

Nesse trabalho investigamos planos de parâmetros construídos para um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, autônomas, não lineares de primeira ordem com dez parâmetros que modela uma cadeia alimentar tritrófica. Usamos expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação, e curvas no espaço de fase para caracterizar numericamente a dinâmica do modelo em um plano de parâmetro e, mostramos que este apresenta estruturas periódicas típicas em meio à regiões caóticas, formando espirais que se enrolam ao redor de um ponto focal ao passo que surgem bifurcações de adição de período.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, 2015

ANO
2015

RODRIGO ANTONIO DA SILVA | ESTRUTURAS PERIÓDICAS ESPIRAIS EM PLANOS DE PARÂMETROS DE UM MODELO ECOLÓGICO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTRUTURAS PERIÓDICAS
ESPIRAIS EM PLANOS DE
PARÂMETROS DE UM MODELO
ECOLÓGICO**

RODRIGO ANTONIO DA SILVA

JOINVILLE, 2015

RODRIGO ANTONIO DA SILVA

**ESTRUTURAS PERIÓDICAS ESPIRAIS EM PLANOS DE
PARÂMETROS DE UM MODELO ECOLÓGICO**

Dissertação apresentada para
obtenção do título de mestre em
Física pela Universidade do
Estado de Santa Catarina, Centro
de Ciências Tecnológicas – CCT.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, SC

2015

S586e Silva, Rodrigo Antonio da
Estruturas periódicas espirais em planos de
parâmetros de um
Modelo ecológico / Rodrigo Antonio da Silva. – 2015.
52 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Paulo Cesar Rech
Bibliografia: p. 47-52
Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Mestrado em Física, Joinville, 2015.

1. Bifurcação de adição de período 2. Estrutura periódica
espiral 3. Plano de parâmetro 4. Expoentes de Lyapunov
II.Rech, Paulo Cesar III. Universidade do Estado de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física IV.
Título

CDD: 530 – 20.ed.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UDESC

RODRIGO ANTONIO DA SILVA

ESTRUTURAS PERIÓDICAS ESPIRAIS EM PLANOS DE

PARÂMETROS DE UM MODELO ECOLÓGICO

Dissertação apresentada ao Curso de Programa de Pós-Graduação em Física como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração “Física”.

Banca Examinadora

Orientador:



Prof. Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC

Membros



Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC



Prof. Dr. Edson Denis Leonel
UNESP

Joinville, SC, 27 de fevereiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial meus pais Marcos e Sandra, pelo apoio, e meu irmão Rafael.

Ao meu orientador professor Paulo, por aceitar o desafio de me orientar, pela paciência e ensinamentos transmitidos nestes dois anos.

Aos amigos do Mestrado, pelas discussões, troca de conhecimentos e momentos de descontração.

Aos professores do Mestrado, em especial Professor Luciano pelas discussões e conhecimentos compartilhados.

À CAPES, CNPq e UDESC pelo apoio financeiro nestes dois anos.

RESUMO

Nesse trabalho investigamos planos de parâmetros construídos para um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, autônomas, não lineares de primeira ordem com dez parâmetros que modela uma cadeia alimentar tritrófica. Usamos expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação, e curvas no espaço de fase para caracterizar numericamente a dinâmica do modelo em um plano de parâmetro e, mostramos que este apresenta estruturas periódicas típicas em meio à regiões caóticas, formando espirais que se enrolam ao redor de um ponto focal ao passo que surgem bifurcações de adição de período.

Palavras-chave: Bifurcação de adição de período. Estrutura periódica espiral. Plano de parâmetro. Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

In this work we investigate parameter planes constructed for a set of three autonomous, ten-parameter, first-order nonlinear ordinary differential equations, which models a tri-trophic food web system. By using Lyapunov exponents, bifurcation diagrams, and trajectories in the phase-space, to numerically characterize the dynamics of the model in a parameter plane, we show that it presents typical periodic structures embedded in a chaotic region, forming spiral structures that coils up around a focal point while period-adding bifurcation take place.

Keywords: Period-adding bifurcation. Spiral periodic structure. Parameter plane. Lyapunov exponents.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	8
2 SISTEMAS DINÂMICOS.....	9
3 ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO.....	14
3.1 BIFURCAÇÃO SELA-NÓ.....	15
3.2 BIFURCAÇÃO DE HOPF.....	18
3.3 BIFURCAÇÃO DE DUPLICAÇÃO DE PERÍODO.....	18
3.2 BIFURCAÇÃO HOMOCLÍNICA DE SELA-FOCO.....	20
4 ESTRUTURAS PERIÓDICAS ESPIRAIS.....	23
5 MODELO.....	25
6 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	30
6.1 SEÇÃO COMPLEMENTAR: OUTROS RESULTADOS.....	40
7 CONCLUSÃO.....	46
REFERÊNCIAS.....	47

1 INTRODUÇÃO

Investigações realizadas em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos não lineares de tempo contínuo em que são usados os expoentes de Lyapunov para caracterizar numericamente a dinâmica do sistema diferenciando comportamentos de periodicidade, quasiperiodicidade e caos aumentaram consideravelmente nos últimos anos [1-47]. Estruturas periódicas observadas em meio a regiões caóticas tem sido predominantes nesses planos de parâmetros. Algumas delas por sua vez possuem uma forma conhecida na literatura como camarão (shrimp em inglês), assim descrito pela primeira vez por Gallas [48] em um sistema não linear de tempo discreto e posteriormente observado em uma ampla gama de sistemas dinâmicos não lineares tanto de tempo discreto, quanto de tempo contínuo, estes últimos por sua vez são modelados por conjuntos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Entre eles, sistemas que regem reações químicas, dinâmica populacional, circuitos eletrônicos, lasers, osciladores forçados e vários outros. Desde então, muitas propriedades dessas estruturas periódicas foram descobertas e descritas, mostrando que elas podem aparecer de maneira altamente organizada e com diferentes formas em um plano de parâmetros para um grande número de diferentes sistemas de diferentes áreas do conhecimento.

Um desses tipos de organização foi o observado por Gaspard [49] e consiste em um conjunto de estruturas periódicas que se asemelham a forma de um camarão e formam uma espiral que se enrola ao redor de um ponto focal (ou foco), sendo que a medida que essas estruturas se espiralam em direção a esse ponto, ocorrem bifurcações de adição de período. Como é de nosso conhecimento, bifurcações assim já foram observadas em planos de parâmetro para circuitos eletrônicos [1, 30, 50], modelo de Rössler [51], oscilador químico [1], rede neural de Hopfield [31], lasers semicondutores de injeção óptica modificados [32], e um modelo matemático de crescimento de tumor [45].

Tendo em vista que as estruturas periódicas espirais foram detectadas experimentalmente em circuitos eletrônicos [52] e que o mecanismo global por trás da gênese e organização dessas estruturas foi descrito em [15, 16, 49], serão descritas nesse trabalho as bifurcações de adição de período que ocorrem nas estruturas periódicas espirais observadas em alguns planos de parâmetros construídos para um sistema de cadeia alimentar tritrófica [53] modelado por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, autônomas, não lineares de primeira ordem com dez parâmetros e determinar seus respectivos períodos.

Com o objetivo de investigar os planos de parâmetros construídos para um modelo ecológico e caracterizar as possíveis estruturas periódicas neles encontradas, o trabalho seguirá a seguinte organização: nas seções 2, 3 e 4 far-se-á uma revisão literária de conceitos, definições e outros conhecimentos que servirão para a interpretação dos resultados obtidos que aparecerão na seção 6. Na seção 5 discutir-se-á o modelo ecológico de Leslie-Gower que se aplica ao sistema de cadeia alimentar tritrófica aqui tratado e por fim a conclusão na seção 7.

Alguns dos resultados apresentados na seção 6 propiciaram a publicação de um artigo referente a esse trabalho que pode ser encontrado na Ref. [54]

2 SISTEMAS DINÂMICOS

De acordo com a Ref. [56] tem-se uma noção de sistema dinâmico como sendo uma formulação matemática empregada na generalização de um processo determinístico. Por meio dela prediz-se os estados passados e futuros de muitos sistemas físicos, químicos, biológicos, ecológicos, econômicos e até mesmo sociais com um certa precisão conhecendo-se somente o seu estado atual e as leis que regem a sua evolução no tempo. Contanto que as leis não mudem com o tempo, o comportamento de tais sistemas pode ser completamente baseado nas condições iniciais consideradas. Assim sendo, um sistema dinâmico é um sistema que inclui um conjunto de estados possíveis (espaço de estados) e uma lei de evolução dos estados no tempo. A evolução no tempo de um sistema dinâmico, significa uma alteração no estado do sistema, logo se consideram dois tipos de sistemas dinâmicos: os de tempo contínuo que podem assumir valores reais de tempo e são conhecidos na literatura como fluxos, e os de tempo discreto também conhecidos como mapas que só assumem valores inteiros.

De modo geral, a forma mais simples que um sistema dinâmico contínuo pode ser apresentado é por meio de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Aqui nos interessa sistemas que apresentem caos. Pode-se descrever caos como um comportamento aperiódico e com alta sensibilidade às condições iniciais, que existe apenas em sistemas não lineares que torna impossível a previsão do estado do sistema apesar do mesmo ser determinístico [57].

Nessa dissertação será estudado um sistema tridimensional com dez parâmetros de controle que provêm do modelo ecológico de Leslie-Gower. Um sistema tridimensional não linear pode ser expresso gene-

ricamente da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z, \alpha), \\ \dot{y} &= g(x, y, z, \alpha), \\ \dot{z} &= h(x, y, z, \alpha),\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que f , g e h representam funções reais, que devem conter ao menos uma linearidade; x , y , e z são as variáveis dinâmicas do sistema, ou variáveis de estado que constituem o espaço de estados também conhecido por espaço de fases e definem a dimensão do sistema; α representa o conjunto de parâmetros de controle do sistema.

Um dos principais objetivos ao se trabalhar com sistemas dinâmicos, está em investigar seus comportamentos conforme o tempo evolui com base nas soluções, tendo eles interpretações físicas ou não. Basicamente existem três técnicas para se investigar o comportamento de um sistema dinâmico [58]:

- Técnica analítica: Integram-se analiticamente as equações, determinando a solução em termos de fórmulas gerais. São obtidas soluções para o sistema que independem do valor dos parâmetros e das condições iniciais adotadas. Entretanto, nem sempre é possível obter uma solução por integração analítica, ou isso é factível para poucos sistemas.
- Técnica numérica: Integram-se numericamente as equações, calculando valores para as variáveis dependentes $\vec{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ em pontos pré-selecionados para a variável t . Grande parte do trabalho calculacional é executado pelo computador, mas a solução obtida acaba sendo particular para um conjunto de condições iniciais e parâmetros que são escolhidos na integração.
- Técnica qualitativa: Por meio de cálculos relativamente mais simples do que os envolvidos na integração analítica consegue-se obter pistas de como o sistema evolui. Basicamente são determinadas as soluções assintóticas, os possíveis comportamentos do sistema quando $t \rightarrow \infty$, e a estabilidade dessas soluções. Ao se usar essa técnica perde-se parte da informação quantitativa relativa ao mesmo, como a informação sobre o transiente do sistema, ou seja, seu comportamento antes de atingir um regime permanente.

Como é de nosso conhecimento, sistemas dinâmicos multidimensionais em sua maioria, proporcionam uma grande dificuldade no que diz a

respeito ao seu tratamento puramente analítico, e a obtenção de resultados quase sempre se torna uma impossibilidade, por isso utilizam-se com certa frequência técnicas numéricas e ferramentas computacionais para a análise dos mesmos.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados como conservativos e dissipativos. Imagine agora que se delimita um determinado volume de condições iniciais num espaço de fases, com o objetivo de se estudar o que acontece com esse volume conforme o tempo passa. Lembrando que o volume no caso de uma sistema tridimensional equivale a uma esfera de condições iniciais. Então, chama-se um sistema de conservativo se, durante sua evolução temporal, há preservação do volume no espaço de fase. Por outro lado no sistema dissipativo, esse volume se contrai com o passar do tempo. Uma particularidade de sistemas dissipativos é a existência dos chamados atratores, que são regiões limitadas do espaço de fase associadas a um comportamento assintótico no qual o sistema tende para um atrator na medida em que tempo passa.

De maneira geral pode-se classificar da seguinte forma a dinâmica dos sistemas [58]:

- Atratores: Pontos para os quais as órbitas que passam suficientemente perto convergem. No caso unidimensional, são pontos fixos estáveis e para mais dimensões podem ser nós (Fig. 2.1a) e螺旋的 (ou focos) (Fig. 2.1b) estáveis. A representação desses elementos é feita por pontos ou linhas cheias;
- Repulsores: Pontos para os quais as órbitas que passam suficientemente perto divergem. No caso unidimensional, são pontos fixos instáveis e para mais dimensões podem ser nós (Fig. 2.1c) e螺旋的 (ou focos) (Fig. 2.1d) instáveis. A representação desses elementos é feita por pontos vazios ou linhas tracejadas;
- Pontos de Sela: Pontos para os quais as órbitas que passam suficientemente perto convergem ou divergem dependendo da região. Só existem em sistemas com pelo menos duas dimensões (Fig. 2.1e).

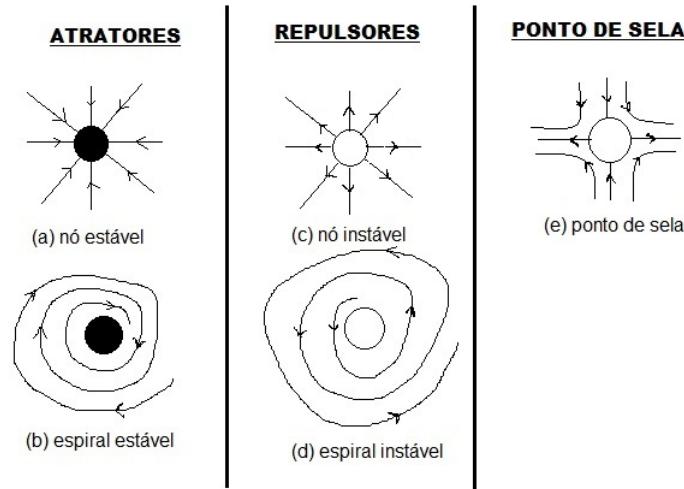


Figura 2.1: Esboço da topologia dos tipos de dinâmica no espaço de fase.

Para sistemas com pelos menos duas dimensões ainda, é possível a existência de órbitas fechadas para as quais as trajetórias suficientemente próximas convergem ou divergem. Essas órbitas são chamadas de ciclos limite e podem ser estáveis, instáveis ou semi-estáveis conforme está representado na Fig. 2.2a, Fig. 2.2b e Fig. 2.2c, respectivamente.

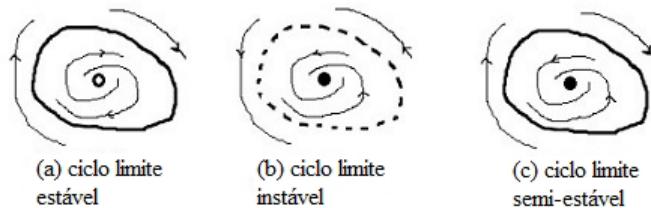


Figura 2.2: Esboço da topologia dos ciclos limite no espaço de fase.

Os sistemas dinâmicos que apresentam caos necessariamente também apresentam dependência sensível às condições iniciais, ou seja mesmo que as condições iniciais estejam muito próximas uma da outra, ainda assim dão origem a órbitas que com o passar do tempo, são totalmente diferentes. Essa divergência entre as órbitas é explicada pelos expoentes de Lyapunov que medem a taxa exponencial de aproximação (ou afastamento) entre as trajetórias. Então, seja um sistema de n equações diferenciais como o sistema 2.1, para o qual existe uma esfera de condições iniciais centrada num ponto $x(t_0)$. Conforme o tempo passa, o volume se deforma. Considerando que ao longo da j -ésima dimensão ($j = 1, \dots, n$), o raio inicial $d_j(t_0)$ tenha variado exponencialmente no tempo, de modo a atingir seu valor correspondente no instante t , dado por $d_j(t)$, chega-se em

$$d_j(t) = d_j(t_0) e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (2.2)$$

que pode ser reescrita como

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln [d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}, \quad (2.3)$$

em que λ_j são os chamados expoentes de Lyapunov. Em sistemas dissipativos o somatório dos expoentes de Lyapunov deve ser negativo. Na maior parte dos sistemas dinâmicos com significado físico, ou não, o cálculo dos expoentes de Lyapunov se restringe a métodos numéricos.

De forma geral, em sistemas N -dimensionais existem N expoentes, que combinados podem classificar os tipos de atratores que podem existir para o sistema. São eles:

- Ponto de equilíbrio estável (ou ponto fixo): todos os expoentes são negativos ou seja, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$, pois o volume de condições iniciais deve se contrair ao longo das N direções do espaço de fase a fim de que a órbita convirja para um ponto;
- Atrator periódico ou ciclo limite: tem pelo menos um expoente nulo, que corresponde à direção ao longo do ciclo limite e os demais são negativos ou seja, $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N < 0$;
- Atrator quase-periódico (torus d -dimensional): tem de dois à d expoentes de Lyapunov iguais a zero, ou seja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d = 0$ e

os demais $N - d$ expoentes são negativos, ao menos um a fim de garantir um somatório negativo, e portanto um sistema dissipativo;

- Atrator caótico (ou estranho): tem-se ao menos um expoente de Lyapunov positivo $\lambda_1 > 0$ representando a direção em que a trajetória diverge no espaço de fase, um expoente nulo $\lambda_2 = 0$ ao longo da trajetória, e os demais devem ser negativos. A soma das magnitudes dos expoentes positivos não pode exceder a soma das magnitudes dos expoentes negativos a fim de garantir um somatório total negativo, e portanto um sistema dissipativo, isto é $\sum_N \lambda_N < 0$.

Além dos atratores, que basicamente são trajetórias no espaço de fase e os diagramas de bifurcação que serão tratados na próxima seção, quando analisa-se numericamente um sistema dinâmico, os planos de parâmetros se constituem de uma importante ferramenta matemática. Nessa dissertação utilizar-se-á dessa ferramenta para a análise do sistema de interesse na seção dos resultados. De maneira geral, planos de parâmetros são representações bidimensionais da variação de quaisquer dois parâmetros do sistema em função de uma terceira dimensão, que pode ser a magnitude do maior expoente de Lyapunov. Graficamente, se utiliza um gradiente de cores que representa a variação do maior expoente, que nos fornece a informação do comportamento dinâmico do sistema, ou seja, as regiões em que ele apresenta caos, periodicidade e equilíbrio.

3 ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO

O termo bifurcação introduzido pela primeira vez por Poincaré em 1885 refere-se a mudança qualitativa no retrato de fases de um sistema dinâmico, conforme algum parâmetro do sistema passa por um valor crítico [58]. Em outras palavras, o retrato de fases depende do parâmetro. Ao se variar o valor desse parâmetro, pode-se criar ou destruir pontos de equilíbrio e ciclos limites alterando suas estabilidades. O fenômeno da bifurcação está estreitamente relacionado com a existência de caos no sentido de que um sistema dinâmico que apresenta uma resposta caótica apresenta bifurcações. No entanto, a recíproca não é verdadeira, ou seja, um sistema que apresenta bifurcações não necessariamente apresenta uma resposta caótica. A teoria de bifurcação é normalmente desenvolvida em duas formas:

- Bifurcações locais: são aquelas que podem ser previstas estudando a vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de uma trajetória fechada. Em outras palavras, é possível prever essa forma de bifurcação via cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana para o sistema. Bifurcações de Hopf, dobramento de período e sela-nó são importantes tipos de bifurcação local. As bifurcações locais são representadas por uma forma simplificada chamada forma normal. São equações características que descrevem a dinâmica do ponto de equilíbrio para valores do parâmetro próximos ao valor crítico de bifurcação.
- Bifurcações Globais: são aquelas que não podem ser inferidas a partir de análises locais, como as bifurcações homoclínicas e heteroclínicas.

3.1 BIFURCAÇÃO SELA-NÓ

A bifurcação sela-nó ou tangente está usualmente associada ao mecanismo de criação e destruição de pontos de equilíbrio. Por exemplo, considere um sistema dinâmico unidimensional do tipo, $\dot{x} = \mu - x^2$ (forma normal) da Ref. [57]. Os pontos fixos desse sistema são dados por $\dot{x} = 0$, isto é, $x = \pm\sqrt{\mu}$. Calcula-se a Jacobiana, que nesse caso se restringe ao cálculo da derivada, $d\dot{x}/dx = -2x$ de onde se tiram as seguintes conclusões:

- $x < 0 \Rightarrow 2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow$ ponto fixo instável;
- $x > 0 \Rightarrow -2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow$ ponto fixo estável.

Portanto existem três comportamentos distintos definidos pelo valor do parâmetro μ .

- $\mu < 0 \Rightarrow$ Não existe ponto fixo nos reais;
- $\mu = 0 \Rightarrow$ Existe um ponto fixo não-hiperbólico associado ao aparecimento de um autovalor com parte real nula $\lambda = 0$;
- $\mu > 0 \Rightarrow$ Existem dois pontos fixos, um instável e outro estável. Pode-se pensar como o equivalente a uma sela (instável) e um nó (estável) para mais dimensões.

O gráfico que mostra a mudança de comportamento do sistema com a variação do parâmetro μ é chamado de diagrama de bifurcação (Fig. 3.1).

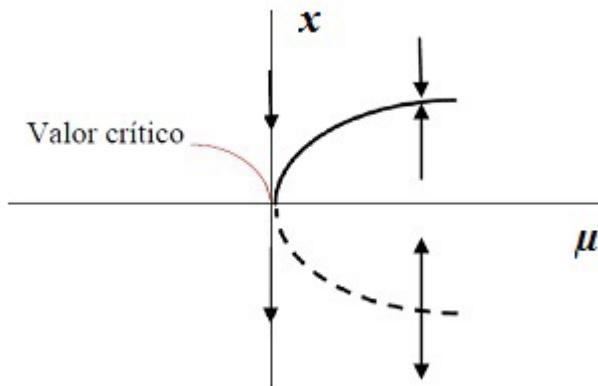


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação sela-nó onde a linha tracejada representa a solução instável e a linha cheia a solução estável. O valor crítico ocorre em $\mu = 0$.

Note que a vizinhança do ponto $(x, \mu) = (0, 0)$ não é controlada nem pela variedade estável (seta no sentido de aproximação em relação a origem) e nem pela variedade instável (seta no sentido de afastamento em relação a origem) associadas com os autovalores e autovetores da matriz Jacobiana. Os autovalores positivos representam as variedades instáveis e os autovalores negativos as variedades estáveis. As variedades por sua vez são tangentes aos autovetores associados aos autovalores. Note ainda que nesse ponto o diagrama apresenta uma curva, por isso essa bifurcação algumas vezes é chamada de bifurcação de dobra (ou curva). Para facilitar a compreensão do que é descrito no diagrama de bifurcação sela-nó da Fig. 3.1 é importante ressaltar a ideia de variedade (manifold em inglês) na literatura como um constructo geométrico matemático que basicamente revela a topologia adquirida pelo sistema no espaço de fase conforme ele evolui no tempo.

As bifurcações de sela-nó também podem acontecer com ciclos limites, que de maneira similar ao caso com pontos de equilíbrio, são criados dois ciclos limites com estabilidades complementares para determinados valores do parâmetro, que podem se aniquilar para outros.

De acordo com a Ref. [56] as bifurcações de sela-nó podem apresentar uma outra forma comum chamada de cúspide (ou ponta)

e isso acontece quando ocorre um fenômeno chamado histerese que é quando o sistema abruptamente dá um “salto”, para um diferente equilíbrio estável, ocasionado pelo desaparecimento de um par de soluções: uma estável e outra instável, em cada um dos ramos da curva T (Fig. 3.2) que colidem e se aniquilam via bifurcação de dobra, ao se variar os parâmetros do sistema. De modo geral, a bifurcação cuspídal é apresentada em sistemas de codimensão dois, ou seja dois parâmetros são variados a fim de produzir a bifurcação em questão. Nesses sistemas o termo quadrático típico da forma normal desaparece. No diagrama de bifurcação de cúspide os ramos se encontram tangencialmente no ponto de bifurcação, de modo a apresentar uma ponta, ao invés de uma curva como é observado na bifurcação de dobra (Fig. 3.1).

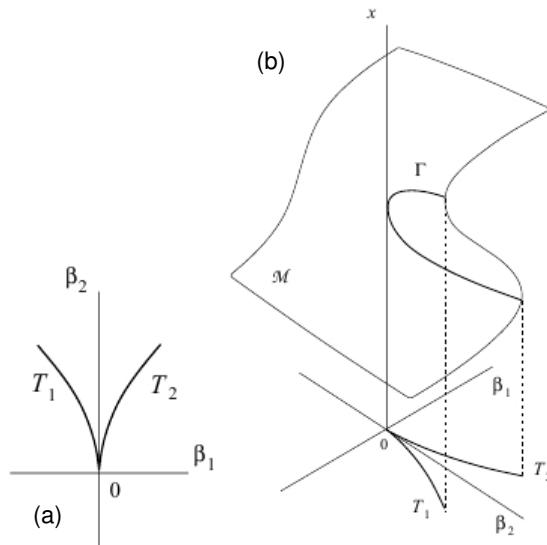


Figura 3.2: Em (a) está representado a curva de bifurcação de cúspide T no plano (β_1, β_2) constituído pelos parâmetros β_1 e β_2 em que T_1 e T_2 representam os ramos de T , e o ponto $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ o ponto de bifurcação. Em (b) está representado a dinâmica da variedade M no \mathbb{R}^3 , próximo à bifurcação de cúspide e a projeção da curva Γ no plano de parâmetros (β_1, β_2) que graficamente representa a curva de bifurcação T . Figura extraída da Ref. [56].

3.2 BIFURCAÇÃO DE HOPF

Essa bifurcação é caracterizada pela existência de um par de autovalores imaginários puros (complexos conjugados) relacionados ao ponto de bifurcação ou ponto crítico α_c . A bifurcação de Hopf pode se apresentar na forma subcrítica ou supercrítica. No caso subcrítico (Fig. 3.3a) o sistema possui um ciclo limite instável para $\alpha < \alpha_c$ que desaparece quando $\alpha > \alpha_c$. No caso supercrítico (Fig. 3.3b) o sistema possui um ponto de equilíbrio estável para $\alpha < \alpha_c$ que perde estabilidade quando $\alpha > \alpha_c$ e um ciclo limite estável surge envolvendo-o. Em outras palavras, na bifurcação supercrítica existe um ciclo limite depois da bifurcação, e na subcrítica antes dela, sendo que em ambos os casos ocorre uma perda de estabilidade do equilíbrio em $\alpha = \alpha_c$ a partir do aumento no parâmetro [56].

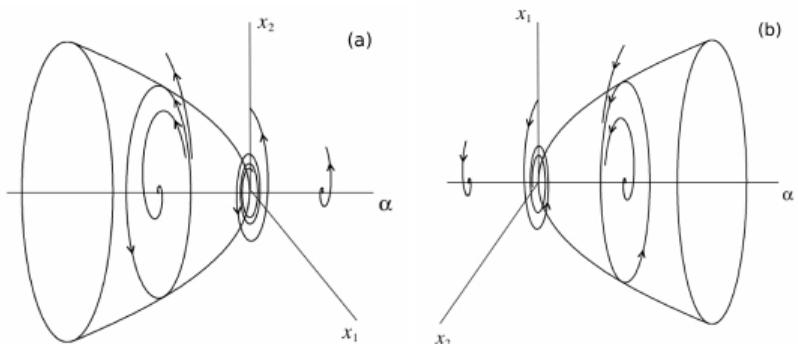


Figura 3.3: Diagrama de Bifurcação de Hopf subcrítica em (a) e supercrítica em (b). Figura extraída da Ref. [56].

3.3 BIFURCAÇÃO DE DUPLICAÇÃO DE PERÍODO

Essa bifurcação pode ser entendida da seguinte maneira: após um ponto de equilíbrio sofrer uma bifurcação de Hopf supercrítica, crie-se um ciclo limite estável, e então continua-se a aumentar o valor do parâmetro de controle, fazendo com que o ciclo limite torne-se instável,

e um novo ciclo limite com o dobro do seu período apareça. É comumente chamada de bifurcação tipo “flip”. A bifurcação de duplicação de período muitas vezes é associada ao surgimento de caos no sistema, mais precisamente, uma sequência dessas bifurcações ou uma cascata de bifurcação, como também é chamada, constitui o que se conhece da literatura como rotas para o caos. Em geral pode surgir uma série de n duplicações depois das quais um ciclo limite de período $2^n T$ é obtido. Diversos sistemas apresentam uma série infinita de bifurcações com um ponto de acumulação finito; o movimento associado além desse ponto é caótico, caracterizando uma rota para o caos via duplicação de período ou cenário de Feigenbaum [59]. Como na bifurcação de Hopf, a bifurcação por duplicação de período também apresenta as formas supercrítica e subcrítica podendo portanto, um ciclo limite de período duplicado instável ou estável bifurcar a partir dela. Na Fig. 3.4 está esquematizado como ocorre esse tipo de bifurcação, e mais adiante na Fig. 3.5, como funciona uma “cascata de bifurcação”.

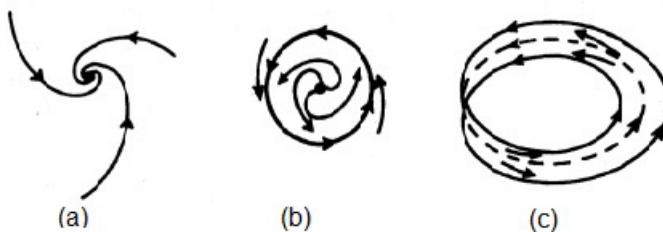


Figura 3.4: Um ponto de equilíbrio estável sofre uma bifurcação de Hopf de (a) para (b) e em seguida uma bifurcação de duplicação de período de (b) para (c). Figura extraída da Ref. [59].

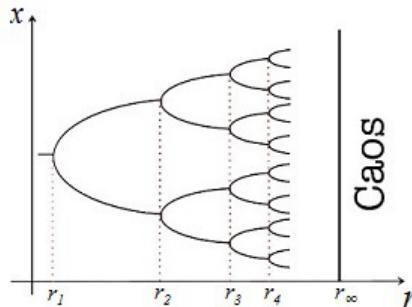


Figura 3.5: Diagrama de uma cascata de bifurcação de duplicação de período para um sistema genérico em que x representa uma variável e r um parâmetro. Figura extraída da Ref. [59].

3.4 BIFURCAÇÃO HOMOCLÍNICA DE SELA-FOCO

De acordo com a Ref. [56] a bifurcação homoclínica de sela-foco ocorre quando um ponto de equilíbrio x_0 de um fluxo $\dot{x} = f(x, \alpha)$, sendo esse o ponto de equilíbrio para o valor crítico do parâmetro em $\alpha = 0$, possui dois autovalores complexos conjugados com parte real negativa (μ_1) e um autovalor real positivo (λ_1). Sabe-se da teoria de variedades que autovalores com parte real positiva (negativa) representam uma variedade repulsiva (atrativa) no espaço fase conforme o sistema evolui no tempo. As órbitas homoclínicas representam basicamente a ligação entre a variedade estável do ponto x_0 com sua variedade instável. Uma bifurcação homoclínica leva a criação ou destruição de um ou mais ciclos limites variando α para valores suficientemente pequenos.

Considerando o ponto de equilíbrio x_0 , existe uma quantidade que mede o quão instável é o ponto, chamada valor de sela, dado pela soma da parte real dos autovalores, ou seja $\sigma_0 = \text{Re}\lambda_1 + \text{Re}\mu_1$. Por meio do valor dessa quantidade são classificados os possíveis resultados da bifurcação sela-foco. São eles:

- Se $\sigma_0 < 0$ tem um único ciclo limite estável na vizinhança da bifurcação para valores suficientemente pequenos de $|\alpha| > 0$.
- Se $\sigma_0 > 0$ tem um número infinito de ciclos limite tipo sela (instáveis) na vizinhança da bifurcação para todos valores suficientemente pequenos de $|\alpha|$.

A figura 3.6 mostra em mais detalhes como ocorre esse tipo de bifurcação.

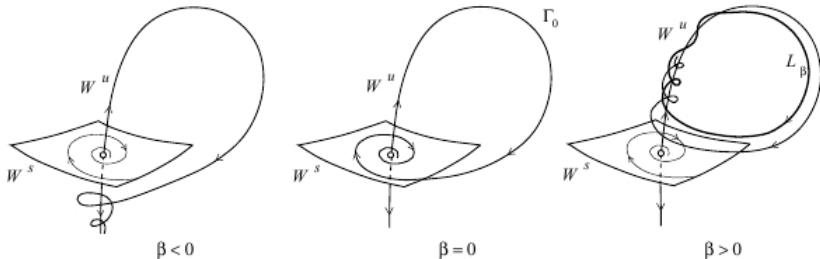


Figura 3.6: Diagrama de bifurcação homoclínica de sela-foco para um valor de sela negativo, ou seja $\sigma_0 < 0$ em que W^s e W^u representam a variedade estável (foco) e a variedade instável (sela), respectivamente, Γ_0 é a órbita homoclínica, ou loop homoclínico e β é um parâmetro que só depende de α e representa a separação (deslocamento) entre as variedades W^s e W^u ; L_β representa o ciclo limite estável. Figura extraída da Ref. [56].

Aqui é interessante observar que à medida que α (ou β) tende a zero tomando valores positivos ou negativos ocorre um número infinito de bifurcações, entre elas, bifurcações de dobra que criam e destroem os ciclos limite um número infinito de vezes, e bifurcações de duplicação de período que geram ciclos limite com o dobro do período, podendo eles ser instáveis ou estáveis. Sendo que para $\sigma_0 < 0$, só existe um ciclo limite estável de fato, para pequenas faixas de valores de α enquanto para $\sigma_0 > 0$, existem intervalos em que o ciclo é totalmente instável nas redondezas da bifurcação. As bifurcações de dobra ainda causam um efeito de perturbação no período dos ciclos limite quando comparado os casos $\sigma_0 < 0$ e $\sigma_0 > 0$ conforme pode ser verificado na Fig. 3.7.

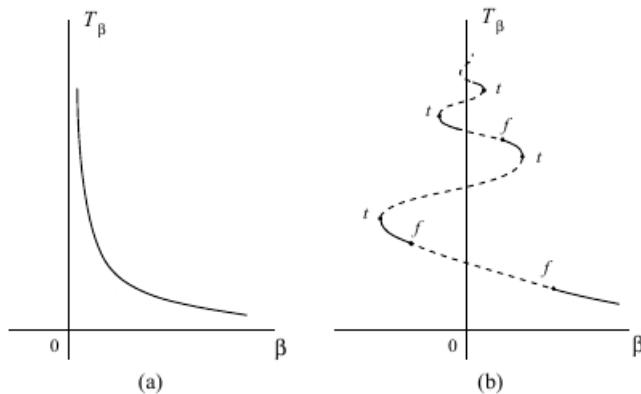


Figura 3.7: Período do ciclo limite próximo da bifurcação sela-foco: (a) $\sigma_0 < 0$; (b) $\sigma_0 > 0$ em que t e f representam as bifurcações tangente (dobra) e flip (duplicação), respectivamente. Figura extraída da Ref. [56].

Outro ponto ainda em questão, é a possibilidade de ocorrer outras bifurcações sela-foco próximo a uma órbita homoclínica devido a presença de outra órbita homoclínica secundária criando-se então uma órbita dupla; assim como é esquematizado abaixo.

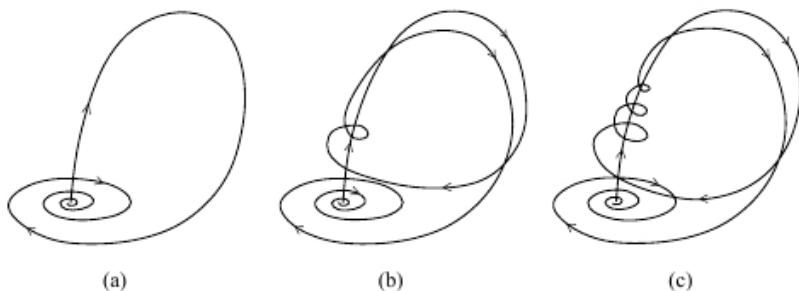


Figura 3.8: Órbita homoclínica básica (a) e dupla (b,c). Figura extraída da Ref. [56].

4 ESTRUTURAS PERIÓDICAS ESPIRAIS

Como já foi visto na introdução, as estruturas periódicas espirais são um conjunto de estruturas periódicas com a forma de um camarão (shrimp), que se unem entre si formando uma espiral que se enrola ao redor de um foco. De maneira geral essas estruturas se originam de bifurcações sela-nó acompanhadas de bifurcações de duplicação de período e bifurcações homoclínicas de sela-foco, também conhecidas como bifurcações de Shilnokov [16]. São dois os tipos de curvas de bifurcação sela-nó que são responsáveis por formar essas estruturas: as curvas de bifurcação sela-nó do tipo cúspide (ou ponta) que definem as regiões em que se encontram as pernas maiores das estruturas com forma de camarão (shrimp), onde também se concentra sua maior parte que não se enrola ao redor do foco e unem essas estruturas nessas regiões e as curvas de bifurcação sela-nó do tipo dobra (ou curva) que definem as demais regiões da espiral em torno do foco juntamente com bifurcações de duplicação de período. As curvas de bifurcação homoclínica de sela-foco também moldam as estruturas espirais. A ocorrência dessa bifurcação causa o surgimento de uma dinâmica complexa no sistema. Juntas, essas curvas de bifurcação distintamente formam o esqueleto da estrutura espiral na vizinhança do foco, assim como é descrito na Fig. 4.1 e Fig. 4.2 em que está representado um plano de parâmetro para um modelo discreto onde podemos observar as regiões em que as bifurcações ocorrem e, como essas definem a estrutura espiral. Uma descrição mais completa de como esse conjunto de bifurcações define o esqueleto da estrutura espiral e que envolva fluxos é feita nas Refs. [16] e [63] em que as curvas de bifurcação são detectadas usando métodos computacionais de integração e continuação numérica e obtidas sobre as estruturas periódicas nos planos de parâmetros.

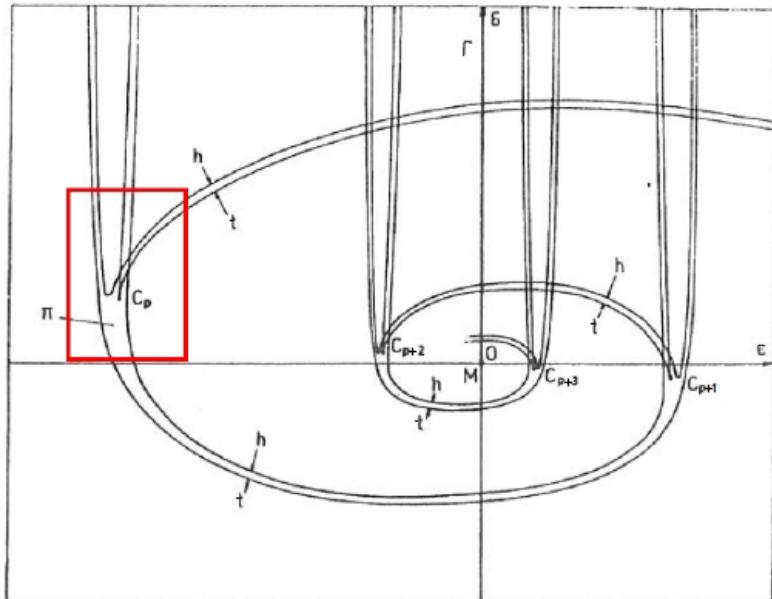


Figura 4.1: O domínio π representa a região onde estão localizadas as pernas maiores dos camarões mais visíveis. As bifurações cuspíduas ao redor do foco $(0,0)$ são denominadas por C_p, C_{p+1}, C_{p+2} e C_{p+3} ; t e h representam as bifurações tangente (ou de dobra) e de duplicação de período respectivamente ao longo das junções entre os camarões da estrutura espiral e Γ representa a órbita homoclínica. Figura extraída da Ref. [49].

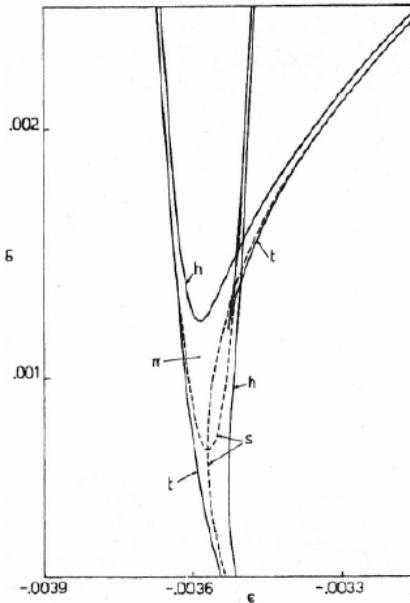


Figura 4.2: A ampliação do domínio π indicada pela caixa vermelha mostrando em mais detalhes a topologia da estrutura em forma de camarão. Figura extraída da Ref. [49].

5 MODELO

A dinâmica populacional é o estudo de como e por que uma população varia no espaço e tempo em que são coletadas informações empíricas do padrão de mudanças ocorridas em uma população e procura-se identificar os mecanismos por de trás dos padrões observados. No que concerne aos modelos populacionais de interações tróficas ou interações entre os níveis de uma cadeia alimentar, o modelo Lotka-Volterra (LV) é considerado como um dos primeiros modelos para se estudar sistemas de cadeias alimentares puramente baseados em consumo e recurso, quando a alimentação do predador (consumidor) depende unicamente do tamanho da população de presas (recurso). Apesar de não ser reconhecido como um modelo realista dentro de suas perspectivas, o modelo de LV é o mais simples e tido como base, ou seja todos outros modelos a partir de simplificações chegam a ele. Na sua forma generalizada o

modelo de LV é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= r_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - aNP, \\ \frac{dP}{dt} &= \chi aNP - \delta_0 P,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde N é a densidade populacional de presa, P a densidade populacional de predador e NP uma não linearidade que de acordo com o que já foi visto, possibilita a existência de caos. O parâmetro r_0 é a taxa de crescimento intrínseco da presa na ausência de predadores, δ_0 é a taxa de mortalidade do predador na ausência de presas, a é uma constante de proporcionalidade entre número de presas consumidas pelo predador e a densidade populacional de presas, K é a capacidade de suporte de alimento do ambiente e χ é a taxa de conversão de biomassa da presa em novos predadores. No modelo LV a população de presa cresce logisticamente e não há possibilidade de morte de presa por falta de alimento pois supõe-se a existência de um amplo estoque de alimento. O ambiente não proporciona nenhuma dificuldade para o predador no processo de predação o que resulta que a taxa de procura é equivalente a taxa de alimento.

Quando se estuda interações tróficas do tipo predador-presa as respostas funcionais consistem de um importante mecanismo para o estudo da dinâmica de uma população podendo-se concluir sobre o estado de um único indivíduo. A resposta funcional é definida como a taxa de consumo de presas pelo predador em relação a densidade populacional de presas. As respostas funcionais básicas tipo I, II e III propostas por Holling (1959) tem a seguinte forma

- Tipo I: $f(N) = aN$;
- Tipo II: $f(N) = \frac{AN}{1+AhN}$;
- Tipo III: $f(N) = \frac{AN^2}{1+AhN^2}$.

O funcional tipo I é um funcional linear: a taxa de consumo do predador aumenta linearmente com a densidade de presas e é utilizado na construção do modelo básico LV. O funcional tipo II é um funcional hiperbólico: a taxa de consumo do predador aumenta até se tornar constante quando o nível de saciação é atingido. Sendo A a taxa de

busca por presas, h o tempo de digestão das presas e produto Ah uma quantidade referente ao alimento obtido. O funcional tipo III tem uma forma parecida com o tipo II porém com um termo quadrático referente a densidade de presas N , então a taxa de consumo do predador ocorre de maneira acelerada no início e desacelera até que se chegue ao nível de saciação. São comparados graficamente os três funcionais como mostra a Fig 5.1.

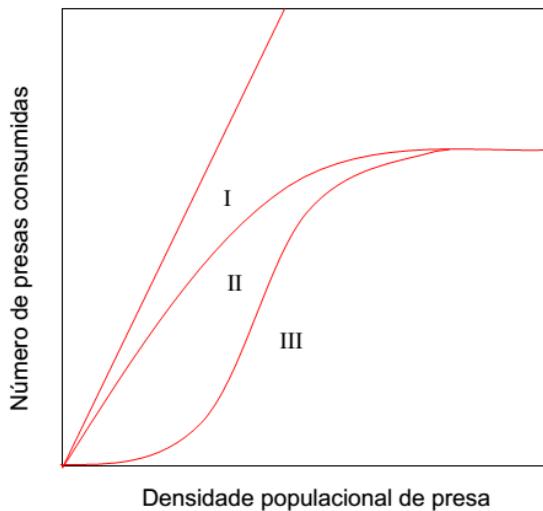


Figura 5.1: Representação gráfica das três respostas funcionais.

O modelo de Leslie-Gower para um sistema de cadeia alimentar tritrófica de três níveis alimentares representado por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, em que as variáveis representam as três espécies interagentes da cadeia alimentar: um predador generalista, outro especialista e a presa. O predador

generalista se alimenta do predador especialista e da presa e o predador especialista, somente da presa conforme o esquema da Fig. 5.2. O predador especialista e a presa constituem um conjunto de equações que mantém a forma do modelo ecológico básico LV para duas espécies porém com o funcional tipo II aplicado ao consumo de presas tornando o modelo mais realista. O funcional de Leslie-Gower é aplicado ao predador generalista, assumindo um termo de crescimento logístico na equação que descreve o crescimento da espécie. Juntas essas equações descrevem teoricamente o comportamento dinâmico do sistema tritrófico de cadeia alimentar. O modelo recentemente proposto por Priyadarshi and Gakkhar [53] e com o qual irá se trabalhar nessa dissertação é dado por

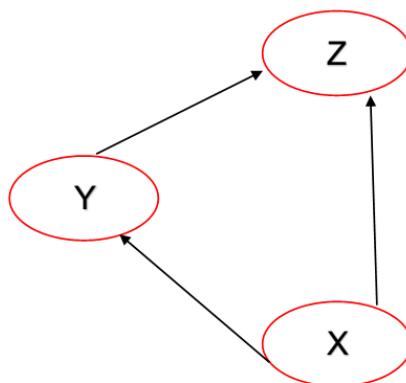


Figura 5.2: Esquema para uma cadeia alimentar de três níveis.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a_0 X \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{a_1 XY}{1 + b_1 X} - \frac{a_2 XY}{1 + b_2 X + b_3 Y}, \\ \dot{Y} &= Y \left(-r + \frac{a_1 c X}{1 + b_1 X}\right) - \frac{a_3 Y Z}{1 + b_2 X + b_3 Y}, \\ \dot{Z} &= S_0 \left(Z^2 - \frac{Z^2}{S_3 + S_1 X + S_2 Y}\right),\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde X é a densidade populacional de presa, Y a densidade populacional de predador especialista e Z a densidade populacional de predador generalista. O parâmetro a_0 é a taxa de crescimento intrínseco da presa, K é a capacidade de suporte alimentar do ambiente, a_1 é a taxa máxima de abatimento da presa X devido ao predador especialista Y , b_1 é o coeficiente de alimento obtido pelo predador especialista em relação a presa X , a_2 é a taxa máxima de abatimento da presa X devido ao predador generalista Z , a_3 é a taxa máxima de abatimento do predador especialista Y devido ao predador generalista Z , b_2 e b_3 representam os coeficientes de alimento obtido pelo predador generalista de X e Y , respectivamente. Os parâmetros r e c são respectivamente a taxa de mortalidade do predador especialista na ausência de presa, e a taxa de conversão de biomassa da presa X em um predador Y , S_0 é a taxa de crescimento intrínseco do predador generalista, S_1 e S_2 representam a preferência de alimento do predador generalista em vista das opções X e Y , respectivamente; S_3 é um termo de correção do crescimento da população de Z na situação de severa escassez dos alimentos X e Y referindo-se portanto, a uma redução residual da população. Mais informações e detalhes a respeito da origem do modelo e de suas características ecológicas podem ser encontradas na Ref. [53], e em outras referências nela contidas.

Com o objetivo de reduzir a quantidade de parâmetros faz-se a adimensionalização do sistema (5.2). De acordo com a Ref. [53] as condições de adimensionalização são

$$\begin{aligned}t &= a_0 T, \quad x = \frac{X}{K}, \quad y = \frac{a_1}{a_0} Y, \quad z = \frac{a_2}{a_0} Z, \\ w_1 &= b_1 K, \quad w_2 = b_2 K, \quad w_3 = \frac{a_0}{a_1} b_3, \quad w_4 = \frac{a_1}{a_0} c K, \quad w_5 = \frac{r}{a_0}, \\ w_6 &= \frac{a_3}{a_2}, \quad w_7 = \frac{S_0}{a_2}, \quad w_8 = \frac{S_0}{a_2 S_3}, \quad w_9 = \frac{S_1}{S_3} K, \quad w_{10} = \frac{a_0 S_2}{a_1 S_3}.\end{aligned}$$

Substituindo no sistema (5.1) e simplificando fica

$$\begin{aligned}
a_0 K \dot{x} &= a_0 K x (1 - x) - a_0 K x \left(\frac{y}{1 + w_1 x} \right) - a_0 K x \left(\frac{z}{1 + w_2 x + w_3 y} \right), \\
\frac{a_0^2}{a_1} \dot{y} &= \frac{a_0^2}{a_1} y \left(-w_5 + \frac{w_4 x}{1 + w_1 x} \right) - \frac{a_3}{a_2} \frac{a_0^2}{a_1} y \left(\frac{z}{1 + w_2 x + w_3 y} \right), \quad (5.3) \\
\frac{a_0^2}{a_2} \dot{z} &= w_7 a_2 \left[\frac{a_0^2}{a_2^2} z^2 - \frac{a_0^2}{a_2^2} \left(\frac{z^2}{\frac{w_7}{w_8} + \frac{w_7 w_9}{w_8} + \frac{w_7 w_{10}}{w_8}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos e simplificando novamente chega-se em

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x \left(1 - x - \frac{y}{1 + w_1 x} - \frac{z}{1 + w_2 x + w_3 y} \right), \\
\dot{y} &= y \left(-w_5 + \frac{w_4 x}{1 + w_1 x} - \frac{w_6 z}{1 + w_2 x + w_3 y} \right), \quad (5.4) \\
\dot{z} &= w_7 z^2 - \frac{w_8 z^2}{1 + w_9 x + w_{10} y},
\end{aligned}$$

onde todos os parâmetros w_i , $i = 1, 10$ são positivos. Todos os resultados numéricos encontrados no próxima seção são obtidos para o sistema (5.4).

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Todos os resultados numéricos desenvolvidos nessa seção foram obtidos usando o conjunto de parâmetros encontrados na Ref. [53]: $w_1 = 1, 4$, $w_2 = 5, 0$, $w_3 = 8, 0$, $w_4 = 1, 0$, $w_5 = 0, 16$, $w_6 = 0, 1$, $w_7 = 0, 1$, $w_8 = 0, 5$, $w_9 = 8, 0$ e $w_{10} = 8, 0$. Primeiramente ao analisar a estabilidade do sistema 5.4. O equilíbrio foi determinado fazendo-se $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ de modo a se obter os pontos de equilíbrio $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 206186; 1, 02296; 0)$, $E_3 = (0, 5; 0; 1, 75)$ e $E_4 = (0, 309150; 0, 190850; 2, 27107)$. A estabilidade dos pontos foi determinada a partir do cálculo da matriz Jacobiana e análise dos autovalores calculados a partir dela. A matriz jacobiana é definida por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

que aplicada ao sistema (5.4) fornece a matriz

$$J = \begin{bmatrix} \left(1 - 2x - \frac{y}{(1+w_1x)^2} - \frac{z(1+w_3y)}{(1+w_2x+w_3y)^2}\right) & \left(-\frac{x}{1+w_1x} + \frac{w_3xz}{(1+w_2x+w_3y)^2}\right) & \left(-\frac{x}{1+w_2x+w_3y}\right) \\ \left(\frac{w_4y}{(1+w_1x)^2} + \frac{w_2w_6yz}{(1+w_2x+w_3y)^2}\right) & \left(\frac{w_4x}{1+w_1x} - w_5 - \frac{w_6z(1+w_2x)}{(1+w_2x+w_3y)^2}\right) & \left(-\frac{w_6y}{1+w_2x+w_3y}\right) \\ \left(\frac{w_8w_9z^2}{(1+w_9x+w_{10}y)^2}\right) & \left(\frac{w_8w_{10}z^2}{(1+w_9x+w_{10}y)^2}\right) & \left(2w_7z - \frac{2w_8z}{1+w_9x+w_{10}y}\right) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Substituindo os pontos de equilíbrio na matriz e partindo da equação dos autovalores $\det(J - I\lambda) = 0$ onde J passa a ser a matriz jacobiana no ponto de equilíbrio (x, y, z) e $I\lambda$ a matriz dos autovalores λ em que I representa a matriz identidade obtém-se $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = -0,16$ e $\lambda_z = 0$ para o ponto $E_0 = (0, 0, 0)$; $\lambda_x = -1$, $\lambda_y = 0,256667$ e $\lambda_z = 0$ para o ponto $E_1 = (1, 0, 0)$; $\lambda_x = -0,014186 + 0,313622i$, $\lambda_y = -0,014186 - 0,313622i$ e $\lambda_z = 0$ para o ponto $E_2 = (0, 206186; 1, 02296; 0)$; $\lambda_x = -0,714286 + 0,254751i$, $\lambda_z = -0,714286 - 0,254751i$ e $\lambda_y = 0,084118$ para o ponto $E_3 = (0, 5; 0; 1, 75)$, $\lambda_x = 0,032911 + 0,240679i$, $\lambda_y = 0,032911 - 0,240679i$ e $\lambda_z = -0,102173$ para o ponto $E_4 = (0, 309150; 0, 190850; 2, 27106)$.

Estudando a estabilidade com base na análise dos autovalores de um sistema tridimensional [61], tira-se que E_0 e E_1 são instáveis e classificados como selas não hiperbólicas ou pontos de sela-nó, nome atribuído no teorema da variedade central [62]. Isso se deve ao fato de existir pelo menos um autovalor com parte real positiva e outro com parte real negativa e um terceiro nulo que corresponde justamente a variedade central. Os pontos E_3 e E_4 também são pontos instáveis e são classificados como pontos de sela-foco, pois possuem um autovalor real com um sinal oposto a parte real dos outros dois autovalores que são complexo conjugados. Por último, o ponto E_2 é o único ponto estável classificado como um foco atrativo não hiperbólico, pois possui um autovalor nulo e a parte real dos outros dois autovalores complexo conjugados negativa.

A Fig. 6.1 mostra o plano de parâmetros (w_3, w_2) para o modelo adimensionalizado de cadeia alimentar tritrófica (5.4), que é uma fatia bidimensional do espaço de parâmetros composto pelos dez parâmetros do sistema, obtido plotando o maior expoente de Lyapunov (MEL) em uma malha de $10^3 \times 10^3$ pontos.

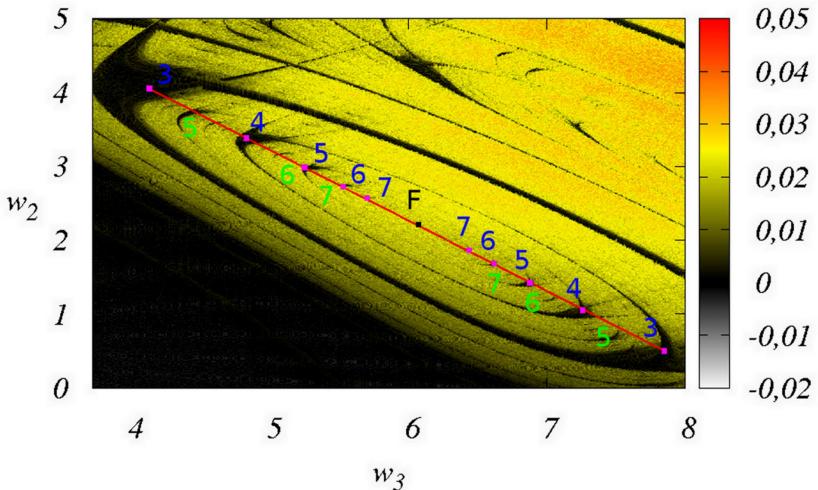


Figura 6.1: O plano de parâmetros (w_3, w_2) mostra duas estruturas espirais que são mais visíveis, uma externa e outra interna. As cores do plano de parâmetros estão relacionadas com a magnitude do expoente de Lyapunov. Os números que aparecem nas cores azul e verde indicam o período das respectivas estruturas, conforme explicado no texto.

Com exceção dos parâmetros que variam no plano de parâmetros da Fig. 6.1, os demais são fixados conforme discutido na introdução dessa seção e o mesmo acontece com outros planos que virão adiante. O sistema (5.4) é integrado usando um algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem com um passo de integração de tempo igual a 10^{-3} , e um total de 10^6 passos de integração. O cálculo do MEL para cada ponto (w_3, w_2) da malha é feito utilizando o algoritmo proposto em [69]. A Fig. 6.1 foi construída a partir de uma condição inicial (x_0, y_0, z_0) que faz parte da bacia de atração do sistema (5.4), uma certa região no espaço de fase que contém um conjunto de condições iniciais que conduzem a um atrator. Logo, para quaisquer condições iniciais tomadas dentro da bacia de atração, automaticamente segue-se o atrator e não há necessidade de lidar com o transiente caótico, ou o tempo até que o sistema converja para um atrator, ou seja, considerando (x_0, y_0, z_0) uma condição inicial para $(w_3, w_2) = (3, 7; 0, 0)$, as variáveis (x, y, z) obtidas da integração do sistema para este par de parâmetros, se tornam as

condições iniciais para o próximo par e assim por diante, até que ambos atinjam seus valores máximos em $(w_3, w_2) = (8, 0; 5, 0)$. Como se sabe, um MEL negativo, nulo e positivo caracteriza a trajetória realizada no espaço de fase como, ponto fixo, periódica ou quase-periódica e caótica, respectivamente. As cores da Fig. 6.1 estão associadas à magnitude do MEL em cada ponto da malha. Assim sendo, um MEL positivo é indicado por uma cor na variação do amarelo para o vermelho, e um nulo, pela cor preta. Nesse ponto é interessante ressaltar que o estudo numérico da dinâmica de um sistema com base no maior expoente de Lyapunov fornece uma boa noção do comportamento dinâmico do mesmo, no entanto não é eficiente para distinguir comportamentos de quasiperiodicidade, dos de periodicidade, pois em ambos os casos o maior expoente é nulo, assim torna-se necessária a análise do segundo maior expoente e consequentemente do espectro de Lyapunov, como é chamado o conjunto de todos os expoentes de Lyapunov do sistema.

Como pode ser observado na Fig. 6.1 existem estruturas periódicas pretas em forma de camarão ao longo da linha vermelha $w_2 = -0,9509 w_3 + 7,9721$, e imersas na região de caos amarelo-vermelho. Essas estruturas organizam-se em espirais, em torno de um ponto focal F $(w_3, w_2) = (6,07353; 2,21160)$ estimado numericamente. Duas das infinitas espirais da Fig. 6.1 são mais visíveis, e são diferenciadas por um número indicando o período da estrutura percorrida em cada uma delas, em uma delas por um número em azul, e na outra por um número em verde. Em cada espiral, as estruturas em forma de camarão são conectadas umas às outras por meio de pernas de periodicidade, que também se originam das próprias. Em ambas as espirais, a periodicidade principal tomada a partir dessas estruturas aumenta em uma unidade à medida que se enrolam em torno do ponto focal F. Isto é, as estruturas em forma de camarão são organizadas numa cascata de bifurcação de adição de período que aumenta a periodicidade em 1, à medida que a espiral converge para o ponto focal F.

No que diz respeito especificamente a espiral mais externa na Fig. 6.1, a que os períodos são numerados em azul, quando percorrida a perna de periodicidade conectada a estrutura de período 3 localizada à esquerda do ponto focal F, pela parte inferior do plano de parâmetros, encontra-se uma estrutura de período 3 localizada à direita do ponto focal F. Ao se continuar percorrendo a perna de periodicidade a partir da estrutura de período 3, pela parte superior do plano de parâmetros, encontra-se uma estrutura de período 4 localizada à esquerda do ponto focal F. Esse comportamento se repete, e resulta numa sequência do tipo $3 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$ como pode ser observado na Fig.

6.1, à medida que se move ao longo das pernas de periodicidade em direção ao ponto focal F. Ele ocorre em consequência da bifurcação de adição de período ou mais precisamente, do fenômeno de adição de período, em que se observa uma sequência de janelas periódicas intermediando janelas caóticas, e nessas janelas é observado uma adição de período. Mais adiante nessa seção, será apresentado um diagrama de bifurcação construído para o sistema (5.4) e por meio desse, poderá ser visto em mais detalhes esse fenômeno. Considerando a espiral interna, a qual os períodos são numerados em verde na Fig. 6.1 um comportamento similar ao descrito acima ocorre. Como já foi visto na seção introdutória, estruturas periódicas organizadas em espiral já foram observadas em planos de parâmetros de diferentes sistemas [1, 30, 31, 32, 45, 50, 51], modelados por diferentes conjuntos de equações diferenciais não lineares envolvendo funções polinomiais, funções exponenciais, entre outras funções matemáticas, o que confirma a importância desse tipo de organização nos vários campos do conhecimento em que está presente.

Para determinar os períodos das estruturas no plano de parâmetros da Fig. 6.1, usamos os diagramas de bifurcação da Fig. 6.2.

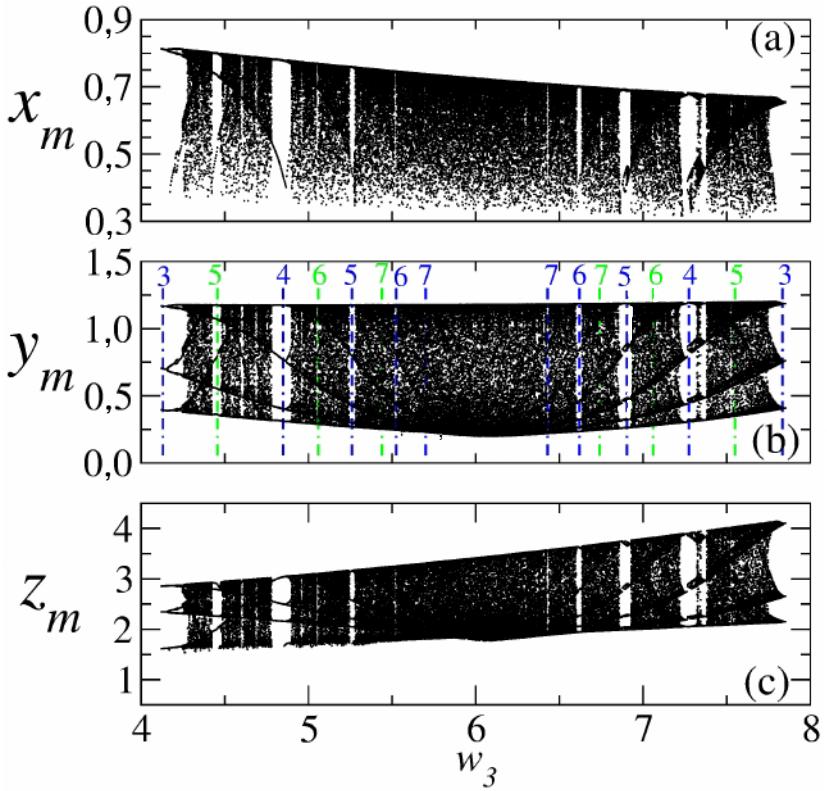


Figura 6.2: Diagramas de bifurcação para os pontos ao longo da linha reta vermelha no espaço de parâmetro da Fig. 6.1. Em (a) são plotados os máximos locais da variável x . Em (b) são plotados os máximos locais da variável y . Em (c) são plotados os máximos locais da variável z .

Eles foram construídos variando simultaneamente os parâmetros w_3 e w_2 ao longo da linha $w_2 = -0,9509 w_3 + 7,9721$ atravessando as estruturas periódicas em formato de camarão na Fig. 6.1. A reta foi escolhida de maneira a unir aproximadamente os camarões na sua região central. A obtenção da reta mais adequada se sucedeu na escolha de dois pontos, um a partir do maior camarão à esquerda do foco e o outro a apartir de uma mesma estrutura à direita do foco da espiral externa. Cada diagrama considera o número de máximos locais de cada

variável do sistema (5.4), em uma volta completa ao longo do atrator no espaço de fase, ou seja x_m na Fig. 6.2a, y_m na Fig. 6.2b e z_m na Fig. 6.2c, sempre em função do parâmetro w_3 . Como pode ser observado na Fig. 6.2, o número total de máximos locais em função do parâmetro w_3 , é igual para as variáveis y e z , e diferente para a variável x . Deste modo, os números que identificam os períodos na Fig. 6.1 não são únicos, dependendo da variável considerada para a contagem de máximo local. Esse resultado já foi anteriormente observado para outros modelos matemáticos [38, 55]. Aqui é considerada a variável y para a contagem de máximo local, o que significa que os períodos na Fig. 6.1 foram determinados a partir da Fig. 6.2b. Em outras palavras, cada janela periódica numerada em verde e azul no diagrama de bifurcação da Fig. 6.2b, corresponde a uma estrutura periódica em formato de camarão igualmente numerada do plano de parâmetros da Fig. 6.1. Note que na escala utilizada na Fig. 6.2b, algumas janelas periódicas não são visíveis. Os períodos correspondentes foram determinados realizando ampliações adequadas nessas regiões.

Na Fig. 6.3 podem ser observados dez atratores periódicos construídos no espaço de fase definido pelas variáveis x , y e z do sistema (5.4), cada qual relacionado a uma estrutura periódica que compõe a espiral mais externa da Fig. 6.1, mais especificamente a um ponto (w_3, w_2) na cor magenta indicado em cada estrutura periódica da espiral mais externa. Cada um dos dez atratores da Fig. 6.3 foi construído usando 30×10^4 pontos, sendo esse conjunto de atratores como um todo uma outra forma de comprovar a sequência de bifurcações que ocorrem, à medida que se percorre a espiral mais externa no sentido anti-horário em direção ao ponto focal F.

Investigou-se a maior parte dos 45 planos de parâmetros possíveis para o sistema (5.4). Estruturas periódicas organizadas em forma de espiral, como as descritas aqui, foram observadas somente em dois deles.

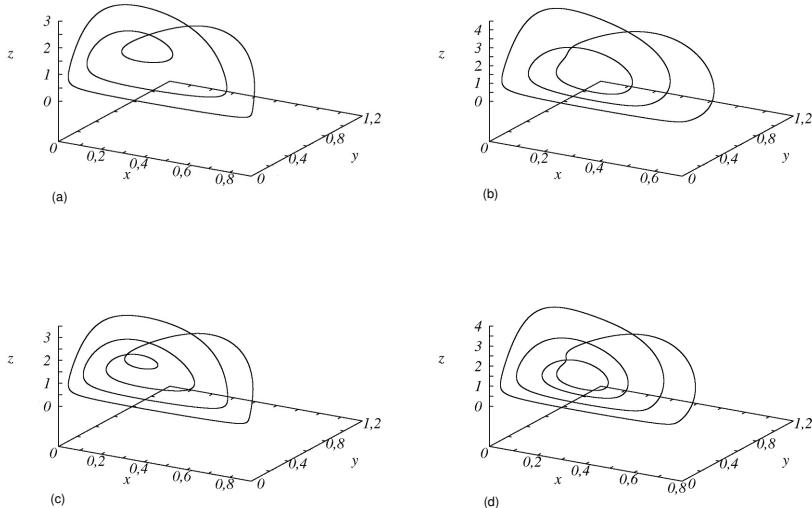


Figura 6.3: Atratores gerados para o sistema (5.4), relacionados às dez estruturas periódicas numeradas em azul na espiral mais externa da Fig. 6.1. (a) Estrutura de período-3, $(w_3, w_2) = (4,12034; 4,05389)$. (b) Estrutura de período-3, $(w_3, w_2) = (7,84948; 0,506093)$. (c) Estrutura de período-4, $(w_3, w_2) = (4,82485; 3,38560)$. (d) Estrutura de período-4, $(w_3, w_2) = (7,25958; 1,05639)$.

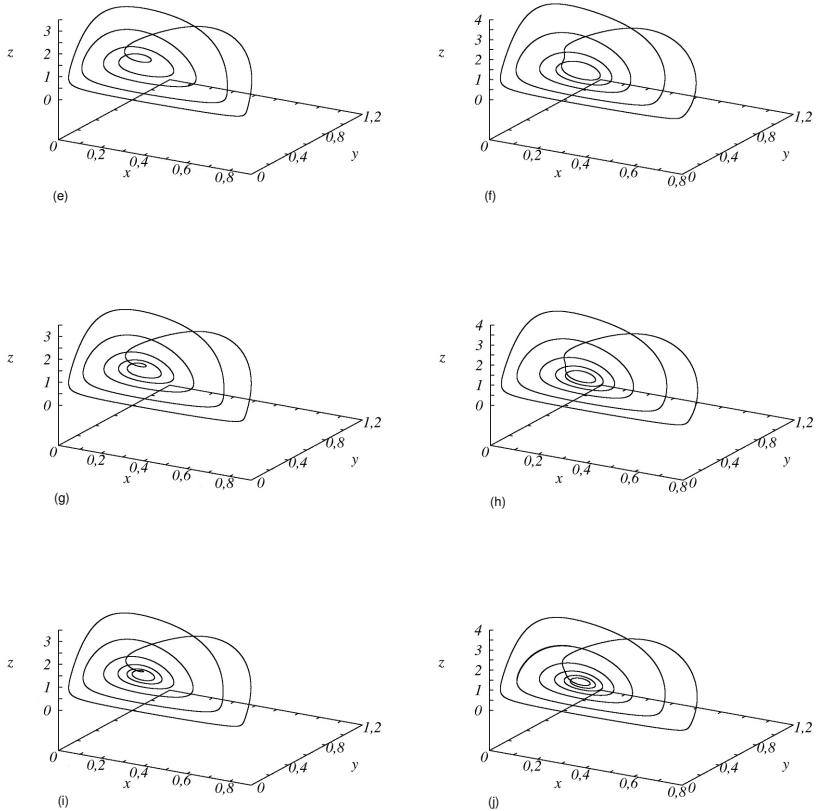


Figura 6.4: Atratores gerados para o sistema (5.4), relacionados às dez estruturas periódicas numeradas em azul na espiral mais externa da Fig. 6.1.(e) Estrutura de período-5, $(w_3, w_2) = (5,24568; 2,99019)$. (f) Estrutura de período-5, $(w_3, w_2) = (6,87828; 1,42907)$. (g) Estrutura de período-6, $(w_3, w_2) = (5,52481; 2,73350)$. (h) Estrutura de período-6, $(w_3, w_2) = (6,61715; 1,68075)$. (i) Estrutura de período-7, $(w_3, w_2) = (5,69962; 2,57447)$. (j) Estrutura de período-7, $(w_3, w_2) = (6,43447; 1,86995)$.

A Fig. 6.4 mostra o plano de parâmetros (w_{10}, w_2) construído também para o sistema (5.4), onde são obtidas estruturas periódicas espirais similares que podem ser estudadas igualmente ao caso acima, apresentando o mesmo fenômeno de adição de período.

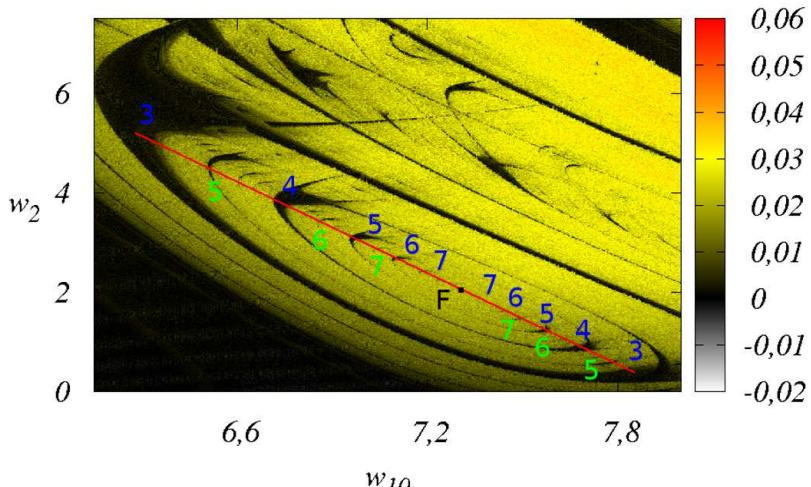


Figura 6.5: O plano de parâmetros (w_{10}, w_2) mostra duas estruturas espirais que são mais visíveis, uma externa e outra interna. As cores do plano do parâmetros estão relacionadas com a magnitude do expoente de Lyapunov. Os números que aparecem nas cores azul e verde indicam o período das respectivas estruturas, conforme explicado no texto.

O período nas cores verde e azul das estruturas na Fig. 6.4 foi analisado ao longo da linha $w_2 = -3,0630 w_{10} + 24,440$ sendo considerados os máximos da variável y . Os números em azul, acima da reta indicam o período das estruturas em forma de camarão da espiral mais externa, e os períodos em verde, abaixo da reta, as mesmas estruturas da espiral mais interna.

O ponto focal para o arranjo de espirais foi estimado numericamente em $(w_{10}, w_2) = (7,3054; 2,0431)$.

De acordo com a Seção 4, e conforme a Ref. [16], as estruturas periódicas espirais são definidas por meio de um conjunto de curvas de bifurcação, de modo que podemos associar as estruturas espirais obtidas nos planos de parâmetros da Fig. 6.1 e Fig. 6.4 com curvas de bifurcação, do tipo, sela-nó e de duplicação de período nas regiões em que se encontram as pernas de peridicidade, cusp nas regiões em que as pernas dos camarões não se enrolam ao redor do foco e homoclínica de sela-foco se considerarmos a existência de uma órbita homoclínica a partir do foco F de cada uma das espirais. A existência de algumas dessas bifurcações pode ser verificada por meio dos diagramas de bifurcação da Fig. 6.2, especialmente os das variáveis y e z . As janelas de periodicidade, regiões não completamente preenchidas por pontos no diagrama de bifurcação da Fig. 6.2 que permitem estabelecer um número finito de máximos da variável em um intervalo de variação do parâmetro w_3 e o período das estruturas da Fig. 6.4, são uma consequência da bifurcação sela-nó que gera um par de ciclos limites, um instável e outro estável. O ciclo limite estável toma o lugar do ciclo limite caótico, isto é, ocorre uma transição do regime caótico para o periódico, e que, seguidamente, ao se aumentar o parâmetro w_3 sofre uma série de bifurcações de dobramento de período que caracterizam uma cascata de bifurcação e a retomada para o caos.

6.1 SEÇÃO ADICIONAL: OUTROS RESULTADOS

Os planos de parâmetros (w_3, w_5) e (w_2, w_5) construídos para o sistema (5.4) mostrados nas Figs. 6.5a-i e Figs. 6.6a-b, respectivamente, revelaram estruturas interessantes recorrentes em sua maior parte. Ao longo do plano de parâmetros global na Fig. 6.5a realizaram-se ampliações a fim de descrever essas estruturas com mais detalhes. Foram escolhidas quatro regiões conforme as caixas D, A, B e C. A princípio, com o intuito de descrever e identificar tais estruturas, propõe-se a comparação com um padrão tipicamente conhecido por dendrítico, que tem origem na palavra grega “dendron”, que significa árvore. Assim um dendrito consiste numa estrutura em forma de árvore.

Nas ampliações que sucedem nas caixas G, E e F da Fig. 6.5b e na caixa H da Fig. 6.5f observa-se que o padrão dendrítico se revela mais definido para algumas regiões do que para outras, e que além dos dendritos analisados, podem existir muitos outros para um mesmo plano de parâmetros caracterizando o que se chama de uma floresta de dendritos.

Como se sabe o padrão dendrítico foi observado e estudado em diferentes campos do conhecimento, e atraiu a atenção de pesquisado-

res de diferentes áreas devido às suas características morfológicas. Na geologia no estudo de redes de drenagem de rios e lagos [64], na metalurgia no estudo da deposição de metais em vários substratos [65, 66, 67] no estudo dos neurônios de uma rede neural [68] entre outras áreas. Para a nossa comparação consideramos o padrão de crescimento dendrítico observado na deposição de alguns metais por meio de diagramas morfológicos, uma espécie de diagrama de fase em que uma estrutura em forma de árvore, ou dendrito pode ser descrito basicamente como um tronco principal onde crescem ramificações laterais, que posteriormente se tornam troncos onde crescem ramificações menores e assim por diante.

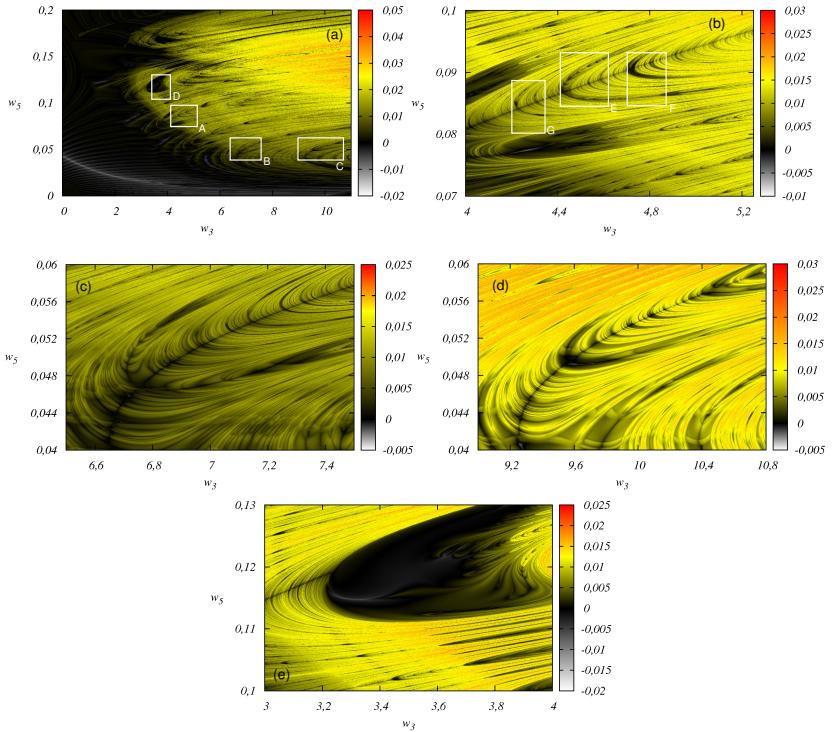


Figura 6.6: Planos de parâmetros (w_3, w_5) considerando o maior expoente de Lyapunov. Em (b) está a ampliação da região da caixa A na Fig. 6.5a. Em (c) a ampliação da região da caixa B. Em (d) a ampliação da região da caixa C e em (e) a ampliação da caixa D.

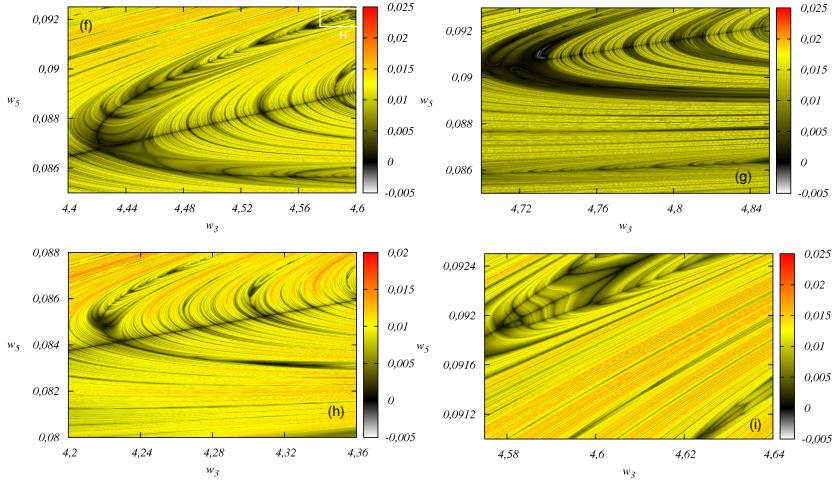


Figura 6.7: Planos de parâmetros (w_3, w_5) considerando o maior expoente de Lyapunov. Em (f) está a ampliação da região da caixa E na Fig. 6.5b. Em (g) a ampliação da região da caixa F. Em (h) a ampliação da região da caixa G. Em (i) está a ampliação da região da caixa H na Fig. 6.4f.

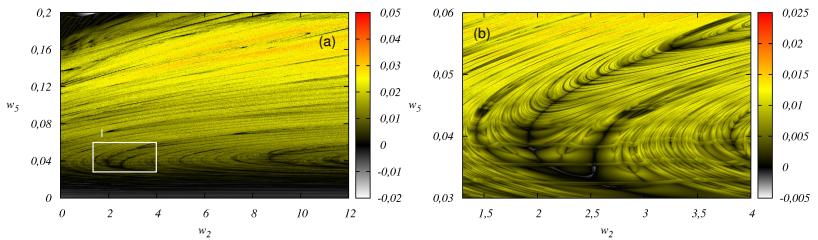


Figura 6.8: Planos de parâmetros (w_2, w_5) considerando o maior expoente de Lyapunov. Em (b) está a ampliação da região da caixa I na Fig. 6.6a.

Pretende-se ao final dessa seção atingir um grau de comparação entre um dendrito da maneira como ele é definido para com as estruturas obtidas nos planos de parâmetros. Devendo um dendrito ao menos ter uma forma que caracterize um tronco e ramificações interligadas a ele deduzimos um dendrito conforme se é descrito na Fig. 6.7.

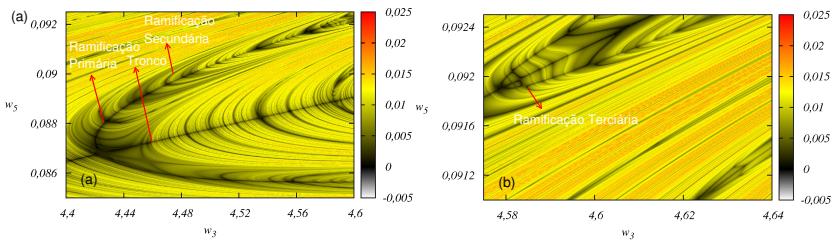


Figura 6.9: Crescimento de ramificações de ordens superiores indo de (a) para (b) em que a cada ordem nova de ramificações surgida a anterior torna-se tronco e assim sucessivamente.

A estrutura dendrítica reportada mostrou estar de acordo em certos aspectos de formação observados e descritos também para a deposição de metais, como a existência de um tronco comum e ramificações interligadas. O padrão de crescimento das ramificações observado na maior parte das estruturas nos planos de parâmetros e a auto-afinidade apresentada por elas, característica de fractais, ou seja apresentam uma forma igual ou aproximadamente igual em diferentes escalas de observação também corresponderam de maneira razoável. Entretanto, algumas questões ficaram em aberto que podemos elencar nos tópicos:

- Determinar a posição e a direção do crescimento das estruturas;
- Explicar por que não são encontrados padrões completos de crescimento, isto é, para toda nova ramificação, a exigência de uma ramificação ainda menor;

- Determinar até que ordem de crescimento pode chegar as ramificações;
- Explicar por que as estruturas dendríticas surgiram em planos de parâmetros.

7 CONCLUSÃO

Nessa dissertação propôs-se a análise de estruturas periódicas espirais encontradas em planos de parâmetros construídos para um sistema que modela uma cadeia alimentar tritrófica, constituído por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, autônomas, não lineares de primeira ordem com dez parâmetros. Realizaram-se simulações numéricas em que se considerou o maior expoente de Lyapunov como o determinante dos comportamentos caótico ou periódico oriundos da dinâmica apresentada pelo sistema. Construíram-se planos de parâmetros variando os dez parâmetros de controle. Para alguns pares de parâmetros foram encontradas estruturas periódicas organizadas em meio a regiões de caos, em forma de espirais enroladas no sentido anti-horário em torno de um ponto focal e mostrou-se que a medida que essas estruturas espiralam em direção ao ponto focal acontece um fenômeno de adição de período conforme observado nos diagramas de bifurcação e atratores construídos para o sistema.

A seção adicional trouxe outros resultados numéricos construídos ao se variar certos pares de parâmetros, que elucidaram estruturas até então não verificadas na literatura pelo menos no que diz respeito aos planos de parâmetros. Apesar de esforços realizados para tentar explicar o surgimento das estruturas conhecidas como dendritos, não se conseguiu concluir a respeito da sua origem como uma estrutura periódica. Por outro lado conseguiu-se descrever de maneira aproximada o padrão dendrítico outrora observado em outras áreas do conhecimento.

Entre as possibilidades para levar adiante o estudo dos dendritos podemos citar a obtenção de uma representação 3D dos planos de parâmetros para visualizar ramificações e partes da estrutura que não são visíveis em duas dimensões, e compreender a orientação dessas estruturas; e o cálculo do período das diferentes ordens de ramificações procurando alguma associação ou fenômeno que explique o aparecimento de dendritos em planos de parâmetros.

Finalmente tem-se que pontuar a importância da organização espiral de estruturas periódicas em planos de parâmetros que tem sido verificada para uma gama de diferentes sistemas, abrangendo vários campos, bem como, a importância da investigação em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos na identificação e descrição de novas estruturas periódicas, como os dendritos aqui reportados que ainda como um conhecimento em aberto, servirão de motivação para futuros estudos.

REFERÊNCIAS

- [1] GALLAS, J. A. C. The structure of infinite periodic and chaotic hub cascades in phase diagrams of simple autonomous flows. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 20, p. 197, 2010.
- [2] STEGEMANN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Some two-dimensional parameter spaces of a Chua system with cubic nonlinearity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 20, p. 023103, 2010.
- [3] RAMÍREZ-ÁVILA, G. M; GALLAS, J. A. C. How similar is the performance of the cubic and the piecewise-linear circuits of Chua? *Physics Letters A*. v. 375, p. 143, 2010.
- [4] XAVIER, J. C.; RECH, P. C. Regular and chaotic dynamics in the Lorenz-Stenflo System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 20, p. 145, 2010.
- [5] MEDEIROS, E. S.; SOUZA, S. L. T.; MEDRANO-T, R. O.; CALDAS, I. L. Periodic window arising in the parameter space of an impact oscillator. *Physics Letters A*. v. 374, p. 2628, 2010.
- [6] TESTONI, G. E.; RECH, P. C. Dynamics of a particular Lorenz type system. *International Journal of Modern Physics C*, v. 21, p. 973, 2010.
- [7] SLIPANTSCHUK, J.; ULLNER, E; BAPTISTA, M. S.; ZEINEDDINE, M.; THIEL, M. Abundance of stable periodic behavior in a Red Grouse population model with delay: A consequence of homoclinicity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v.20, p. 045117, 2010.
- [8] KOVANIS V.; GAVRIELIDES, A.; GALLAS, J. A. C. Labyrinth bifurcations in optically injected diode lasers. *European Physical Journal D*, v. 58, p. 181, 2010.
- [9] NASCIMENTO, M. A.; GALLAS, J. A. C.; VARELA, H. Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator. *Physical Chemistry Chemical Physics*, v. 13, p. 441, 2010.
- [10] RECH, P. C. Self-Similarities and Period-Adding in the Parameter-Space of a Nonlinear Resonant Coupling Process. *International Journal of Nonlinear Science*, v. 10, p. 179, 2010.
- [11] FREIRE, J. G.; GALLAS, J. A. C. Non-Shilnikov cascades of spikes and hubs in a semiconductor laser with optoelectronic feedback. *Physical Review E*, v. 82, p. 037202, 2010.

- [12] STEGEMANN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. Lyapunov exponent diagrams of a 4-dimensional Chua system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 21, p. 033105, 2011.
- [13] NASCIMENTO, M. A.; GALLAS, J. A. C.; VARELA, H. Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator. *Physical Chemistry Chemical Physics*, v. 13, p. 441, 2011.
- [14] RECH, P. C. Dynamics of a neuron model in different two-dimensional parameter-spaces. *Physics Letters A*, v. 375, p. 1461, 2011.
- [15] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Physical Review E*, v. 84, p. 016216, 2011.
- [16] BARRIO, R.; BLESÁ, F.; SERRANO, S.; SHILNIKOV, A. Global organization of spiral structures in bi-parameter space of dissipative systems with Shilnikov saddle-foci. *Physical Review E*, v. 84, p. 035201(R), 2011.
- [17] BARRIO, R.; SHILNIKOV, A. Parameter-sweeping techniques for temporal dynamics of neuronal systems: case study of Hindmarsh-Rose model. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, v. 1, p. 1, 2011.
- [18] BARRIO, R.; BLESÁ, F.; DENA, A.; SERRANO, S. Qualitative and numerical analysis of the Rössler model: Bifurcations of equilibria. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 62, p. 4140, 2011.
- [19] RECH, P. C. Chaos and hyperchaos in a Hopfield neural network. *Neurocomputing*, v. 74, p. 3361, 2011.
- [20] CELESTINO, A; MANCHEIN, C; ALBUQUERQUE H. A.; BEIMS, M. W. Ratchet Transport and Periodic Structures in Parameter Space. *Physical Review Letters*, v. 106, p. 234101, 2011.
- [21] FREIRE, J. G.; GALLAS, J. A. C. Stern-Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer-van der Pol and the FitzHugh-Nagumo models of excitable systems. *Physics Letters A*, v. 375, p. 1097, 2011.
- [22] FREIRE, J. G.; GALLAS, J. A. C. Stern-Brocot trees in the periodicity of mixed-mode oscillations. *Physical Chemistry Chemical Physics*, v. 13, p. 12191, 2011.
- [23] BRAGARD, J.; PLEINER, H.; SUAREZ, O. J.; VARGAS, P.; GALLAS, J. A. C.; LAROZE, D. Chaotic dynamics of a magnetic nanoparticle. *Physical*

Review E, v. 84, p. 037202, 2011.

- [24] BARRIO, R.; BLESA, F.; SERRANO, S. Topological Changes in Periodicity Hubs of Dissipative Systems. *Physical Review Letters*, v. 108, p. 214102, 2012.
- [25] SERRANO, S.; BARRIO, R.; DENA, A.; RODRÍGUEZ, M. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 17, p. 788, 2012.
- [26] BARRIO, R.; BLESA, F.; SERRANO, S. Behavior patterns in multiparametric dynamical systems: Lorenz model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 22, p. 1230019, 2012.
- [27] JUNGES, L.; GALLAS, J. A. C. Intricate routes to chaos in the Mackey-Glass delayed feedback system. *Physics Letters A*, v. 376, p. 2109, 2012.
- [28] JUNGES, L.; GALLAS, J. A. C. Frequency and peak discontinuities in self-pulsations of a CO₂ laser with feedback. *Optics Communications* v. 285, p. 4500, 2012.
- [29] MATHIAS A. C.; RECH P. C. Periodicity suppression in continuous-time dynamical systems by external forcing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science Chaos*, v. 22, p. 043147, 2012.
- [30] ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a Chua circuit *International Journal of Circuit Theory and Applications*, v. 40, p. 189, 2012.
- [31] MATHIAS, A. C.; RECH, P. C. Hopfield neural network: the hyperbolic tangent and the piecewise-linear activation functions. *Neural Networks*, v. 34, p. 42, 2012.
- [32] LI, X. F.; LEUNG, A. Y. T.; CHU, Y. D. Symmetry and Period-Adding Windows in a Modified Optical Injection Semiconductor Laser Model. *Chinese Physics Letters*, v. 29, p. 010201, 2012.
- [33] RECH, P. C. Dynamics in the Parameter Space of a Neuron Model. *Chinese Physics Letters*, v. 29, p. 060506, 2012.
- [34] COREIA, M. J.; RECH, P. C. Hyperchaotic states in the parameter-space. *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, p. 6711, 2012.
- [35] KRÜGER, T. S.; RECH, P. C. Dynamics of an erbium-doped fiber dual-ring laser. *European Physical Journal D*, v. 66, p. 12, 2012.

- [36] VIANA, E. R.; RUBINGER, R. M.; ALBUQUERQUE, H. A.; DIAS, F. O.; OLIVEIRA, A. G.; RIBEIRO, G. M. Periodicity detection on the parameter-space of a forced Chua's circuit. *Nonlinear Dynamics*, v. 67, p. 385, 2012.
- [37] HOFF, A.; DA SILVA, D. T.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A. Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model. *Physics Letters A*, v. 378, p. 171, 2013.
- [38] DA SILVA, R. A.; RECH, P. C. A Parameter-Space Analysis of the Rikitake System. *Chinese Physics Letters*, v. 30, p. 120501, 2013.
- [39] RECH, P. C. Nonlinear dynamics investigation in parameter planes of a periodically forced compound KdV-Burgers equation. *The European Physical Journal B*, v. 86, p. 356, 2013.
- [40] RECH, P. C. The parameter-space of the three-parameter A2 symmetric flow. *Applied Mathematics and Computation*, v. 220, p. 208, 2013.
- [41] PRANTS, W. T.; RECH, P. C. The organization of periodicity and hyper-chaos in an asymmetric coupling of two chaotic Rössler oscillators. *Physica Scripta*, v. 88, p. 015001, 2013.
- [42] FRANCKE, R. E.; PÖSCHEL T.; GALLAS, J. A. C. Infinite Networks of Hubs, Spirals, and Zig-Zag Patterns in Self-sustained Oscillations of a Tunnel Diode and of an Erbium-doped Fiber-ring Laser. *Studies in Computational Intelligence*, v. 459, p. 161, 2013.
- [43] FRANCKE, R. E.; PÖSCHEL, T.; GALLAS, J. A. C. Zig-zag networks of self-excited periodic oscillations in a tunnel diode and a fiber-ring laser. *Physical Review E*, v. 87, p. 042907, 2013.
- [44] CABEZA, C.; BRIOZZO, C. A.; GARCIA, R.; FREIRE, J. G.; MARTI, A. C. Periodicity hubs and wide spirals in a two-component autonomous electronic circuit GALLAS, J. A. C. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 52, p. 59, 2013.
- [45] STEGEMANN, C.; RECH, P. C. Organization of chaos and periodicity in a three-dimensional cancer model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 24, p. 1450023, 2014.
- [46] CELESTINO, A.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A. BEIMS, M. W. Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 19, p. 139, 2014.

- [47] FREIRE, J. G.; GALLAS, J. A. C. Cyclic organization of stable periodic and chaotic pulsations in Hartley's oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 59, p. 129, 2014.
- [48] GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the Hénon map. *Physical Review Letters*, v. 70, p. 2714, 1993.
- [49] GASPARD, P.; KAPRAL, R.; NICOLIS, G. Bifurcation Phenomena near Homoclinic Systems: A Two-Parameter Analysis. *Journal of Statistical Physics*, vol. 35, n. 5/6, p. 697, 1984.
- [50] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. Periodicity Hub and Nested Spirals in the Phase Diagram of a Simple Resistive Circuit. *Physical Review Letters*. v. 101, p. 054101, 2008.
- [51] BARRIO, R.; BLESA, F.; SERRANO, S. Qualitative analysis of the Rössler equations: Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 238, p. 1087, 2009.
- [52] STOOP, R.; BENNER, P.; UWATE, Y. Real-World Existence and Origins of the Spiral Organization of Shrimp-Shaped Domains. *Physical Review Letters* v. 105, p. 074102, 2010.
- [53] PRIYADARSHI, A.; GAKKAR, S. Dynamics of Leslie–Gower type generalist predator in a tri-trophic food web system. *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation*, v. 18, p. 3202, 2013.
- [54] DA SILVA, R.A.; RECH, P.C. Spiral periodic structures in a parameter plane of an ecological model. *Applied Mathematics and Computation*, v. 254, p. 9, 2015.
- [55] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers. *Physical Review E*, v. 75, p. 055204, 2007.
- [56] KUSNETSOV, Y. A. Elements of applied bifurcation theory. Nova York: Springer-Verlag, 1998.
- [57] SAVI, M. A. Dinâmica não-linear e caos. e-papers, 2006.
- [58] ALVES MONTEIRO, L. H. Sistemas Dinâmicos. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [59] FERRARA, N.; PRADO, C. Caos: Uma Introdução. São Paulo: Edgard Blöcher Ltda, 1995.

- [60] CENCINI, M.; CECCONI, F.; VULPIANI, A. Chaos: From Simple Models to Complex Systems. Singapura: World Scientific, v. 17, 2010.
- [61] IZHKEVICH, E. M. Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. Cambridge: The MIT Press, 2007.
- [62] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences 42, Berlin, New York: Springer-Verlag, v. 42, 1997.
- [63] HOFF, A. Estruturas de bifurcação em sistemas dinâmicos quadridimensionais. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2014. Dissertação de Mestrado.
- [64] BENDA, L.; POFF, N. L.; MILLER, D.; DUNNE, T.; REEVES, G.; PESSIONE, G.; POLLOCK, M. The Network Dynamics Hypothesis: How Channel Networks Structure Riverine Habitats. American Institute of Biological Sciences, v. 54, p.413, 2004.
- [65] MENG, E.; NAKANE, K.; MATSUSHITA, T.; LI, W.; ODA, S.; SHIRAI, K.; CAI, S. M.; SHINOMURA, M.; TOMODA, W.; KOBAYASHI, T.; KUNO, T.; MIYABAYASHI, K.; TATSUOKA, H. Growth of Ag Nanostructures on Various Metallic Substrates. Transactions of the Materials Research Society of Japan, v. 38, n. 1, p. 73, 2013.
- [66] LI, G.; YAO, C.; LU, X.; ZHENG, F.; FENG, Z.; YU, X.; SU, C.; TONG, Y. Facile and Efficient Electrochemical Synthesis of PbTe Dendritic Structures. Chemistry of Materials, v. 20, p. 3306, 2008.
- [67] YAN, C; XUE, D. A Modified Electroless Deposition Route to Dendritic Cu Metal Nanostructures. Crystal Growth & Design, v. 8, n. 6, p. 1849, 2008.
- [68] POIRAZI, P.; BRANNON, T.; MEL B. W. Pyramidal neuron as two-layer neural network. Neuron, v. 37, n. 6, p. 989, 2003.
- [69] WOLF, A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. Physica D, v. 16, p. 285, 1985.