

Neste trabalho propusemos uma forma geral para mapas de senos n -dimensionais, cujos argumentos sejam lineares nas variáveis dinâmicas. Determinamos analiticamente a ocorrência de pontos fixos atrativos para o caso geral e o relacionamos com modelos conhecidos na literatura. Para o caso bidimensional, evidenciamos multiestabilidade, bifurcações do tipo *Neimark-Sacker* e línguas de Arnold com períodos em árvore de *Farey*. A investigação numérica se deu com o emprego de espaços de parâmetros gerados por contagem de período e maior expoente de *Lyapunov*, bacias de atração, diagramas de bifurcações e representações gráficas de atratores.

Orientador: Dr. Paulo Cesar Rech

Joinville, 2017

ANO
2017

EDUARDO LUÍS BRUGNAGO | UM ESTUDO GERAL SOBRE MAPAS DE SENOS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO GERAL SOBRE MAPAS DE SENOS

EDUARDO LUÍS BRUGNAGO

JOINVILLE, 2017

EDUARDO LUÍS BRUGNAGO

UM ESTUDO GERAL SOBRE MAPAS DE SENOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Rech

**JOINVILLE - SC
2017**

Brugnago, Eduardo Luís.

Um estudo geral sobre mapas de senos/ Eduardo Luís Brugnago. - Joinville, 2017.

76 p.

Orientador: Dr. Paulo Cesar Rech.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2017.

1. Mapa seno .
 2. Mapas multidimensionais
 3. Espaço de Parâmetros.
 4. Neimark-Sacker.
 5. Multiestabilidade.
- I. Rech, Paulo Cesar. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Um Estudo Geral Sobre Mapas de Senos

por

Eduardo Luís Brugnago

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

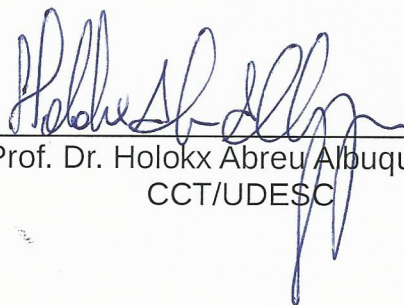
Área de concentração em "Física"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

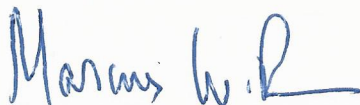
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC



Prof. Dr. Marcus Werner Beims
UFPR

Joinville, SC, 18 de agosto de 2017.

A Anna Clara e Henrique.

Agradecimentos

Agradeço ao grande geômetra por ter concebido o universo regido por leis matematicamente exprimíveis, bagunçado tudo e, assim, assegurado que o meu trabalho ficasse muito mais interessante.

Em especial, presto agradecimentos ao meu irmão Ricardo Luís Brugnago e à minha companheira Sharmaine Aparecida da Costa.

À minha mãe Sueli Ribeiro Brugnago e ao meu pai Augustinho Brugnago.

Ao meu orientador, professor Dr. Paulo Cesar Rech e aos demais professores do PPGF do CCT-UDESC.

Aos amigos Alexandre Camacho Orthey Júnior, Carolini Costa Felicio, Nathan dos Santos Nicoláu e Clésio Evangelista Mota.

Aos demais amigos e colegas do mestrado.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Agradeço a Susele Mussoi Rodrigues pelo auxílio técnico e competência.

Também a Adriane da Silva Reis pela paciência e auxílio.

“Ao amanhecer de todos os dias nas savanas africanas,
uma zebra acorda sabendo que terá que correr mais rápido do que um leão.
Ao amanhecer de todos os dias nas savanas africanas,
um leão acorda sabendo que terá que correr mais rápido do que uma zebra.
Seja leão ou zebra, todo dia é dia de correr.”

Autor desconhecido.

Resumo

Neste trabalho propusemos uma forma geral para mapas de senos n -dimensionais, cujos argumentos sejam lineares nas variáveis dinâmicas. Determinamos analiticamente a ocorrência de pontos fixos atrativos para o caso geral e o relacionamos com o modelo de Kuramoto e com o *sine circle map*. Aproximamos o mapa de Hénon por uma série de Fourier truncada expressa na forma do mapa seno n -dimensional, a qual investigamos numericamente e evidenciamos a deformação das estruturas periódicas presentes no mapa original. Obtivemos e estudamos os mapas seno unidimensional e seno bidimensional. Para o último, evidenciamos multiestabilidade, bifurcações do tipo Neimark-Sacker e línguas de Arnold com períodos em árvore de Farey. Para a investigação numérica, empregamos espaços de parâmetros gerados por contagem de período e maior expoente de Lyapunov, bacias de atração, diagramas de bifurcações e representações gráficas de atratores.

Palavras-chaves: Mapa seno. Mapas multidimensionais. Espaço de parâmetros. Neimark-Sacker. Multiestabilidade.

Abstract

In this work we have proposed a general form for n -dimensional sine maps whose arguments are linear in dynamic variables. We determine analytically the occurrence of attractive fixed points for the general case and relate it to the model of Kuramoto and sine circle map. We approximate the Hénon map by a truncated Fourier series expressed in the form of the n -dimensional sine map, which we investigate numerically and show the deformation of the periodic structures present in the original system. We obtained and studied the one-dimensional sine map and two-dimensional sine map, for the latter we show multistability, Neimark-Sacker bifurcations and Arnold tongues with Farey tree periods. For the numerical investigation, we use parameter spaces generated by period counting and greater Lyapunov exponent, attraction basins, bifurcation diagrams and graphical representations of attractors.

Keywords: Sine map. Multidimensional maps. Parameter space. Neimark-Sacker. Multistability.

Sumário

1	Introdução	17
2	Alguns conceitos em dinâmica não-linear	21
2.1	Espaço de fases	21
2.2	Espaço de parâmetros	21
2.3	Mapas	22
2.4	Trajectoria, órbita, atrator e transiente	22
2.5	Comportamento periódico e ponto fixo	23
2.6	Estabilidade e comportamento caótico	23
2.7	Multiestabilidade e bacia de atração	25
2.8	Bifurcações	25
3	Mapa seno n-dimensional	27
3.1	O contexto da proposta	27
3.2	Potências e produtos de senos	28
3.3	Existência de pontos fixos atrativos	30
3.4	Uma condição suficiente para a ocorrência de bifurcações	33
3.5	Modelo de Kuramoto e mapa seno n -dimensional	34
3.6	<i>Sine circle map</i> e mapa seno n -dimensional	36
3.7	Uma aproximação para o mapa de Hénon	38
4	Mapa seno unidimensional	41
4.1	Pontos fixos	42
4.2	Estabilidade dos pontos fixos	45

4.3	Espaço de parâmetros (a, b) do mapa seno	
	unidimensional	46
5	Mapa seno bidimensional	49
5.1	Simetria de rotação no espaço de parâmetros	49
5.2	Pontos fixos atrativos e uma correspondente	
	região no espaço de parâmetros (a, b)	50
5.3	Espaço de parâmetros (a, b) do mapa seno	
	bidimensional	53
6	Mapa de Hénon aproximado por uma soma finita de senos	65
7	Conclusões	69
A	Três identidades trigonométricas	73
A.1	Produto de um par de senos	73
A.2	Produto de l senos	74
A.3	Potências inteiras positivas de senos	75

Capítulo 1

Introdução

Sistemas de equações diferenciais não-lineares predominam no cenário dos modelos matemáticos de fenômenos físicos [1], sejam esses naturais, como a interação gravitacional entre corpos celestes [2] ou a dinâmica das correntes de convecção na atmosfera da Terra [3], ou artificiais, como o comportamento de circuitos eletrônicos oscilatórios [4, 5] e reguladores de pressão e fluxo em máquinas térmicas, a citar o regulador de Watt [6]. Intrinsecamente atrelado aos sistemas dinâmicos não-lineares com mais do que duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas, está o problema da integrabilidade [7]. Todavia, a caracterização qualitativa da dinâmica de um fenômeno de interesse pode prover mais informações úteis a respeito daquele do que as soluções quantitativas, como proposto pelo matemático francês J. H. Poincaré (1854-1912) ao abordar o problema de três corpos sob interação gravitacional [8].

Seguindo no estudo da estabilidade do movimento, A. M. Lyapunov (1857-1918) evidenciou, assim como Henri Poincaré, que sistemas não integráveis podem apresentar dependência sensível nas condições iniciais. Em seu trabalho, Lyapunov definiu o que atualmente denominamos expoentes de Lyapunov [9, 10], uma grandeza exponencial para a avaliação qualitativa da dinâmica de um sistema. Tratando-se de integrabilidade e estabilidade das soluções, no contexto de sistemas hamiltonianos, não podemos deixar de mencionar o teorema KAM [10], devido a Kolmogorov [11], Arnold [12] e Moser [13].

Outra abordagem para a construção de modelos matemáticos de fenômenos físicos é assumir o tempo como uma variável discreta, acarretando em sistemas de equações de diferenças, também denominados mapas. A caracterização do comportamento dinâmico desses, no sentido da estabilidade de suas órbitas, é similar a de sistemas a tempo

contínuo [10]. Contudo, mesmo mapas com apenas uma dimensão podem, diferentemente dos fluxos com menos de três dimensões, apresentar dependência sensível nas condições iniciais, contanto que neles exista ao menos uma não-linearidade [14]. Sistemas a tempo discreto também decorrem de seções de Poincaré de fluxos, mantendo aspectos da dinâmica do sistema original e tendo menor número de dimensões [1, 10, 14]. Como exemplo citamos o mapa padrão de Chirikov ou mapa de Chirikov-Taylor, obtido a partir da hamiltoniana de um rotor quicado [15].

Embora a área de dinâmica não-linear tenha iniciado com o estudo de problemas mecânicos e naturalmente se estendido para a matemática pura, o seu caráter geral possibilita aplicações em diversos ramos do conhecimento. Dentre seus paradigmas destacamos o mapa logístico [14, 16], um modelo para a dinâmica de populações por meio do qual se evidenciam comportamentos universais em sistemas dinâmicos [17, 18]. Também citamos o modelo de Kuramoto [19, 20], um fluxo com aplicações em Química, Biologia e Neurociências, consistindo na soma de funções trigonométricas baseado no fenômeno de sincronização de osciladores. Outro sistema tradicionalmente estudado na área é o mapa de Hénon [21, 22], uma das formulações mais simples a apresentar multiestabilidade [23].

Funções trigonométricas são recorrentemente empregadas em modelos matemáticos de sistemas dinâmicos [24]. Sua utilidade está em evidenciar comportamentos periódicos no tempo e diferenças de fase entre as oscilações presentes em um dado sistema. Neste trabalho estudamos mapas n -dimensionais do tipo seno a partir de uma proposta de formulação geral para esses. Investigamos analiticamente a existência de uma região mínima no espaço de parâmetros correspondente à ocorrência de pontos fixos atrativos. Por meio de métodos numéricos, construímos e analisamos representações gráficas de espaços de parâmetros e bacias de atração, bem como diagramas de bifurcações, todos para casos com n definido. Vale mencionar o mapa seno bidimensional, para o qual encontramos multiestabilidade e comportamento quasiperiódico, com a ocorrência de línguas de Arnold em regra de formação de períodos conforme uma árvore de Farey [1, 10, 24].

Organizamos esta dissertação de forma a encadear logicamente os capítulos e seções. Assim, no Capítulo 2 apresentamos os conceitos em dinâmica não-linear fundamentais para o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado. O Capítulo 3 está dedicado ao mapa seno n -dimensional, onde evidenciamos analiticamente a existência de pontos de equilíbrio estável e condições suficientes para a ocorrência de bifurcações. Na

sequência o relacionamos com o modelo de Kuramoto e com o *sine circle map* [1, 24]. No mesmo capítulo, interpretamos o mapa seno n -dimensional como uma série de Fourier truncada, por meio da qual aproximamos o mapa de Hénon dado conforme a Ref. [25]. No Capítulo 4 são obtidas características gerais do mapa seno unidimensional [26]. Damos destaque ao Capítulo 5, onde investigamos analítica e numericamente a dinâmica do mapa seno bidimensional. Recorremos a representações gráficas de espaços de parâmetros, com enfoque no comportamento quasiperiódico e na ocorrência de línguas de Arnold, e gráficos de bacias de atração, evidenciando multiestabilidade. A aproximação em séries de Fourier para o mapa de Hénon é estudada no Capítulo 6, cujo ponto culminante é a análise comparativa entre os espaços de parâmetros do mapa tradicional e do mapa aproximado, ambos nos mesmos intervalos dos dois parâmetros de controle adotados.

Durante todo o processo de escrita, procuramos manter a inteligibilidade do texto para o público em geral, sem que fossem negligenciados o rigor e a formalidade necessários a um trabalho acadêmico. Evitamos demonstrações e provas matemáticas extensas ao longo dos capítulos, deixando-as disponíveis nos apêndices. Com isso, pretendemos proporcionar uma leitura fluída e o máximo entendimento ao leitor.

Capítulo 2

Alguns conceitos em dinâmica não-linear

Este capítulo está dedicado à apresentação dos conceitos em dinâmica não-linear fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho. Aqui nos referimos somente a sistemas dinâmicos a tempo discreto. Todas as definições citadas são tradicionalmente utilizadas e há muito incorporadas na literatura base da área. No que segue, não expomos demonstrações nem estendemos discussões sobre os tópicos abordados, uma vez que a bibliografia concernente é vasta [1, 10, 14, 24, 27–30].

2.1 Espaço de fases

Define-se como espaço de fases o espaço coordenado n -dimensional V , cujas coordenadas são as variáveis de estado de um sistema dinâmico também n -dimensional. Assim, o estado de um dado sistema no tempo t é dado pelo ponto $X_t(x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)})$ em V . Alternativamente, pode ser denominado espaço de estados ou espaço das variáveis.

2.2 Espaço de parâmetros

É o espaço coordenado m -dimensional Γ definido pelos domínios dos parâmetros de um dado sistema dinâmico. Quando associado a um espaço Λ definido por grandezas que caracterizam a dinâmica do mesmo sistema, torna-se uma poderosa ferramenta de análise. Sendo $\Pi = \Gamma \times \Lambda$, cada ponto no espaço de parâmetros Γ está associado a um

estado do sistema caracterizado por um ponto em Λ . Este conceito é recorrentemente empregado na construção de representações gráficas de seções bidimensionais de espaços de parâmetros, para as quais se atribui uma diferente coloração para cada estado em Λ .

2.3 Mapas

Mapas são aplicações do tipo $M: V \rightarrow V$, com M definida por equações de diferenças e V um espaço de fases. Consequentemente, a evolução de sistemas assim modelados se dá a tempo discreto. Denomina-se iteração o processo recursivo de evolução temporal de um mapa. Sendo X um ponto em V , a equação

$$X_{t+1} = M(X_t) \quad (2.1)$$

é uma forma genérica para a descrição de um sistema a tempo discreto. Em dinâmica não-linear, estamos interessados em aplicações com ao menos uma não linearidade, ou lineares por partes.

2.4 Trajetória, órbita, atrator e transiente

Define-se trajetória como a sequência $\{X_t\}_t$ dos pontos no espaço de fases V visitados pelo sistema dinâmico em evolução temporal. Em mapas dissipativos, a evolução no tempo leva a trajetórias fechadas e invariantes no espaço das variáveis, denominadas atratores, ou então à divergência, com o crescimento ilimitado do valor absoluto de ao menos uma das variáveis do sistema. Trajetórias fechadas são ditas órbitas.

Um atrator \mathcal{A} é um conjunto fechado, invariante e mínimo em V observado em sistemas dissipativos, para o qual trajetórias iniciadas em um aberto $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ no espaço de fases convergem assintoticamente. Ser invariante significa que qualquer trajetória iniciada em um ponto $X_i \in \mathcal{A}$ permanece em \mathcal{A} . Por mínimo entendemos que $\nexists \mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$ que satisfaça simultaneamente as condições de invariância e de convergência das trajetórias iniciadas em \mathcal{B} . Observamos a necessidade de uma métrica d em V , assim sendo, consideramos o espaço métrico (V, d) .

Para fins numéricos, em mapas dissipativos, transiente é um número inteiro positivo que representa a quantidade necessária de iterações para levar a trajetória do sistema tão

perto de um atrator quanto se precise, para que assim seja possível caracterizar a dinâmica do mesmo.

2.5 Comportamento periódico e ponto fixo

O comportamento dinâmico de um sistema a tempo discreto é dito periódico ou regular quando, para um certo ponto no espaço de parâmetros, existe p inteiro positivo mínimo tal que $X_{t+p} = X_t$, onde p é definido como o período da órbita em questão. Nesse tipo de sistema, pontos de equilíbrio e órbitas de período 1 são a mesma situação dinâmica, sendo o ponto fixo X^* definido por

$$X^* = X_{t+1} = X_t. \quad (2.2)$$

Identifica-se com um asterisco o ponto fixo e suas coordenadas. Não havendo risco de ambiguidade, pode-se omitir o símbolo adicional.

Vale notar que dado $p \in \mathbb{N}$ tal que $X_{t+p} = X_t$, também se verificará $X_{t+np} = X_t$, com $n \in \mathbb{N}$. Daí a necessidade de se caracterizar o período por meio do menor p inteiro positivo que satisfaça a equação $X_{t+p} = X_t$.

2.6 Estabilidade e comportamento caótico

Uma órbita periódica é dita estável quando consiste em um atrator. Seja o conjunto $\mathcal{O} = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ uma órbita de período p , definimos a matriz

$$M = \prod_{k=1}^p W(X_k), \quad (2.3)$$

sendo $W(X_k)$ a matriz jacobiana do sistema aplicada no ponto $X_k(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)})$ de \mathcal{O} , onde n é a dimensão do sistema. Lembrando que os elementos da matriz jacobiana de uma mapa são dados por

$$W_{ij} = \frac{\partial x_{t+1}^{(i)}}{\partial x_t^{(j)}}. \quad (2.4)$$

A partir dos autovalores λ_i de M temos a condição de estabilidade: Se $|\lambda_i| < 1$

com $i = 1, \dots, n$, a órbita \mathcal{O} é estável. O caso $p = 1$ acarreta $M = W(X^*)$, sendo os pontos fixos classificados em três categorias de acordo com os autovalores de W . Como caso particular do anterior, se $|\lambda_i| < 1$ com $i = 1, \dots, n$, o ponto fixo é atrativo e também chamado de ponto de equilíbrio estável. Se $|\lambda_i| > 1$ com $i = 1, \dots, n$, então o ponto fixo é repulsivo. O caso misto, em que dentre os autovalores de $W \exists \lambda_a, \lambda_b : |\lambda_a| > 1$ e $|\lambda_b| < 1$, implica em um ponto de sela.

Um sistema dinâmico apresenta comportamento caótico se: houver dependência sensível nas condições iniciais, for topologicamente transitivo e suas órbitas periódicas forem densas em seu domínio. A partir do expoente de Lyapunov pode-se avaliar o quanto duas trajetórias iniciadas infinitesimalmente próximas se afastam com a evolução do sistema. Para mapas, o expoente de Lyapunov δ_k é dado por

$$\delta_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\lambda_k^N|, \quad (2.5)$$

onde λ_k^N é autovalor de M definida ao longo da trajetória $\mathcal{T} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. Vale ressaltar que para um sistema n -dimensional haverá n expoentes de Lyapunov. Se o maior dos expoentes for negativo, o comportamento é regular. Se houver ao menos um expoente $\delta_k > 0$, o comportamento é caótico.

Em sistemas dissipativos a soma de todos dos expoentes δ_k resulta em um número real negativo, sendo

$$\sum_{k=1}^N \delta_k < 0, \quad (2.6)$$

onde N é o número de dimensões do sistema. Em sistemas conservativos a soma dos referidos expoentes é nula, já que nesses o hipervolume no espaço de fases é constante, tem-se

$$\sum_{k=1}^N \delta_k = 0. \quad (2.7)$$

É imediato que, para mapas conservativos bidimensionais $\delta_1 = -\delta_2$.

Tal característica, para ambos os casos, decorre imediatamente do teorema de Liouville da Mecânica Clássica, o qual pode ser generalizado para sistemas quaisquer, além da Mecânica, contanto que seja possível uma descrição matemática dos mesmos de

acordo com o formalismo hamiltoniano.

2.7 Multiestabilidade e bacia de atração

Um sistema dissipativo apresenta multiestabilidade quando, para os mesmos valores de parâmetros (um ponto em Γ), houver diferentes atratores. Nesse caso, o comportamento assintótico do sistema depende das condições iniciais.

Bacia de atração é o nome dado ao conjunto $\mathcal{B} \subset V$ de todos os pontos que levam ao atrator $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ou a divergência de ao menos uma das variáveis do sistema. Assim, o conjunto de pontos no espaço de fases que leva a um determinado atrator é chamado bacia de atração desse atrator. Para o caso de divergência, o conjunto de pontos no espaço de estados que leva ao crescimento ilimitado de ao menos uma das variáveis é dito bacia de atração do infinito (ou menos infinito, conforme o caso).

2.8 Bifurcações

Mudanças no comportamento assintótico do sistema em função da variação dos parâmetros são ditas bifurcações. A evolução dos parâmetros ao longo da curva \mathcal{C} definida no espaço de parâmetros Γ , pode acarretar em diferentes órbitas estáveis para diferentes pontos da curva. Também é possível que não existam órbitas estáveis para alguns pontos.

Diagramas de bifurcações são recursos gráficos para o estudo de sistemas dinâmicos onde, já passado o transiente, representa-se uma das variáveis do sistema no eixo das ordenadas e um parâmetro, em função do qual se descreve a curva \mathcal{C} , no eixo das abscissas. Dessa forma, é possível determinar os períodos por meio da contagem dos pontos de interseção entre o diagrama e retas verticais definidas para cada valor de interesse do parâmetro representado no eixo das abscissas, também tornam-se evidentes as regiões não periódicas.

Os pontos em Γ correspondentes a bifurcações são aqueles para os quais $|\lambda_{max}| = 1$, sendo $|\lambda_{max}| < 1$ em ao menos um ponto vizinho ao ponto de bifurcação. Onde λ_{max} é o autovalor de M com o maior valor absoluto. Para $\lambda_{max} = -1$, tem-se uma bifurcação de dobramento de período. Para $\lambda_{max} = 1$ a bifurcação pode ser de um dos três tipos: forquilha, sela-nó ou transcritical. Em sistemas com duas ou mais dimensões, pode ocorrer $\lambda_{max} = e^{i\theta}$ com $i^2 = -1$ e $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, em mapas, a bifurcação é do

tipo Neimark-Sacker: deixa-se de observar pontos isolados no espaço das variáveis para se observar trajetórias cíclicas. Esse tipo de comportamento é dito quasiperiódico.

Capítulo 3

Mapa seno n -dimensional

Neste capítulo apresentamos uma formulação geral para mapas n -dimensionais do tipo seno, cujos argumentos sejam funções lineares das variáveis. Destacamos uma identidade que permite transformar um produto de senos em uma soma de senos e apontamos características gerais de sistemas desse tipo. Na sequência, relacionamos o mapa seno n -dimensional com o modelo de Kuramoto [19, 20] e também com o *sine circle map* [31, 32]. Por fim, interpretamos a soma finita de senos como uma série de Fourier truncada, a partir da qual aproximamos o mapa de Hénon [21, 22, 25].

3.1 O contexto da proposta

Diversos sistemas físicos apresentam comportamento periódico e podem ser modelados matematicamente por meio de somas finitas de funções trigonométricas. Como exemplos citamos os mapas unidimensionais seno e seno ao quadrado [26, 33]. Sistemas trigonométricos a tempo discreto com mais do que uma dimensão podem ser construídos por meio do acoplamento de dois ou mais mapas unidimensionais. Os modelos mais simples para esses sistemas empregam nos argumentos funções lineares das variáveis. Nesse contexto propomos o mapa

$$x_{t+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \text{sen}(\beta_{ijk} x_t^{(j)} + \gamma_{ijk}), \quad (3.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, x_t^{(j)} \in \mathbb{R}$. O espaço de parâmetros associado ao mapa acima possui $3mn^2$ dimensões.

Na forma proposta, o somatório em j permite que todas as variáveis estejam presentes em todas as equações, já o somatório em k possibilita a representação de potências e produtos de senos, uma vez empregadas as identidades trigonométricas adequadas a cada caso. Também pode-se recorrer ao somatório em k para a inserção de perturbações dependentes das variáveis ou representar séries de Fourier truncadas. Optamos por não incluir dependência explícita no tempo, mas nada impede a extensão do sistema para um mapa não-autônomo por meio do acréscimo de um termo compatível.

3.2 Potências e produtos de senos

Quaisquer produtos finitos de senos e cossenos podem ser obtidos por meio de somas finitas de senos. Nesta seção estabelecemos as relações que permitem fazê-lo. Buscamos as constantes A_i , B_i e C_i expressas em função das b_j e c_j tais que

$$\prod_{j=1}^l \text{sen}(b_j x + c_j) = \sum_{i=1}^L A_i \text{sen}(B_i x + C_i). \quad (3.2)$$

Assumimos a possibilidade de que, em geral, ter-se-á $L \neq l$, mas há casos em que será verificado $L = l$. Iniciamos pela identidade trigonométrica entre o produto e a soma de um par de senos [34]

$$2 \text{sen}(p_1) \text{sen}(p_2) = \text{sen}\left(p_1 + p_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(p_1 - p_2 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.3)$$

a qual aplicamos recursivamente a fim de expressarmos o produto de l senos¹. Uma vez organizadas as parcelas, para o produto triplo obtém-se a igualdade

$$\begin{aligned} 4 \text{sen}(p_1) \text{sen}(p_2) \text{sen}(p_3) &= \text{sen}(p_1 + p_2 + p_3 - \pi) + \text{sen}(p_1 + p_2 - p_3) \\ &\quad + \text{sen}(p_1 - p_2 + p_3) + \text{sen}(p_1 - p_2 - p_3 + \pi), \end{aligned} \quad (3.4)$$

por meio da qual inferimos sobre a alternância dos sinais entre os fatores nos arcos e relacionamos a quantidade de termos da soma com a constante multiplicativa.

A continuidade do procedimento, empregando de forma recursiva a Eq. (3.3) para

¹No Apêndice A.1 há uma demonstração da identidade (3.3).

produtos com mais elementos, leva à formulação²

$$\prod_{j=1}^l \sin(p_j) = \frac{1}{2^{l-1}} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} \sin \left(p_1 + \sum_{j=2}^l (-1)^{U(i,l,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (3.5)$$

A função $U(i, l, j)$ retorna o j -ésimo dígito mais significativo na representação binária de $(i - 1)$ com l casas. Uma comparação entre as Eqs. (3.2) e (3.5) permite estabelecer $L = 2^{l-1}$, sendo que a igualdade $L = l$ é verificada somente para $l = 1$ ou $l = 2$. A obtenção das constantes A_i , B_i e C_i em função das b_j e c_j é imediata, resultando

$$A_i = 2^{1-l}, \quad \forall i, \quad (3.6)$$

$$B_i = b_1 + \sum_{j=2}^l (-1)^{U(i,l,j)} b_j, \quad (3.7)$$

$$C_i = c_1 - (l-1) \frac{\pi}{2} + \sum_{j=2}^l [(-1)^{U(i,l,j)} c_j + \pi U(i, l, j)]. \quad (3.8)$$

A identidade trigonométrica procurada é obtida ao reescrevermos a Eq. (3.2) aplicando as constantes precedentes, o que resulta em

$$\prod_{j=1}^l \sin(b_j x + c_j) = 2^{1-l} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} \sin(B_i x + C_i). \quad (3.9)$$

Devemos frisar que o somatório em j implícito nas constantes B_i e C_i implica que a relação acima somente faz sentido para $2 \leq l$. Contudo, se fizermos $l = 1$ e negligenciarmos o somatório em j a relação será válida.

Consideramos potências inteiras positivas como casos particulares do produto. Assim, o primeiro membro da Eq. (3.9) apresenta apenas as duas constantes b e c e o segundo membro pode ser reescrito através da soma de senos com arcos iguais. Neste contexto há l arcos diferentes possíveis e torna-se explícito o coeficiente binomial como segue³:

$$\sin^l(bx + c) = 2^{1-l} \sum_{k=1}^l \binom{l-1}{k-1} \sin(B_k x + C_k), \quad (3.10)$$

²Uma prova da validade da Eq. (3.5) e esclarecimentos a respeito da função $U(i, l, j)$ são apresentados no Apêndice A.2.

³Vide Apêndice A.3.

com l inteiro positivo e as constantes do segundo membro dadas por

$$B_k = b(l - 2k + 2), \quad (3.11)$$

$$C_k = c(l - 2k + 2) - (l - 2k + 1)\frac{\pi}{2}. \quad (3.12)$$

Embora existam outras somas que estabelecem identidades trigonométricas com potências de senos, manteremos no presente trabalho apenas a Eq. (3.10) com esse fim, pois a mesma decorre de um caso particular da Eq. (3.9).

Pode ser útil expressar as constantes b_j e c_j da Eq. (3.9) em função das B_i e C_i , respectivamente. A partir das Eqs. (3.7) e (3.8) é possível uma formulação que envolve apenas três constantes por vez e que expressa todas as b_j e c_j , explicitamente

$$b_1 = \frac{B_1 + B_L}{2}, \quad c_1 = \frac{C_1 + C_L}{2}, \quad \text{com } L = 2^{l-1}, \quad (3.13)$$

$$b_j = \frac{B_1 - B_i}{2}, \quad c_j = \frac{C_1 - C_i}{2} - \frac{\pi}{2}, \quad \text{com } 1 < i \text{ e } i - 1 = 2^{l-j}. \quad (3.14)$$

Ressaltamos que o procedimento de transformar uma soma de senos em um produto, conforme a Eq. (3.9), somente é válido se a soma apresentar 2^{l-1} termos e todas as constantes presentes puderem ser reduzidas às formas obtidas para as A_i , B_i e C_i .

3.3 Existência de pontos fixos atrativos

Dividimos em duas etapas a prova de que o mapa seno n -dimensional apresenta pontos fixos atrativos: inicialmente provamos por indução matemática a possibilidade de ocorrência de pontos de equilíbrio para n inteiro positivo qualquer, posteriormente estabelecemos uma condição suficiente para que os pontos fixos sejam atrativos.

Nos pontos de equilíbrio temos por definição $x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} = x^{(i)}$, consequentemente a Eq. (3.1) pode ser reescrita⁴ como

$$x^{(i)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \text{sen}(\beta_{ijk} x^{(j)} + \gamma_{ijk}), \quad (3.15)$$

⁴Com intenção de não poluir a notação, omitimos o asterisco comumente utilizado para a designação das coordenadas do ponto fixo.

onde entendemos como solução para a mesma o ponto $X = X(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ com coordenadas reais que a satisfaçam. Vale lembrar que no mapa (3.1) todas as variáveis são reais.

No caso particular $n = 1$, para quaisquer valores dos parâmetros haverá ao menos uma solução: A função descrita pelo somatório finito em k é limitada e contínua em \mathbb{R} , assim a reta identidade intercepta a curva daquela em algum ponto do \mathbb{R}^2 .

Considerando algum $n = N$ definido e supondo que para quaisquer valores dos parâmetros haja ao menos uma solução correspondente, o que acarreta haver solução para $n = N + 1$: Para qualquer valor da coordenada $x^{(N+1)}$ por suposição haverá solução para as N equações precedentes, resta a equação $N + 1$, a qual sempre tem soluções reais. Concluimos que se o sistema (3.15) for solucionável para N dimensões também o será para $N + 1$ dimensões. Assim, provamos por indução matemática que o mapa seno n -dimensional apresenta pontos fixos para quaisquer valores dos parâmetros e para todos n e m inteiros positivos.

A estabilidade do sistema no ponto X pode ser avaliada por meio dos módulos dos autovalores da matriz jacobiana W do mapa aplicada em X , sendo os elementos da mesma dados pela expressão

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \beta_{ijk} \cos(\beta_{ijk} x^{(j)} + \gamma_{ijk}). \quad (3.16)$$

Empregamos o teorema de Gershgorin [35] a fim de obtermos uma cota superior para os módulos dos autovalores da matriz W . O teorema de Gershgorin afirma que o autovalor λ_i de uma matriz $A_{n \times n}$ se encontra em um disco $D_i(a_{ii}, r_i)$ no plano complexo, sendo D_i centrado em a_{ii} e com raio

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \quad (3.17)$$

Decorre que o módulo do i -ésimo autovalor de W fica limitado à soma dos valores absolutos dos elementos da correspondente linha da matriz, ou seja

$$|\lambda_i| \leq \sum_{j=1}^n |W_{ij}|. \quad (3.18)$$

A soma dos módulos de todos os autovalores confere uma relação de ordem válida para o

maior dentre eles, de maneira que definimos $|\lambda| = \max\{|\lambda_i|\}$ com

$$|\lambda| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |W_{ij}|. \quad (3.19)$$

No que segue, explicitamos W_{ij} e fazemos uso da desigualdade triangular generalizada e das propriedades da função módulo. Também levamos em consideração o fato de que $|\cos(q)| \leq 1$ para obtermos

$$|\lambda| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |\alpha_{ijk}| |\beta_{ijk}|. \quad (3.20)$$

Definimos α e β como os parâmetros com os maiores valores absolutos nos respectivos conjuntos $\{\alpha_{ijk}\}$ e $\{\beta_{ijk}\}$. Empregando ambos na relação acima e impondo a condição de estabilidade para o ponto fixo, ou seja, assegurando que os módulos de todos os autovalores de W sejam menores do que a unidade, resulta

$$|\lambda| \leq mn^2 |\alpha| |\beta| < 1. \quad (3.21)$$

Para $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ a condição de ponto fixo atrativo é automaticamente satisfeita. Constatação já esperada, uma vez que se tratam dos parâmetros de interesse com os maiores valores absolutos: Se $\alpha = 0$, então o sistema (3.1) é identicamente nulo; se $\beta = 0$, então o sistema (3.1) não depende de nenhuma coordenada. Sendo $|\beta| \neq 0$, encontramos a curva no espaço de parâmetros $\alpha \times \beta$ que delimita uma região correspondente à ocorrência de pontos fixos atrativos, aqui denominada região mínima e descrita por

$$-\frac{1}{mn^2 |\beta|} < \alpha < \frac{1}{mn^2 |\beta|}. \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) significa que a dinâmica do sistema convergirá para um ponto de equilíbrio estável sempre que o parâmetro α_{ijk} com maior valor absoluto pertencer ao domínio delimitado em função de $|\beta|$, ou seja, em função do maior módulo dentre os parâmetros β_{ijk} . A dependência em n^{-2} indica que o aumento na quantidade de dimensões diminui a região mínima de período 1 estável, o mesmo valendo para a dependência em m^{-1} e a quantidade de senos somados para cada coordenada. Provada a existência de pontos de equilíbrio para quaisquer valores dos parâmetros, a condição encontrada é

suficiente para a ocorrência de pontos fixos atrativos.

Uma constatação similar decorre de definir-se a e b como os dois elementos do conjunto $\{\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}\}$ com os maiores valores absolutos, ambos não nulos. Empregando-os na expressão (3.20) não se restringe o intervalo subsequente à relação entre parâmetros do tipo α com β . A região mínima obtida mantém a forma anterior, sendo dada por

$$-\frac{1}{mn^2|b|} < a < \frac{1}{mn^2|b|}. \quad (3.23)$$

Alternativamente, consideramos apenas o parâmetro com o maior valor absoluto, o qual denominamos μ , no conjunto $\{\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}\}$. Estabelecemos

$$-\frac{1}{n\sqrt{m}} < \mu < \frac{1}{n\sqrt{m}} \quad (3.24)$$

como outra região mínima, esta delimitada somente em função da dimensão n do sistema e da quantidade m de senos a cada coordenada.

3.4 Uma condição suficiente para a ocorrência de bifurcações

Mudanças na dinâmica de um dado sistema em regime não caótico são observadas quando, ao variar-se um dos parâmetros de controle, o valor absoluto do maior autovalor de sua matriz jacobiana se iguala à unidade [14]. Nesta seção determinamos uma condição suficiente para que o mapa seno n -dimensional apresente tal comportamento. Nas linhas que seguem estabelecemos uma relação entre os parâmetros do mapa (3.1) que implica em $|\lambda| = 1$ e citamos os casos: $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ e $\lambda = e^{i\theta}$ com $\theta \neq t\pi$, $t \in \mathbb{Z}$. Empregamos as mesmas definições e notação utilizadas na seção precedente.

Iniciamos por determinar uma condição suficiente para que o módulo de λ cresça de uma região estável até $|\lambda| = 1$. Supondo que o sistema (3.1) esteja no ponto fixo estável X de coordenada $x^{(1)} = 0$ com $\beta_{111} = 1$ e $\gamma_{111} = 0$, sendo os restantes parâmetros de fase na equação para $x_{t+1}^{(1)}$ tais que

$$\gamma_{1jk} = -\beta_{1jk}x^{(j)} + \pi/2, \quad (j, k) \neq (1, 1). \quad (3.25)$$

Pelo teorema de Gershgorin, $\lambda_1 = \alpha_{111}$, uma vez que $W_{1j} = 0$ para todo $j \neq 1$ e $W_{11} = \alpha_{111}$. Consequentemente, na Eq. (3.17) $r_1 = 0$ e o centro do disco D_1 é o próprio autovalor correspondente. A mesma conclusão decorre diretamente do polinômio característico da matriz jacobiana do sistema.

Impondo $\lambda = \lambda_1$, o que pode ser garantido por meio do ajuste dos parâmetros⁵ α_{ijk} e β_{ijk} com $1 < i$, necessariamente o ponto X será estável somente enquanto $|\alpha_{111}| < 1$. O ajuste necessário equivale a escolher uma curva \mathcal{C} no espaço de parâmetros Γ adequada. Assim, para $|\alpha_{111}| = 1$ e os demais parâmetros conforme as suposições enunciadas, temos uma condição suficiente para $|\lambda| = 1$. O caso $\lambda = \alpha_{111} = -1$ implica em uma bifurcação de duplicação de período, já $\lambda = \alpha_{111} = 1$ implica em um dos três tipos de bifurcações: sela-nó, forquilha ou transcritical [10, 30].

Resta o caso $\lambda = e^{i\theta}$ com $\theta \neq t\pi$ e $t \in \mathbb{Z}$, o qual somente é possível em sistemas com duas dimensões ou mais. Seja $W_{pp} = -W_{qq}$ e $(W_{pp}^2 + W_{pq}W_{qp}) = -1$, com a curva $\mathcal{C} \subset \Gamma$ escolhida de forma a garantir $\lambda = \lambda_p$ (indiferentemente, $\lambda = \lambda_q$) e $W_{pj} = W_{qj} = 0 \forall j \neq p, q$, tem-se uma condição suficiente para a ocorrência de $\lambda = e^{i\theta}$. Para tornar em algo mais específico, consideramos o caso $\alpha_{pjk} = \alpha_{qjk} = 0 \forall k > 1$, com $x^{(p)} = x^{(q)} = 0$ e $\gamma_{pp1} = \gamma_{qq1} = \gamma_{pq1} = \gamma_{qp1} = 0$. Ainda, com $\beta_{pp1} = \beta_{qq1} = \beta_{pq1} = \beta_{qp1} = 1$, temos $(\alpha_{pp1}^2 + \alpha_{pq1}\alpha_{qp1}) = -1$ como uma das condições que implicam em uma bifurcação do tipo Neimark-Sacker [10, 30], ou seja, que implicam em comportamento quasiperiódico.

3.5 Modelo de Kuramoto e mapa seno n -dimensional

O modelo de Kuramoto é um fluxo que descreve o fenômeno de sincronização em sistemas dinâmicos diversos [19, 20]. Inicialmente proposto para uma situação química, tem sido empregado na descrição de fenômenos biológicos e redes neurais. Sua forma matemática é dada por

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3.26)$$

⁵Como visto na seção precedente, o maior autovalor da matriz jacobiana do mapa seno n -dimensional é limitado pelos parâmetros α e β . Dado que a primeira linha da matriz W tem apenas o elemento $W_{11} \neq 0$, seu polinômio característico é dado por $P(\lambda) = (W_{11} - \lambda_1)\det(W' - \lambda)$, onde W' é a matriz reduzida.

onde ω_i representa a frequência angular natural do i -ésimo elemento constituinte do sistema e $\theta_j - \theta_i$ é uma diferença de fase.

Por meio de manipulações algébricas, estabelecemos uma relação entre o modelo expresso na Eq. (3.26) e o mapa seno n -dimensional. Iniciamos definindo o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\theta}_{i+n} = \omega_{i+n} + \frac{K}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_{i+n} - \theta_j), \quad (3.27)$$

com $\omega_{i+n} = \omega_i$. Desta forma, para cada $\dot{\theta}_i$ há um $\dot{\theta}_{i+n}$ correspondente. Subtraímos $\dot{\theta}_i$ de $\dot{\theta}_{i+n}$ e aplicamos a identidade (3.3) e propriedades de paridade das funções seno e cosseno, a fim de obter

$$\frac{\dot{\theta}_{i+n} - \dot{\theta}_i}{2} = \frac{K}{n} \cos\left(\frac{\theta_{i+n} - \theta_i}{2}\right) \sum_{j=1}^n \sin\left(\frac{\theta_{i+n} + \theta_i}{2} - \theta_j\right). \quad (3.28)$$

Adotamos novas variáveis. Para tal empregamos dois novos parâmetros, um de número de onda β_{ij} e outro de fase γ_{ij} , sendo

$$\beta_{ij}x_j + \gamma_{ij} = \frac{\theta_{i+n} + \theta_i}{2} - \theta_j. \quad (3.29)$$

Para $j = i$, tem-se

$$\beta_{ii}x_i + \gamma_{ii} = \frac{\theta_{i+n} - \theta_i}{2}, \quad \text{e} \quad \beta_{ii}\dot{x}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+n} - \dot{\theta}_i}{2}. \quad (3.30)$$

Substituindo as expressões (3.29) e (3.30) na Eq. (3.28), obtemos a equação diferencial de primeira ordem em x_i

$$\dot{x}_i = \frac{K}{n\beta_{ii}} \cos(\beta_{ii}x_i + \gamma_{ii}) \sum_{j=1}^n \sin(\beta_{ij}x_j + \gamma_{ij}). \quad (3.31)$$

Discretizamos a passagem do tempo t por intervalos de mesma duração τ , onde $t = z\tau$ com $z \in \mathbb{Z}$. Assim, aproximamos a derivada \dot{x}_i conforme o método de Euler. Neste ponto é mais adequado empregarmos outra notação, sendo $x_z^{(i)} = x_i(z\tau)$. Essa atitude é justificada pelo excesso de símbolos necessários para discriminar o tempo discretizado e

as variáveis do sistema. Ficamos com

$$x_{z+1}^{(i)} = x_z^{(i)} + \frac{K\tau}{n\beta_{ii}} \cos(\beta_{ii}x_z^{(i)} + \gamma_{ii}) \sum_{j=1}^n \sin(\beta_{ij}x_z^{(j)} + \gamma_{ij}). \quad (3.32)$$

No limite $(\beta_{ii}x_z^{(i)} + \gamma_{ii}) \rightarrow 0$, onde $\cos(\beta_{ii}x_z^{(i)} + \gamma_{ii}) \rightarrow 1$ e $\sin(\beta_{ii}x_z^{(i)} + \gamma_{ii}) \rightarrow 0$, podemos reescrever a Eq. (3.32) como

$$x_{z+1}^{(i)} = x_z^{(i)} - \frac{K\tau}{n\beta_{ii}} \sin(\beta_{ii}x_z^{(i)} + \gamma_{ii}) + \frac{K\tau}{n\beta_{ii}} \sum_{j=1}^n \sin(\beta_{ij}x_z^{(j)} + \gamma_{ij}), \quad (3.33)$$

onde o termo $-\sin(\beta_{ii}x_z^{(i)} + \gamma_{ii})$ cancela o seu idêntico no somatório. Expandindo o mesmo em série de Taylor em torno de $x_z^{(i)} = 0$, com $\gamma_{ii} = 0$ e considerando apenas o termo de primeira ordem, temos

$$x_{z+1}^{(i)} = x_z^{(i)} - \frac{K\tau}{n} x_z^{(i)} + \frac{K\tau}{n\beta_{ii}} \sum_{j=1}^n \sin(\beta_{ij}x_z^{(j)} + \gamma_{ij}). \quad (3.34)$$

Definindo os parâmetros K e τ de forma que $\frac{K\tau}{n} = 1$, elimina-se o termo linear em $x_z^{(i)}$. Por fim, obtemos

$$x_{z+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sin(\beta_{ij}x_z^{(j)} + \gamma_{ij}), \quad \text{com } \alpha_{ij} = \beta_{ii}^{-1}. \quad (3.35)$$

A Eq. (3.35) é da mesma forma que a Eq. (3.1), feito $m = 1$. Devido às aproximações adotadas, não devemos nos inclinar a supor que o mapa acima apresenta as mesmas características dinâmicas que o sistema de Kuramoto. Porém, podemos empregá-lo para o estudo de comportamentos assintóticos do modelo original, uma vez que sejam atribuídas as condições que tornam válidas as aproximações.

3.6 *Sine circle map* e mapa seno n -dimensional

A partir do *sine circle map* em uma dimensão, como formulado na Ref. [31], chegamos em um caso particular do mapa seno n -dimensional. Iniciamos por apresentar o

sistema unidimensional

$$x_{n+1} = x_n + A - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) \pmod{1}, \quad (3.36)$$

onde a notação $\pmod{1}$ pode ser interpretada como uma aritmética do relógio estendida aos números reais, neste caso com valores reais no intervalo $[0, 1)$: Seja $r \in \mathbb{R}$, tem-se $r \pmod{1} = r - \lfloor r \rfloor$.

Lembramos que a função piso $\lfloor r \rfloor$ retorna o maior número inteiro menor do que ou igual a r , ou seja

$$\lfloor r \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq r\}. \quad (3.37)$$

Somamos ao sistema a função \mathcal{Z} , de forma a não alterar a dinâmica se x_{n+1} for não inteiro e causar apenas uma pequena perturbação se x_{n+1} for inteiro. Essa manobra matemática é necessária para o que segue. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= 0, \quad \text{se } x_{n+1} \notin \mathbb{Z}, \\ \mathcal{Z} &= 10^{-100}, \quad \text{se } x_{n+1} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Expandimos a função seno em torno de $x_n = 0$, onde consideramos apenas o termo de primeira ordem na série de Taylor. Posteriormente, reescrevemos o mapa (3.36), já incluindo \mathcal{Z} e substituindo a operação mod 1 pela forma equivalente com a função piso. Ficamos com

$$x_{n+1} = A + (1 - K)x_n + \mathcal{Z} - \lfloor A + (1 - K)x_n + \mathcal{Z} \rfloor. \quad (3.39)$$

Para números reais não inteiros, a função piso pode ser reescrita como uma série de Fourier mais um termo linear, sendo

$$\lfloor R \rfloor = R - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi j R)}{j}. \quad (3.40)$$

Aplicamos a formulação acima na Eq. (3.39), dessa maneira elimina-se o termo linear em x_n . Definimos $a_j = -(\pi j)^{-1}$, $b_j = 2\pi(1 - K)j$ e $c_j = 2\pi A j$ com $j \neq 0$. Também, introduzimos a constante $1/2$ no somatório por meio de $j = 0$, onde $a_0 = 1/2$,

$b_0 = 0$ e $c_0 = \pi/2$. Por fim, desconsideramos a perturbação \mathcal{L} , resultando em

$$x_{n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{sen}(b_j x_n + c_j). \quad (3.41)$$

Fazendo $k = j - 1$ e desprezando os termos de menor amplitude, temos

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^m a_k \text{sen}(b_k x_n + c_k). \quad (3.42)$$

Destacamos que m deve ser suficientemente grande para valer a aproximação. O sistema resultante é da mesma forma do mapa seno n -dimensional (3.1) com $n = 1$ e $1 \ll m$. Assim como dito para a relação estabelecida com o modelo de Kuramoto, não devemos esperar que o sistema acima apresente as mesmas características dinâmicas do *sine circle map*. Contudo, se ambos estiverem em regiões no espaço de fases em que sejam válidas as aproximações feitas e sendo os parâmetros adequadamente definidos, devemos observar comportamentos assintóticos similares.

3.7 Uma aproximação para o mapa de Hénon

Podemos interpretar a soma em k no mapa (3.1) como uma série de Fourier truncada no m -ésimo termo. A partir dessa ideia aproximamos o mapa de Hénon, conforme dado na Ref. [25]⁶, em termos de uma soma de senos. Sendo o mapa de Hénon

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + by_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \quad (3.43)$$

consideramos o intervalo $-\pi < x_n, y_n < \pi$ para a representação em série de Fourier de cada termo do sistema acima. A parte par da função para a variável x , cuja série trigonométrica apresenta apenas cossenos, foi escrita de forma equivalente por senos defasados em $\pi/2$ radianos. Assim, obtemos duas somas de séries a serem truncadas e ajustadas ao modelo proposto para o mapa seno n -dimensional.

A subsequente definição dos parâmetros envolvidos adequará o mapa que segue à

⁶Aqui mantivemos a forma para o mapa de Hénon adotada pelo autor da referência citada, porém na literatura é possível encontrar o mapa de Hénon escrito de uma maneira ligeiramente diferente.

forma enunciada no início deste capítulo, sendo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(a + \frac{\pi^2}{3}\right) + 2b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{sen}(ky_n) - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \text{sen}\left(kx_n + \frac{\pi}{2}\right), \\ y_{n+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{sen}(kx_n), \end{aligned} \quad (3.44)$$

truncamos em m' os somatórios, com $m = m' + 1$ e definimos os parâmetros, de forma a obtermos o mapa seno bidimensional que aproxima o mapa de Hénon. Assim,

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \text{sen}(\beta_{ijk} x_n^{(i)} + \gamma_{ijk}), \quad (3.45)$$

onde os parâmetros são dados por

$$\begin{aligned} \alpha_{11k} &= -4 \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \alpha_{12k} = \alpha_{21k} = 2b \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \alpha_{22k} = 0, \quad k \neq m, \\ \alpha_{11m} &= \left(a + \frac{\pi^2}{3}\right), \quad \alpha_{12m} = \alpha_{21m} = \alpha_{22m} = 0, \\ \beta_{11k} &= \beta_{12k} = \beta_{21k} = k, \quad \beta_{22k} = 0, \quad k \neq m, \\ \beta_{11m} &= \beta_{12m} = \beta_{21m} = \beta_{22m} = 0, \\ \gamma_{11k} &= \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_{12k} = \gamma_{21k} = \gamma_{22k} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ao mantermos os parâmetros a e b explícitos, tornamos possível a realização da comparação entre as dinâmicas do mapa original e a do mapa aproximado por meio da análise de espaços de parâmetros gerados nos mesmos intervalos. Tais resultados são apresentados no Capítulo 6 juntamente com a representação gráfica concernente.

Um fator determinante para que o mapa (3.45) apresente uma dinâmica similar a observada no mapa (3.43) é o valor de m , ou seja, deve-se determinar quantos termos são necessários considerar nas séries para que os dois sistemas, original e aproximado, tenham o mesmo comportamento em uma dada região no espaço de parâmetros.

Uma diferença significativa entre os mapas (3.43) e (3.45) que pode ser adiantada na presente seção, é o fato de que o mapa de Hénon aproximado não apresenta divergência, já que a soma trigonométrica empregada é limitada. Já o mapa de Hénon original tem uma característica região de divergência no espaço de parâmetros. O que veremos no capítulo 6 é como a aproximação proposta mantém as estruturas periódicas, bem como

substitui a região de divergência no espaço de parâmetros por diversas estruturas imersas em uma larga faixa de dinâmica caótica.

Capítulo 4

Mapa seno unidimensional

São vastos os estudos realizados acerca de mapas unidimensionais [14, 17, 18]. Neste capítulo apresentamos alguns resultados analíticos e numéricos a respeito do mapa seno unidimensional [26]. Investigamos a ocorrência de pontos fixos atrativos e delimitamos analiticamente uma região mínima no espaço de parâmetros correspondente aos mesmos. Ainda, geramos uma representação gráfica de uma região do espaço de parâmetros para o mapa seno unidimensional, este conforme proposto nas linhas que seguem, a partir da qual inferimos sobre as rotas para caos presentes.

Diversos mapas trigonométricos podem ser obtidos a partir do mapa (3.1), bastando que sejam definidos adequadamente o número n de dimensões do espaço das variáveis, a quantidade m de funções do tipo seno empregadas a cada soma em j e os $3mn^2$ parâmetros presentes no sistema n -dimensional. O caso mais simples se dá com $n = m = 1$, que resulta nos três parâmetros $\alpha_{111} = a$, $\beta_{111} = b$ e $\gamma_{111} = c$. Assim, definimos o mapa seno unidimensional

$$x_{t+1} = a \operatorname{sen}(bx_t + c). \quad (4.1)$$

Outra formulação possível apresenta um parâmetro aditivo d . Essa pode ser obtida por meio do mapa na forma geral com $m = 2$ e, para que haja apenas uma função seno, $\beta_{112} = 0$. Desta forma $d = \alpha_{112} \operatorname{sen}(\gamma_{112})$ e o mapa é dado por

$$x_{t+1} = a \operatorname{sen}(bx_t + c) + d. \quad (4.2)$$

Neste ponto chamamos atenção para a equivalência entre as duas formulações,

fato evidenciado por meio da transformação linear $X_t = x_t - d$ e das substituições dos parâmetros $C = c + bd$, $A = a$ e $B = b$. Das referidas transformações resulta

$$X_{t+1} = A \operatorname{sen}(BX_t + C). \quad (4.3)$$

A relação acima é da mesma forma da equação (4.1), logo as duas formulações dadas para o mapa seno unidimensional são topologicamente equivalentes. Por simplicidade, nas linhas que seguem estudamos a forma sem o parâmetro d .

4.1 Pontos fixos

Determinar os pontos fixos para o mapa (4.1) implica encontrar as soluções da equação transcendental $x^* = a \operatorname{sen}(bx^* + c)$. Para o caso em que o parâmetro $c = 0$, temos a solução trivial $x^* = 0$. Contudo, não determinamos se são possíveis outros pontos fixos e seus respectivos valores. Com intuito de resolver o problema, valemo-nos de um artifício matemático definindo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) - x, \quad (4.4)$$

cujas raízes correspondem aos pontos de equilíbrio do mapa em estudo.

Dentre as técnicas usuais para se determinar as raízes de funções do tipo (4.4), destacamos a expansão em série de Taylor e o subsequente truncamento da mesma, com a consequente busca pelas raízes do polinômio obtido. Ao expandirmos em série de Taylor a parcela trigonométrica da $f(x)$ em torno de $x = -c/b$, onde $\operatorname{sen}(bx + c) = 0$, temos

$$f(x) = -x + a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (bx + c)^{2j+1}}{(2j+1)!}. \quad (4.5)$$

Separamos o somatório em dois, um até $j = m$ e outro a partir de $j = m + 1$, o segundo identificamos como $M(x)$, fator que será útil para a determinação do erro decorrente do truncamento da série. Assim, reescrevemos a função

$$f(x) = -x + a \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (bx + c)^{2j+1}}{(2j+1)!} + M(x), \quad (4.6)$$

com $M(x)$ dado pela expressão

$$M(x) = a \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^j (bx + c)^{2j+1}}{(2j+1)!}. \quad (4.7)$$

Ao excluirmos $M(x)$ da função $f(x)$ obtemos o polinômio $P(x)$ de grau $2m+1$, cujas raízes são aproximações para os pontos fixos procurados. O valor estabelecido para m está intimamente relacionado à precisão das soluções encontradas. Vale lembrar que buscamos $x^* \in \mathbb{R}$. Valores complexos para x^* não são soluções. Explicitamente

$$P(x) = -x + a \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (bx + c)^{2j+1}}{(2j+1)!}. \quad (4.8)$$

O erro $\varepsilon(x)$ devido ao truncamento da série pode ser estimado, com pouca precisão e ainda assim mantendo interesse prático, em relação ao valor absoluto do primeiro termo de $M(x)$. Definimos

$$\varepsilon(x) = |M(x)| \leq \frac{|a||bx + c|^{2m+3}}{(2m+3)!}, \quad (4.9)$$

cujas validade se verifica para m suficientemente grande, tal que

$$|bx + c|^2 \leq (2m+5)(2m+4). \quad (4.10)$$

Para o caso $c = 0$ recuperamos a solução trivial com exatidão, independentemente do truncamento adotado. Interromper a série em $m = 0$ é insuficiente para determinarmos se há outros pontos fixos, pois dessa maneira consegue-se um polinômio de primeiro grau. Por meio da equação (4.9) podemos atribuir um valor adequado para m e, consequentemente, o grau do polinômio necessário para que se investigue a existência de outros pontos de equilíbrio. Iniciamos por definir os intervalos para os parâmetros a e b , por exemplo $a, b \in [-2, 2]$. Outra informação relevante é a imagem do mapa (4.1), por meio da qual temos que $|x| \leq |a|$. Assim, assumindo o valor máximo para $|x^*|$, bem como os valores máximos para os parâmetros, ficamos com

$$\varepsilon(x^*) \leq 128 \frac{16^m}{(2m+3)!}. \quad (4.11)$$

Um erro não maior do que 10^{-4} é obtido a partir de $m = 7$. Valendo-nos dessa informação e fazendo $P(x^*) = 0$, chegamos a

$$\left[ab \sum_{j=1}^7 \frac{(-1)^j (bx^*)^{2j}}{(2j+1)!} + (ab-1) \right] x^* = 0. \quad (4.12)$$

Determinar manualmente as soluções reais não triviais para a equação (4.12) pode demandar um tempo considerável. Por sorte, a tecnologia computacional contemporânea possibilita fazê-lo em poucos segundos. Ilustrativamente, consideramos $a = b = 2$ e, por meio de uma rotina computacional, encontramos as duas raízes reais $x_{\pm}^* = \pm 1,2373$.

Ainda com $c = 0$, ao assumirmos os intervalos dos parâmetros $a, b \in [0, 1]$, uma precisão maior do que a anterior pode ser conseguida com um polinômio de grau menor. A partir do mesmo raciocínio empregado anteriormente, estabelecemos a relação

$$\varepsilon(x^*) \leq \frac{1}{(2m+3)!}. \quad (4.13)$$

De maneira que um erro não maior do que 10^{-5} é obtido a partir de $m = 4$. Contudo, fixaremos $m = 1$, o que nos conferirá um erro menor do que 10^{-2} . Tal escolha fica justificada pela simplicidade do polinômio decorrente e intenção que nos leva ao cálculo: objetivamos identificar pontos fixos além do trivial.

Analogamente à resolução precedente, chegamos à equação

$$\left[-ab \frac{(bx^*)^2}{6} + (ab-1) \right] x^* = 0, \quad (4.14)$$

cujas soluções não nulas são dadas por

$$x_{\pm}^* = \pm \sqrt{\frac{6(ab-1)}{ab^3}}, \quad (4.15)$$

sendo $ab^3 \neq 0$ e $ab \neq 1$. Os parâmetros a e b estão restritos ao intervalo aberto $(0, 1)$.

Para que os x_{\pm}^* sejam números reais, o radicando na equação (4.15) deve ser não negativo, o que é impossível nos intervalos estabelecidos para os parâmetros. Concluimos¹ não haver, neste caso, outro ponto de equilíbrio além de $x^* = 0$.

¹O leitor atento pode colocar em questão a validade desta conclusão. Se considerarmos um polinômio de maior grau, ainda obteremos somente raízes não reais.

4.2 Estabilidade dos pontos fixos

Com intuito de classificar os pontos fixos quanto à estabilidade, comparamos com a unidade o valor absoluto da derivada ordinária da função que define o mapa aplicada no ponto x^* . Como já mencionado no Capítulo 2, ao cumprir-se a condição

$$\left| \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right|_{x_n=x^*} < 1, \quad (4.16)$$

conclui-se que o ponto fixo x^* é atrativo. Ao empregarmos a Eq. (4.16) ao mapa seno unidimensional na forma (4.1) chegamos à desigualdade

$$|a||b||\cos(bx^* + c)| < 1. \quad (4.17)$$

Para que possamos avaliar diretamente a estabilidade de x^* a partir dos parâmetros a e b , manipulamos algebricamente a desigualdade (4.17). Por meio da identidade trigonométrica $|\cos(bx^* + c)| = \sqrt{1 - \sin^2(bx^* + c)}$ e substituindo, da definição de ponto fixo, $x^* = a \sin(bx^* + c)$, chegamos à relação

$$|b|\sqrt{a^2 - (x^*)^2} < 1, \quad (4.18)$$

a qual não depende de funções trigonométricas. Para $b = 0$ temos x^* atrativo, uma vez que o mapa perde a dependência em x_n . O mesmo acontece para $a = 0$, que resulta em $x^* = 0$. Seguimos com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e, depois de pouco trabalho matemático, destacamos um resultado que possibilita a rápida avaliação da estabilidade do ponto de equilíbrio, para que o mesmo seja atrativo deve cumprir-se

$$a^2 - b^{-2} < (x^*)^2, \quad b \neq 0. \quad (4.19)$$

A última é automaticamente satisfeita para $a^2 - b^{-2} < 0$. Em decorrência, delimitamos uma região no espaço de parâmetros (a, b) correspondente à ocorrência de pontos fixos atrativos. Para tal, temos o intervalo do parâmetro b dado por

$$-\frac{1}{|a|} < b < \frac{1}{|a|}, \quad a \neq 0. \quad (4.20)$$

A expressão obtida tem a mesma forma da inequação (3.23), com $n = m = 1$. Definimos as curvas limítrofes $b_{\pm} = \pm|a|^{-1}$, as quais representamos juntamente com o espaço de parâmetros (a, b) da Fig. 4.1.

Para $0 < a^2 - b^{-2}$ na inequação (4.19), a região mínima de ocorrência de pontos fixos atrativos passa a depender de x^* . Sendo $|x^*| \neq |a|$, podemos delimitar os valores de b correspondentes a pontos de equilíbrio estável como segue:

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2 - (x^*)^2}} < b < \frac{1}{\sqrt{a^2 - (x^*)^2}}, \quad |x^*| < |a|. \quad (4.21)$$

Evidentemente, esta região do espaço de parâmetros (a, b) compreende a região definida pela desigualdade (4.20).

4.3 Espaço de parâmetros (a, b) do mapa seno unidimensional

Construímos uma representação gráfica para o espaço de parâmetros (a, b) do mapa (4.1) com $c = 0$, associando cada par (a, b) ao correspondente tipo de órbita, caracterizada pelo período e identificada em cores. Para tal, utilizamos uma rotina computacional em linguagem Fortran77. A Fig. 4.1 foi gerada com uma grade de 1000×1000 pontos equidistantes no intervalo dos parâmetros $-5 < a, b < 5$. A contagem de períodos se deu até o máximo de 64 e estão representados de forma discriminada os pontos correspondentes aos períodos de 1 até 10, conforme legenda. Em branco representamos períodos maiores do que 64: já que não calculamos os expoentes de Lyapunov para esse espaço de parâmetros, não afirmamos que a região em branco corresponde a caos. Períodos entre 11 e 64 foram indicados em turquesa. Descartamos 10^5 iterações como transiente e verificamos as órbitas com uma acurácia de 10^{-7} . Incluímos na Fig. 4.1 as curvas limítrofes $b_{\pm} = \pm|a|^{-1}$ definidas na seção anterior (curvas em preto identificadas na figura), desta forma verifica-se o fato da região delimitada por elas corresponder a pontos fixos atrativos.

Além da grande região de período 1, em azul e com forma de cruz no centro da Fig. 4.1, destacamos a região de período 2, em vermelho e adjacente àquela. Nos segundo e quarto quadrantes, as curvas b_+ e b_- marcam a linha de dobramento de período de 1 para 2. Seguindo radialmente da origem, com exceção dos eixos, em todas as direções há

sucessivos dobramentos de período, uma conhecida rota para o caos [1].

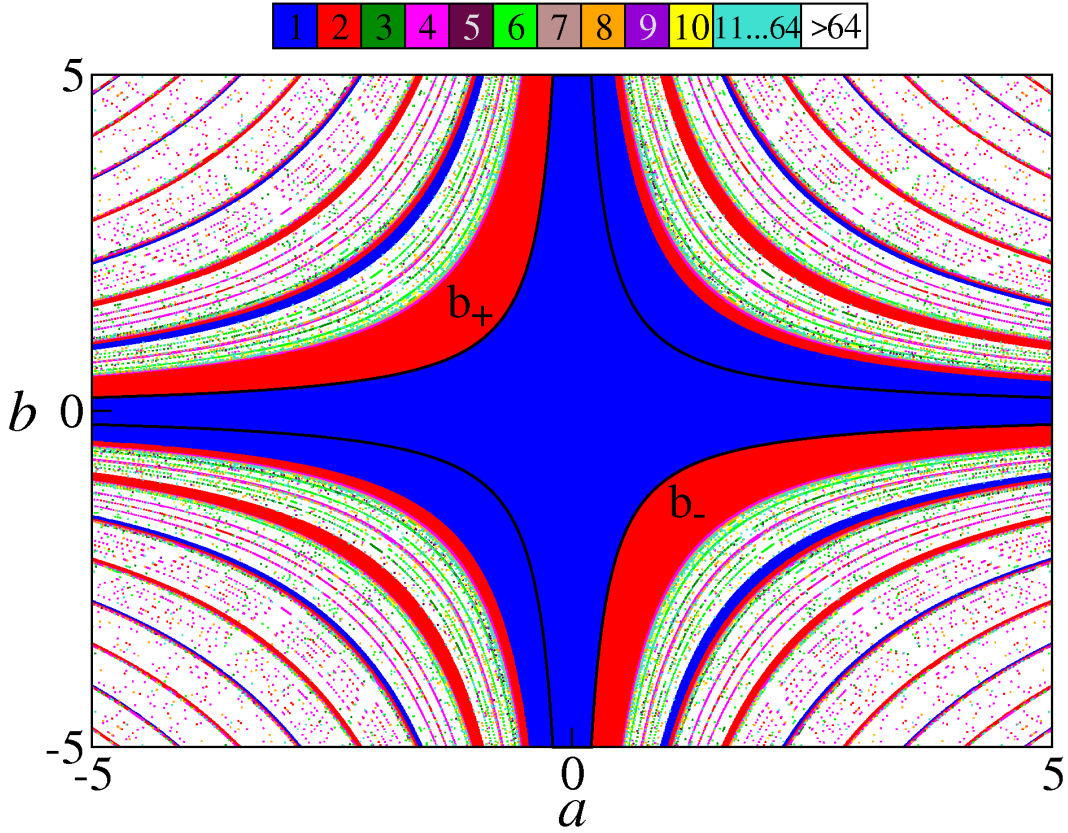


Figura 4.1: Espaço de parâmetros para o mapa (4.1) com $c = 0$. Os períodos estão representados em cores conforme a legenda. As curvas em preto, b_+ e b_- , delimitam uma região mínima de período 1, de acordo com a expressão (4.20). Grade de 1000×1000 pontos equidistantes no intervalo $-5 < a, b < 5$, acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotado $x_0 = 0,03$ como condição inicial para cada ponto.

Outra característica a se destacar, é a ocorrência, ao longo da região em branco, de faixas de forma aparentemente hiperbólica, cujos períodos 1, 2 e 4 são visualmente identificáveis, dada a resolução da imagem. Também encontramos estreitas regiões de período 3, em verde escuro, o que, conforme o teorema de Sarkovskii [1, 30], implica caos.

Notamos a aparente simetria do espaço de parâmetros para com a reta $b = -a$. De forma equivalente, aparentemente há uma simetria de rotação de π radianos, se centrada a rotação na origem. Para verificar se tal simetria realmente existe, ou se é apenas aparente, substituímos os parâmetros $A = -a$ e $B = -b$ no sistema (4.1) com $c = 0$. Aplicando as propriedades de paridade da função seno, resulta um sistema com a mesma forma do original, ou seja, obtemos dois mapas topologicamente equivalentes. Explicitamente

$$x_{t+1} = A \sin(Bx_t). \quad (4.22)$$

Concluimos que o mapa seno unidimensional (4.1), com $c = 0$, apresenta simetria

de rotação de π radianos no espaço de parâmetros.

Esse tipo de mapa pode ser estudado a partir de um único parâmetro, já que uma transformação linear leva o sistema com dois parâmetros em um sistema com apenas um. Contudo, dispor as informação em um plano facilita o processo de investigação.

Capítulo 5

Mapa seno bidimensional

Com intuito de investigar uma dinâmica mais rica do que a apresentada pelo mapa seno unidimensional (4.1), propusemos a partir do sistema n -dimensional (3.1) um mapa com duas dimensões, onde $n = 2$ e $m = 1$. Fixamos os valores dos parâmetros de fase γ , sendo $\gamma_{111} = \gamma_{221} = 1 + \pi/2$ e $\gamma_{121} = \gamma_{211} = 1$. Os demais parâmetros foram definidos $\alpha_{111} = \alpha_{221} = \beta_{121} = -\beta_{211} = a$ e $\alpha_{121} = \alpha_{211} = b_{111} = -b_{221} = -b$. Desta forma, obtemos o mapa seno bidimensional

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a \cos(1 - bx_t) - b \sin(1 + ay_t), \\y_{t+1} &= a \cos(1 + by_t) - b \sin(1 - ax_t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

O sistema acima tem duas dimensões em ambos os espaços, de fases e de parâmetros.

Ao longo deste capítulo determinamos analiticamente dois aspectos do mapa (5.1), sendo eles uma simetria no plano de parâmetros e a existência de uma região mínima, no mesmo plano, correspondente à ocorrência de pontos fixos atrativos. Esses resultados analíticos são corroborados por dados numéricos. Também realizamos uma investigação por meio de recursos numéricos, consistindo na análise gráfica de regiões do espaço de parâmetros (a, b) , de bacias de atração e de atratores.

5.1 Simetria de rotação no espaço de parâmetros

O mapa (5.1) apresenta simetria quanto à rotação de π radianos no espaço de parâmetros, ou seja, ao efetuarmos a transformação $A = -a$ e $B = -b$ o espaço de

parâmetros transformado se apresentará igual ao original, isso quanto ao comportamento dinâmico relacionado a cada ponto no mesmo. Para verificarmos a simetria proposta, realizamos a transformação de coordenadas $X_t = -x_t$, $Y_t = -y_t$ juntamente com a de parâmetros e reorganizamos os termos nas equações. Assim obtemos

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= A \cos(1 - BX_t) - B \sin(1 + AY_t), \\ Y_{t+1} &= A \cos(1 + BY_t) - B \sin(1 - AX_t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

O mapa (5.2) apresenta a mesma forma do mapa (5.1), portanto os dois são topologicamente equivalentes, visto que foram realizadas somente transformações lineares. A rotação de π radianos nos eixos do plano $a \times b$, levando ao espaço equivalente (A, B) , sobrepõem as estruturas presentes no primeiro.

5.2 Pontos fixos atrativos e uma correspondente região no espaço de parâmetros (a, b)

Nos pontos fixos temos $x = x_t = x_{t+1}$ e $y = y_t = y_{t+1}$, o que resulta em um sistema de equações transcendentais, como já visto para o caso geral no Capítulo 3. Também sabemos que o sistema de equações obtido tem ao menos uma solução real, conforme a Seção 3.3. Tratamos então de determinar uma região mínima no espaço (a, b) que corresponde à existência de pontos de equilíbrio estável, a qual compararemos com as obtidas para o caso n -dimensional na mesma seção já referida. Explicitamos as equações para o ponto fixo

$$\begin{aligned} x &= a \cos(1 - bx) - b \sin(1 + ay), \\ y &= a \cos(1 + by) - b \sin(1 - ax). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por meio dos autovalores da matriz jacobiana W do sistema aplicada no ponto fixo, assim como realizado no caso geral, delimitamos a região no espaço (a, b) procurada. Por se tratar de um sistema bidimensional, existem dois autovalores, a saber λ_+ e λ_- , raízes de um polinômio de grau dois, os quais são facilmente obtidos pelos métodos tradicionais.

Explicitamos a matriz jacobiana calculada no ponto (x, y) do espaço de fases

$$W = ab \begin{bmatrix} \text{sen}(1 - bx) & -\cos(1 + ay) \\ \cos(1 - ax) & -\text{sen}(1 + by) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

O polinômio característico da mesma é dado por

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^2 + ab[\text{sen}(1 + by) - \text{sen}(1 - bx)]\lambda + \\ + a^2 b^2 [\cos(1 - ax) \cos(1 + ay) - \text{sen}(1 - bx) \text{sen}(1 + by)], \end{aligned} \quad (5.5)$$

cujas raízes assumem a forma conjugada

$$\lambda_- = ab \left[f(x, y) - g^{\frac{1}{2}}(x, y) \right], \quad (5.6)$$

$$\lambda_+ = ab \left[f(x, y) + g^{\frac{1}{2}}(x, y) \right], \quad (5.7)$$

com as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ definidas como segue:

$$f(x, y) = \text{sen} \left[\frac{b(x + y)}{2} \right] \cos \left[1 + \frac{b(y - x)}{2} \right], \quad (5.8)$$

$$g(x, y) = \text{sen}^2(1) \cos^2(by) - \cos(1 - ax) \cos(1 + ay). \quad (5.9)$$

Visto que as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ assumem valores nos intervalos fechados $-1 \leq f(x, y) \leq 1$ e $-1 \leq g(x, y) \leq \text{sen}^2(1) + 1$, determinamos o intervalo em que estão compreendidos os autovalores λ_{\pm} . Em decorrência, para $0 \leq g(x, y)$ e $a \neq 0$, chegamos à região de pontos de equilíbrio estável:

$$\frac{-1}{|a| \left(1 + \sqrt{\text{sen}^2(1) + 1} \right)} < b < \frac{1}{|a| \left(1 + \sqrt{\text{sen}^2(1) + 1} \right)}. \quad (5.10)$$

Ressaltamos que as retas $a = 0$ e $b = 0$ estão relacionadas aos pontos fixos atrativos triviais. A região mínima Γ_1 de ocorrência dos mesmos compreende o conjunto Γ'_1 de pares (a, b) no plano $a \times b$ descrito acima unido com a reta $a = 0$, sendo $\Gamma_1 = \Gamma'_1 \cup \{(0, b \in \mathbb{R})\}$.

Neste ponto podemos nos questionar a respeito da possibilidade de $g(x, y) < 0$, o que implica λ_{\pm} não real. Para tal caso, o máximo valor que os módulos dos autovalores

assumem é $|\lambda_{\pm}|_{max} = ab\sqrt{2}$, com $0 < a$ e $0 < b$. O que nos leva a

$$\frac{-1}{a\sqrt{2}} < b < \frac{1}{a\sqrt{2}}, \quad 0 < a. \quad (5.11)$$

Contudo, não conhecemos os valores assumidos pelas coordenadas nos pontos fixos, apenas expressamos por meio do sistema de equações transcendentais (5.3) a relação entre as mesmas. Portanto, não somos capazes de afirmar se $g(x, y) < 0$ ou se $0 \leq g(x, y)$ para um dado par de parâmetros (a, b) , mas notemos que, com $0 < a$:

$$\frac{-1}{a\sqrt{2}} \leq \frac{-1}{a \left(1 + \sqrt{\sin^2(1) + 1}\right)} < b < \frac{1}{a \left(1 + \sqrt{\sin^2(1) + 1}\right)} \leq \frac{1}{a\sqrt{2}}. \quad (5.12)$$

Assim, o intervalo (5.10) é a melhor escolha para uma região que, com certeza, corresponda à existência de pontos fixos atrativos. Para a representação gráfica que segue, definimos as curvas limítrofes b_- e b_+ , com $a \in \mathbb{R}^*$ em ambas:

$$b_- = \frac{-1}{|a| \left(1 + \sqrt{\sin^2(1) + 1}\right)}, \quad (5.13)$$

$$b_+ = \frac{1}{|a| \left(1 + \sqrt{\sin^2(1) + 1}\right)}. \quad (5.14)$$

Comparando a região (5.10) com o intervalo previsto para o caso geral na Seção 3.3, dado pela expressão (3.23), constatamos que Γ'_1 compreende aquele. Sendo assim, a região de órbitas de período 1 estáveis se estende para além das curvas limítrofes previstas no caso geral. Ilustrativamente, para $n = 2$, $m = 1$ e adequando os parâmetros ao presente caso, a expressão (3.23) nos dá

$$b_- < -\frac{1}{4|a|} < b < \frac{1}{4|a|} < b_+, \quad a \neq 0. \quad (5.15)$$

Na Fig. 5.1 representamos o espaço de parâmetros do mapa (5.1). Varremos o intervalo $-5 < a, b < 5$ com uma grade de 500×500 pontos equidistantes e descartamos o transiente de 10^5 iterações. Em cores distinguimos os comportamentos dinâmicos, sendo ponto fixo atrativo em cinza, órbitas com período maior do que 1 em turquesa e comportamento não-periódico em branco. A identificação das regiões de ponto de equilíbrio estável se deu por contagem de período, já os demais pontos foram diferenciados entre

periódicos e não-periódicas por meio do maior expoente de Lyapunov. Nesta abordagem, não distinguimos caos de quasiperiodicidade, o que será realizado na próxima seção. As curvas b_+ e b_- delimitam a região mínima de período 1 dada conforme a expressão (5.10). Fica assim evidenciado o resultado analítico obtido nesta seção.

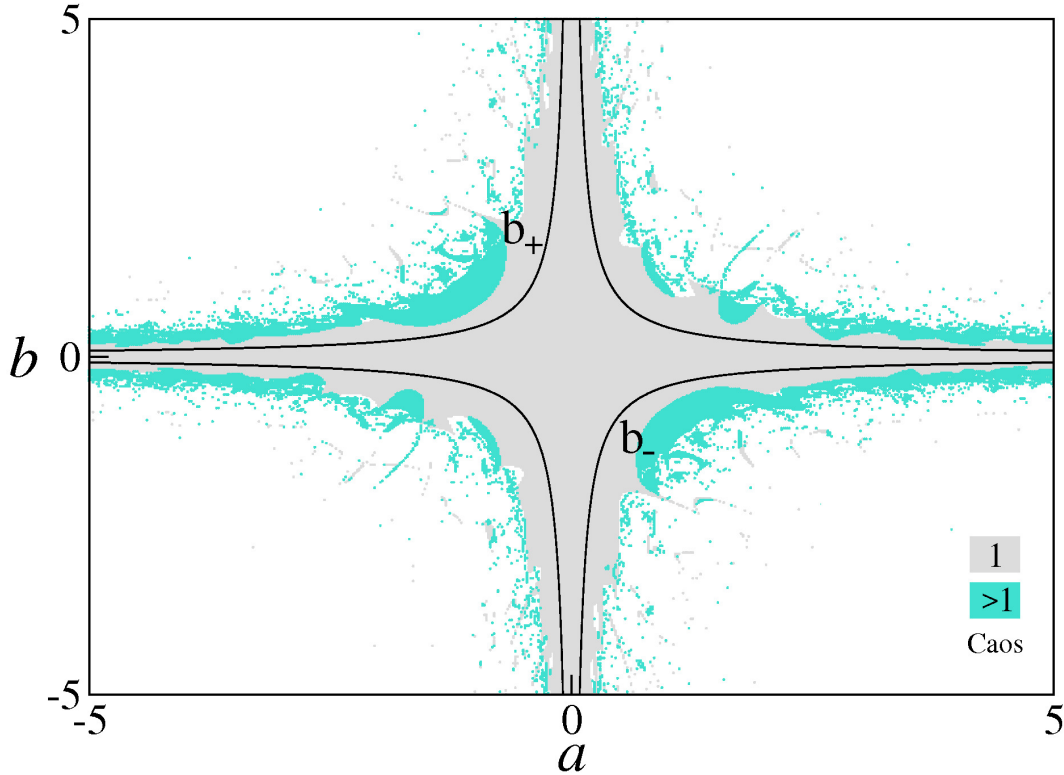


Figura 5.1: Espaço de parâmetros para o mapa (5.1). Os comportamentos dinâmicos estão representados em cores conforme a legenda. As curvas em preto, b_+ e b_- , delimitam uma região mínima de período 1, de acordo com a expressão (5.10). Grade de 500×500 pontos equidistantes no intervalo $-5 < a, b < 5$, acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto do plano.

Tendo em vista a região (5.11), associada à ocorrência de autovalores complexo conjugados, e a existência de fronteiras entre a área de ponto fixo e a região não-periódica, levantamos a possibilidade de bifurcações do tipo Neimark-Sacker. Esse aspecto será investigado na próxima seção.

5.3 Espaço de parâmetros (a, b) do mapa seno bidimensional

Esta seção está dedicada aos resultados numéricos obtidos a partir da iteração do mapa (5.1) e a decorrente caracterização qualitativa de sua dinâmica. Para tal, re-

presentamos graficamente espaços de parâmetros (a, b) gerados por um misto de duas abordagens: contagem de períodos e maior expoente de Lyapunov. Em algumas figuras destacamos curvas ou pontos, aos quais geramos diagramas de bifurcações e delimitamos bacias de atração. Com isso, evidenciamos as características dinâmicas do sistema, como uma regra de formação de períodos em Árvore de Farey e multiestabilidade [23, 24].

Para todos os espaços de parâmetros apresentados nesta seção, consideramos como transiente 10^5 iterações e determinamos os períodos com uma acurácia de 10^{-7} . Mantemos a mesma escala de cores em todas as figuras, sempre indicada na legenda. Atribuímos cores diferenciadas aos períodos de 1 até 10, para os períodos maiores do que 10 até o limite da contagem, indicado na descrição de cada figura, utilizamos a cor turquesa. Optamos pela cor branca para caos ou períodos maiores do que o máximo da contagem e cinza para comportamento quasiperiódico. Adotamos $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto do plano $a \times b$.

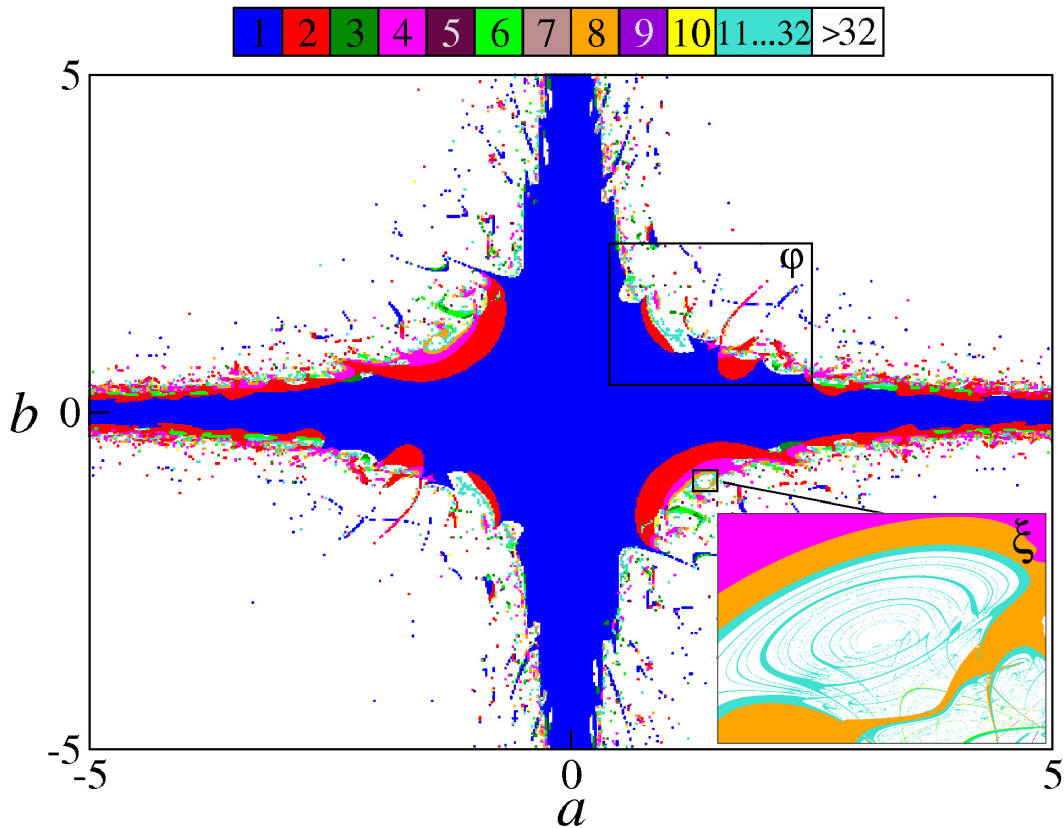


Figura 5.2: Espaço de parâmetros para o mapa (5.1). Os períodos foram contados até 32 e estão representados em cores, conforme a legenda. As caixas φ e ξ são ampliadas nas Fig. 5.3 e Fig. 5.13, respectivamente. Destaque para a estrutura periódica na caixa ξ ampliada no canto inferior direito. Grade de 500×500 pontos equidistantes no intervalo $-5 < a, b < 5$, acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

Geramos a Fig. 5.2 com intuito de estudar as estruturas periódicas, quanto às regras de formação de períodos, investigar a ocorrência de bifurcações do tipo Neimark-Sacker e evidenciar o caráter multiestável da dinâmica do mapa (5.1). Nela observamos dobramentos de período a partir da grande estrutura de período 1 (azul), passando para período 2 (vermelho) e período 4 (magenta). Também visualizamos estruturas de período 3 (verde escuro), o que implica caos, conforme o já mencionado teorema de Sarkovskii. Uma vez que não calculamos os expoentes de Lyapunov para essa figura, não denominamos a região de período maiores do que 32 (branco) de caótica. Por meio da ampliação da caixa ξ , na própria Fig. 5.2, destacamos as estruturas periódicas do tipo camarão (shrimp). Essas estruturas estão relacionadas com a coexistência de dois tipos de bifurcações [36]. A região em questão é mais detalhada na Fig. 5.13, abordada ao final desta seção. A caixa φ foi destacada para investigarmos a ocorrência de línguas de Arnold [10, 24], estruturas associadas à quasiperiodicidade. Na Fig. 5.3 temos uma ampliação da mesma.

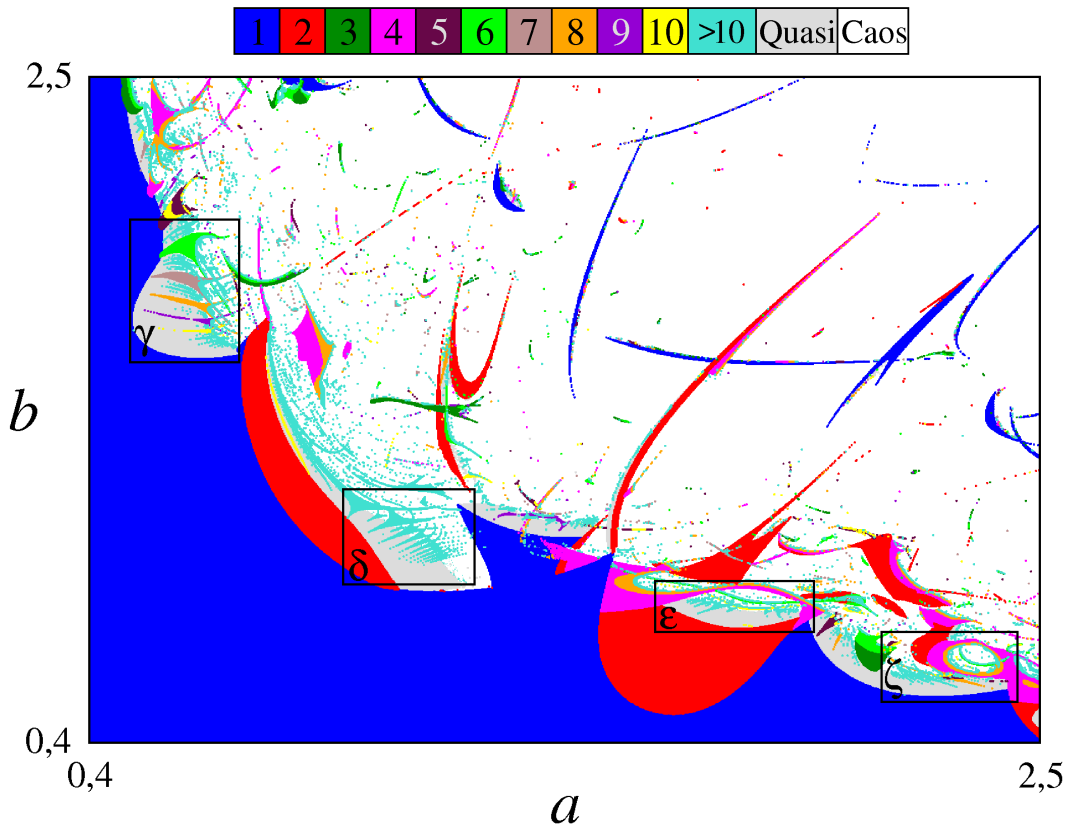


Figura 5.3: Ampliação da caixa φ na Fig. 5.2. Os períodos foram contados até 32 e estão representados em cores, conforme a legenda. Caos e quasiperiodicidade (Quasi) foram identificados por meio do maior expoente de Lyapunov. Nas caixas γ , δ , ϵ e ζ observamos quasiperiodicidade e línguas de Arnold, suas ampliações estão na Fig. 5.4, Fig. 5.6, Fig. 5.8 e Fig. 5.11, respectivamente. Grade de 1000×1000 pontos equidistantes no intervalo $0,4 < a, b < 2,5$, acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

A Fig. 5.3, bem como as ampliações a partir dela, foi gerada com um misto de técnicas: contagem de períodos e cálculo do maior expoente de Lyapunov. A contagem de períodos foi realizada até 32. Para os casos que não corresponderam a nenhum período, determinamos numericamente o maior expoente de Lyapunov¹ (λ) e classificamos o comportamento do sistema no ponto. Vale lembrar que o comportamento quasi-periódico ocorre quando o maior expoente de Lyapunov permanece igual a zero enquanto os parâmetros variam.

Ainda na Fig. 5.3, observamos que as regiões quasiperiódicas (cinza) ocupam as concavidades formadas na estrutura correspondente a pontos fixos atrativos (azul). Consistindo em uma rota para o caos, caminhando no espaço de parâmetros no sentido da região periódica para a quasiperiódica e avançando, encontramos caos (branco). Destacamos as quatro caixas γ , δ , ϵ e ζ ampliadas nas Fig. 5.4, Fig. 5.6, Fig. 5.8 e Fig. 5.11, respectivamente. Nessas procuramos evidenciar as línguas de Arnold e buscar uma regra de formação de períodos, também pretendemos constatar a ocorrência de bifurcações do tipo Neimark-Sacker, como proposto anteriormente.

Na Fig. 5.4 vemos as línguas de Arnold, estruturas com formato similar a uma língua, iniciando na região quasiperiódica e terminando na caótica. Por meio do código de cores, evidenciamos que as maiores línguas estão dispostas em adição de período com razão 1, sendo, no sentido decrescente do parâmetro b , os períodos das línguas: 6 (verde claro), 7 (marrom), 8 (alaranjado), 9 (violeta) e 10 (amarelo). Há continuação, mas distinguimos apenas até o período 10. O fato dos períodos aumentarem em uma unidade por vez é esperado, já que há acumulação próximo à região de período 1. A infinidade de estruturas, também línguas de Arnold, entre cada par de línguas de Arnold maiores é abordada juntamente com a Fig. 5.8. Destacamos o ponto $B(0, 556; 1, 934)$, localizado no avanço da língua de período 6 sobre a região de período 1, um indício de multiestabilidade, vide Fig. 5.5. As bacias de atração para esse ponto são mostradas na Fig. 5.5. A bacia correspondente à órbita de período 1 está em azul, e a de período 6 em branco. Esse resultado numérico evidencia o comportamento multiestável do mapa (5.1). Para indicar os períodos na Fig. 5.5 optamos por usar números destacados, já que o emprego do mesmo código de cores dos espaços de parâmetros se mostrou inadequado devido ao contraste.

¹Nesta seção não trataremos de autovalores, então passamos a designar o expoente de Lyapunov pelo símbolo λ tradicionalmente utilizado.

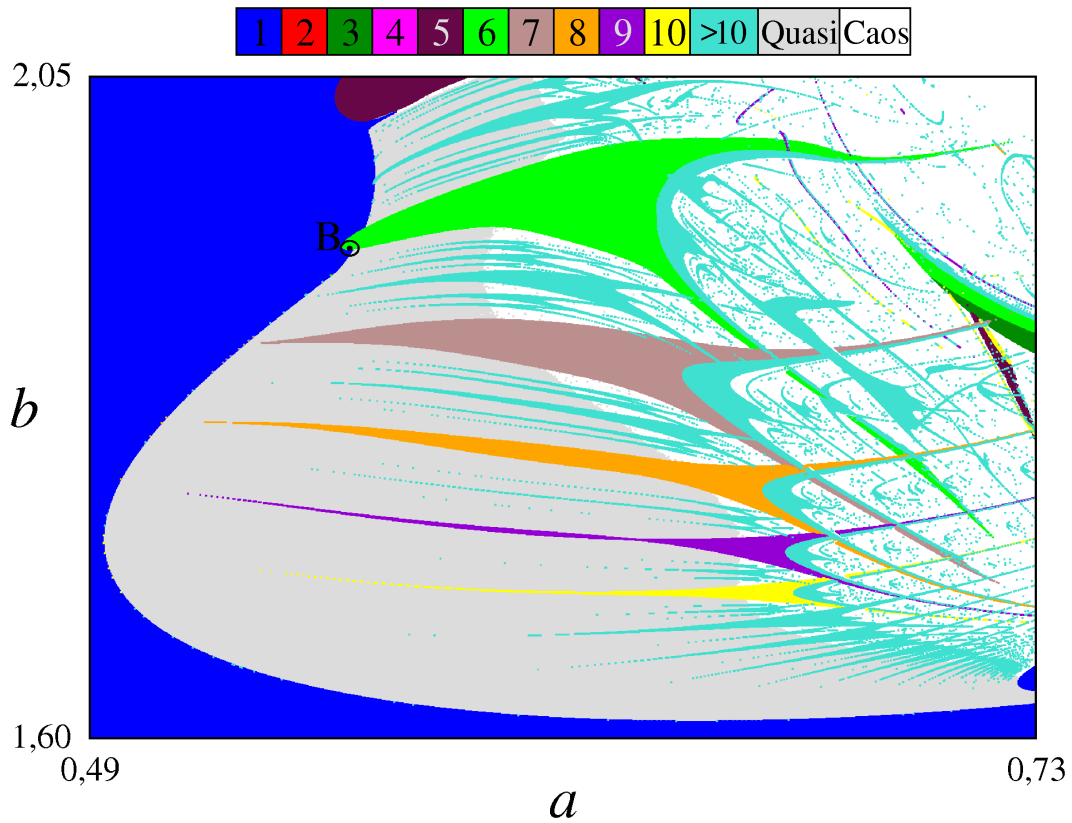


Figura 5.4: Ampliação da caixa γ na Fig. 5.3. Os períodos foram contados até 64 e estão representados em cores, conforme a legenda. Caos e quasiperiodicidade (Quasi) foram identificados por meio do maior expoente de Lyapunov. O ponto destacado $B(0,556; 1,934)$ está em uma região multiestável, vide Fig. 5.5. As maiores línguas de Arnold estão em adição de período de razão 1. Grade de 1000×1000 pontos equidistantes, sendo os intervalos $0,49 < a < 0,73$ e $1,60 < b < 2,05$. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

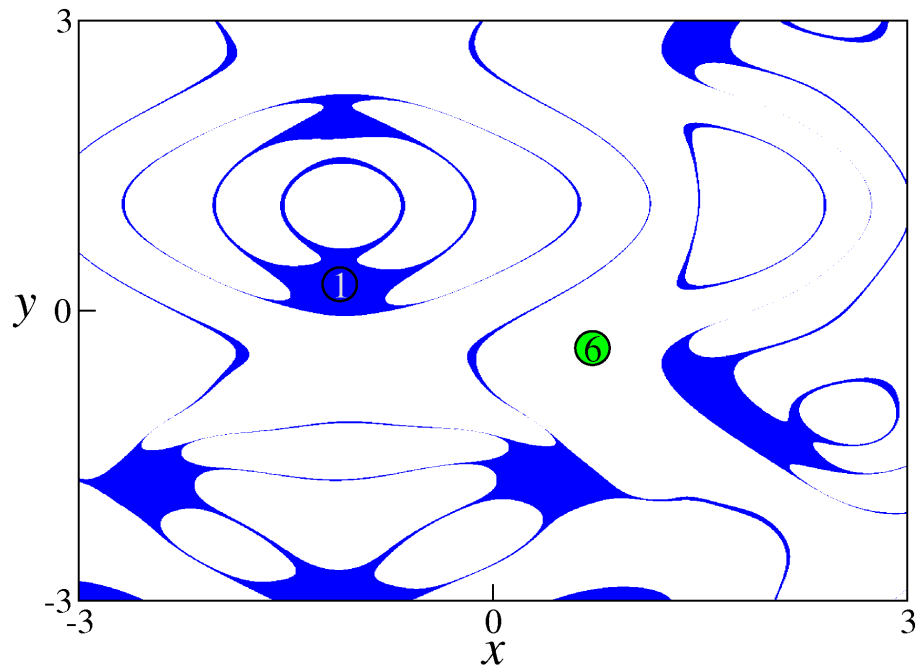


Figura 5.5: Bacias de atração para o ponto $B(0,556; 1,934)$ na Fig. 5.4. Os períodos são indicados pelos números destacados. Em azul a bacia de atração para uma órbita de período 1 e em branco a bacia de atração para uma órbita de período 6. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações.

Na Fig. 5.6, ampliação da caixa δ na Fig. 5.3, observa-se a duplicação de período de 1 (azul) para 2 (vermelho) seguida de uma grande faixa quasiperiódica (cinza), nela inserida uma série de línguas de Arnold (turquesa). Ao longo da reta $r : b - a + 0,05 = 0$, traço contínuo em preto, destacamos os quatro pontos: $A_1(1,015; 0,965)$, $A_2(1,043; 0,993)$, $A_3(1,120; 1,070)$ e $A_4(1,220; 1,170)$. Para cada um desses representamos os atratores em diferentes símbolos e cores na Fig. 5.7.

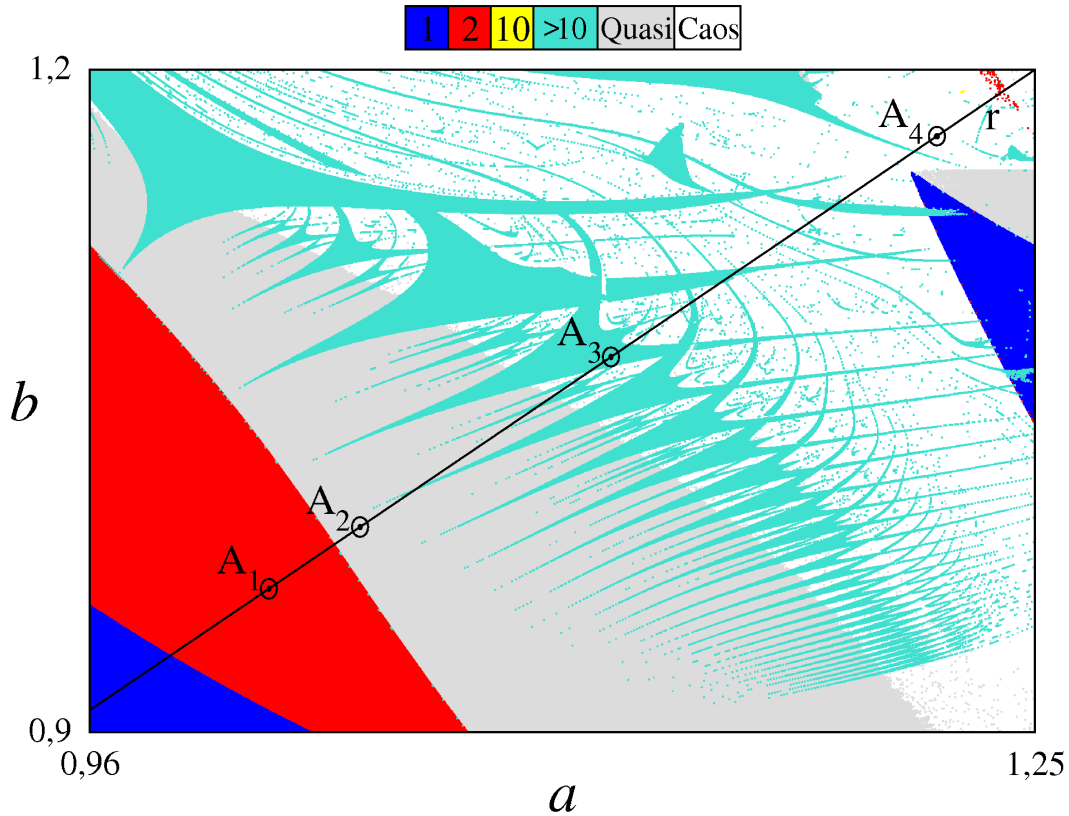


Figura 5.6: Ampliação da caixa δ na Fig. 5.3. Os períodos foram contados até 64 e estão representados em cores, conforme a legenda. Caos e quasiperiodicidade (Quasi) foram identificados por meio do maior expoente de Lyapunov. Para os pontos destacados sobre a reta r , $A_1(1,015; 0,965)$, $A_2(1,043; 0,993)$, $A_3(1,120; 1,070)$ e $A_4(1,220; 1,170)$, foram gerados os atratores mostrados na Fig. 5.7. Observa-se línguas de Arnold e dobramento de período de 1 (azul) para 2 (vermelho) seguido quasiperiodicidade (cinza). Grade de 1000×1000 pontos equidistantes, sendo os intervalos $0,96 < a < 1,25$ e $0,9 < b < 1,2$. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

Constatamos, ao observar a Fig. 5.7, a evolução da órbita de período 2 (triângulos vermelhos), obtida no ponto A_1 , para o atrator quasiperiódico (ciclos cor violeta), gerado para o ponto A_2 , evidência de uma bifurcação do tipo Neimark-Sacker, a qual ocorre na linha limítrofe no espaço de parâmetros entre a região de período 2 e a quasiperiódica. O ponto A_3 , localizado em uma língua de Arnold na Fig. 5.6, está associado à órbita de período 16 (círculos turquesa). Ao fundo, em preto, representamos o atrator caótico

gerado para o ponto A_4 .

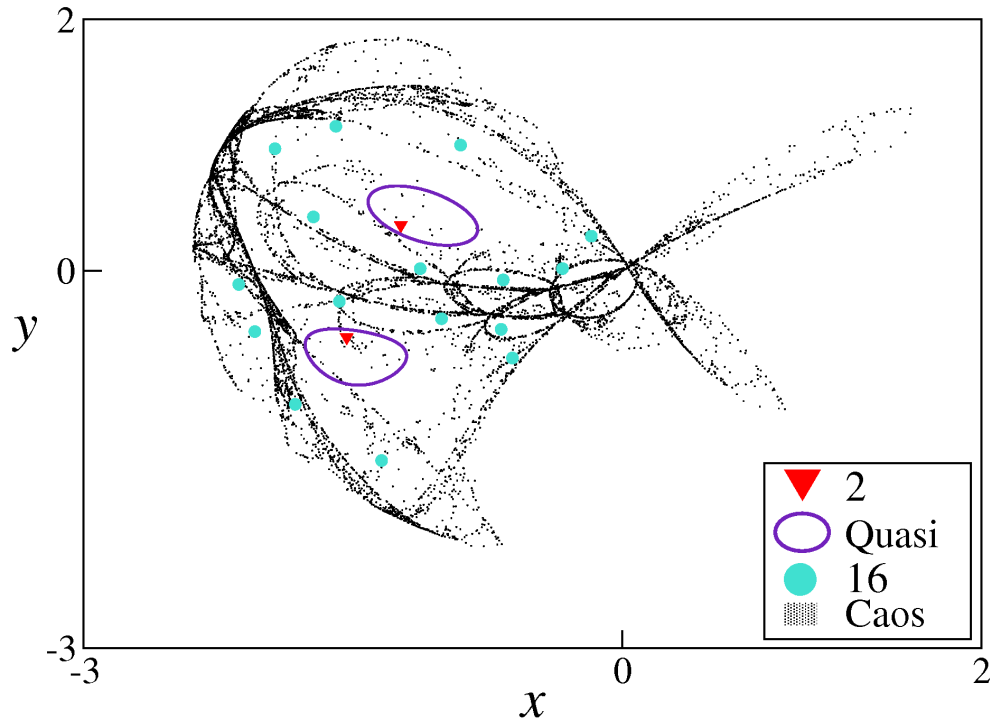


Figura 5.7: Atratores para os pontos destacados na Fig. 5.6. Para o ponto A_1 tem-se a órbita de período 2 (triângulos vermelhos), do ponto A_2 resulta a trajetória quasiperiódica (ciclos cor violeta), do ponto A_3 tem-se a órbita de período 16 (círculos turquesa) e no ponto A_4 temos o atrator caótico (preto, ao fundo). Transiente de 10^5 iterações e adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais.

A Fig. 5.8 é uma ampliação da caixa ε destacada na Fig. 5.3. Nela observamos, assim como nas duas caixas ampliadas anteriormente, uma larga faixa cinza, de comportamento quasiperiódico, de onde emergem línguas de Arnold. Os números sobre as estruturas periódicas indicam os respectivos períodos, referindo-se a parcela imersa na região quasiperiódica. Notamos que os períodos estão simetricamente distribuídos e que, a partir das línguas de período 14 e avançando aos dois extremos, há uma regra de formação por adição com razão 4, fato relacionado à ocorrência dos pontos de acumulação nas proximidades da região de período 4 (magenta). Outra regra de formação presente se dá conforme uma árvore de Farey [24], onde os períodos das estruturas internas são a soma dos períodos das duas estruturas adjacentes. Ao longo da curva $s : b - 1,73 a^{-1} - 1,5(a - 1,73)^2 + 0,15 = 0$ geramos o diagrama de bifurcações e determinamos o valor do maior expoente de Lyapunov, comparados na Fig. 5.10. Para o ponto destacado $C(1,781; 0,881)$ determinamos as bacias de atração, conforme Fig. 5.9. Nessa identificamos multiestabilidade entre órbitas de três períodos diferentes (2, 4 e 6), identificados por meio dos números circulados dispostos sobre a imagem.

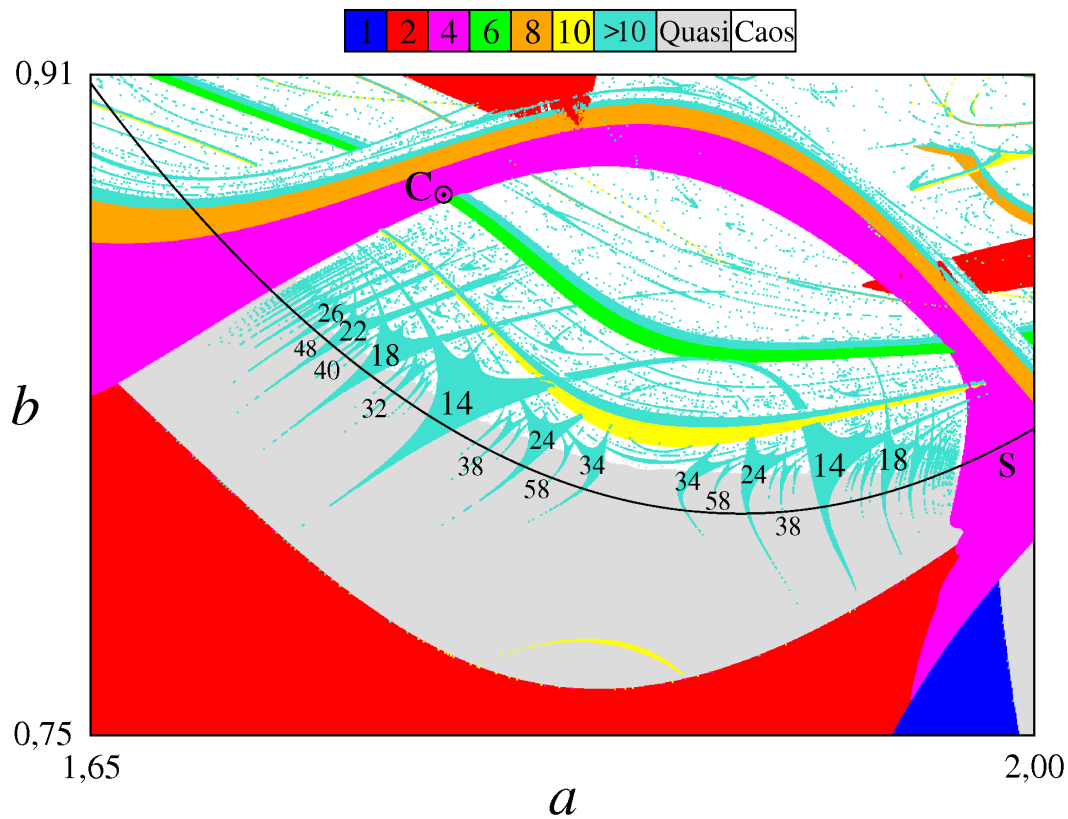


Figura 5.8: Ampliação da caixa ε na Fig. 5.3. Os períodos foram contados até 64 e estão representados em cores, conforme a legenda. Caos e quasiperiodicidade (Quasi) foram identificados por meio do maior expoente de Lyapunov. Os números sobre a imagem indicam os períodos da parte das línguas mergulhada na região quasiperiódica e estão dispostos conforme uma árvore de Farey. O ponto destacado $C(1,781; 0,881)$ está em uma região multiestável, vide Fig. 5.9. Ao longo da curva s geramos o diagrama de bifurcações e calculamos o maior expoente de Lyapunov, vide Fig. 5.10. Grade de 1000×1000 pontos equidistantes, sendo os intervalos $1,65 < a < 2,00$ e $0,75 < b < 0,91$. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

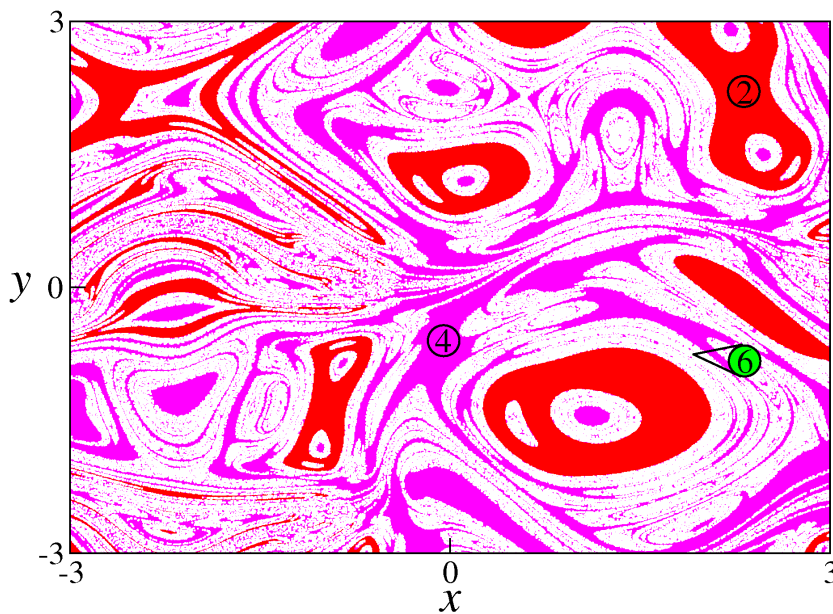


Figura 5.9: Bacias de atração para o ponto $C(1,781; 0,881)$ na Fig. 5.8. Os períodos são indicados pelos números destacados. Em vermelho a bacia da órbita de período 2, em magenta a da órbita de período 4 e em branco a bacia da órbita de período 6. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações.

A comparação entre o diagrama de bifurcações, Fig. 5.10 superior, e o gráfico do maior expoente de Lyapunov, Fig. 5.10 inferior, ambos gerados sobre a curva s indicada em preto na Fig. 5.8 e com o parâmetro a no eixo das abscissas, permite a identificação de algumas janelas periódicas, as mesmas já apontadas na Fig. 5.8, identificadas no diagrama de bifurcações com os números dos respectivos períodos. Ao longo da curva s , para a maioria dos valores do parâmetro a no intervalo $1,65 < a < 2,00$, observamos o maior expoente de Lyapunov mantendo-se nulo, fenômeno característico do comportamento quasiperiódico. As pequenas janelas de comportamento regular imersas na faixa quasiperiódica estão se devem as pequenas línguas de Arnold na Fig. 5.8 sobre as quais passa a curva s .

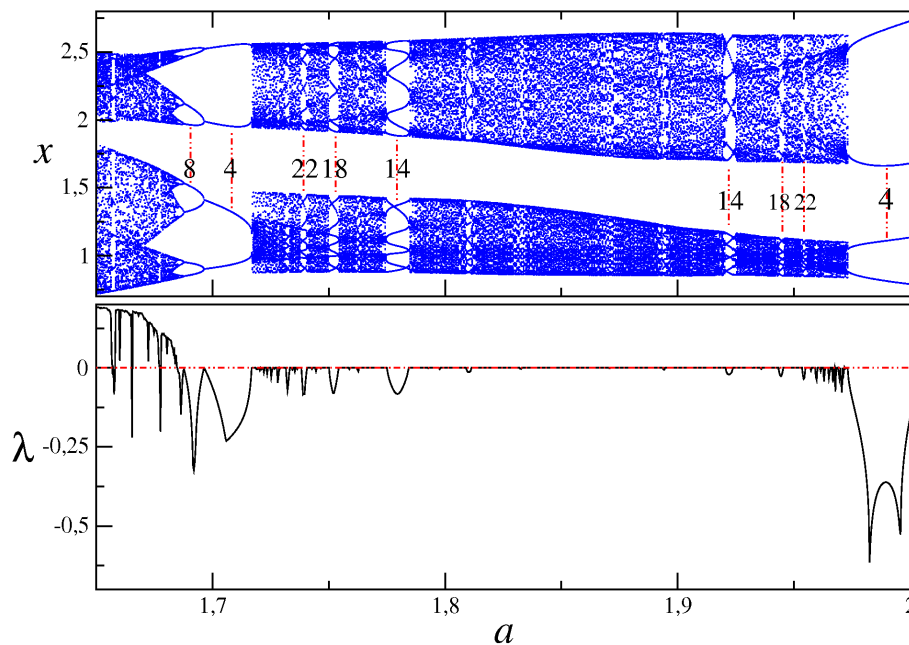


Figura 5.10: Comparação entre o diagrama de bifurcações (superior) e o gráfico do maior expoente de Lyapunov (inferior). Ambos gerados sobre a curva $s : b - 1,73 a^{-1} - 1,5(a - 1,73)^2 + 0,15 = 0$ em preto na Fig. 5.8. Dividido o eixo das abscissas em 1000 segmentos de mesmo comprimento no intervalo $1,65 < a < 2,00$. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada passo sobre o eixo a . Na figura superior, os números correspondem aos períodos nas respectivas janelas. Na figura inferior, a linha vermelha tracejada indica $\lambda = 0$.

Na Fig. 5.11 ampliamos a caixa δ na Fig. 5.3. Assim como nas ampliações precedentes, observamos línguas de Arnold e uma faixa quasiperiódica. Também há uma rota para o caos por dobramento de período, sendo na região circular de fora, período 4 (magenta), para dentro, período 8 (alaranjado) e seguindo. Destacamos o ponto $D(2,289; 0,619)$ na sobreposição de uma estrutura de período 10 (amarelo), originada por dobramento de período de uma região de período 5 (bordô), com uma língua de período 8. Na Fig. 5.12 representamos as bacias de atração para o respectivo ponto.

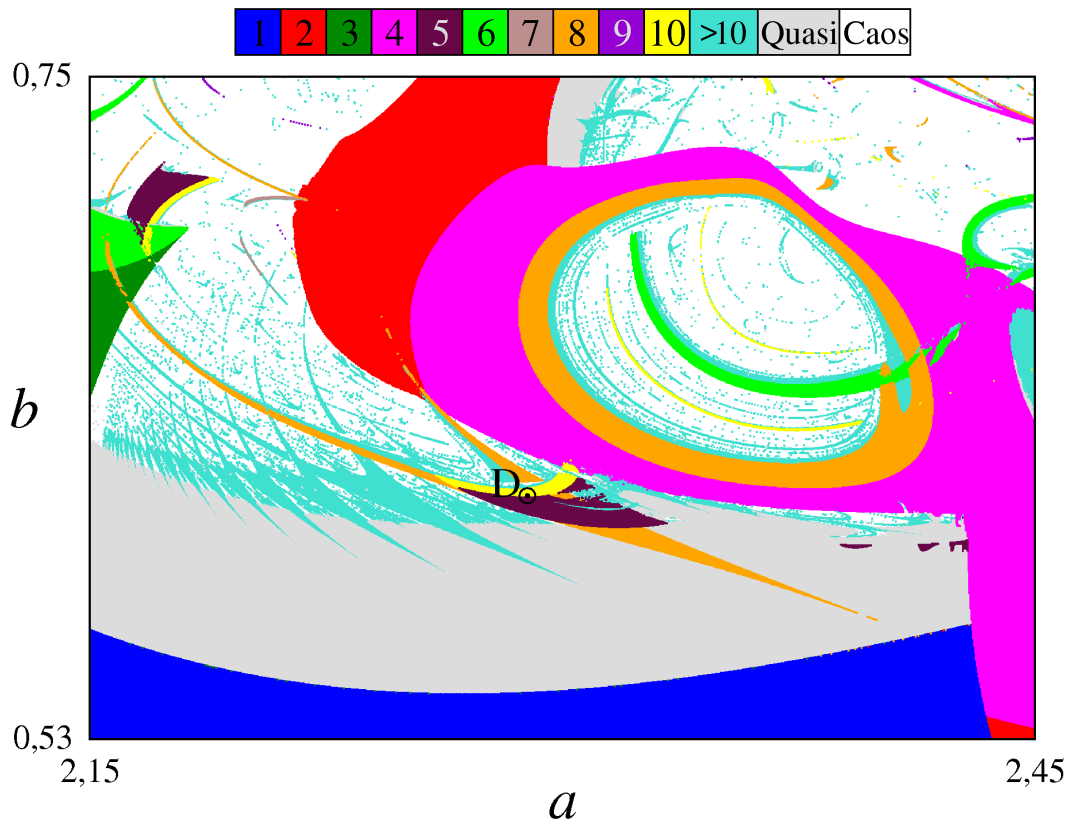


Figura 5.11: Ampliação da caixa ζ na Fig. 5.3. Os períodos foram contados até 64 e estão representados em cores, conforme a legenda. Caos e quasiperiodicidade (Quasi) foram identificados por meio do maior expoente de Lyapunov. O ponto destacado $D(2,289;0,619)$ está em uma região multiestável, vide Fig. 5.12. Grade de 1000×1000 pontos equidistantes, sendo os intervalos $2,15 < a < 2,45$ e $0,53 < b < 0,75$. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

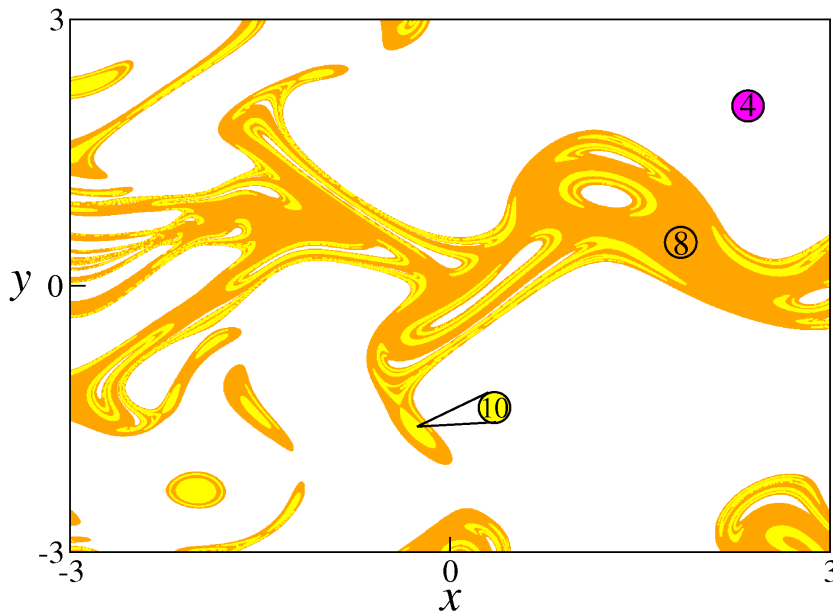


Figura 5.12: Bacias de atração para o ponto $D(2,289;0,619)$ na Fig. 5.11. Os períodos são indicados pelos números destacados. Em branco a bacia da órbita de período 4, em alaranjado a da órbita de período 8 e em amarelo a bacia da órbita de período 10. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações.

Curiosamente, na Fig. 5.12 predomina uma bacia de atração para órbita de período 4, mas as estruturas visivelmente sobrepostas na Fig. 5.11 são de períodos 8 e 10, ambos com as respectivas bacias de atração representadas na Fig. 5.12. O ponto está visivelmente próximo de uma região de período 5, porém não há uma bacia de atração para este na região do espaço de fases $-3 < x, y < 3$. Vale lembrar que mantivemos, durante a determinação das bacias de atração, a mesma precisão de 10^{-7} adotada para gerar os espaços de parâmetros.

Por fim, na Fig. 5.13 ampliamos a caixa ξ destacada na Fig. 5.2. A rota de dobramento de período margeia a sequência de estruturas periódicas imersas na região caótica. Os números indicam os períodos em cada região, mas não determinamos a regra de formação dos mesmos. Além de camarões, também observamos outro tipo de estrutura periódica, a qual não dá continuidade para formar uma espiral, embora a imagem possa lembrar uma espiral de camarões. Esse tipo de estrutura está relatada na Ref. [37].

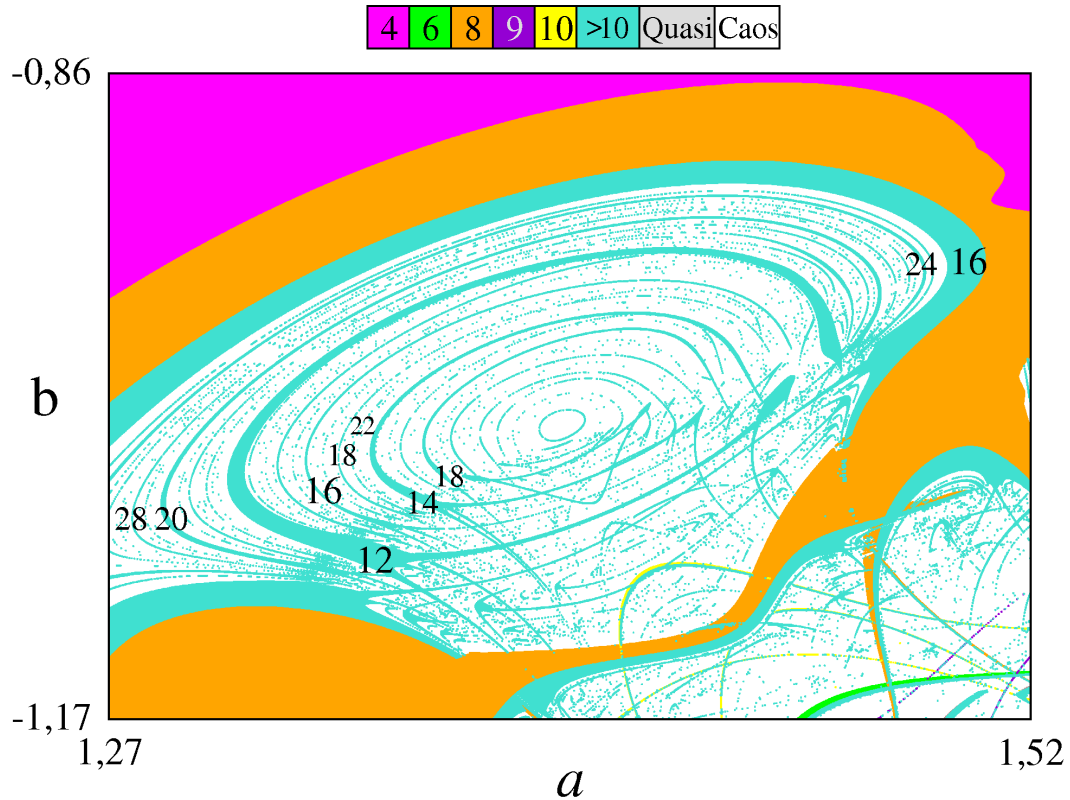


Figura 5.13: Ampliação da caixa ξ na Fig. 5.2. Os períodos foram contados até 64 e estão representados em cores, conforme a legenda. Caos e quasiperiodicidade (Quasi) foram identificados por meio do maior expoente de Lyapunov. Destaque para as estruturas periódicas (turquesa) imersas na região caótica margeada por uma rota de dobramento de período. Os números indicam períodos. Grade de 1000×1000 pontos equidistantes, sendo os intervalos $1,57 < a < 1,82$ e $-1,57 < b < -0,86$. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 10^5 iterações. Adotados $x_0 = 0,1123$ e $y_0 = 0,17$ como condições iniciais para cada ponto.

Neste capítulo tratamos do mapa seno em duas dimensões, exploramos as riqueza e complexidade dinâmicas do mesmo. Destacamos a presença de multiestabilidade e quasiperiodicidade, características evidenciadas por meio de representações gráficas de bacias de atração e espaços de parâmetros, respectivamente. As regras de formação de períodos encontradas, em árvores de Farey e formação por adição, corroboram estudos já conhecidos na literatura. Também corroboramos os resultados analíticos apresentados no capítulo 3, isso quanto à existência de uma região mínima correspondente à ocorrência de pontos fixos atrativos, bem como à ocorrência de bifurcações do tipo Neimark-Sacker.

Capítulo 6

Mapa de Hénon aproximado por uma soma finita de senos

Neste capítulo fazemos uma comparação entre os espaços de parâmetros para o mapa de Hénon, dado conforme a Ref. [25], e uma aproximação em soma finita de senos para o mesmo, de acordo com a Seção 3.7. Evidenciamos as distorções, no plano de parâmetros gerado para o mapa aproximado, das estruturas periódicas características do mapa de Hénon. Sendo a soma finita de senos limitada nos reais, o sistema obtido não apresenta divergência. Sendo o mapa de Hénon

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a + by_n - x_n^2, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}\tag{6.1}$$

o mapa seno bidimensional (6.2) representa o truncamento em $m' = m - 1$ das séries de Fourier para cada termo do sistema acima. Os parâmetros α_{ijk} , β_{ijk} e γ_{ijk} do mapa a seguir foram definidos de forma a manter identificáveis os parâmetros a e b do mapa original. Assim, os espaços de parâmetros de ambos podem ser comparados nos mesmos intervalos. Temos

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \text{sen}(\beta_{ijk} x_n^{(i)} + \gamma_{ijk}),\tag{6.2}$$

com os parâmetros seguindo a forma prescrita no capítulo 3, dados como segue:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11k} &= -4 \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \alpha_{12k} = \alpha_{21k} = 2b \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \alpha_{22k} = 0, \quad k \neq m, \\
 \alpha_{11m} &= \left(a + \frac{\pi^2}{3} \right), \quad \alpha_{12m} = \alpha_{21m} = \alpha_{22m} = 0, \\
 \beta_{11k} &= \beta_{12k} = \beta_{21k} = k, \quad \beta_{22k} = 0, \quad k \neq m, \\
 \beta_{11m} &= \beta_{12m} = \beta_{21m} = \beta_{22m} = 0, \\
 \gamma_{11k} &= \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_{12k} = \gamma_{21k} = \gamma_{22k} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Fizemos $m = 11$ na equação (6.2), o que resulta na soma de uma constante e 10 senos para cada variável dinâmica do mapa aproximado. Realizamos a investigação numérica nos intervalos dos parâmetros $0, 0 < a < 1,7$ e $0 < b < 0,5$, a mesma região estudada na Ref. [25]. Para gerar as Fig. 6.1(a) e (b), utilizamos uma grade de 1500×1500 pontos equidistantes e identificamos os períodos, contados até 10, com acurácia de 10^{-7} e transiente de 5×10^4 iterações. Para os pontos não correspondentes às órbitas de períodos menores do que ou iguais a 10, calculamos o maior expoente de Lyapunov, assim os caracterizamos como periódicos ou caóticos. Para o mapa 6.1 há uma região de divergência, a qual foi identificada em cinza. As regiões periódicas imersas em caos observadas na Fig. 6.1(a), gerada para o mapa de Hénon (6.1), são ampliadas e distorcidas na Fig. 6.1(b), gerada para o mapa (6.2) com $m = 11$.

A grande faixa de divergência na Fig. 6.1(a) dá lugar a uma região caótica na Fig. 6.1(b), permeada pelas continuações das grandes estruturas periódicas e vestígios de períodos diversos. A rota para o caos por dobramento de período, que ocorre no canto inferior esquerdo na Fig. 6.1(a), é mantida com poucas distorções na Fig. 6.1(b).

Chamamos a atenção para a estrutura de período 5 (bordô) próximo ao centro de ambas as figuras. Essa sofre pequenas distorções no mapa aproximado, mas mantém a sua forma básica. Já a estrutura de período 6 (verde claro) que margeia a faixa de divergência na primeira figura sofre grandes distorções na segunda figura, alongando-se e a ela sendo adicionadas “antenas”. Outra grande diferença consiste na larga faixa de período 6 presente na Fig. 6.1(b), a qual se origina do alongamento de uma antena do mesmo período vista na Fig. 6.1(a).

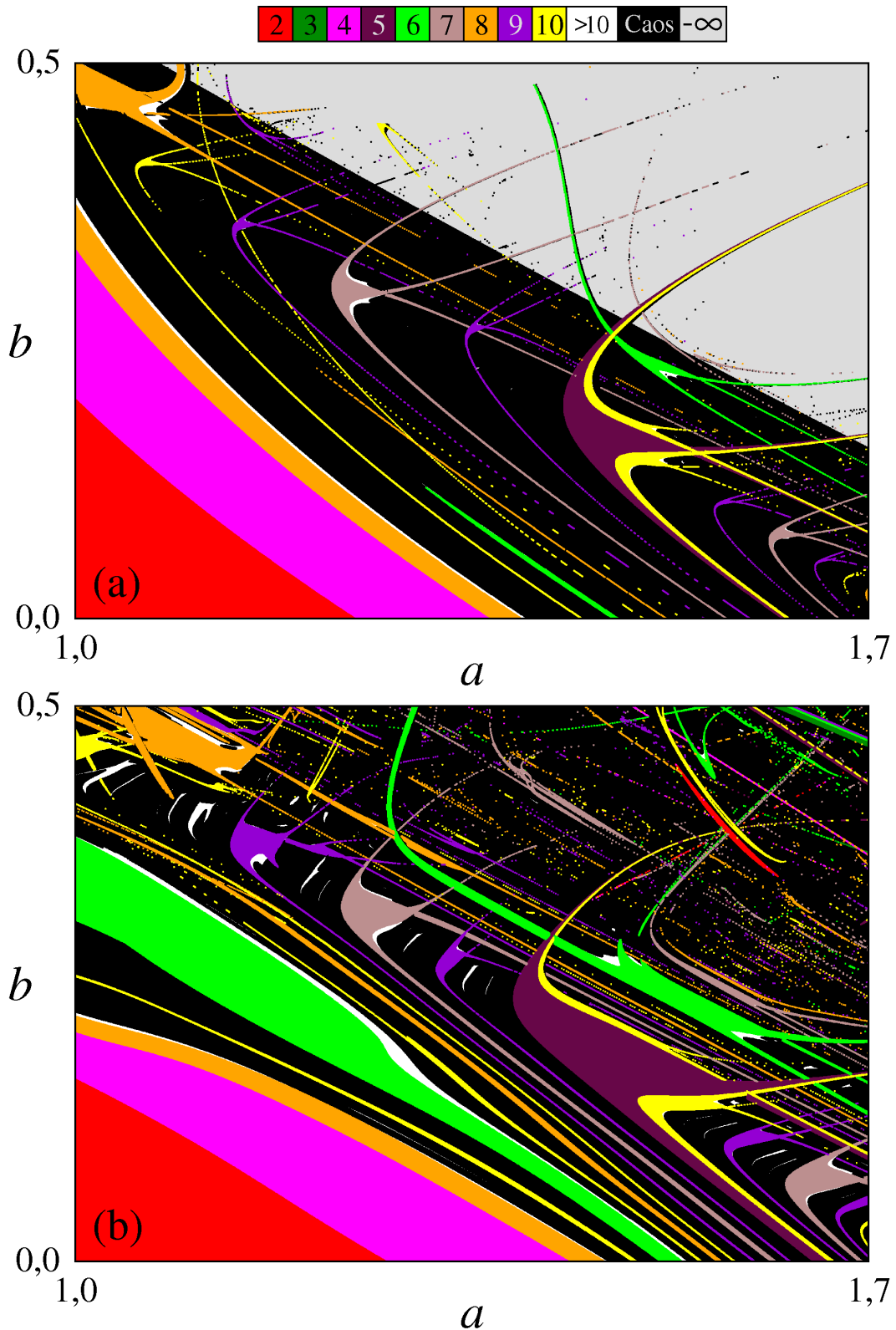


Figura 6.1: Espaços de parâmetros $a \times b$ gerados com grade de 1500×1500 pontos equidistantes, sendo os intervalos $0,0 < a < 1,7$ e $0 < b < 0,5$. Acurácia de 10^{-7} e transiente de 5×10^4 . Adotadas as condições iniciais $x_0 = 0,03$ e $y_0 = 0,001$. As cores representam os comportamentos dinâmicos, conforme legenda. (a) Figura gerada a partir do mapa de Hénon (6.1). Observa-se uma larga faixa de divergência (cinza) e estruturas periódicas imersas na região caótica. (b) Figura gerada a partir o mapa aproximado (6.2) com $m = 11$. A região de divergência é suprimida e as estruturas periódicas presentes no mapa original são distorcidas.

Como evidenciado, o mapa seno n -dimensional pode ser empregado para aproximar o mapa de Hénon, mantendo muitas características dinâmicas do mapa polinomial e eliminando a divergência. Tal aproximação pode ser de interesse prático em aplicações na eletrônica, já que se passa a trabalhar com um sistema onde as variáveis são limitadas.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho propusemos uma forma geral para mapas de senos n -dimensionais com argumentos lineares nas variáveis dinâmicas. Investigamos analiticamente a existência de pontos de equilíbrio estável e determinamos uma região correspondente no espaço de parâmetros, cujos limites são dados em função da dimensão do sistema. Estabelecemos, por meio de aproximações e manipulações algébricas, uma relação com o mapa seno n -dimensional e o modelo de Kuramoto. Também o fizemos para o *sine circle map*. Um importante resultado advém da interpretação do mapa de soma de senos como uma série de Fourier truncada, por meio da qual aproximamos o mapa de Hénon. Estudamos os mapas seno unidimensional e seno bidimensional. Em ambos corroboramos os resultados obtidos para o mapa na forma geral. Por meio de recursos numéricos, como espaços de parâmetros e bacias de atração, evidenciamos o caráter multiestável do mapa seno em duas dimensões. Outro resultado a destacar, é a ocorrência de quasiperiodicidade no mapa bidimensional, para o qual representamos atratores e pudemos constatar a bifurcação de uma órbita de período 2 para dois ciclos, bifurcação do tipo Neimark-Sacker. Também identificamos a ocorrência de línguas de Arnold em regra de formação de períodos conforme uma árvore de Farey. Também destacamos uma espiral de camarões (*shrimp*) no espaço de parâmetros gerado para o mapa seno bidimensional, estrutura normalmente encontrada em sistemas a tempo contínuo.

A aproximação feita para o mapa de Hénon se mostrou promissora, as estruturas existentes no mapa original sofrem deformações mas continuam a existir no mapa aproximado. Uma vantagem da forma em senos para mapas polinomiais, é a supressão da divergência. No caso estudado, a região de divergência presente no espaço de parâmetros

do mapa de Hénon foi substituída por uma região caótica permeada por vestígios de estruturas periódicas diversas.

A versatilidade do mapa seno n -dimensional, quanto à possibilidade de aproximar outros sistemas, e a riqueza de estruturas periódicas e comportamentos dinâmicos identificada ao longo desta dissertação deixa como perspectiva de estudo a aplicação do mapa aqui proposto, dadas as formas de aproximação e identidades trigonométricas apresentadas nos capítulos precedentes, a outro sistemas dinâmicos, sejam eles não trigonométricos, a serem aproximados por séries de Fourier truncadas, ou trigonométricos, a terem suas equações devidamente manipuladas a fim de serem reescritas na forma de um mapa seno n -dimensional.

Bibliografia

- [1] R. C. Hilborn. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand, 2000.
- [2] C. L. Siegel e J. K. Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Vol. 187. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] E. N. Lorenz. “Deterministic nonperiodic flow”. Em: *Journal of the atmospheric sciences* 20.2 (1963), pp. 130–141.
- [4] L. O. Chua. *The genesis of Chua’s circuit*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1992.
- [5] J. C. Sprott. “A new class of chaotic circuit”. Em: *Physics Letters A* 266.1 (2000), pp. 19–23.
- [6] A. Al-Humadi e N. D. Kazarinoff. “Hopf bifurcation in the Watt steam engine”. Em: *Bull. Inst. Math. Appl* 21 (1985), pp. 133–136.
- [7] H. Goldstein et al. *Classical mechanics*. 2002.
- [8] J. H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Méthodes de MM. Newcomb, Glydén, Lindstedt et Bohlin. 1893*. Vol. 2. Gauthier-Villars it fils, 1893.
- [9] A. M. Lyapunov. “The general problem of the stability of motion”. Em: *International Journal of Control* 55.3 (1992), pp. 531–589.
- [10] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Vol. 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [11] A. N. Kolmogorov. “On preservation of conditionally periodic motions under a small change in the Hamiltonian function”. Em: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Vol. 98. 4. 1954, pp. 527–530.
- [12] V. I. Arnol’d. “Proof of a theorem of AN Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian”. Em: *Russian Mathematical Surveys* 18.5 (1963), pp. 9–36.
- [13] J. Moser. “On invariant curves in area-preserving maps of an annulus”. Em: *Matematika* 6 (1962).
- [14] K. T. Alligood et al. *Chaos*. Springer, 1996.
- [15] B. V. Chirikov. “A universal instability of many-dimensional oscillator systems”. Em: *Physics reports* 52.5 (1979), pp. 263–379.
- [16] R. M. May. “Simple mathematical models with very complicated dynamics”. Em: *Nature* 261.5560 (1976), pp. 459–467.
- [17] M. J. Feigenbaum. “Quantitative universality for a class of nonlinear transformations”. Em: *Journal of statistical physics* 19.1 (1978), pp. 25–52.

- [18] M. J. Feigenbaum. “The universal metric properties of nonlinear transformations”. Em: *Journal of Statistical Physics* 21.6 (1979), pp. 669–706.
- [19] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Vol. 19. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] J. A. Acebrón et al. “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. Em: *Reviews of modern physics* 77.1 (2005), p. 137.
- [21] M. Hénon. “A two-dimensional mapping with a strange attractor”. Em: *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, 1976, pp. 94–102.
- [22] H. Wen. “A review of the Hénon map and its physical interpretations”. Em: *School of Physics Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA* (2014).
- [23] Paulo Cesar Rech. “Bifurcação, multiestabilidade e sincronização em sistemas dinâmicos discretos”. Em: (2005).
- [24] H. G. Schuster e W. Just. *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [25] J. A. C. Gallas. “Structure of the parameter space of the Hénon map”. Em: *Physical Review Letters* 70.18 (1993), p. 2714.
- [26] C. C. Lalescu. “Patterns in the sine map bifurcation diagram”. Em: *arXiv preprint arXiv:1011.6552* (2010).
- [27] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [28] L. H. A. Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [29] R. Gilmore e M. Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. John Wiley & Sons, 2012.
- [30] J. Guckenheimer e P. J. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [31] B. Hao e W. Zheng. *Applied symbolic dynamics and chaos*. Vol. 7. World scientific, 1998.
- [32] AM Davie. “The width of Arnold tongues for the sine circle map”. Em: *Nonlinearity* 9.2 (1996), p. 421.
- [33] F. Xie e B. Hao. “Symbolic dynamics of the sine-square map”. Em: *Chaos, Solitons & Fractals* 3.1 (1993), pp. 47–60.
- [34] C. Pearson. *Handbook of applied mathematics: selected results and methods*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] S. A. Gershgorin. “Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix”. Em: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mathematical Series* 6 (1931), pp. 749–754.
- [36] R. Vitolo et al. “Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows”. Em: *Physical Review E* 84.1 (2011), p. 016216.
- [37] A. Celestino et al. “Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport”. Em: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19.1 (2014), pp. 139–149.

Apêndice A

Três identidades trigonométricas

A.1 Produto de um par de senos

No que segue demonstraremos a identidade

$$2 \operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2) = \operatorname{sen}\left(p_1 + p_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(p_1 - p_2 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{A.1})$$

Aplicando a identidade conhecida $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$ no segundo membro da equação acima, de forma que p_1 e p_2 se mantenham reunidos, resulta

$$2 \operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2) = -\cos(p_1 + p_2) + \cos(p_1 - p_2) \quad (\text{A.2})$$

Recorrendo à identidade $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ e aplicando as propriedades de paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2) &= -\cos(p_1)\cos(p_2) + \operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2) \\ &\quad + \cos(p_1)\cos(p_2) + \operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$2 \operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2) = 2\operatorname{sen}(p_1)\operatorname{sen}(p_2). \quad (\text{A.4})$$

Como se tratava de demonstrar.

A.2 Produto de l senos

Provaremos por indução matemática a validade da identidade

$$\prod_{j=1}^l \text{sen}(p_j) = \frac{1}{2^{l-1}} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} \text{sen} \left(p_1 + \sum_{j=2}^l (-1)^{U(i,l,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (\text{A.5})$$

Iniciamos pelo entendimento da função $U(i, l, j)$. Esta retorna o j -ésimo dígito mais significativo da representação binária de $(i - 1)$ com l casas decimais. Para que a mesma faça sentido, i deve ser um número inteiro positivo no intervalo $1 \leq i \leq 2^{l-1}$, bem como j , também inteiro, deve estar no intervalo $1 \leq j \leq l$. Como exemplos $U(2, 2, 2) = 1$, $U(3, 3, 2) = 0$ e $U(7, 3, 3) = 0$.

A Eq. (A.5) se verifica para $l = 2$, caso em que retorna a Eq. (A.1). Supondo que seja válida para algum $l = L$ e multiplicando ambos os membros por $\text{sen}(p_{L+1})$, obtemos

$$\prod_{j=1}^{L+1} \text{sen}(p_j) = \frac{1}{2^{L-1}} \sum_{i=1}^{2^{L-1}} \text{sen} \left(p_1 + \sum_{j=2}^L (-1)^{U(i,L,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right) \text{sen}(p_{L+1}). \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a identidade (A.1) ao i -ésimo termo da soma em i do segundo membro,

$$\begin{aligned} & \text{sen} \left(p_1 + \sum_{j=2}^L (-1)^{U(i,L,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right) \text{sen}(p_{L+1}) = \\ &= \frac{1}{2} \text{sen} \left(p_1 + \sum_{j=2}^{L+1} (-1)^{U(2i-1,L+1,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \text{sen} \left(p_1 + \sum_{j=2}^{L+1} (-1)^{U(2i,L+1,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Substituindo a relação acima na Eq. (A.6) e compactando a soma, resulta

$$\prod_{j=1}^{L+1} \text{sen}(p_j) = \frac{1}{2^{(L+1)-1}} \sum_{i=1}^{2^{(L+1)-1}} \text{sen} \left(p_1 + \sum_{j=2}^{L+1} (-1)^{U(i,L+1,j)} \left(p_j - \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (\text{A.7})$$

Assim, se a Eq. (A.5) se verifica para algum $l = L$, então também é válida para $l = L + 1$. Concluimos que a referida identidade é verdadeira para $1 < l$.

A.3 Potências inteiras positivas de senos

Provaremos por indução matemática a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^l(bx + c) = 2^{1-l} \sum_{k=1}^l \binom{l-1}{k-1} \operatorname{sen}(B_k x + C_k), \quad (\text{A.8})$$

com l inteiro positivo e as constantes do segundo membro dadas por

$$B_k = b(l - 2k + 2), \quad (\text{A.9})$$

$$C_k = c(l - 2k + 2) - (l - 2k + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Para $l = 1$ a igualdade é imediatamente verificada. Supondo que a mesma seja válida para algum $l = L$ e multiplicando ambos os membros da equação por $\operatorname{sen}(bx + c)$, temos

$$\operatorname{sen}^{L+1}(bx + c) = 2^{1-L} \sum_{k=1}^L \binom{L-1}{k-1} \operatorname{sen}(B_k x + C_k) \operatorname{sen}(bx + c). \quad (\text{A.11})$$

Aplicando a identidade (A.1) ao k -ésimo termo da soma no segundo membro da equação acima, obtemos

$$\binom{L-1}{k-1} \operatorname{sen}(B_k x + C_k) \operatorname{sen}(bx + c) = \frac{1}{2} \binom{L-1}{k-1} [\operatorname{sen}(B'_k x + C'_k) + \operatorname{sen}(B''_k x + C''_k)],$$

com as constantes linhadas definidas

$$B'_k = b[(L+1) - 2k + 2], \quad (\text{A.12})$$

$$B''_k = b[(L+1) - 2(k+1) + 2], \quad (\text{A.13})$$

$$C'_k = c[(L+1) - 2k + 2] - [(L+1) - 2k + 1] \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.14})$$

$$C''_k = c[(L+1) - 2(k+1) + 2] - [(L+1) - 2(k+1) + 1] \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo a equação obtida no somatório e somando os termos com os mesmos argumentos, resulta

$$\operatorname{sen}^{L+1}(bx + c) = 2^{1-(L+1)} \sum_{k=1}^{L+1} \binom{(L+1)-1}{k-1} \operatorname{sen}(B_k x + C_k),$$

sendo as constantes dadas como na forma inicial

$$B_k = b[(L+1) - 2k + 2], \quad (\text{A.16})$$

$$C_k = c[(L+1) - 2k + 2] - [(L+1) - 2k + 1] \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.17})$$

Assim, se a Eq. (A.8) é verificada para algum $l = L$, então também o será para $l = L + 1$. Concluimos, já que a mesma é válida para $l = 1$, que se trata de uma identidade trigonométrica, com l inteiro positivo, como se tratava de demonstrar.