possibilita descrever-se alguns aspectos que não poderiam ser descritos dentro do contexto mundo tradicional tal como, por exemplo, a obtenção de funções de onda para grávitons. Viu-se também que além da contribuição gravitacional para as estruturas de curvaturas de  $\mathfrak{M}$ , também deve-se destacar a existência de uma contribuição eletromagnética, estando esta associada com a parte antissimétrica  $W_{ab[AB]}$  de um típico objeto de curvatura misto de Infeld e van der Waerden [3,12].

Vimos que de acordo com a versão espinorial da identidade de Bianchi gravitacional, foi obtido em ambos os formalismos um conjunto de equações de campos gravitacionais as quais, posteriormente, foram utilizadas nos procedimentos para a obtenção das equações de onda de nosso interesse aqui. Vimos que a obtenção das equações de onda para  $\Psi_{ABCD}$  e  $\Psi^{ABCD}$ , notavelmente no caso do formalismo  $\gamma$ , se baseou na implementação dos dispositivos de troca de valência (6.16-6.19). Vale a pena mencionar que, se tivéssemos levado a cabo explicitamente a dedução das equações de onda para  $\Psi_{ABCD}$  e  $\Psi^{ABCD}$ , então acoplamentos envolvendo funções de onda para fótons de Infeld e van der Waerden teriam ocorrido nos estágios intermediários dos desenvolvimentos calculacionais correspondentes à cada formalismo, tal como foi posto originalmente nas Refs.[3,12]. No entanto, no caso de qualquer formalismo, tais acoplamentos se cancelam quando os respectivos procedimentos são completados. Concordantemente, no formalismo  $\gamma$ , os acoplamentos sob

consideração emergem nas seguintes configurações:

$$2\Delta_M{}^G\Psi_{BCDG} = \frac{R}{2}\Psi_{BCDM} - 6Q_{(BCDM)} + 8i\phi_M{}^G\Psi_{BCDG}, \quad (7.1)$$

$$2\Delta^M{}_G\Psi^{BCDG} = -\frac{R}{2}\Psi^{BCDM} + 6Q^{(BCDM)} - 8i\phi^M{}_G\Psi^{BCDG}, \quad (7.2)$$

e

$$-4i\nabla_M{}^{B'}(\beta_{B'}^G\Psi_{BCDG}) = (\Omega + \Upsilon_{(g)})\Psi_{BCDM} + 8i\phi_M{}^G\Psi_{BCDG}, \quad (7.3)$$

com [3]

$$\Omega \doteq 4i\beta^h\nabla_h + 2\beta^h\beta_h, \quad (7.4)$$

enquanto que, no formalismo  $\varepsilon$ , o cancelamento toma lugar devido à um teorema característico relacionado às expressões para derivadas  $\Delta$  de densidades tensoriais espinoriais que possuem adequados valores de pesos e apropriadas valências. De fato, este teorema foi apresentado pela primeira vez na Ref.[3].

Concluimos que os procedimentos efetuados aqui ao longo do trabalho constituem uma revisão sistemática daqueles que levam à dedução, em ambos os formalismos, de um conjunto de equações de onda gravitacionais, num cenário com fontes fisicamente arbitrárias, tal como posto na Ref.[14]. Estas equações governam a propagação de grávitons como partículas em espaços-tempo da RG. Novamente, enfatizamos que para compor este trabalho foi utilizado aqui o caráter de primeira quantização da formulação espinorial, sendo que, uma formulação num nível de segunda quantização ainda é inexistente na literatura. Adicionalmente, também deve-se destacar a importância em nos familiarizar com o embasamento algébrico exibido aqui, em conjunção com a possibilidade de eventualmente desenvolver-se programas de pesquisas futuros ao longo dessas linhas. Em conexão com isto, está um prospecto que lida com a elaboração da versão de segunda quantização da teoria de grávitons apresentada aqui.

# REFERÊNCIAS

- [1] VAN DER WAERDEN; R., B.L.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Physics. K1., 100 (1929)
- [2] INFELD, L.: Physik ZS. 33, 475 (1932)
- [3] CARDOSO, J.G.: Czech Journal of Physics 4, 401 (2005)
- [4] INFELD, L., WAERDEN, B.L.: Sitzber. Akad. Wiss., Physik-math. K1. 9, 380 (1933)
- [5] WEYL, H.: Z. Physik 56, 330 (1929)
- [6] WITTEN, L.: Phys. Rev. 1, 357 (1959)
- [7] PENROSE, R.: Ann. Phys. (N.Y.) 10, 171 (1960)
- [8] SCHOUTEN, J. A.: Journ. of Math. and Phys. 10, 239 (1931)
- [9] SCHOUTEN, J. A.: Z. Physik. 84, 92 (1933)
- [10] SCHOUTEN, J.A.: *Ricci Calculus*, Springer, Heidelberg (1954)
- [11] PENROSE; R., RINDLER; W.: *Spinors and Space-Time* Vol 1, Cambridge, (1984)
- [12] CARDOSO, J.G.: Acta Phys. Polon. B 8, 1001 (2007)
- [13] CARDOSO, J.G., Adv. Appl. Clifford Algebras 22: *The Classical Two-Component Spinor Formalisms for General Relativity II*, (2012)
- [14] CARDOSO J.G.: Nuovo Cimento B 6, 124 (2009) 631
- [15] WEINBERG, S.: *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972)



- [16] CARROLL; S. M., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Addison Wesley, 2003)
- [17] SYNGE; J. L., SCHILD; A., *Tensor Calculus*, (Dover Publications Inc, New York)
- [18] FUCHS, J. e SCHWEIGERT, C. *Symmetries, Lie algebras and Representations*. Cambridge University Press (1997)
- [19] TUNG, WU-KI. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1985)
- [20] PAL, PALASH B. *Dirac, Majorana and Weyl fermions*. Am. J. Phys.79, 485-498 (2011)
- [21] R. F. STREATER and A.S. WIGHTMAN, *PCT, spin and statistics, and all that*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1964
- [22] CARDOSO, J. G., Dissertação de Mestrado, (Universidade de Brasília, Brasília, 1979)
- [23] BADE, W. L., JEHLE, H.: Rev. Mod. Phys. 3, 714 (1953)
- [24] O'DONNELL; P.: *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*, Word Sci., Cambridge (2003)
- [25] GEROCH R.: Jour. Math. Phys. 9 (1968) 1739
- [26] GEROCH R.: Jour. Math. Phys. 11 (1970) 343
- [27] CARDOSO, J.G., and KOLB WHITNEY, [...]: *Advances in General Relativity Research*, New York (2015)
- [28] LANDAU L.D. and LIFCHITZ L.: *Théorie du Champ* (Ed. MIR, Moscou 1966)
- [29] PAULI W.: *Relativity Theory* (Pergamon Press, London 1958)
- [30] DIRAC P. A. M.: *General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto 1975)
- [31] SCHRODINGER E.: *Space-Time Structure* (Cambridge University Press, Cambridge 1963)

- 
- [32] CARMELI M.: *Group Theory and General Relativity* (McGraw-Hill, New York 1977)
- [33] CARDOSO J.G.: *Nuovo Cimento B* 10, 125 (2010) 1261