

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

JOSÉ CARLOS CHAVES VIEIRA

**ESTUDO NUMÉRICO DAS BIFURCAÇÕES DO SISTEMA
REGULADOR DE WATT**

Joinville - SC

2011

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOSÉ CARLOS CHAVES VIEIRA

**ESTUDO NUMÉRICO DAS BIFURCAÇÕES DO SISTEMA
REGULADOR DE WATT**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina - Centro de Ciências Tecnológicas, sob orientação do professor Dr. Holokx Abreu Albuquerque.

Joinville - SC

2011

JOSÉ CARLOS CHAVES VIEIRA

Estudo Numérico das Bifurcações do Sistema Regulador de Watt

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

área de concentração em "física", e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Banca examinadora

Dr. Holokx Abreu Albuquerque

UDESC/CCT (presidente/orientador)

Dr. Edson Denis Leonel

UNESP

Dr. Paulo Cesar Rech

UDESC/CCT

Dr. André Luiz de Oliveira

CCT/UDESC (suplente)

FICHA CATALOGRÁFICA

V657e

Vieira, José Carlos Chaves.

Estudo Numérico das Bifurcações no Sistema

Regulador de Watt / José Carlos Chaves Vieira;

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

Joinville - SC

40 f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2011.

- 1.Regulador de Watt. 2. Espaço de Parâmetros.
3.Expoente de Lyapunov. 4. Equação Diofantina.
I. Albuquerque, Holokx A.

CDD 531.1

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Holokx Abreu Albuquerque, por sua orientação.
- À CAPES, pela bolsa de estudos.
- Aos professores do Programa de Pós Graduação em Física da UDESC que contribuíram de forma significativa com minha formação.
- Aos meus amigos de pesquisa, Julio e Denilson pelas discussões, dicas e estudos em grupo.
- À todo corpo discente do Programa de Pós Graduação em Física da UDESC que nesses dois anos de amizade proporcionaram momentos de parceria nos estudos e também momentos de descontração.
- À toda minha família, em especial ao meu pai que sempre esteve presente, me motivando, em todo meu processo de formação.
- À todos meus amigos que durante esses dois anos de alguma forma contribuíram para que eu alcançasse meu objetivo, em especial aos meus melhores amigos: Daniel Vieira, Sonia Bernado Cordeiro, Silviana Vieira e Luis Fernando Barth.

*"Não existe realização sem determinação
na busca do que se quer atingir."*

Sonia Bernado

Resumo

Neste trabalho estudamos a auto-organização de estruturas periódicas no espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov (diagramas de Lyapunov) em um modelo do sistema regulador de Watt. Uma organização hierárquica e cascatas de bifurcação por adição de período das estruturas periódicas são observadas e estas cascatas auto-organizadas se acumulam em fronteiras periódicas. Também mostramos que os períodos das estruturas organizam-se obedecendo as soluções de equações diofantina.

PALAVRAS-CHAVE: sistema regulador de Watt, espaço de parâmetros, expoente de Lyapunov, equação diofantina.

Abstract

In this work we study the self-organization of periodic structures on parameter-spaces of the largest Lyapunov exponent (Lyapunov diagrams) of the Watt governor system model. A hierarchical organization and period-adding bifurcation cascades of the periodic structures are observed, and these self-organized cascades accumulate on a periodic boundary. We also show that the periods of the structures organize themselves obeying the solutions of a diophantine equation.

KEY WORDS: Watt governor system, parameter spaces, Lyapunov exponents,
diophantine equation.

Lista de Figuras

2.1	Foto do sistema regulador de Watt acoplado em uma máquina a vapor no Museu à Vapor (Gramado-RS).(a) Dispositivo em funcionamento. (b) Dispositivo em repouso.	11
2.2	Modelo físico do sistema regulador de Watt.	12
2.3	Forças que agem sobre a esfera que causam movimento de translação da camisa mecânica H.	14
2.4	Torque que surge na esfera devido ao movimento de rotação.	15
3.1	Divergência das órbitas geradas por diferentes condições iniciais. . . .	21
3.2	Possíveis tipos de atratores encontrados em sistemas tridimensionais.	23
3.3	Corte transversal no espaço de parâmetros $\varepsilon \times \alpha$ com $\beta = 0,8$	24
3.4	Visão em cortes do espaço de parâmetros tridimensional do sistema regulador de Watt.	26
3.5	Plano do espaço de parâmetros $\varepsilon \times \alpha$ para $\beta = 0,8$	27
3.6	Plano do espaço de parâmetros $\varepsilon \times \beta$ para $\alpha = 0,95$	27
3.7	Plano do espaço de parâmetros $\beta \times \alpha$ para $\varepsilon = 0,7$	28
3.8	Ampliação da caixa (a) da figura 4.3.	29
3.9	Ampliação da caixa (b) da figura 4.3.	29
3.10	Ampliação da caixa (c) da figura 4.3.	30
3.11	Regiões da figura 3.9 que serão ampliadas.	31
3.12	Ampliação da caixa (1) da figura 3.11.	32
3.13	Ampliação da caixa (2) da figura 3.11.	32
3.14	Diagrama do período- q em uma parte da figura 3.12.	33
3.15	Comportamento do período- q em função do parâmetro α da linha tracejada na figura 3.14.	34
3.16	Organização da sequência de períodos da figura 3.14.	34

Sumário

1	Introdução	9
2	O Sistema Regulador de Watt	11
2.1	Modelo Físico e Princípio de Funcionamento	11
2.2	Modelo Matemático	13
2.3	Análise da Estabilidade do Ponto de Equilíbrio	16
2.4	Condição de Estabilidade de Vyshnegradskii	17
3	Sistemas Dinâmicos Contínuos	20
3.1	Espaço de Fase e Atratores	20
3.2	Caracterização do Comportamento Caótico	21
3.3	Espaço de Parâmetros	23
3.4	Diagrama de Bifurcação	25
3.5	Resultados Numéricos	25
4	Conclusões	35

Capítulo 1

Introdução

A máquina a vapor foi, durante mais de um século, umas das formas mais difundidas de obtenção de energia; pode ser argumentado até que a própria revolução industrial - essa radical mudança ocorrida a partir do final do século XVIII com a concentração dos meios de produção, até então dispersos, em grandes fábricas, e que ocasionou profundas mudanças sociais e econômicas - foi alavancada pela máquina a vapor.

A produção de energia da máquina a vapor começa com o aquecimento de água, que forma o vapor d'água que exerce pressão sobre um mecanismo de transmissão que, por sua vez, põe um eixo em movimento. A rotação desse eixo servia a vários fins industriais e tinha sua velocidade controlada pelo fluxo de vapor. Assim, quanto mais vapor, mais rápido o eixo girava e quanto menos vapor mais lentamente o eixo girava.

O fato desse eixo não rotacionar com velocidade constante levou James Watt a criar um dispositivo que tivesse como função regular automaticamente a velocidade rotacional de um volante acoplado a uma máquina à vapor, o Sistema Regulador de Watt (SRW), em 1788. A máquina à vapor foi essencial para a Revolução Industrial que acontecia na Europa e com isso, o uso de um dispositivo que contralasse o fluxo de vapor e consequentemente a velocidade rotacional de uma máquina seria muito importante para o desenvolvimento tecnológico. O sucesso desse dispositivo foi tanto que estima-se que na Inglaterra existiam 75.000 reguladores de Watt nos primeiros oitenta anos do seu invento.

No entanto, na segunda metade do século XIX, alguns problemas de decaimento

na performance do regulador começaram a ser observados e com isso começaram a surgir alguns estudos sobre a dinâmica do sistema regulador de Watt. O problema consistia em estudar a estabilidade da posição de equilíbrio deste sistema. A primeira análise matemática foi feita por James Clerck Maxwell [1] em 1868 e posteriormente, em 1876, Vyshnegradskii [2] apresentou seus estudos em uma linguagem adaptada para a engenharia. A partir de seus estudos, Vyshnegradskii concluiu que o atrito era elemento essencial para um melhor funcionamento do regulador e que a queda no rendimento do dispositivo ocorre especificamente pelo crescimento da massa das esferas presas às pontas das hastes. Detalhes sobre a condição de estabilidade para o sistema regulador de Watt serão apresentados no decorrer desta dissertação.

Na última década, trabalhos sobre a dinâmica do sistema regulador de Watt voltaram a ser publicados [3-6] e com isso resurgiu o interesse nos estudos da dinâmica desse sistema. No entanto, os trabalhos publicados, até então, levam em consideração um estudo analítico do sistema de equações diferenciais que modelam o sistema regulador de Watt e pouco foi mostrado com relação ao estudo numérico desse sistema.

Sendo assim, o propósito deste trabalho é compreender melhor o modelo físico-matemático e o comportamento das soluções numéricas para um conjunto de parâmetros do sistema de equações diferenciais que descrevem o movimento do sistema regulador, com o objetivo de estudar a dinâmica e complementar os estudos que já existem sobre esse sistema. Para isso, organizamos esta dissertação da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos o modelo físico-matemático do sistema regulador de Watt e fazemos uma discussão sobre a estabilidade deste sistema; no capítulo 3 apresentamos uma síntese dos elementos fundamentais para se compreender a dinâmica não linear de um sistema dinâmico contínuo e no quarto e último capítulo apresentamos os resultados numéricos do estudo das bifurcações globais existentes no sistema.

Capítulo 2

O Sistema Regulador de Watt

2.1 Modelo Físico e Princípio de Funcionamento

Na figura 2.1 mostramos a imagem de uma máquina a vapor, onde podemos notar a presença de um dispositivo acoplado à tubulação que permite a passagem do fluxo de vapor, esse dispositivo é o sistema regulador de Watt.

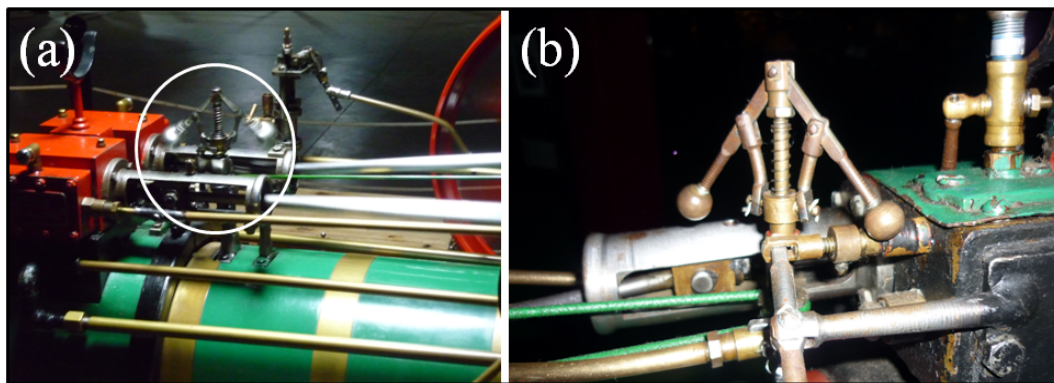


Figura 2.1: Foto do sistema regulador de Watt acoplado em uma máquina a vapor no Museu à Vapor (Gramado-RS). (a) Dispositivo em funcionamento. (b) Dispositivo em repouso.

Na figura 2.2 apresentamos um esquema do regulador da figura 2.1(b). Nesta figura temos um eixo principal E ligado ao volante D do motor de uma máquina à vapor que se conecta por um conjunto de engrenagens a um eixo vertical menor e que

gira tendo em sua extremidade superior duas hastes metálicas iguais de comprimento l com duas esferas iguais de contrapeso nas pontas de massa m cada uma. As hastes estão ligadas ao eixo e de modo que quando este gira, as hastes formam um ângulo φ com o eixo vertical e , conforme a velocidade rotacional de e . Às hastes conectamos em pontos a uma mesma distância da base móvel comum, duas outras hastes menores que também possuem ângulo central variável e que ao se abrirem devido a rotação do eixo e , fazem subir uma base móvel H (camisa mecânica) ligado à uma alavanca. Ao subir, esta alavanca fecha a válvula aliviadora da pressão da caldeira a vapor. Do mesmo modo, quando a velocidade rotacional do eixo e diminui, a camisa mecânica desce, fazendo com que a válvula, reguladora do fluxo de pressão desça também. Assim, a interação máquina à vapor e o regulador, faz com que o suprimento de vapor aumente quando a velocidade do volante D decresce ou diminua quando a velocidade do volante cresce. Dessa forma, o SRW controla o fluxo de vapor que passa pela válvula V , fazendo com que a máquina à vapor em questão funcione com velocidade rotacional constante passado algum intervalo de tempo - o transiente.

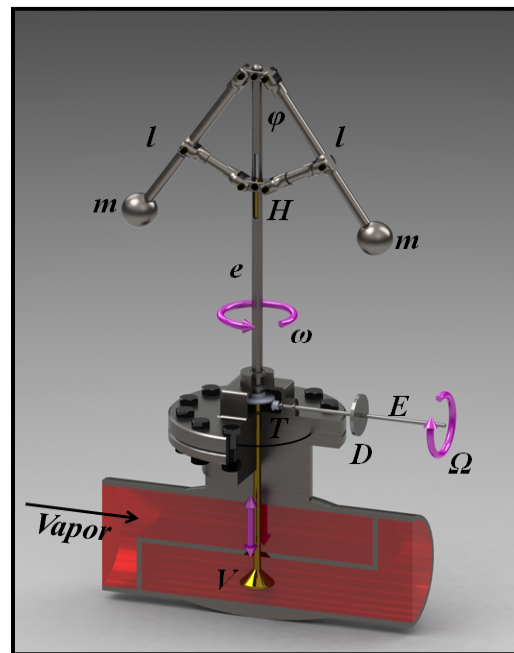


Figura 2.2: Modelo físico do sistema regulador de Watt.

A seguir é descrito o significado físico de cada parâmetro que aparece na figura 2.2:

E : eixo principal ligado ao volante;
 D : volante conectado à um conjunto de engrenagens;
 T : conjunto de engrenagens de transmissão que conecta a máquina à vapor ao eixo e ;
 Ω : velocidade rotacional do volante D da máquina;
 e : eixo vertical ao qual estão ligadas as hastes na extremidade superior;
 ω : velocidade rotacional de e ;
 l : comprimento das hastes;
 m : massa das esferas;
 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$: ângulo de desvio formado pelas hastes do regulador e o eixo de direção vertical e ;
 H : base móvel que se conecta às hastes e desliza ao longo de e ;
 V : válvula que determina o fornecimento de vapor à máquina.

2.2 Modelo Matemático

O movimento das esferas é regido por um sistema de equações diferenciais, as quais são obtidas por meio da aplicação da 2ª Lei de Newton para o movimento de rotação e translação [7]. A figura 2.3 mostra um esquema das forças que atuam na esfera, tais forças são responsáveis pelo movimento translacional, de sobe e desce, da camisa mecânica.

Sendo ω a velocidade angular do eixo e , a força centrípeta sobre as esferas é dada por $m\omega^2 l \sin \varphi$. Na situação de equilíbrio, a soma das forças tangentes ao arco descrito pela massa m ao se abrir o ângulo central φ deve ser nula, de modo que

$$\Sigma F = m\omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) determina o ângulo φ , o qual é visto como uma função crescente da velocidade angular ω do eixo e .

Para encontramos a equação que descreve o ângulo φ fora da posição de equilíbrio, devemos levar em consideração que temos uma força de atrito F_{at} , que assumimos ser diretamente proporcional a velocidade de abertura das hastes $\dot{\varphi}$, sendo $b > 0$ a constante de proporcionalidade (coeficiente de atrito), então temos que

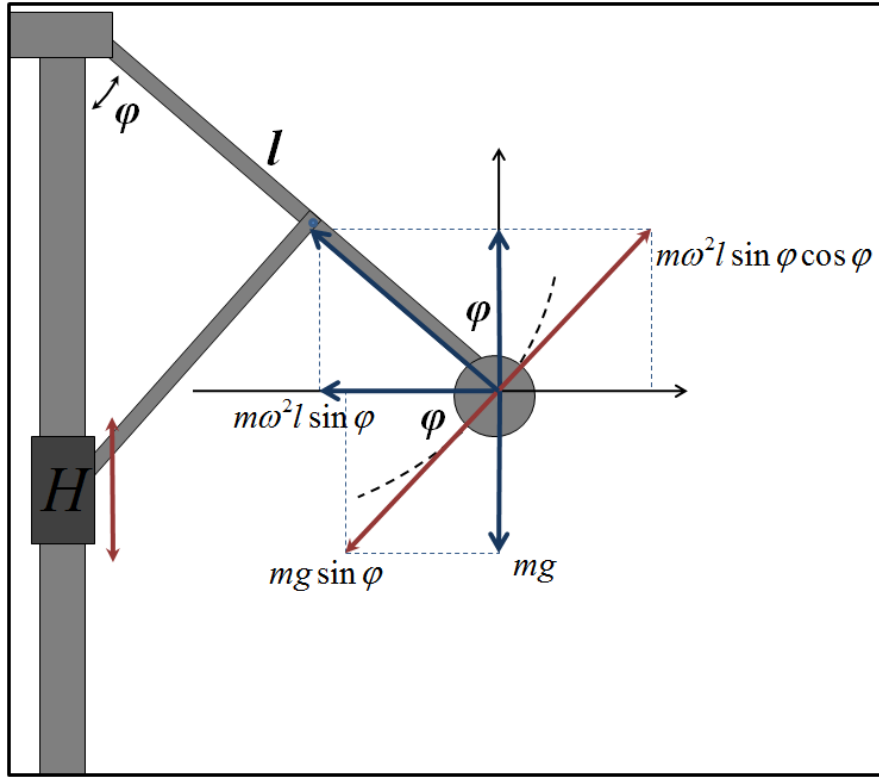


Figura 2.3: Forças que agem sobre a esfera que causam movimento de translação da camisa mecânica H.

$$F_{at} = -b\dot{\varphi}. \quad (2.2)$$

Desse modo, na posição fora do equilíbrio, temos que $\Sigma \vec{F} = m \vec{a} = m \ddot{\varphi}$, ou seja a equação do movimento para a esfera será

$$m\ddot{\varphi} = m\omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\dot{\varphi}. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) nos dá informação sobre o movimento translacional da camisa mecânica, ou seja, o movimento de sobe e desce da válvula que controla o fluxo de vapor.

Agora vamos fazer a análise do movimento rotacional dos eixos e e E . A figura 2.4 nos mostra o surgimento de torque na esfera devido ao movimento rotacional em torno no eixo e .

As velocidades angulares, ω e Ω estão relacionadas entre si de maneira linear,

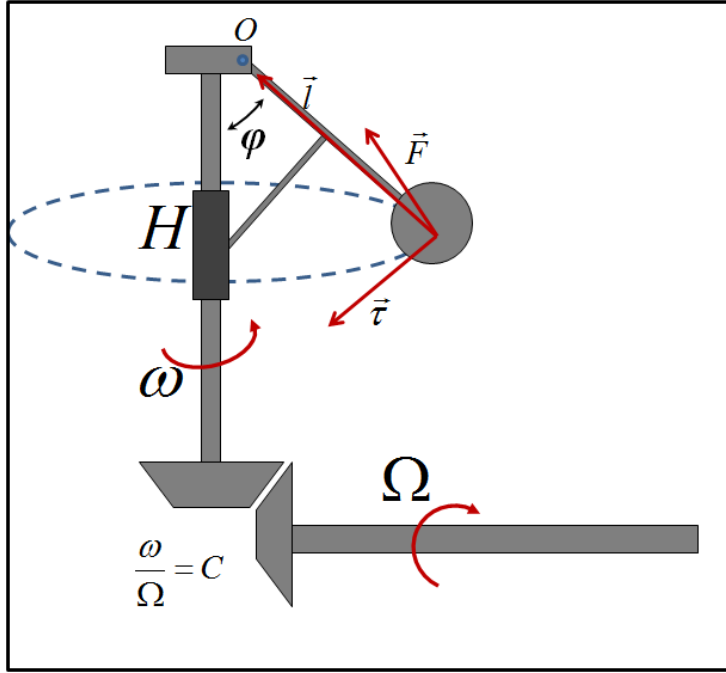


Figura 2.4: Torque que surge na esfera devido ao movimento de rotação.

de modo que $C = \frac{\omega}{\Omega}$.

A 2ª Lei de Newton para o movimento de rotação nos diz que $\Sigma \tau = I \dot{\Omega}$, onde τ são os torques que atuam no sistema, I é o momento de Inércia em relação ao eixo de rotação e , e $\dot{\Omega}$ é a aceleração angular com que o eixo e gira. Assim, podemos dizer que a equação da 2ª Lei de Newton para o movimento de rotação fica escrita da seguinte maneira

$$I \dot{\Omega} = F.l - \mu \cos \varphi, \quad (2.4)$$

sendo $\mu > 0$ uma constante de proporcionalidade inserida na equação por causa da dimensionalidade de torque.

Dessa forma, obtemos um sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica do Sistema Regulador de Watt,

$$\begin{cases} m \ddot{\varphi} = m \omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b \dot{\varphi}, \\ I \dot{\Omega} = \mu l \cos \varphi - F l. \end{cases} \quad (2.5)$$

Devemos lembrar que a velocidade rotacional dos eixos está relacionada de tal modo que $C = \frac{\omega}{\Omega}$. Assim, a equação (2.5) forma um sistema de equações diferenciais de

segunda ordem, o qual pode ser transformado em um sistema de quações diferenciais de primeira ordem, da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} = C^2\Omega^2l \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m}\psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{I}(\mu l \cos \varphi - Fl). \end{cases} \quad (2.6)$$

Fazendo a seguinte mudança de coordenada e de tempo

$$x = \varphi, \quad y = \psi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad z = C \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{e} \quad \tau = t \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.7)$$

o sistema de equações (2.6), pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z^2 \sin x \cos x - \sin x - \varepsilon y, \\ \frac{dz}{dt} = \alpha(\cos x - \beta), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde α , β e ε são parâmetros de controle, dados por

$$\alpha = \frac{C\mu}{gI}, \quad \beta = \frac{F}{\mu} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{b}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.9)$$

Assim, dizemos que a equação (2.8) modela a dinâmica do Sistema Regulador de Watt em termos do conjunto de parâmetros normalizados $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, e a partir dela serão realizados nossos estudos numéricos.

2.3 Análise da Estabilidade do Ponto de Equilíbrio

Fazendo $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ e $\dot{z} = 0$, verifica-se que o conjunto de equações diferenciais (2.8) possui um único ponto de equilíbrio que é

$$P_0 = (x, y, z) = \left(\arccos \beta, 0, \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right). \quad (2.10)$$

A matriz Jacobiana [10] para o sistema de equações (2.8), calculada no ponto de equilíbrio, fica escrita como

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1-\beta^2}{\beta} & -\varepsilon & 2\sqrt{\beta(1-\beta^2)} \\ -\alpha\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

e seu polinômio característico [10] é dado por $p(\lambda)$, com

$$-p(\lambda) = \lambda^3 + \varepsilon\lambda^2 + \frac{1-\beta^2}{\beta}\lambda + 2\alpha\beta^{3/2}\frac{1-\beta^2}{\beta}. \quad (2.12)$$

Da equação (2.12) pode-se mostrar que para todo $\varepsilon > 2\alpha\beta^{3/2}$, o sistema de equações diferenciais que modela a dinâmica do sistema regulador de Watt possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em P_0 e se $0 < \varepsilon < 2\alpha\beta^{3/2}$, P_0 é um ponto de equilíbrio instável.

A análise da estabilidade desse sistema regulador é bem conhecida na literatura, e uma discussão mais ampla é apresentada em [3].

2.4 Condição de Estabilidade de Vyshnegradskii

A análise desenvolvida nessa seção foi apresentada por Vyshnegradskii [2] em 1876, quando percebeu que uma melhor performance da máquina a vapor dependia da velocidade angular Ω do volante manter-se constante para uma carga fixa N para o suplemento de vapor da válvula.

Observe o sistema original

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = \psi \\ \frac{d\psi}{d\tau} = C^2\Omega^2 l \sin \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m}\psi \\ \frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{1}{I}(\mu \cos \varphi - Fl) \end{cases}, \quad (2.13)$$

o ponto de equilíbrio do nosso sistema é dado por $P_0 = (\psi_0, \varphi_0, \Omega_0)$, onde

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi, \\ \cos \varphi_0 &= \frac{F}{\mu}, \\ C^2\Omega_0^2 &= \frac{g}{\cos \varphi_0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tomando o conjunto $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, $\psi = \psi_0 + \Delta\psi$ e $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$, o sistema (2.13), se transforma em

$$\begin{cases} \Delta\varphi' = \Delta\psi \\ \Delta\psi' = C^2\Omega_0^2\Delta\varphi \cos 2\varphi_0 + C^2\Delta\Omega\Omega_0 \sin 2\varphi - g\Delta\varphi \cos \varphi_0 - \frac{b}{m}\Delta\psi \\ \Delta\Omega' = -\frac{\mu}{I}\Delta\varphi \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Quando substituimos (2.14) na segunda equação de (2.15), obtemos

$$\Delta\psi' = -g\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi_0}\Delta\varphi - \frac{b}{m}\Delta\psi + \frac{2g \sin \varphi_0}{\Omega_0}\Delta\Omega. \quad (2.16)$$

Assim, a matriz Jacobiana fica escrita da seguinte maneira

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g \sin \varphi_o^2}{\cos \varphi_0} & -\frac{b}{m} & \frac{2g \sin \varphi_o}{\Omega_0} \\ -\frac{\mu}{I} \sin \varphi_o & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

de onde extraímos o polinômio característico

$$-P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{b}{m}\lambda^2 + \frac{g \sin \varphi_o^2}{\cos \varphi_0}\lambda + \frac{2g\mu \sin \varphi_o}{I\Omega_0}. \quad (2.18)$$

Todos os coeficientes deste polinômio são positivos e portanto a condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade do sistema é a desigualdade

$$\frac{b}{m} \frac{g \sin \varphi_o^2}{\cos \varphi_0} > \frac{2g\mu \sin \varphi_o}{I\Omega_0} \Rightarrow \frac{bI}{m} > \frac{2\mu \cos \varphi_o}{\Omega_0} = \frac{2F}{\Omega_0}, \quad (2.19)$$

a qual é obtida por meio da análise de sinais de Descartes.

Da equação (2.14), temos

$$F\Omega_0^2 = \text{constante}, \quad (2.20)$$

e por diferenciação desta, obtemos

$$\frac{d\Omega_0}{dF} = -\frac{\Omega_0}{2F}. \quad (2.21)$$

Fazendo

$$\nu = \left| \frac{\Omega_0}{2F} \right|, \quad (2.22)$$

a condição de estabilidade poderá ser reescrita sob a forma

$$\frac{bI}{m}\nu > 1, \quad (2.23)$$

conhecida como *condição de estabilidade de Vyshnegradskii*.

Vyshnegradskii obteve as seguintes conclusões:

- O crescimento da massa m das esferas implica em um efeito prejudicial à estabilidade do sistema;
- O decrescimento do coeficiente de atrito b implica em um efeito prejudicial à estabilidade do sistema;
- O decrescimento do momento de inércia I implica em um efeito prejudicial à estabilidade do sistema;
- O decrescimento da não uniformidade de marcha ν , implica em um efeito prejudicial à estabilidade do sistema;

A conclusão final obtida por Vyshnegradskii foi a seguinte:

- O atrito é um elemento essencial para uma correta operação do regulador. "*Sem atrito, não teremos regulador*".
- Reguladores não estáticos (com não uniformidade de marcha nula), não sofrem ação do atrito. "*Sem a não uniformidade, também não teremos regulador*".

Capítulo 3

Sistemas Dinâmicos Contínuos

Um sistema dinâmico consiste em um conjunto de estados possíveis, juntamente com uma regra que determina o estado atual em termos dos estados passados [8]. O tempo em um sistema dinâmico pode ter uma variação contínua, ou então assumir somente valores discretos. No caso do tempo ter uma variação contínua, o sistema é representado por equações diferenciais. O sistema regulador de Watt é representado por um sistema de equações diferenciais e por isso é considerado um sistema contínuo. É comum referir-se a sistemas dinâmicos contínuos como *fluxos*.

No estudo da dinâmica do sistema regulador de Watt utilizaremos alguns recursos que são apresentados em livros texto da área de dinâmica não linear [8 – 10]. Neste capítulo será feita uma descrição sobre atratores no espaço de fase, da caracterização do comportamento caótico em um sistema, da construção do espaço de parâmetros e do diagrama de bifurcação.

3.1 Espaço de Fase e Atratores

O espaço de fase é o espaço formado pelas variáveis dinâmicas do sistema, no caso do sistema regulador de Watt, o espaço de fase é tridimensional, (x, y, z) . Um aspecto importante na análise da trajetória traçada no espaço de fase a medida que o tempo evolui, é a existência de *atratores*.

Os atratores são conjuntos invariantes para o qual as trajetórias convergem depois de um tempo suficientemente longo. A condição para existência de atrator é que o sistema seja dissipativo - sistema nos quais o volume no espaço de fase não

é preservado, essa discussão será abordada na seção 3.2. Os sistemas dinâmicos podem ter vários atratores e, muitas vezes, a convergência para um determinado atrator depende da condição inicial. Para o sistema regulador de Watt, encontramos atratores de diferentes formas e períodos, no entanto, um estudo mais detalhado será apresentado na discussão dos resultados numéricos.

3.2 Caracterização do Comportamento Caótico

A principal característica de um atrator cuja dinâmica é caótica, é a dependência sensível às condições iniciais. Em um atrator caótico, duas órbitas inicialmente muito próximas no espaço de fase divergem exponencialmente uma da outra a medida que o sistema evolui no tempo, como esquematizado na figura 3.1.

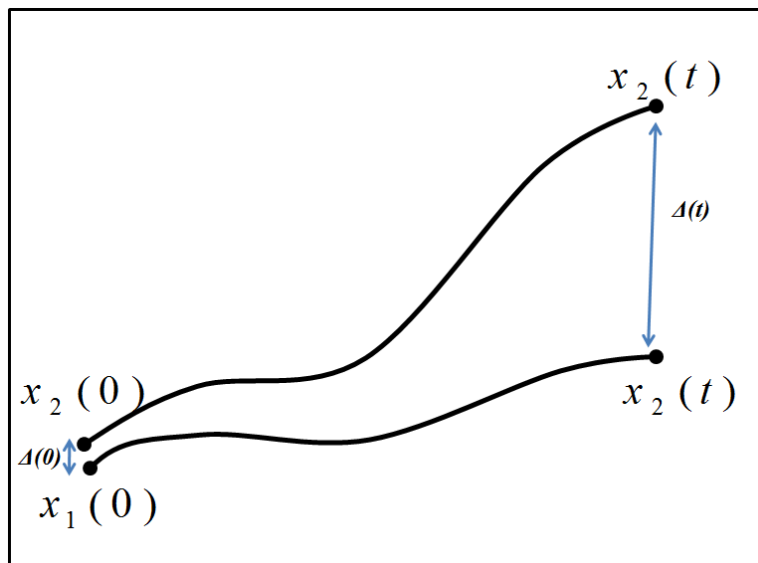


Figura 3.1: Divergência das órbitas geradas por diferentes condições iniciais.

Essa dependência sensível nas condições iniciais resulta das não-linearidades que aparecem no sistema, as quais amplificam exponencialmente pequenas diferenças nas condições iniciais. Essa razão de afastamento de duas órbitas pode ser quantificada, ou seja, podemos calcular uma quantidade que nos diga o quanto o sistema é caótico. Essa quantidade é conhecida na literatura como o *expoente de Lyapunov*

[10]. O expoente de Lyapunov é obtido fazendo a análise do afastamento da órbita em cada dimensão do sistema, ou seja, para sistemas N -dimensionais temos N expoentes de Lyapunov, um para cada dimensão.

Seja um sistema de N equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Vamos considerar uma hipersfera de condições iniciais centrada num ponto $\vec{x}(t_0)$. Conforme o tempo passa, o raio inicial dessa esfera $d_j(t_0)$ na média, vai variando exponencialmente no tempo, de maneira que a relação entre $d_j(t_0)$ e o valor correspondente no instante t , dado por $d_j(t)$, seja

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad t > t_0 \quad \text{e } j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.1)$$

Essa relação pode ser escrita como

$$\lambda_j = \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{d_j(t)}{d_j(t_0)}. \quad (3.2)$$

Os números λ_j são chamados de expoentes de Lyapunov e o índice j representa a dimensão em questão.

Num instante $t > t_0$, o volume $V(t)$ da hipersfera deve ser proporcional aos produtos das distâncias $d_j(t)$ que o caracterizam, ou seja,

$$V(t) \propto \prod d_j(t) \propto V(t_0)e^{(t-t_0)\sum \lambda_j}, \quad (3.3)$$

sendo $V(t_0)$ o volume no instante t_0 . Se o sistema é conservativo, então $V(t) = V(t_0)$, ou, em termos de expoente de Lyapunov

$$\sum \lambda_j = 0. \quad (3.4)$$

Se o sistema for dissipativo $V(t) < V(t_0)$, então

$$\sum \lambda_j < 0. \quad (3.5)$$

Sobre uma órbita periódica, a distância entre duas condições inicialmente vizinhas se mantém, em média contante, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares ao atrator periódico, há contração de volume no espaço de fase, portanto, os expoentes de Lyapunov correspondentes a essas direções são negativos.

Comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial das órbitas vizinhas. Nesse caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica dependência sensível nas condições iniciais e a existência de um atrator caótico no espaço de fase.

Num sistema tridimensional, que é o nosso caso, podem existir quatro tipos de atratores, como é mostrado na figura 3.2.

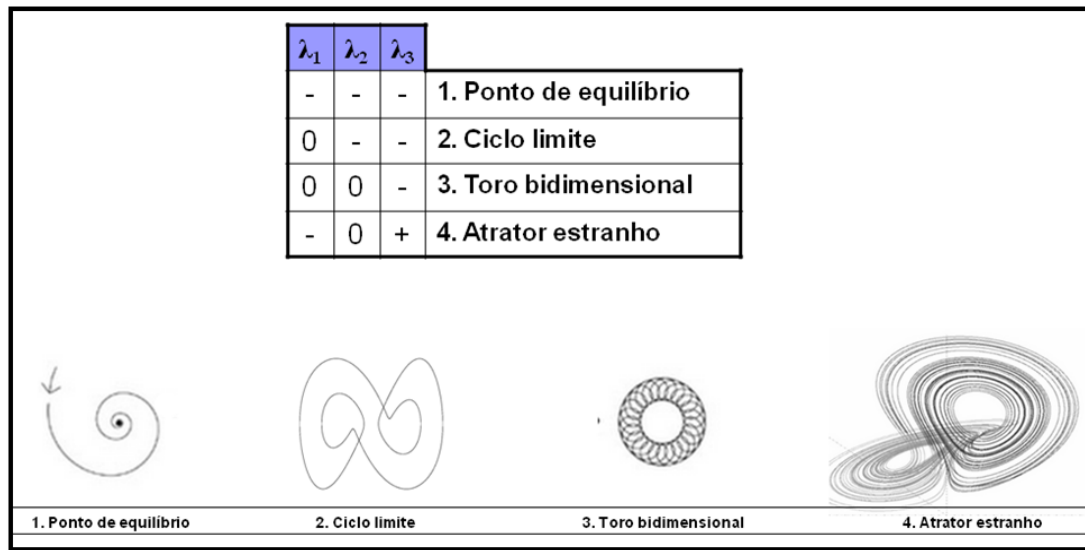


Figura 3.2: Possíveis tipos de atratores encontrados em sistemas tridimensionais.

3.3 Espaço de Parâmetros

Como já vimos, as equações que descrevem o movimento do sistema regulador de Watt, equação (2.6), podem ser reescritas em termos dos parâmetros $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, equação (2.8). Sendo assim, podemos estudar o comportamento dinâmico do sistema variando os parâmetros envolvidos nele. Como o sistema regulador de Watt é um sistema tridimensional, vamos obter um conjunto de pontos $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ no espaço dos parâmetros que satisfazem a equação (2.8).

Para facilitar o estudo do espaço de parâmetros, fixamos um parâmetro e variamos outros dois, um em função do outro. No caso do sistema regulador de Watt, se fixarmos o parâmetro β , podemos construir o espaço de parâmetros $\varepsilon \times \alpha$, se fixarmos o parâmetro ε , podemos construir o espaço de parâmetros $\beta \times \alpha$ e se fixarmos

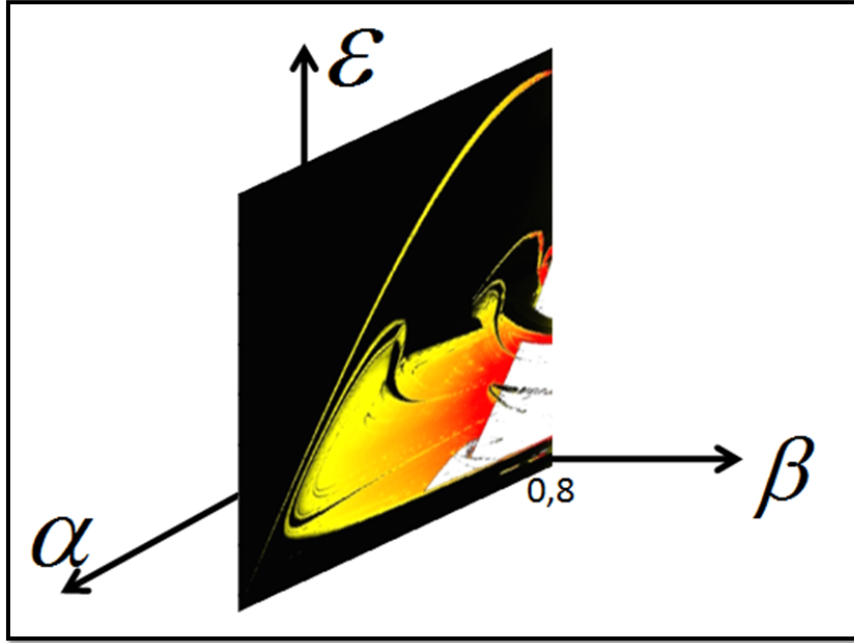


Figura 3.3: Corte transversal no espaço de parâmetros $\varepsilon \times \alpha$ com $\beta = 0,8$.

o parâmetro α , podemos construir o espaço de parâmetros $\varepsilon \times \beta$. Para compreender melhor mostramos na figura 3.3 o espaço de parâmetros para a equação (2.8) quando se fixa o parâmetro β em 0,8 e varia α e ε no intervalo $[0; 1, 80]$.

Para a construção do espaço de parâmetros que são apresentados neste trabalho, resolvemos numericamente o sistema de equações (2.8) com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizando passo de integração igual a 10^{-2} e inicialização $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ e descartamos um transiente de 5×10^5 iteradas. Calculamos o maior expoente de Lyapunov para cada ponto de uma grade de 500×500 valores de três pares de parâmetros (α, β) , (α, ε) e (β, ε) . Então, para cada par de parâmetros, calculamos o maior expoente de Lyapunov e assim construímos um diagrama de Lyapunov usando a grade de parâmetros nos eixos e atribuímos cores para cada maior valor do expoente de Lyapunov e assim conseguimos ter uma visão global de como se comportam as soluções numéricas em termos de caoticidade e periodicidade.

3.4 Diagrama de Bifurcação

Uma descrição global do sistema envolve o conhecimento de todos os comportamentos possíveis para os vários valores dos parâmetros, e essa descrição pode ser feita por meio de um *diagrama de bifurcação*. Um diagrama de bifurcação é a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas para cada valor do parâmetro e é construído plotando-se uma das variáveis x, y , ou z em função de um parâmetro do sistema $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ e são utilizados para estudar de maneira global a periodicidade e os tipos de rotas para o caos existentes no sistema.

Para o sistema de equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema regulador de Watt, optamos por construir o diagrama de bifurcações levando em consideração como a variável y do sistema varia com os parâmetros (α, ε) .

3.5 Resultados Numéricos

O estudo numérico deste trabalho consiste em calcular o maior expoente de Lyapunov, resolvendo numericamente a equação (2.8) conforme descrito na seção 3.3, para cada par de parâmetros:

- (α, ε) com $\beta = 0,8$;
- (β, ε) com $\alpha = 0,95$ e
- (α, β) com $\varepsilon = 0,7$.

Os valores para cada par de parâmetros foram discretizados em uma malha de 500×500 pontos. Para efeitos de análise do comportamento caótico do sistema, identificamos uma cor para cada maior expoente de Lyapunov, variando continuamente o espectro, desde o preto (expoente zero), passando pelo amarelo (expoente positivo), até o vermelho (expoente positivo, maior em módulo do que os pontos em amarelo). Dessa forma, conseguimos identificar o comportamento dinâmico (caótico ou periódico) do Sistema Regulador de Watt, observando as regiões para cada par de valores de parâmetros.

A figura 3.4 mostra cortes no espaço de parâmetros $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ num espaço tridimensional. Regiões pretas representam comportamento periódico, as regiões amarelas

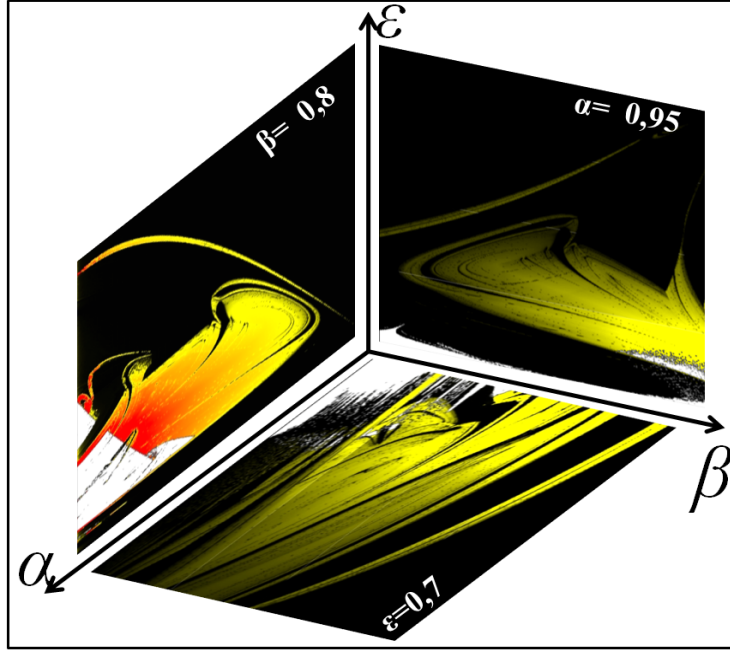


Figura 3.4: Visão em cortes do espaço de parâmetros tridimensional do sistema regulador de Watt.

e vermelhas representam comportamento caótico e a região em branco indica divergência da solução numérica naquela região. O valor em branco em cada espaço de parâmetros indica o plano em que foi feito o corte no espaço tridimensional.

Podemos observar a existência de estruturas periódicas imersas em regiões caóticas. Para melhor visualização destas estruturas, apresentamos cada espaço de parâmetros em seus respectivos planos nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7. Na figura 3.5 o espaço de parâmetros (α, ϵ) foi construído no intervalo de $\alpha = [0, 2; 1, 8]$ e $\epsilon = [0, 2; 1, 8]$ com $\beta = 0, 8$, na figura 3.6 o espaço de parâmetros (β, ϵ) foi construído no intervalo $\beta = [0, 6; 1, 0]$ e $\epsilon = [0, 2; 1, 8]$ com $\alpha = 0, 95$ e na figura 3.7 temos o espaço de parâmetros (α, β) no intervalo $\alpha = [0, 4; 1, 8]$ e $\beta = [0, 4; 1, 0]$ com $\epsilon = 0, 7$.

Escolhemos a figura 3.5 para fazermos a ampliação de algumas regiões e visualizarmos melhor essas estruturas periódicas, bem como estudar as regras de organização destas estruturas. Nesta figura mostramos as regiões que serão ampliadas, as caixas (a), (b) e (c).

Nos três casos o parâmetro β continuará fixo em $0, 8$. A caixa (a) da figura 3.5 será reconstruída no intervalo $\alpha = [1, 25; 1, 55]$ e $\epsilon = [0, 75; 1, 15]$, a caixa (b)

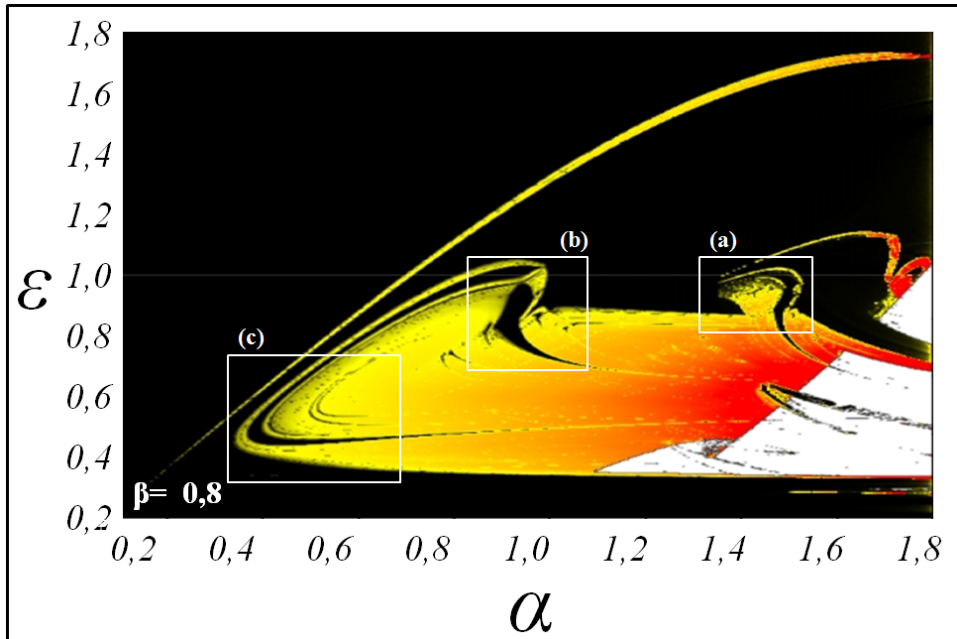


Figura 3.5: Plano do espaço de parâmetros $\varepsilon \times \alpha$ para $\beta = 0,8$.

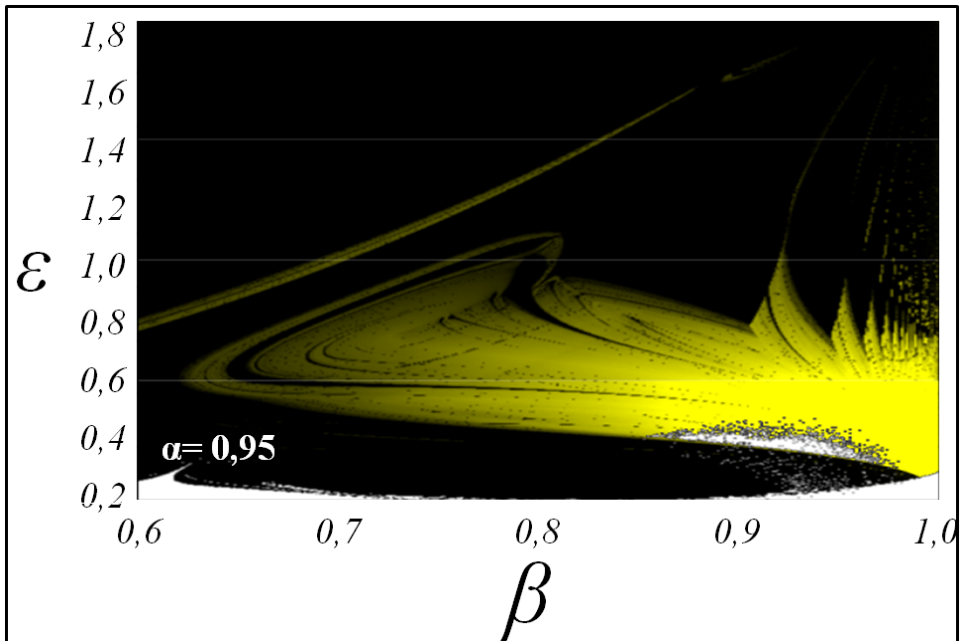


Figura 3.6: Plano do espaço de parâmetros $\varepsilon \times \beta$ para $\alpha = 0,95$.

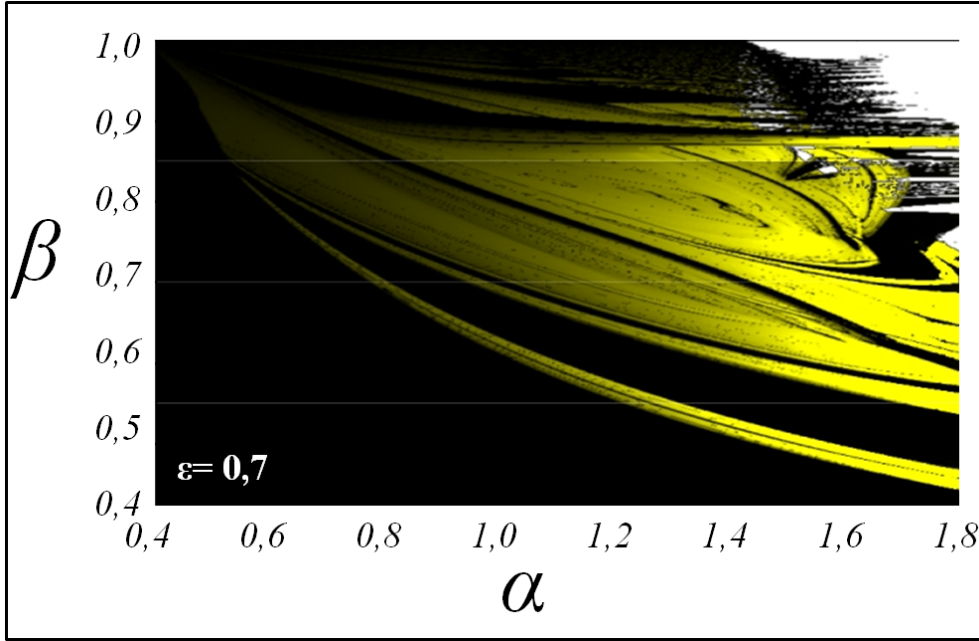


Figura 3.7: Plano do espaço de parâmetros $\beta \times \alpha$ para $\varepsilon = 0,7$.

será reconstruída no intervalo $\alpha = [0,80; 1,05]$ e $\varepsilon = [0,65; 1,00]$ e a caixa (c) será reconstruída no intervalo $\alpha = [0,34; 0,76]$ e $\varepsilon = [0,26; 0,66]$.

Nas figuras 3.8, 3.9 e 3.10, apresentamos a ampliação das caixas (a), (b), (c) da figura ?? e observamos a existência de estruturas periódicas imersas em regiões caóticas.

Para um melhor estudo dessas regiões, vamos refazer o procedimento de ampliação de uma certa região do espaço de parâmetros para obter uma melhor resolução da malha e assim observar como se organizam essas estruturas periódicas.

Na figura 3.11 mostramos as regiões (1) e (2) que serão ampliadas. O intervalo da caixa (1) é $\alpha = [0,93; 0,99]$ e $\varepsilon = [0,74; 0,86]$ e o intervalo da caixa (2) é $\alpha = [0,99; 1,06]$ e $\varepsilon = [0,70; 0,86]$. O esquema de cores é o mesmo dos diagramas anteriores. Todas as três projeções (α, β) , (α, ε) , e (β, ε) , apresentam algumas características básicas, como porções de grandes regiões periódicas, incluindo estruturas periódicas embutidas em regiões caóticas.

Para ser mais claro com a última afirmação, observamos na figura 3.11 ampliações dos diagramas de Lyapunov que mostram a presença de estruturas periódicas,

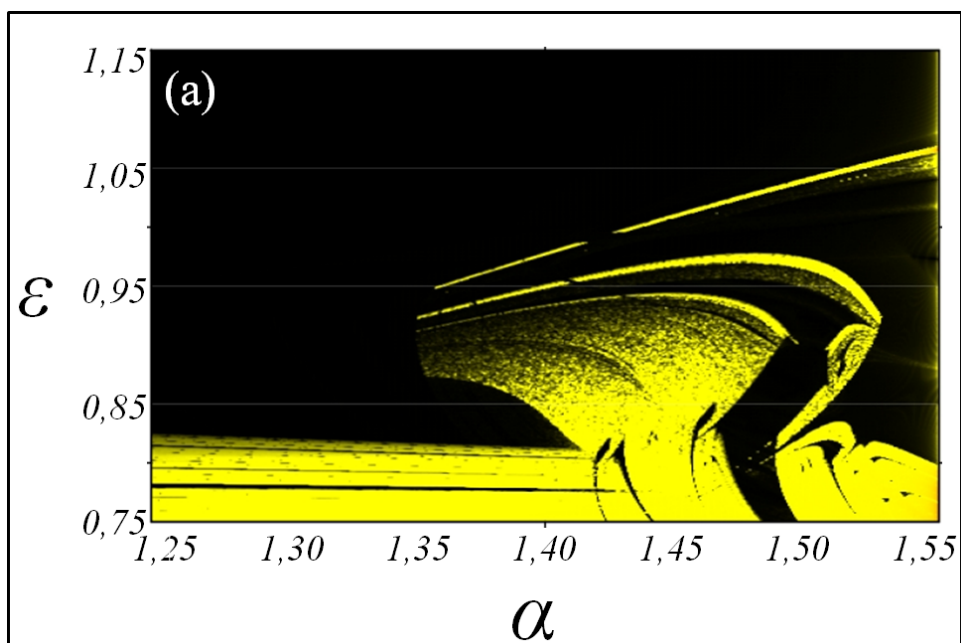


Figura 3.8: Ampliação da caixa (a) da figura 4.3.

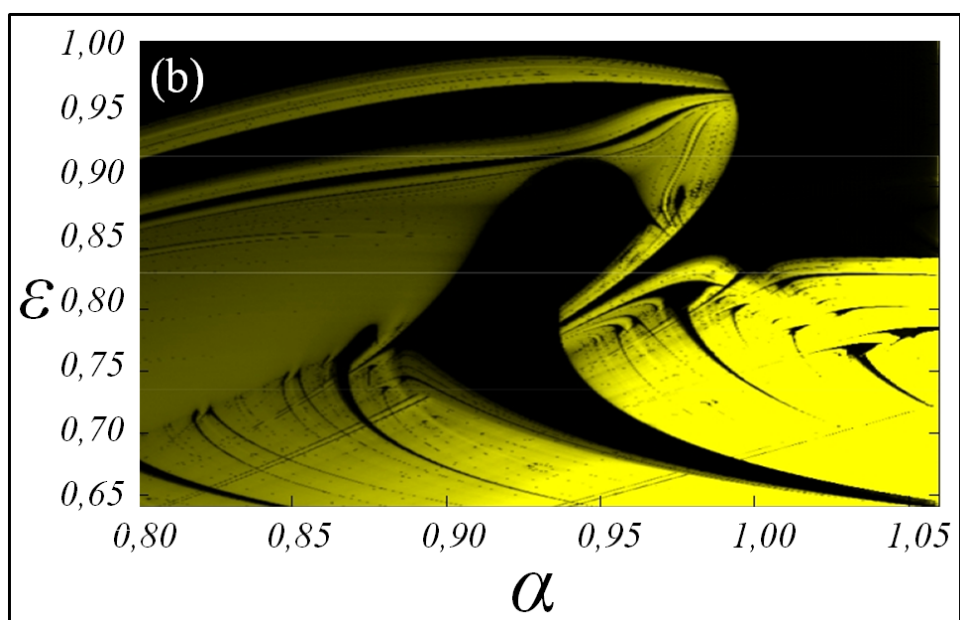


Figura 3.9: Ampliação da caixa (b) da figura 4.3.

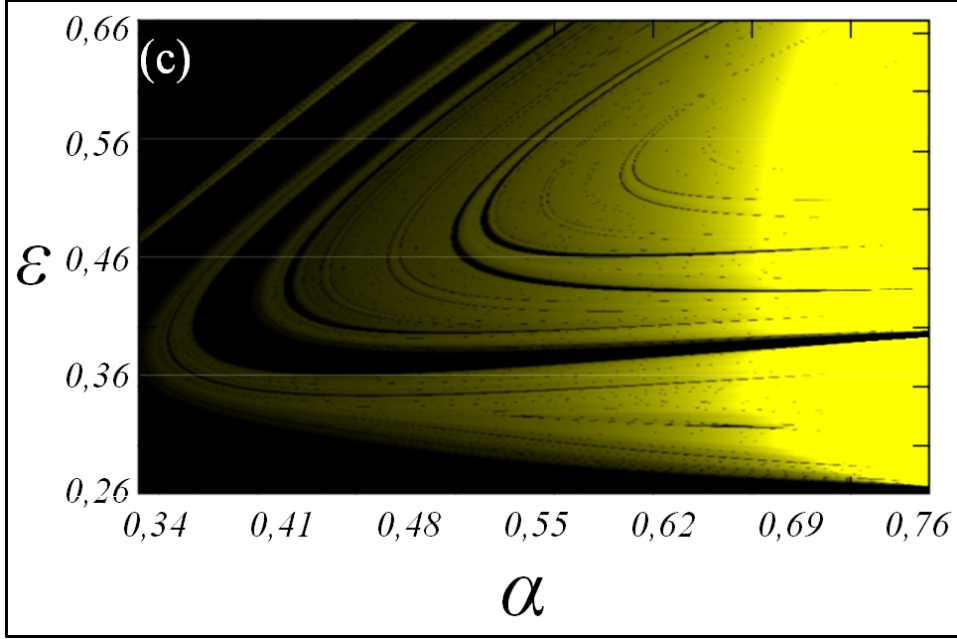


Figura 3.10: Ampliação da caixa (c) da figura 4.3.

ou seja, camarões [11],[12] que organizam-se em algumas direções específicas nesses diagramas. Para sermos mais específicos e estudarmos com mais detalhes estas auto-organizações, escolhemos uma dessas seqüências, ou seja, a seqüência principal dentro da caixa (1) da figura 3.11. A amplificação das caixas (1) e (2) da figura 3.11 são mostradas nas figuras 3.12 e 3.13, onde podemos observar estruturas periódicas se auto organizando. Com relação a essa auto-organização, através de inspeções na figura 3.12, nós também podemos associar a ele o padrão de pares de estruturas, e esses pares também se organizam e se acumulam numa região de fronteira periódica.

A auto-organização mais comum de estruturas periódicas, relatada em uma grande classe de sistemas [11-15], é conhecida como cascata por adição de período, onde as estruturas se organizam de tal forma que o período de cada estrutura aumenta de forma constante em direções específicas. No entanto, no caso aqui relatado, figura 3.12, observa-se uma seqüência intrigante de acumulação, ou seja, descobrimos que os períodos das estruturas surgem organizados de acordo com uma solução de equações diofantinas.

Na figura 3.14 mostramos o diagrama do período- q em uma parte da figura 3.12, para melhor visualizarmos a seqüência de período dos pares de estruturas. Os

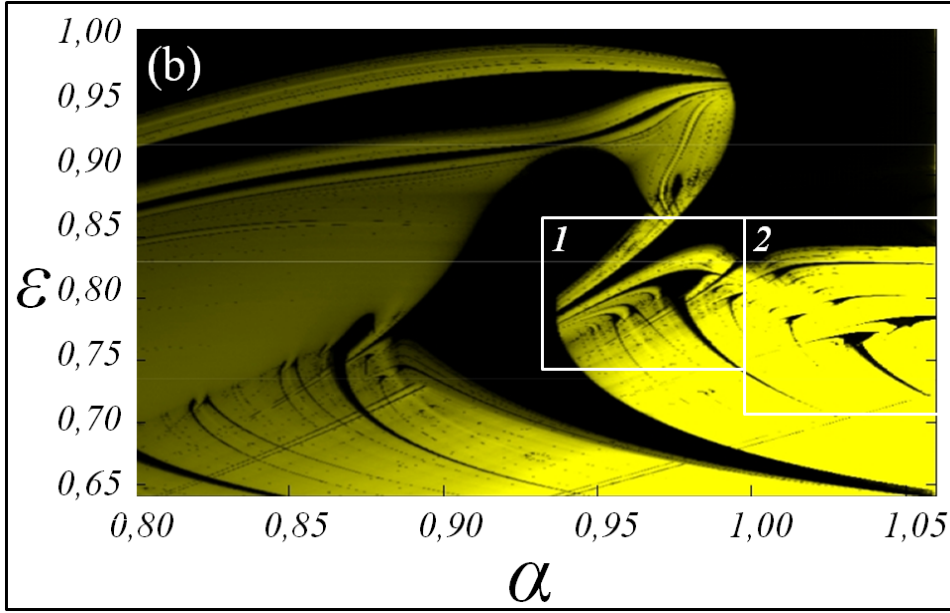


Figura 3.11: Regiões da figura 3.9 que serão ampliadas.

períodos foram obtidos contando o número de máximos da série temporal (y, t) para cada par de parâmetros.

Na figura 3.15, mostramos os períodos de cada par de estruturas ao longo da linha tracejada na figura 3.14 e três novos pares de estruturas são identificados quando o parâmetro α diminui, já que na figura 3.14 não são visíveis devido à escala dos eixos. Na figura 3.14 temos o seguinte esquema de cores: preto para $q = 8$, azul para $q = 11$, verde para $q = 13$, amarelo para $q = 16$, vermelho para $q = 17$, laranja para $q = 21$, marrom para $q = 27$, e violeta para $q = 31$. Além desses períodos, conseguimos, no gráfico da figura 3.15, obter três pares de período que não tinham sido observados na figura 3.14, os pares de cor verde, magenta e ciano.

Uma vez que os períodos de algumas estruturas são conhecidos, podemos agora analisar as suas regras de organização. Para facilitar nossa análise, mostramos na figura 3.16 um diagrama com os pares de períodos ordenados em uma sequência inversa do mostrado nas figuras 3.14 e 3.15, e cada par de período representa um par de estruturas da figura 3.14.

As setas com as expressões representam as regras de organização dos períodos das estruturas. Com este diagrama observamos que existem ao menos quatro regras distintas para a organização das estruturas, quais sejam, duas regras para a orga-

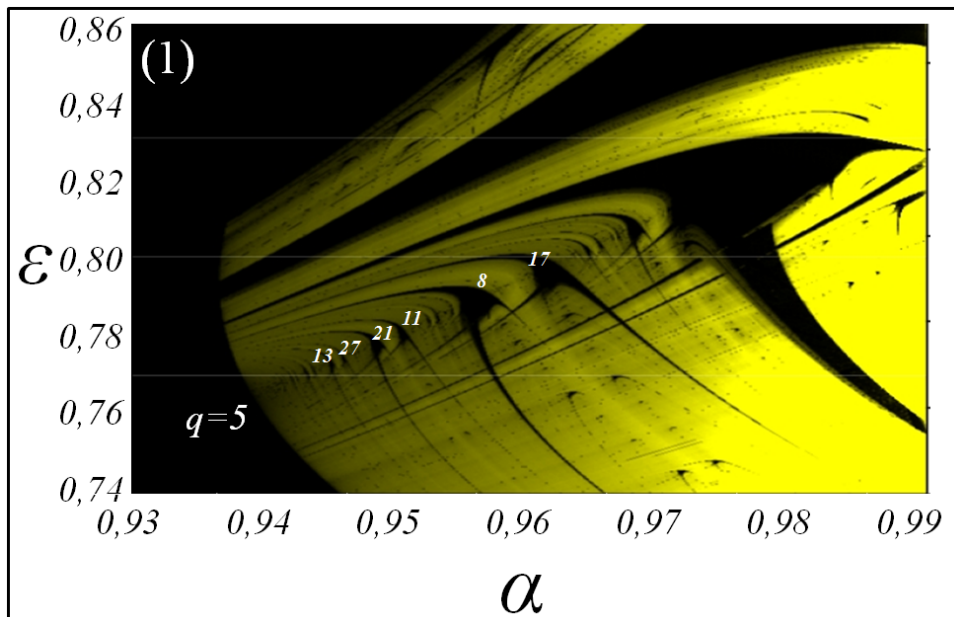


Figura 3.12: Ampliação da caixa (1) da figura 3.11.

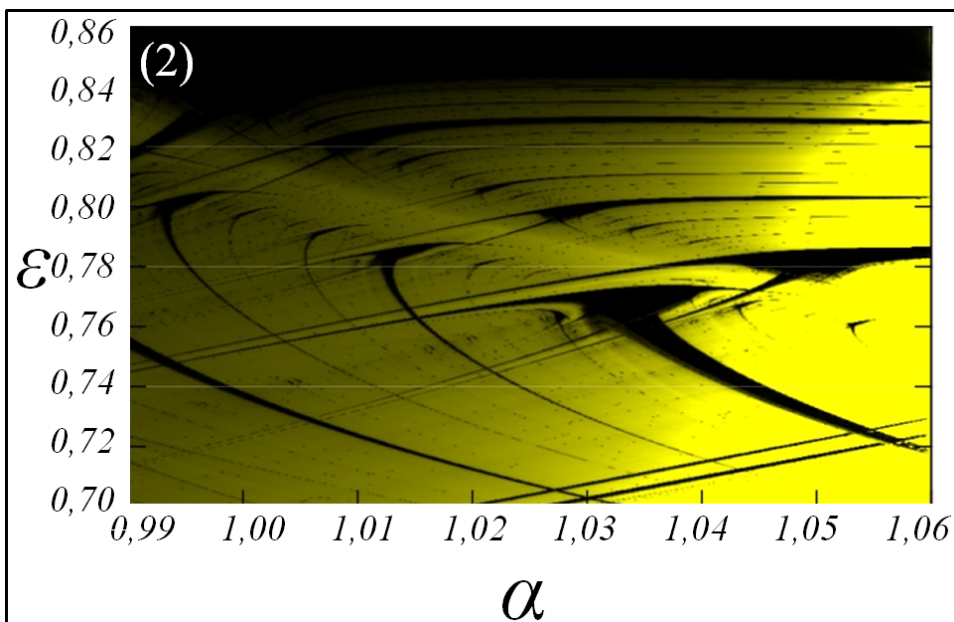


Figura 3.13: Ampliação da caixa (2) da figura 3.11.

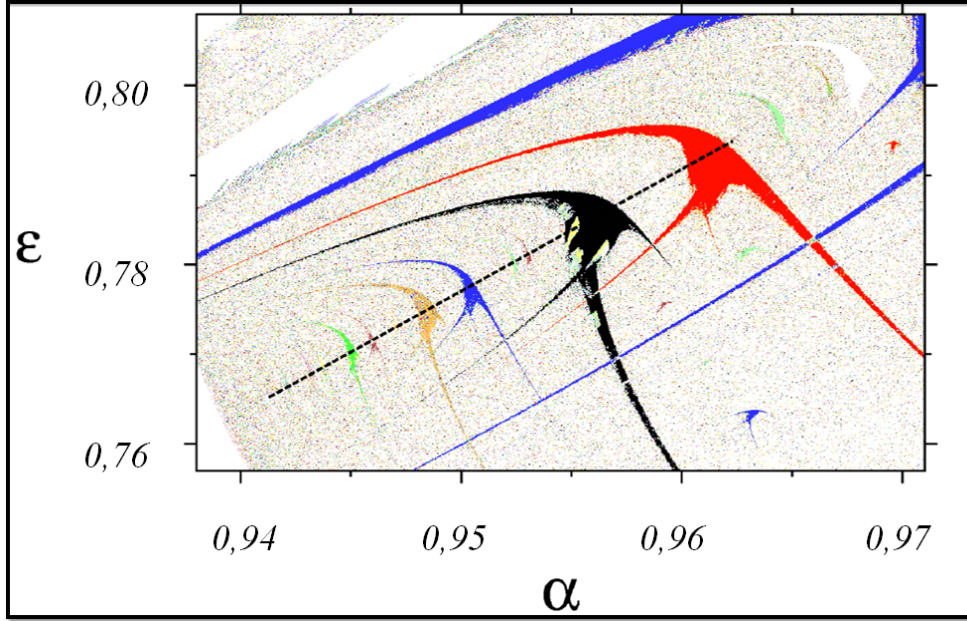


Figura 3.14: Diagrama do período- q em uma parte da figura 3.12.

nização dos pares, setas sólidas superiores na figura 3.16, e duas regras conectando estruturas de pares distintos, setas sólidas inferiores na figura 3.16. As expressões que representam estas regras de organização podem ser vistas como equações diofantinas lineares. Entretanto, as duas expressões para a organização dos períodos dos pares distintos podem ser descritas por uma única equação diofantina quadrática $(x - 2y)^2 = 1$, onde x e y são o maior e o menor período dos pares, respectivamente. As duas expressões que conectam os pares podem ser descritas por outra equação diofantina quadrática $(2x - 2y - 9)^2 = 9$, já que $x = y + 6$ e $x = y + 3$, como mostrado na figura 3.16. Portanto, com as duas equações diofantinas quadráticas acima, podemos construir toda a sequência de acumulação das estruturas em direção à fronteira periódica. Neste diagrama, também podemos observar cascatas de bifurcação por adição de período entre pares alternados, isto é, entre soluções alternadas da equação diofantina quadrática $(x - 2y)^2 = 1$, representadas pelas setas tracejadas superiores e inferiores. Estas expressões para as cascatas de adição de período indicam que temos uma solução geral para os períodos x e y dados por $x = x_0 + 2n$ e $y = y_0 + n$, onde $n = 5$. Ressaltamos também que a fronteira periódica dessa sequência de acumulação é de período-5, como mostrado na figura 3.12.

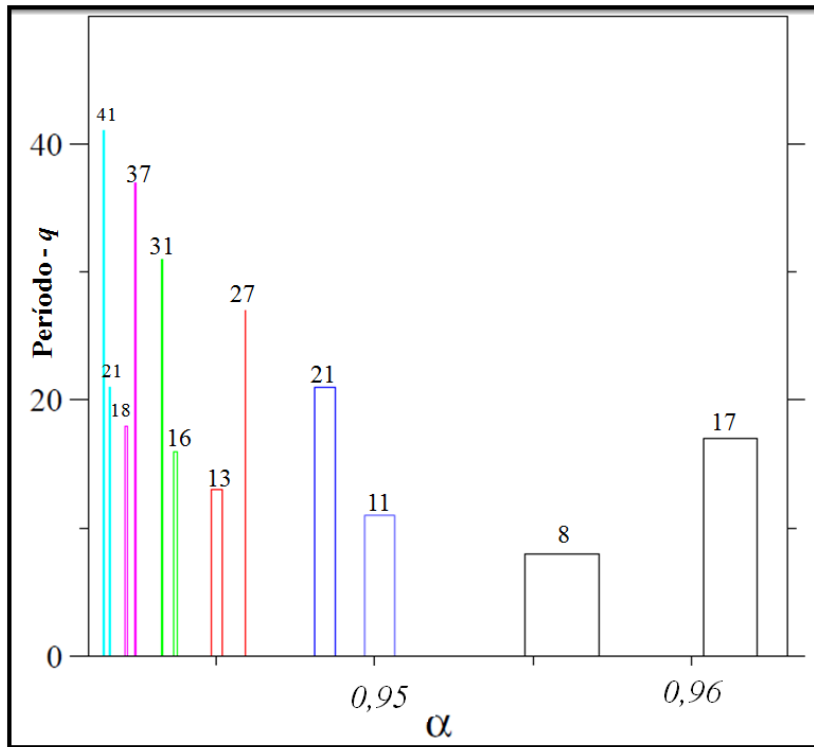


Figura 3.15: Comportamento do período- q em função do parâmetro α da linha tracejada na figura 3.14.

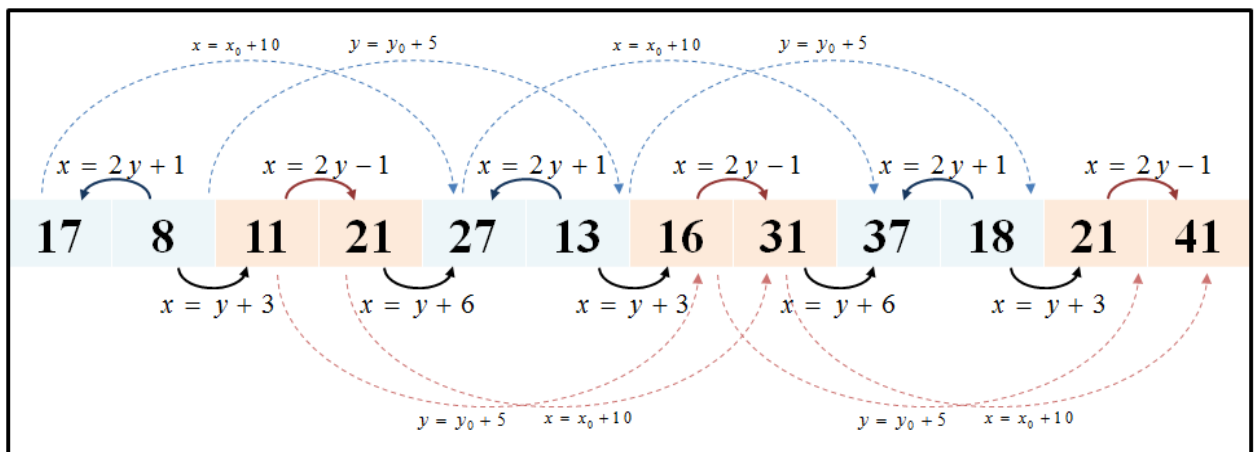


Figura 3.16: Organização da sequência de períodos da figura 3.14.

Capítulo 4

Conclusões

O comportamento das soluções numéricas do sistema de equações diferenciais que modelam a dinâmica do sistema regulador de Watt nos mostra que existem estruturas hierárquicas periódicas imersas em regiões de caos e que podemos encontrar leis de formação para os períodos dessas estruturas. Sabendo que a periodicidade é um número inteiro, conseguimos verificar que a sequência que descreve a organização dos períodos obedece soluções de equações diofantinas, equações cujas soluções permitidas são números inteiros.

Podemos ter infinitos cortes do espaço de parâmetros tridimensional $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ e consequentemente infinitas análises sobre o comportamento das regiões de periodicidade, no entanto, podemos observar que a lei de formação de pares de camarões sempre nos levam a uma sequência numérica que por sinal acabam sendo soluções de equações diofantina. Os resultados numéricos aqui relatados, através de diagramas de Lyapunov, são praticamente impossíveis de serem previstos analiticamente (senão impossíveis). Uma questão que precisa de mais estudos é que tipo de sistemas apresentam a mesma organização hierárquica mostrada aqui, ou seja, seguindo a soluções de equações diofantinas.

Outra característica observada nos espaços de parâmetros estudados é a auto-similaridade de algumas estruturas, ou seja, o comportamento de certas regiões se repete em outras regiões do espaço de parâmetros, dessa forma, acreditamos que possa existir um conjunto de equações diofantinas que descrevem como se dá a organização de períodos no sistema regulador de Watt.

O cálculo numérico do expoente de Lyapunov nos mostra que o maior expoente

é sempre um número muito pequeno da ordem de 10^a com $-8 < a < -2$. Essa quantidade que indica o grau de caocidade do sistema, mesmo sendo muito pequena as vezes, ainda é maior do que zero e isso é condição necessária para a existência de sensibilidade nas condições iniciais e consequentemente *caos*.

O fato de um expoente de Lyapunov ser uma quantidade positiva, no entanto muita pequena, nos leva a concluir que existe uma certa hipersensibilidade no sistema, assim, quando observamos uma certa região periódica, essa região pode estar numa faixa muito pequena e isso nos leva a expandir as conclusões obtidas por Vyshnegradskii. Além do atrito ser importante para o funcionamento do sistema, como afirmou Vyshnegradski, temos também que a construção do dispositivo deve respeitar um padrão típico de qualidade. Dessa forma, qualquer alteração, mínima que seja, em qualquer parâmetro do sistema, podemos encontrar *caos*. Assim, podemos afirmar que o crescimento descontrolado da produção desses dispositivos, não levaram em consideração essa questão e com isso os dispositivos começaram a apresentar problemas na sua performance.

Por fim, o estudo dos espaços de parâmetros do sistema regulador de Watt, nos mostrou que sistemas dinâmicos podem apresentar uma variedade de comportamentos distintos, cada região com uma certa particularidade, mas que pode se repetir no todo.

Referências Bibliográficas

- [1] J.C. Maxwell, *On governors*, Proceedings of the Royal Society **16**, N.100, 1868 (270-283).
- [2] I. A. Vysnhegradskii, *Sus la Théorie Générale des Régulateurs*, C.R. Acad. Sci. Paris **83**, 1876 (318-321).
- [3] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Stability and Hopf Bifurcation in the Watt Governor System*, Commun. Appl. Nonlinear Anal **13**, 4, 2006 (1-17).
- [4] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Bifurcation Analysis of the Watt Governor System*, Comp. Appl. Math. **26**, 1, 2007 (19-44).
- [5] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Stability and Hopf Bifurcation in a Hexagonal Governor System*, Nonlinear Anal.: Real World Appl., **9**, 3, 2008 (889-898).
- [6] J. Zhang, X. Li, Y. Chu, J. Yu, Y. Chang, *Hopf bifurcations, Luapunov expoents and control of chaos for a class of centrifugal flywheel governor system*, Chaos, Solitons and Fractals **39**, 2009 (2150-2168).
- [7] L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1962.
- [8] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1996.
- [9] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [10] N. F. Ferrara e C. P. C. Prado, *Caos - Uma Introdução*, Edgard Blöcher Ltda, São Paulo, 1995.

- [11] C. Bonato e J. A. C. Gallas, *Accumulation Boundaries: Codimension-two Accumulation of Accumulations in Phase Diagram of Semiconductor Lasers*, *Electric Circuits, Atmospheric and Chemical Oscillators*, Phil. Trans. R. Soc. A **336**, 2007 (505-517)
- [12] C. Bonato, J. C. Garreau, J.A.C. Gallas, *Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser*, Physics Review Letters **95**, 143905, 2005.
- [13] E. R. Viana Jr., R. M. Rubinger, H. A. Albuquerque, A. G. de Oliveira e G. M. Ribeiro, *High-resolution Parameter Space of an Experimental Chaotic Circuit*, Chaos **20**, issue 2, 023110, 2010.
- [14] C. Stegemann, H. A. Albuquerque e P. C. Rech, *Some Two-dimensional Parameter Spaces of a Chua System with Cubic Nonlinearity*, Chaos **20**, issue 2, 023103, 2010.
- [15] J. C. D. Cardoso, H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, *Complex periodic structures in bi-dimensional bifurcation diagrams of a RLC circuit model with a non-linear NDC device*, Physical Letters A **373**, 2009.