

Um dos sistemas dinâmicos amplamente investigados é o circuito *RLC* caótico de Chua, projetado em 1983. Neste trabalho investigamos as implicações de um forçamento periódico e assimétrico (trigonométrico) na dinâmica deste circuito. Para tal, através das leis de Kirchhoff encontramos as equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem que regem a dinâmica do sistema, e aplicamos algumas transformações para torná-las adimensionais, a fim de realizar um tratamento numérico adequado. Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, expandimos em série de Taylor o forçamento trigonométrico e, para facilitar o estudo analítico, usamos apenas o primeiro termo da expansão, tornando o forçamento linear. Realizamos um estudo analítico sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio usando o critério de Routh-Hurwitz para o forçamento linear, com isso mostramos que certos pontos de equilíbrio sempre serão instáveis, e para outros, encontramos algumas regiões de interesse onde sua estabilidade muda dependendo dos valores dos parâmetros. Realizamos um estudo numérico a fim de compararmos os forçamentos trigonométrico e linear, usamos as seguintes ferramentas: (i) Maior expoente de Lyapunov no plano de parâmetros, para caracterizar regiões periódicas e caóticas; (ii) Os diagramas de *isospikes*, que medem o número de máximos locais em um período das órbitas e (iii) a representação dos atratores, a fim de evidenciar os tipos de comportamentos presentes no sistema. Para obtermos os planos de parâmetros, fixamos alguns valores de um determinado parâmetro e variamos o outro, para determinar que mudanças acontecem na dinâmica do sistema quando aumentamos o valor de um desses em ambos os forçamentos. Os resultados mostram que o forçamento trigonométrico suprime as estruturas periódicas no domínio caótico, enquanto que o forçamento linear gera um deslocamento dos domínios regulares e caóticos. Mostramos que estas mudanças ocorrem devido a influência dos forçamentos na não-linearidade do sistema. Estes resultados também indicam que a aproximação linear para o forçamento é válida para alguns valores dos parâmetros  $K$  e  $A$ .

Orientador: Prof. Dr. César Manchein

Joinville, 2017

ANO  
2017

NATHAN DOS SANTOS NICOLAU | IMPLICAÇÕES DE UM FORÇAMENTO PERIÓDICO  
E ASSIMÉTRICO NA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## IMPLICAÇÕES DE UM FORÇAMENTO PERIÓDICO E ASSIMÉTRICO NA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

NATHAN DOS SANTOS NICOLAU

JOINVILLE, 2017

NATHAN DOS SANTOS NICOLAU

IMPLICAÇÕES DE UM FORÇAMENTO PERIÓDICO E ASSIMÉTRICO NA  
DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. César Manchein

Joinville  
2017

Nicolau, Nathan.

Implicações de um forçamento periódico e assimétrico na dinâmica do circuito de Chua/ Nathan Nicolau. - Joinville, 2017. 89 p.

Orientador: Prof. Dr. César Manchein.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2017.

1. Circuito de Chua. 2. Plano de Parâmetros. 3. Expoentes de Lyapunov. 4. Diagrama de Isospikes. 5. Critério de Routh-Hurwitz. 6. Supressão de Estruturas Periódicas. I. Manchein, César. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

**Implicações de um Forçamento Periódico e Assimétrico na Dinâmica do  
Circuito de Chua**

por

**Nathan dos Santos Nicolau**

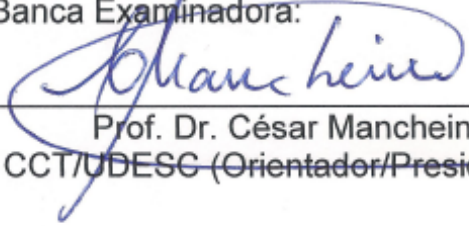
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

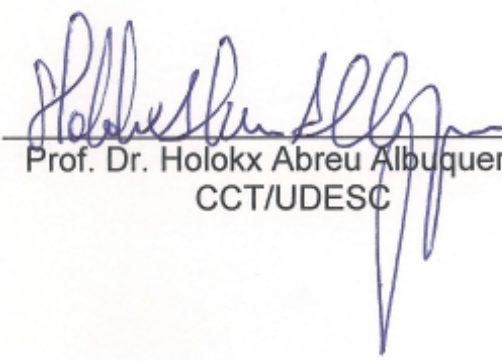
**MESTRE EM FÍSICA**

Área de concentração em "Física"  
e aprovada em sua forma final pelo

**CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.**

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. César Manchein  
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)

  
Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque  
CCT/UDESC

  
Prof. Dr. Rene Orlando Medrano  
Torricos- UNIFESP

**Joinville, SC, 27 de julho de 2017.**



Dedico este trabalho à minha avó Dília Neves e à minha tia Neuza Maria.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha família, por terem me apoiado nessa aventura em outro Estado. Em especial aos meus pais, Valéria Ferreira e Paulo Roberto, pelos ensinamentos e conselhos durante toda a minha vida. À minha irmã Nathália Nicolau, pelas brigas e conselhos que me tornaram hoje o homem que sou. Além deles, agradeço também aos meus tios Alexandre, José Carlos (Branco) e Marcus, às minhas tias Rosane, Seliane e Patrícia e às minhas primas Gabriela e Emannuela. Aos meus amigos da graduação Rafael Gomes, Jonathas Albuquerque, Evelin Nunes e Igor Daniel, por me acompanharem diariamente, mesmo longe, me apoiando e incentivando em cada fase da minha vida.

À minha melhor amiga, confidente e namorada, Viviane Medeiros, pela força e apoio em toda a minha vida, dando-me o suporte para conseguir alcançar meus objetivos e pela paciência devido minha ausência física. Sem ela minha vida não teria sentido. Agradeço todos os dias em fazer parte da sua vida, Te Amo!

Aos professores doutores da Pós-Graduação em Física da UDESC-CCT, por terem me aceitado como aluno de mestrado, dando assim continuidade aos meus sonhos. Em especial ao meu orientador, Prof. Dr. César Manchein, por ter aceitado o desafio de orientar-me, pela dedicação, paciência e pelos conhecimentos e ensinamentos passados, servindo de inspiração na minha vida profissional. Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora desta dissertação, Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque, Prof. Dr. Paulo Cesar Rech, Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos e Prof. Dr. Rero Marques Rubinger. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo suporte financeiro.

Aos meus amigos adquiridos no mestrado, que me receberam e acolheram de forma única e proporcionaram-me momentos de descontração, Paulo, Kelli, Liana, Jaison, Flávio, Rodrigo, Márcio, Wildon, Jônatas, Vinicius, Lucas e Jean. Em especial ao Rafael Fróis, pela vizinhança amigável e companheira; Clésio Mota pelas conversas descontraídas e pela amizade; Monik Borghezán pelas brincadeiras e por ter se tornando uma grande amiga; Alexandre Orthey pelas estudos, discussões sobre física e bebedeiras, se tornando um grande amigo; Carolini Felício pelos momentos engraçados, divertidos e pela simples amizade; Eduardo Brugnago pelos projetos, ensinamentos, conversas sobre política, por me ajudar neste trabalho acadêmico e pela amizade construída. Ao grupo do vôlei dos servidores CCT-UDESC pelos jogos nas terças-feiras, onde pude relaxar e jogar uma bela partida.

À Susele Mussoi, secretária do Programa de Pós-Graduação em Física, pela sua dedicação nos procedimentos administrativos, pelas risadas em momentos de descontração e pela sua amizade que pretendo levar para onde eu estiver.

“Ao invés de um ponto...uma vírgula.” É com o espírito desta frase que eu me despeço e agradeço a pessoa mais importante da minha vida, minha querida vó Dília Neves, pelo amor incondicional que uma vó pode dar a um neto. Agradeço tudo que a senhora fez para que eu chegasse neste estágio da minha vida e espero que, um dia quem sabe, eu possa te encontrar para transformar saudade em alegria. Obrigado por tudo vó!

“É preciso ter um caos dentro de si para dar à luz a uma estrela cintilante.”

Friedrich Nietzsche, 1844-1900.

# Resumo

Neste trabalho investigamos as implicações de um forçamento periódico e assimétrico (trigonométrico) na dinâmica do circuito de Chua. Para tal, através das leis de Kirchhoff encontramos as equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem que regem a dinâmica do sistema, e aplicamos algumas transformações para torná-las adimensionais, a fim de realizar um tratamento numérico. Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, expandimos em série de Taylor o forçamento trigonométrico e, para facilitar o estudo analítico, usamos apenas o primeiro termo da expansão, tornando o forçamento linear. Realizamos um estudo analítico sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio usando o critério de Routh-Hurwitz para o forçamento linear, com isso mostramos que certos pontos de equilíbrio sempre serão instáveis, e para outros, encontramos algumas regiões de interesse onde sua estabilidade muda dependendo dos valores dos parâmetros. Com isso, a fim de compararmos os forçamentos trigonométrico e linear, usamos as seguintes ferramentas numéricas: (i) Maior expoente de Lyapunov no plano de parâmetros, para caracterizar regiões periódicas e caóticas; (ii) Os diagramas de *isospikes*, que medem o número de máximos locais em um período das órbitas e (iii) a representação dos atratores, a fim de evidenciar os tipos de comportamentos presentes no sistema. Para obtermos os planos de parâmetros, fixamos alguns valores de um determinado parâmetro ( $K$ ) e variamos o outro ( $A$ ), a fim de determinar que mudanças ocorriam na dinâmica do sistema quando aumentamos o valor de um determinado parâmetro dos forçamentos trigonométrico e linear. Os resultados numéricos mostram que, para valores de  $K \leq 1 \times 10^{-2}$  só existe uma mudança significativa entre os forçamentos quando  $A = 1 \times 10^{-1}$ , onde para o forçamento trigonométrico as estruturas periódicas no domínio caótico começam a ser suprimidas, enquanto que para o forçamento linear gera um deslocamento dos domínios regulares e caóticos. Para  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A \geq 0$ , notamos uma grande diferença na dinâmica do sistema quando comparamos os forçamentos. O forçamento trigonométrico faz com que a região periódica invada a região de regime caótico, suprimindo as estruturas periódicas no mesmo. Já para a aproximação linear, as estruturas periódicas são preservadas e o plano de parâmetros se desloca conforme aumentamos  $A$ . Estes resultados indicam que a aproximação linear para o forçamento é válida para valores de  $K \leq 1 \times 10^{-2}$  e  $A \leq 1 \times 10^{-2}$  e que o forçamento trigonométrico é um bom supressor de estruturas periódicas para valores de  $K \geq 1 \times 10^{-2}$  e  $A \geq 1 \times 10^{-1}$ .

Palavras chaves: **Circuito de Chua. Plano de Parâmetros. Expoentes de Lyapunov. Diagramas de *Isospikes*. Critério de Routh-Hurwitz. Supressão de Estruturas Periódicas**



# Abstract

We investigate the implications of a periodic and asymmetric (trigonometric) perturbation in the dynamics of the Chua circuit. For this purpose, we use the Kirchhoff's laws to find the set of autonomous first-order differential equations that govern the dynamics of the system. In order to perform an appropriated numerical investigation we obtain a dimensionless form for the differential equations. In addition, to find the equilibrium points of the system, we expand in Taylor series the trigonometric forcing and, by using only the first term of the expansion, making the linear forcing, our calculation becomes simpler. An extensive analytical study on the stability of the equilibrium points using the Routh-Hurwitz criterion for linear forcing was performed: Thereby we show that some equilibrium points are always unstable, and for others we find some particular regions where their stability changes depending of parameter combinations. Thus, in order to compare the trigonometric and linear perturbations, we use the following numerical tools: (i) The parameter plans of largest Lyapunov exponent, to characterize periodic and chaotic regions; (ii) The isospoke diagrams, used to determine the number of the local maxima in a period of orbits; (iii) The plot of the attractors, to highlight the different behaviors presented in the system. To investigate the effect on the dynamics due the periodic and assymetric perturbation throuth of two-dimensional parameter plans, we choice some values of the forcing strength ( $K$ ) and varied the assymetry controled by ( $A$ ). Trigonometric forcing supress stable periodic structures in parameter plans and with the linear one is only possible to move the stable periodic structures. On the other hand, our numerical results show a huge difference between the two types of perturbation for  $K = 1 \times 10^{-1}$  and  $A \geq 0$ . For the trigonometric perturbation the periodic domains increase and consequently the chaotic ones decrease. In addition, there is a supression of stable periodic structures while for the linear perturbation only move the parameter plane's domains as  $A$  is increased. Based on these results we conclude that the linear approximation is only valid to  $K \leq 1 \times 10^{-2}$  and  $A \leq 1 \times 10^{-2}$  and the trigonometric perturbation is a great suppressor of stable periodic structures in Parameter space for  $K \geq 1 \times 10^{-2}$  and  $A \geq 1 \times 10^{-1}$ .

**Key words:** Chua's Circuit. Parameter Plans. Lyapunov Exponents. Isospoke Diagrams. Routh-Hurwitz Criterion. Periodic Structures Suppression.



# Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática do circuito $RLC$ caótico de Chua, formado por três malhas (1, 2 e 3) e dois nós (A e B), contendo um resistor $R$ , dois capacitores $C_1$ , $C_2$ e um indutor $L$ com uma resistência interna $r_L$ . As variáveis $x$ e $y$ correspondem as tensões nos capacitores $C_1$ e $C_2$ respectivamente e a variável $z$ a corrente que atravessa o indutor. . . . .	20
2.1	Esboço de uma trajetória (fluxo) em um sistema dinâmico contínuo tridimensional.	25
2.2	Possíveis atratores em sistemas dinâmicos contínuos dissipativos tridimensionais. As figuras (a) e (b) representam os atratores do sistema de Rössler com $\alpha = 0$ , ponto de equilíbrio e $\alpha = 0,25$ , ciclo-limite, respectivamente [24]. Na figura (c) está representado um atrator quase-periódico de um sistema arbitrário e na figura (d) o atrator caótico do sistema de Lorenz. . . . .	27
2.3	Órbitas esquemáticas $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ geradas evoluindo temporalmente o sistema a partir de duas condições iniciais próximas $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$ . . . . .	28
2.4	Ilustração da deformação do volume de uma hiperesfera de condições iniciais ao evoluir o tempo. . . . .	29
2.5	Plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua. As cores representam o valor do maior expoente de Lyapunov, sendo a cor azul para divergência, branco para pontos de equilíbrio, preto para comportamentos periódicos e o gradiente do amarelo para o vermelho domínios caóticos. . . .	31
2.6	Diagrama de <i>isospikes</i> ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua. As cores representam o número de máximos locais contidos em um período das órbitas, sendo a cor branca para divergência e preto para comportamentos caóticos ou períodos maiores que 14. .	32
3.1	Representação esquemática do circuito $RLC$ caótico de Chua, formado por três malhas (1, 2 e 3) e dois nós (A e B), contendo um resistor $R$ , dois capacitores $C_1$ , $C_2$ e um indutor $L$ com uma resistência interna $r_L$ . As variáveis $x$ e $y$ correspondem as tensões nos capacitores $C_1$ e $C_2$ respectivamente e a variável $z$ a corrente que atravessa o indutor. . . . .	36
3.2	Representação do circuito $RLC$ caótico de Chua forçado, contendo um resistor $R$ , dois capacitores $C_1$ , $C_2$ e um indutor $L$ com uma resistência interna $r_L$ em série com o forçamento $F(x)$ . As variáveis $x$ e $y$ correspondem as tensões nos capacitores $C_1$ e $C_2$ respectivamente e a variável $z$ a corrente que atravessa o indutor. . . . .	37
3.3	Gráficos $x \times F(x)$ , fixando $K = 1,0$ e variando o parâmetro $A$ gradativamente. Nesta figura nota-se como a parte assimétrica do forçamento $F(x)$ acentua-se conforme aumentamos o valor do parâmetro $A$ . . . . .	38
3.4	Gráfico $x \times i_d(x)$ . Esta figura evidencia as três regiões (R1, R2 e R3) lineares da Eq. (3.2). Os parâmetros $m_0$ e $m_1$ , que são os coeficientes angulares, tem dimensão de admitância e o parâmetro $B_p$ , onde a inclinação muda, tem dimensão de tensão. . . . .	39



3.5	Gráficos dos pontos de equilíbrio fixando $K = 1, 0$ e variando $A$ para cada região delimitada pela Eq. (3.23). . . . .	46
3.6	Gráficos dos pontos de equilíbrio fixando $A = 1, 0$ e variando $K$ para cada região delimitada pela Eq. (3.23). . . . .	46
3.7	Regiões de estabilidade no plano complexo das raízes da equação característica. Os pontos de equilíbrio com parte real negativa estão no lado esquerdo do plano complexo e são estáveis. Já os pontos de equilíbrio que possuem parte real positiva, ditos instáveis, estão à direita do plano. . . . .	49
3.8	Análises dos sinais dos coeficientes $a_1$ e $b_1$ no plano de parâmetros para as regiões R1 e R3. Os <i>insets</i> são ampliações dos retângulos de cada região e mostram os intervalos de interesse para cada parâmetro. Região pintada de roxo, coeficientes positivos (CP) e região em ciano, coeficientes negativos (CN). . . . .	51
3.9	Análises de estabilidade dos pontos de equilíbrio para as Regiões R1 e R3 no plano de parâmetros $(\gamma \times K)$ gerado pelas Eqs. (3.46) (linha em vermelha) e (3.51) (linha em azul). Região cujos pontos de equilíbrio são estáveis (PEE) estão pintada de verde e instáveis (PEI) de azul. . . . .	52
3.10	Análises dos sinais dos coeficientes $a_1$ e $b_1$ no plano de parâmetros para a região R2. Os <i>insets</i> são ampliações dos retângulos de cada região e mostram os intervalos de interesse para cada parâmetro. Região pintada de roxo, coeficientes positivos (CP) e região em ciano, coeficientes negativos (CN). . . . .	54
3.11	Análises de estabilidade do ponto de equilíbrio da Região R2 no plano de parâmetros $(\gamma \times K)$ gerado pelas Eqs. (3.55) (linha em vermelha) e (3.59) (linha em azul). Região cujos pontos de equilíbrio são estáveis (PEE) estão pintada de verde e instáveis (PEI) de azul. . . . .	55
3.12	Interseção das regiões de estabilidade do ponto de equilíbrio para as Eqs. (3.55) (linha em vermelho) e (3.59) (linha em azul). . . . .	56
4.1	Plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua. As cores representam o valor do maior expoente de Lyapunov, sendo a cor azul para divergência, branco para pontos de equilíbrio, preto para comportamentos periódicos e o gradiente do amarelo para o vermelho domínios caóticos. . . . .	58
4.2	Planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua, variando $K$ e fixando $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear. . . . .	59
4.3	Gráficos $X \times I(X)$ , variando $K$ e fixando $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelha). A linha pontilhada em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento. . . . .	60
4.4	Planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com $1 \times 10^{-2} < K < 1 \times 10^{-1}$ e $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear. . . . .	61
4.5	Gráficos $X \times I(X)$ , variando $1 \times 10^{-2} < K < 1 \times 10^{-1}$ e fixando $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelha). A linha em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento. . . . .	62
4.6	Planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com $K = 1 \times 10^{-2}$ e variando $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear. . . . .	63
4.7	Gráficos $X \times I(X)$ com $K = 1 \times 10^{-2}$ e variando $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelho). A linha em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento. . . . .	64
4.8	Planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com $K = 1 \times 10^{-1}$ e variando $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear. . . . .	66

4.9	Gráficos $X \times I(X)$ com $K = 1 \times 10^{-1}$ e variando $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelho). A linha em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento.	67
4.10	Paleta de cores e seus respectivos períodos para os Diagramas de <i>isospikes</i> . Sendo a cor branca para região onde o sistema diverge e a região em preto onde o sistema apresenta comportamento caótico ou periódico com períodos maiores que 14.	68
4.11	<i>Insets</i> dos planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com o forçamento trigonométrico usando $K = 1 \times 10^{-2}$ e variando $A$ com os seus respectivos diagramas de <i>isospikes</i> .	69
4.12	<i>Insets</i> dos planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com o forçamento linear usando $K = 1 \times 10^{-2}$ e variando $A$ com os seus respectivos diagramas de <i>isospikes</i> .	71
4.13	<i>Insets</i> dos planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com o forçamento trigonométrico usando $K = 1 \times 10^{-1}$ e variando $A$ com os seus respectivos diagramas de <i>isospikes</i> .	72
4.14	<i>Insets</i> dos planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com o forçamento linear usando $K = 1 \times 10^{-1}$ e variando $A$ com os seus respectivos diagramas de <i>isospikes</i> .	73
4.15	Atratores do cChua não forçado ( $K = 0$ e $A = 0$ ). Na figura (a) atrator ciclo-limite, (b) periódico e em (c) atrator caótico.	74
4.16	<i>Insets</i> dos planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando $K = 1 \times 10^{-2}$ e $A = 1 \times 10^{-1}$ .	75
4.17	Atratores do cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando os valores $K = 1 \times 10^{-2}$ e $A = 1 \times 10^{-1}$ .	76
4.18	<i>Insets</i> dos planos de parâmetros $(\alpha \times \gamma)$ para o cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando $K = 1 \times 10^{-1}$ e $A = 1 \times 10^{-2}$ .	77
4.19	Atratores do cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando os valores $K = 1 \times 10^{-1}$ e $A = 1 \times 10^{-2}$ .	78
A.1	Representação do circuito <i>RLC</i> caótico de Chua, contendo um resistor $R$ , dois capacitores $C_1$ , $C_2$ e um indutor $L$ com uma resistência interna $r_L$ . As variáveis $x$ e $y$ correspondem as tensões nos capacitores $C_1$ e $C_2$ respectivamente e a variável $z$ a corrente que atravessa o indutor.	83
A.2	Gráficos do ponto de equilíbrio da região R1.	85
A.3	Gráficos do ponto de equilíbrio da região R3.	85
A.4	Gráficos das análises dos sinais do coeficiente $b_1$ para a região R2. Para toda a região na qual a linha azul está acima da linha vermelha, o ponto de equilíbrio é estável. Para valores negativos de $b_1$ o ponto de equilíbrio é instável.	89



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS</b>	<b>23</b>
2.1	Sistemas Dinâmicos Contínuos . . . . .	23
2.2	Espaço de Fases e Atratores . . . . .	24
2.3	Caracterização da Dinâmica Caótica . . . . .	28
2.3.1	Expoentes de Lyapunov . . . . .	28
2.4	Espaço de Parâmetros . . . . .	31
2.4.1	Diagramas de <i>Isospikes</i> . . . . .	32
2.4.2	Diagramas de Bifurcações . . . . .	33
<b>3</b>	<b>O CIRCUITO DE CHUA FORÇADO</b>	<b>35</b>
3.1	O Circuito de Chua . . . . .	36
3.2	Resultados Analíticos . . . . .	39
3.2.1	Pontos de Equilíbrio . . . . .	43
3.2.2	Análise da Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio . . . . .	47
3.2.3	Regiões R1 e R3 . . . . .	49
3.2.4	Região R2 . . . . .	53
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>57</b>
4.1	Diagramas de Lyapunov . . . . .	57
4.2	Diagramas de <i>Isospikes</i> . . . . .	68
4.3	Atratores . . . . .	74
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>O CIRCUITO DE CHUA</b>	<b>83</b>
A.1	O Circuito de Chua Original . . . . .	83
A.1.1	Pontos de Equilíbrio . . . . .	84
A.1.2	Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio . . . . .	86
A.1.3	Regiões R1 e R3 . . . . .	87
A.1.4	Regiões R2 . . . . .	88



# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O procedimento de modelar sistemas reais utilizando conjuntos de equações diferenciais tem aplicações em diversas áreas de pesquisa como Física, Química, Biologia, Economia e outras mais. Até mesmo um sistema cuja solução é demasiadamente complexa pode ser modelada por simples equações que permitem um estudo qualitativo do sistema. Vários modelos foram estudados em detalhes, mas ainda continuam sendo investigados e modificados levando, assim, a novas descobertas e a criação de novos conhecimentos [1 - 14].

Um modelo de determinado sistema dinâmico consiste na formulação matemática do aspecto científico de um processo determinístico. Os estados futuros de muitos sistemas físicos podem ser previstos através dos estados passados (condições iniciais) e das leis que regem sua evolução (equações). Se estas leis são imutáveis no tempo, o comportamento da dinâmica do sistema é inteiramente definido pelo seu estado inicial [15]. Os sistemas dinâmicos podem ser classificados de duas formas, de acordo com a sua evolução temporal: *(i)* o tempo pode variar continuamente (fluxo); *(ii)* ou assumir valores discretos inteiros (mapas). Neste trabalho, trataremos de sistemas dinâmicos contínuos, cujas implicações estão evidenciadas no Cap. 2.

Segundo o filósofo G. Santayna (1863-1952), caos é o nome dado a qualquer ordem que produza confusão em nossas mentes. E, de acordo com o psiquiatra C. G. Jung (1875-1961), em toda a desordem há uma ordem secreta. Esses pensamentos sobre a natureza humana foram formulados depois do trabalho teórico sobre dinâmica caótica, realizado pelo matemático J. H. Poincaré (1854-1912), mas antes da simulação numérica feita pelo matemático E. N. Lorenz (1917-2008) e sugerem que uma evolução temporal sem um padrão (aperiódico) pode decorrer da ordem de um sistema governado por regras claras e precisas. De fato, caos é um dos comportamentos dinâmicos que podem ser gerados por equações determinísticas [16]. Todo sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de parâmetros. São chamados de parâmetros de controle, tal que um sistema pode ser entendido como uma função desses

parâmetros. Com isso, alterando o valor destes, podemos modificar o comportamento da dinâmica do sistema. Para a existência de comportamentos caóticos em sistemas dinâmicos contínuos, o mesmo deve conter no mínimo três equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem no tempo linearmente independentes e possuir, no mínimo, uma não-linearidade em uma de suas equações [16]. Além disso, o sistema deve apresentar alta sensibilidade nas condições iniciais, isto é, condições iniciais infinitesimalmente próximas podem gerar dinâmicas diferentes ao evoluir temporalmente o sistema.

Um dos sistemas a tempo contínuo mais estudados nas últimas décadas é o circuito de Chua [17 - 22], proposto originalmente por L. O. Chua em 1983 a fim de evidenciar a existência experimental do comportamento caótico gerado pelo sistema de convecção proposto por Lorenz em 1962. O circuito eletrônico é composto por três elementos de armazenamento de energia: dois capacitores ( $C_1$  e  $C_2$ ) e um indutor  $L$  com uma resistência interna  $r_L$  e um resistor  $R$  com um valor previamente definido. A não-linearidade do circuito está presente no dispositivo chamado diodo de Chua, como representado na Fig. 1.1. As variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema são as diferenças de potencial nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  e a corrente que passa pelo indutor  $L$  respectivamente, a corrente  $i_d$  é uma função linear por partes baseada nas características elétricas do diodo de Chua, muito usada em trabalhos científicos devido a sua forma linear e a facilidade experimental [3, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 21, 22]. O tratamento matemático deste circuito via leis de Kirchhoff foi realizado e está evidenciado no Cap. 3.

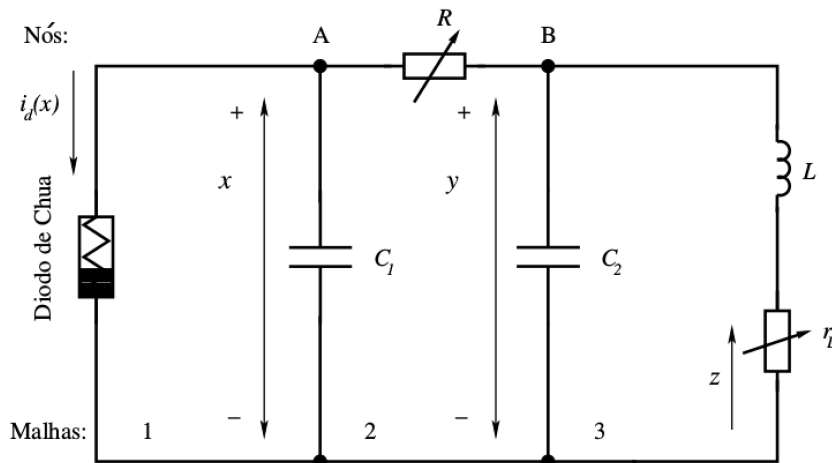


Figura 1.1: Representação esquemática do circuito  $RLC$  caótico de Chua, formado por três malhas (1, 2 e 3) e dois nós (A e B), contendo um resistor  $R$ , dois capacitores  $C_1$ ,  $C_2$  e um indutor  $L$  com uma resistência interna  $r_L$ . As variáveis  $x$  e  $y$  correspondem as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente e a variável  $z$  a corrente que atravessa o indutor.

Neste trabalho propomos uma realimentação trigonométrica, periódica e assimétrica  $F(X)$ , representada pela equação

$$F(X) = K [\sin(B_p X) + A \cos(2B_p X)], \quad (1.1)$$

que descreve o funcionamento de um dispositivo colocado em série com o indutor, com o intuito de caracterizar analiticamente e numericamente o efeito deste forçamento na dinâmica do circuito de Chua, sendo a variável  $X$  proporcional a diferença de potencial no capacitor  $C_1$ ,  $B_p$  um parâmetro relacionado ao diodo de Chua,  $K$  e  $A$  as amplitudes do forçamento. Para tal, expandimos a função  $F(X)$  em série de Taylor, dada por

$$F(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{(-4)^j K A X^{2j}}{(2j!)} + \frac{(-1)^j [B_p K X (B_p X)^{2j}]}{(1 + 2j!)} \right], \quad (1.2)$$

e para facilitar o estudo analítico do circuito de Chua forçado, usamos apenas o primeiro termo da expansão, tornando a função  $F(X)$  linear, conforme a equação,

$$F(X) = K(A + B_p X). \quad (1.3)$$

Com a aproximação linear, calculamos analiticamente os pontos de equilíbrio e analisamos sua estabilidade utilizando o critério de Routh-Hurwitz a fim de investigar o sinal dos coeficientes das equações características [23]. Deste modo, encontramos as regiões (no espaço de parâmetros) onde os pontos de equilíbrio são estáveis e instáveis. Investigamos numericamente a influência dos forçamentos trigonométrico e linear na dinâmica do sistema e, depois comparamos os resultados a fim de evidenciar suas diferenças para diferentes valores das amplitudes  $K$  (parte periódica) e  $A$  (parte assimétrica) dos mesmos. Para isto, usamos o plano de parâmetros  $(\alpha \times \gamma)$  para o maior expoente de Lyapunov e os diagramas de *isospikes*, que indicam o acúmulo de máximos locais contidos em cada ponto do plano de parâmetros. De forma geral, os resultados mostram que: (i) para valores de  $K \lesssim 1 \times 10^{-2}$  e  $A \lesssim 1 \times 10^{-2}$  não há uma mudança significativa entre o forçamento trigonométrico e a aproximação linear aplicados ao sistema. Os domínios regulares e caóticos sofrem pequenos deslocamentos, diferentes em cada caso, mas preservando suas estruturas periódicas e as regiões cujo comportamento é caótico; (ii) para valores de  $K \gtrsim 1 \times 10^{-1}$  e  $A > 0$  existem diferenças entre os espaços de parâmetros para o forçamento trigonométrico e linear, certamente devido ao fato de a aproximação ser linear e não possuir parte assimétrica, diferentemente do caso geral. Especificamente, para o forçamento trigonométrico, quando  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variamos (aumentamos) o valor de  $A$ , ocorre su-



pressão das regiões periódicas imersas no regime caótico por causa da influência do forçamento na não-linearidade do sistema. Para a aproximação linear, usando os mesmos valores de  $K$  e  $A$ , mesmo com um comportamento totalmente diferente do trigonométrico, as estruturas periódicas são preservadas ocorrendo um deslocamento dos domínios regulares e caótico devido ao fato do forçamento linear alterar a inclinação da não-linearidade. Nos diagramas de *isospikes* mostramos que os períodos das estruturas imersas no domínio caótico não sofrem alteração quando aplicamos ambos os forçamentos, resultado confirmado com a representação dos atratores. Encontramos uma rota para o caos via dobramento de período na região onde o atrator é periódico, partindo do período 1, passando para período 2, período 4 até chegar no domínio caótico. Estes resultados indicam que a aproximação linear para o forçamento  $F(X)$  é válido para valores de  $K \lesssim 1 \times 10^{-2}$  e  $A \lesssim 1 \times 10^{-2}$ . Porém, estes resultados também mostram que ambos os forçamentos servem para deslocar os regimes periódico e caótico do sistema e que a parte assimétrica do forçamento trigonométrico é um bom supressor de estruturas periódicas imersas em domínios caóticos.

Esta dissertação é constituída de cinco Capítulos e um Apêndice. O Capítulo 2 aborda, de forma sucinta, os conceitos e definições utilizados no estudo de sistemas dinâmicos contínuos, assim como os atratores, expoentes de Lyapunov, diagramas de *isospikes* e de bifurcações. No Capítulo 3 apresentamos o circuito de Chua e evidenciamos a proposta do forçamento, em seguida deduzimos o sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem. Calculamos os pontos de equilíbrio e realizamos a análise analítica de sua estabilidade para as regiões limitadas utilizando o critério de Routh-Hurwitz. No Capítulo 4, apresentamos o estudo numérico via integração das equações diferenciais ordinárias pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, usando os planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov, diagramas de *isospikes* e atratores, evidenciamos as implicações do forçamento trigonométrico e linear na dinâmica do sistema. O Capítulo 5 destina-se a listagem dos resultados, discussões das conclusões e viabilização de projetos futuros, dando continuidade à pesquisa sobre o circuito de Chua. As Referências Bibliográficas aparecem logo em seguida. O Apêndice A, refere-se ao circuito de Chua original, contendo os cálculos para os pontos de equilíbrio e a análise analítica da estabilidade destes pontos usando o critério de Routh-Hurwitz.

## Capítulo 2

# SISTEMAS DINÂMICOS

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo [16].

De forma simplificada, um sistema dinâmico pode ser representado por um conjunto de equações que mostram a sua evolução conforme o tempo passa. O estado futuro de um sistema físico, químico, biológico, econômico e social pode ser previsto apenas conhecendo seu estado atual e as leis que governam a sua evolução. Se estas leis são imutáveis no tempo, o comportamento da dinâmica do sistema é inteiramente definido pelo seu estado inicial. Assim, o conjunto de todos os estados possíveis (espaço de estados) junto com as leis de evolução do estado no tempo formam um conjunto que define um sistema dinâmico [15].

Existem dois tipos de sistemas dinâmicos que são classificados de acordo com a variação temporal. Os sistemas contínuos, cujo tempo é uma variável contínua (fluxos) e é representado por um conjunto de equações diferenciais, e os sistemas discretos com a qual a variação temporal se dá de forma discreta, ou seja, a variável tempo assume valores inteiros. Esse último tipo de sistema é representado por um conjunto de equações de diferença (mapas) [16]. Neste trabalho o tempo assume valores contínuos, com isso o foco deste capítulo relaciona aspectos teóricos de sistemas dinâmicos contínuos.

### 2.1 Sistemas Dinâmicos Contínuos

A maneira mais comum de definir um sistema dinâmico contínuo é através de equações diferenciais. Um sistema  $n$ -dimensional não linear autônomo (não depende explicitamente do tempo) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{dx^{(1)}}{dt} &= \dot{x}_1 = F_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\
\frac{dx^{(2)}}{dt} &= \dot{x}_2 = F_2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\
&\vdots \\
\frac{dx^{(n)}}{dt} &= \dot{x}_n = F_n(x^1, x^2, \dots, x^n),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

que pode ser escrito na forma compacta, utilizando notação vetorial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)], \tag{2.2}$$

onde  $\vec{x}$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\vec{F}$  uma função vetorial desta variável [24]. Este conjunto de equações representa um sistema dinâmico pois, para um estado inicial  $\vec{x}(0)$ , a princípio podemos sempre resolver as Eq. (2.1) e obter o estado final  $\vec{x}(t)$  para qualquer  $t > 0$ .

Há dois caminhos para se solucionar um conjunto de equações diferenciais: (i) pode-se tentar integrá-lo analiticamente, determinando as soluções em termos de fórmulas gerais e assim obtêm-se soluções válidas para quaisquer condições iniciais e qualquer conjunto de parâmetros de controle, porém só é possível em casos especiais (sistemas integráveis). (ii) Resolvê-lo numericamente, calculando valores para as variáveis  $\vec{x}(t)$ , para determinados valores da variável independente  $t$ . Com o método (ii), todo trabalho é realizado pelo computador e o conjunto de sistemas de equações solucionáveis é infinitamente maior que o da técnica analítica, porém as soluções são específicas para um conjunto de parâmetros e condições iniciais [16].

Às vezes, o que deseja-se saber não é a forma exata da solução, mas sim, seu comportamento qualitativo. Nesse caso, tenta-se descobrir que famílias de soluções podem ser associadas a determinados valores dos parâmetros e/ou das condições iniciais do sistema dinâmico em questão [16].

## 2.2 Espaço de Fases e Atratores

O espaço de fases ou espaço de estados, é um espaço  $n$ -dimensional formado pelas variáveis dinâmicas do sistema, modelado por  $n$  equações diferenciais. Um estado é representado como

um ponto com coordenadas  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  nesse espaço. Com o passar do tempo, esse ponto move-se de acordo com o sistema de equações (2.1) [16]. Como definimos a velocidade instantânea sendo  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t)$  então, as funções  $\vec{F}$  definem o campo vetorial ou campo de velocidades, e as variáveis dependentes  $x_n$  são chamadas de variáveis de estado. A dimensão do espaço de fase equivale ao número de equações de primeira ordem necessárias para descrever o sistema, sendo igual ao número de variáveis de estado. Por exemplo, para o circuito de Chua (usaremos a abreviação cChua daqui por diante) composto por três equações diferenciais de primeira ordem, definido no Cap. 3 e no apêndice, a dimensão do espaço de fase é igual a três [17 - 20].

Denomina-se retrato de fases o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de condições iniciais nas quais a função  $\vec{F}$  é definida. Pode-se dizer que uma solução  $\vec{x}(t)$  para o sistema (2.1) corresponde a uma trajetória no espaço de fases percorrida com velocidade  $\frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ , que coincide com o campo de velocidades  $\vec{F}(\vec{x}, t)$ .

A Fig. 2.1 mostra um caminho hipotético seguido por um sistema com  $n = 3$  quando ele evolui no tempo. O espaço gerado pelas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  é chamado de espaço de fases, sendo  $\vec{r}(0)$  o conjunto de condições iniciais e  $\vec{r}(t)$  a solução após evoluir temporalmente. O caminho gerado pelo sistema nesse espaço ao passar do tempo é chamado de órbita ou trajetória. Para sistemas dinâmicos contínuos, essa trajetória é chamada de fluxo [24].

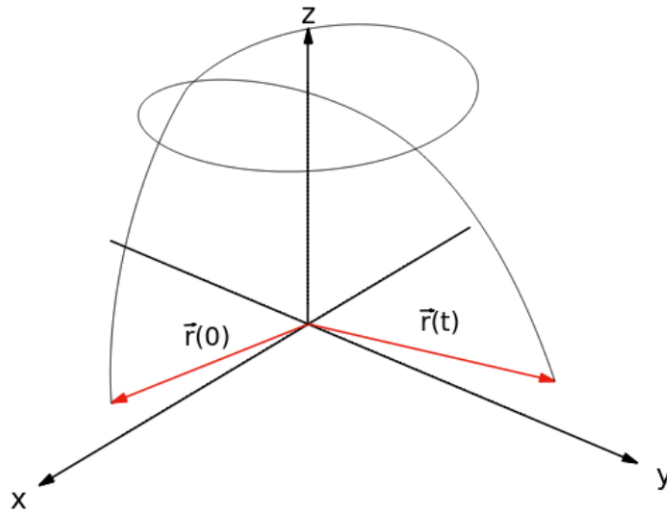


Figura 2.1: Esboço de uma trajetória (fluxo) em um sistema dinâmico contínuo tridimensional.

Os sistemas dinâmicos também podem ser classificados como conservativos ou dissipativos. Se o fluxo preservar o volume do espaço de fases, o sistema é dito conservativo. Assim, os pontos num dado volume movem-se, com o passar do tempo, de forma que, num instante posterior o volume ocupado por esses pontos permanece inalterado. Num sistema dissipativo, esse volume sofre uma contração conforme evolui temporalmente [16].

Considere o sistema descrito pela Eq. (2.2). Tome uma superfície fechada arbitrária  $S(t)$  de volume  $V(t)$  no espaço de fases. Os pontos na superfície de  $S$  e no seu interior são as condições iniciais das trajetórias. Fazendo o sistema evoluir num tempo infinitesimal  $dt$ , a superfície  $S(t)$  evolui para uma nova superfície  $S(t+dt)$ . Nesse intervalo de tempo infinitesimal, a evolução de um segmento infinitesimal de área  $dS$  cria um volume  $(\vec{n} \cdot \vec{F}dt)dS$ , sendo  $\vec{n}$  um vetor unitário que aponta perpendicularmente para fora do volume  $V$ . Com isso, podemos relacionar o novo volume da seguinte forma:

$$V(t+dt) = V(t) + \int_S (\vec{n} \cdot \vec{F}dt)dS, \quad (2.3)$$

que podemos rearranjar aplicando o teorema do divergente na integral:

$$\frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{F}dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}dV. \quad (2.4)$$

Note que o sistema é conservativo se  $\frac{dV}{dt} = 0$ , ou seja, quando o divergente do campo vetorial  $\vec{F}$  for nulo. Desta maneira, a integral na Eq. (2.4) é nula independentemente do volume  $V$  escolhido. Por outro lado, o sistema é dissipativo quando  $\frac{dV}{dt} < 0$ , isto é,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ . Uma definição importante na dinâmica de sistemas dissipativos, é o conceito de atrator. Um atrator é um conjunto invariante no espaço de fases, para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. Em sistemas autônomos contínuos tridimensionais, pode-se ter os seguintes tipos de atratores ilustrados na Fig. 2.2 [16]:

1. **ponto de equilíbrio**, que corresponde a um ponto no espaço de fases para o qual o comportamento do sistema converge e independe do tempo. Na Fig. 2.2(a) esta representado o ponto de equilíbrio do sistema de Rössler;
2. **ciclo-limite ou atrator periódico**, que exibe um comportamento periódico no tempo (movimento regular), com amplitude e período determinados pela forma das equações diferenciais e pelos valores dos parâmetros. A Fig. 2.2(b) mostra o ciclo-limite do sistema de Rössler;
3. **atrator quase-periódico**, que descreve um comportamento quase-periódico com 2 frequências fundamentais, que sugere um cenário no qual trajetórias nunca se fecham sobre si mesmas, conforme representado pela Fig. 2.2(c), gerado por equações arbitrárias;

4. **atrator caótico**, que apresenta um comportamento aperiódico e uma dependência sensível às condições iniciais, que será tratado na próxima seção. Um sistema dinâmico dissipativo que apresenta esse tipo de atrator possui um comportamento caótico. A Fig. 2.2(d) mostra o atrator caótico de Lorenz.

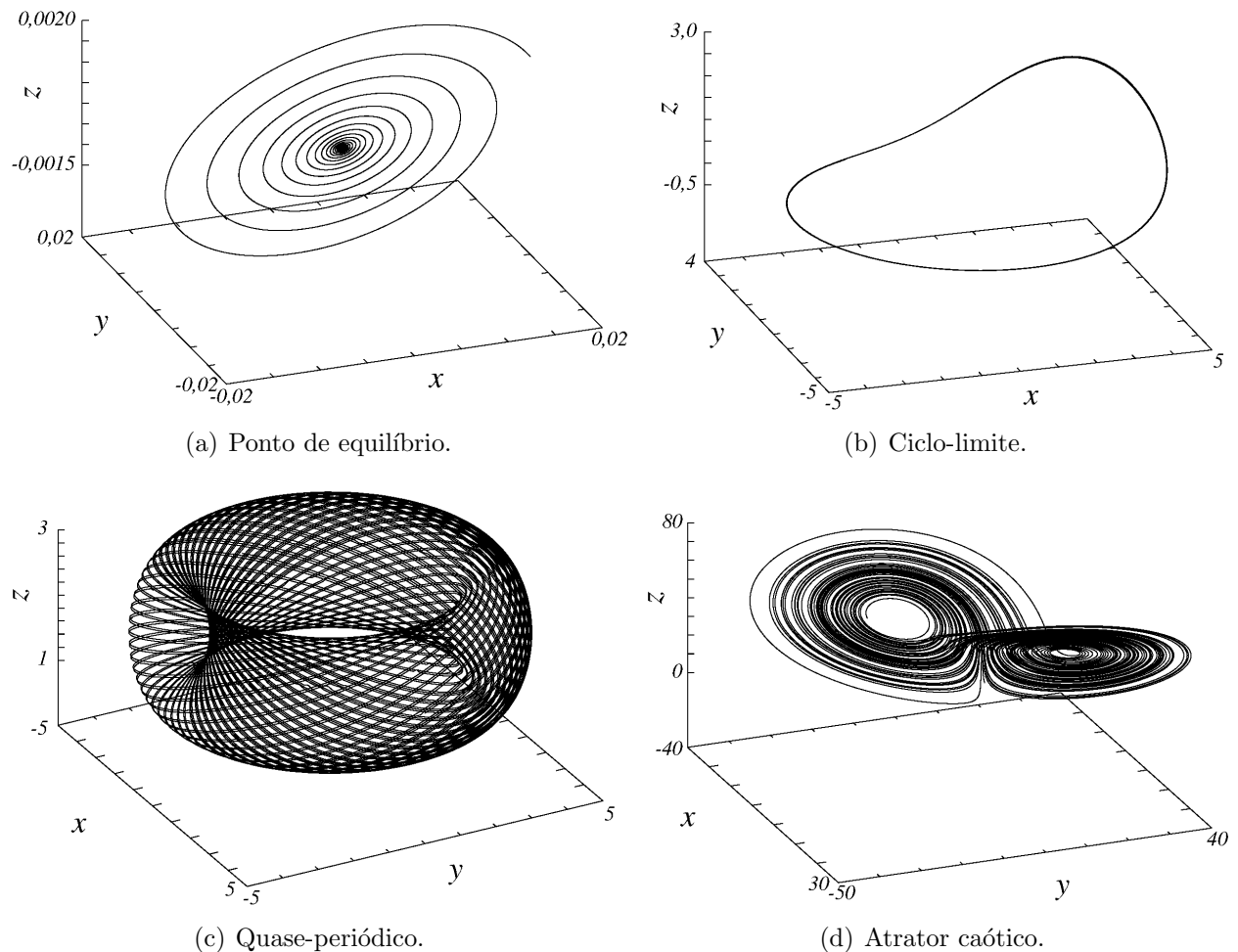


Figura 2.2: Possíveis atratores em sistemas dinâmicos contínuos dissipativos tridimensionais. As figuras (a) e (b) representam os atratores do sistema de Rössler com  $\alpha = 0$ , ponto de equilíbrio e  $\alpha = 0,25$ , ciclo-limite, respectivamente [24]. Na figura (c) está representado um atrator quase-periódico de um sistema arbitrário e na figura (d) o atrator caótico do sistema de Lorenz.

Para que em um sistema dinâmico autônomo dissipativo e de tempo contínuo apresente um comportamento caótico, é necessário que ele seja não-linear e, no mínimo, tridimensional, ou seja, um conjunto com três equações diferenciais. Para um sistema bidimensional, podemos escrever as duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem como uma única equação diferencial de segunda ordem, com isso o sistema não apresentaria um comportamento caótico. Nas próximas seções identificamos as ferramentas usualmente utilizadas para caracterizar o comportamento caótico em sistemas dinâmicos contínuos.

## 2.3 Caracterização da Dinâmica Caótica

Uma das principais características de um atrator cuja a dinâmica é caótica, é a dependência sensível às condições iniciais. Considere duas condições iniciais próximas,  $\vec{x}_1(0)$  e  $\vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \Delta(0)$ , sendo  $\Delta(0)$  uma variação infinitesimal nas condições iniciais, e imaginamos que elas evoluem no tempo por um sistema contínuo gerando órbitas  $\vec{x}_1(t)$  e  $\vec{x}_2(t)$  como mostrada na Fig. 2.3 [24].

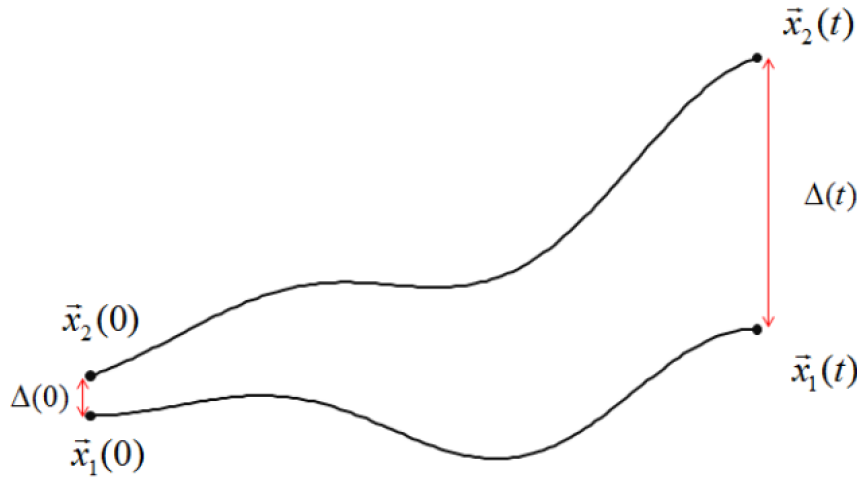


Figura 2.3: Órbitas esquemáticas  $\vec{x}_1(t)$  e  $\vec{x}_2(t)$  geradas evoluindo temporalmente o sistema a partir de duas condições iniciais próximas  $\vec{x}_1(0)$  e  $\vec{x}_2(0)$ .

No instante  $t > 0$ , a separação entre as duas órbitas é  $\Delta(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$ . Se, em média, o módulo da diferença entre as órbitas cresce exponencialmente com o tempo, ou seja, se  $|\Delta(t)| = |\Delta(0)|e^{\lambda t}$  com  $\lambda > 0$ , dizemos que o sistema apresenta dependência sensível às condições iniciais, logo, apresenta comportamento caótico [24]. Essa dependência sensível nas condições iniciais resulta das não-linearidades presentes no sistema, as quais amplificam exponencialmente pequenas diferenças nas condições iniciais. Uma maneira de quantificar esse afastamento de trajetórias e qualificar a caoticidade do sistema, é utilizando os expoentes de Lyapunov.

### 2.3.1 Expoentes de Lyapunov

Aqui nós calculamos o espectro de Lyapunov, porém usamos apenas o maior deles para cada ponto no espaço de parâmetros. Essa ferramenta provou ser o diagnóstico dinâmico mais útil para sistemas caóticos pois, qualquer sistema contínuo apresentando pelo menos um expoente de Lyapunov positivo é considerado caótico, com a magnitude do expoente refletindo a escala de tempo em que a dinâmica do sistema torna-se imprevisível [25]. Os expoentes de Lyapunov são as taxas exponenciais médias de afastamento ou aproximação de trajetórias próximas no espaço

de fases e são obtidos fazendo a análise do afastamento dessas trajetórias em cada direção do sistema, ou seja, para sistemas  $N$ -dimensionais temos  $N$  expoentes de Lyapunov, um para cada direção. Seja um sistema  $n$ -dimensional, ou seja,  $n$  equações diferenciais ordinárias. Considere uma hipersfera de condições iniciais centrada num ponto  $\vec{x}(t_0)$  [24]. Ao passar do tempo, esse volume se deforma conforme mostrado na Fig. 2.4.

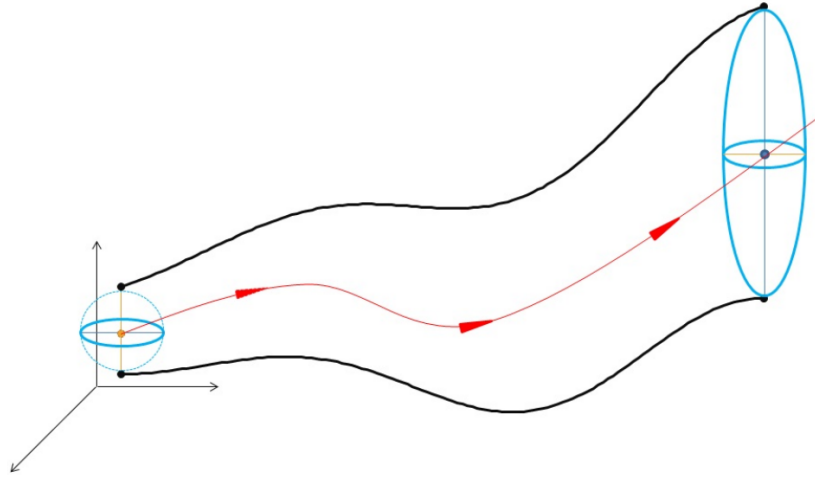


Figura 2.4: Ilustração da deformação do volume de uma hipersfera de condições iniciais ao evoluir o tempo.

Suponha que, ao longo da  $j$ -ésima direção ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), o raio inicial  $d_j(t_0)$  varie exponencialmente no tempo, de forma que a relação entre o raio inicial e o seu valor assumido num instante  $t > t_0$ , dado por  $d_j(t)$ , seja da forma

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (2.5)$$

que pode ser reescrita como

$$\lambda_j = \lim_{d_j(t_0) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t - t_0)} \ln \left( \frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right), \quad (2.6)$$

sendo os  $\lambda_j$  os expoentes de Lyapunov e o índice  $j$  representa a direção em questão. Assim, os expoentes de Lyapunov estão relacionados com a expansão ou contração de diferentes direções no espaço de fase. Uma vez que a orientação muda continuamente à medida que o sistema evolui, as direções associadas a um expoente variam de uma maneira complicada através do atrator [25]. Não se pode, portanto, falar de uma direção bem definida associada a um expoente.

Pode-se determinar o volume da hipersfera num instante  $t > t_0$ , que deve ser proporcional ao produto das distâncias  $d_j(t)$  que o caracterizam, isto é



$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t) = V(t_0) e^{(t-t_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (2.7)$$

sendo  $V(t_0)$  o volume no instante  $t_0$ . Para um sistema conservativo, onde o volume do espaço de fases é conservado, ou seja,  $V(t) = V(t_0)$ , temos que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0. \quad (2.8)$$

Se o sistema é dissipativo, o volume do espaço de fases sofre uma contração, ou seja,  $V(t) < V(t_0)$  para  $t > t_0$ , que equivale a escrever

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j < 0. \quad (2.9)$$

Numa órbita periódica fechada, a distância entre duas condições iniciais se mantém em média constante ao passar do tempo, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares a um atrator periódico, o volume do espaço de fases sofre uma contração, logo os expoentes de Lyapunov correspondentes a essa direção são negativos. O comportamento caótico é caracterizado pelo afastamento exponencial de trajetórias vizinhas, o que implica dependência sensível às condições iniciais e a existência de um atrator caótico. Nesse caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo [16].

Nesse trabalho, vamos calcular o espectro de Lyapunov porque a partir desse podemos classificar os diferentes tipos de atratores. Num sistema tridimensional, como no circuito de Chua, existem três expoentes de Lyapunov, um para cada direção que podem gerar até quatro tipos de atratores, conforme mencionado na Seção 2.2:

- **ponto de equilíbrio:** tem-se  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 < 0$ , pois o volume do espaço de fases sofre uma contração ao longo das três direções, a fim de que a trajetória convirja para o ponto;
- **ciclo-limite ou atrator periódico:** tem-se  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 = 0$ , sendo que o expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória fechada;
- **atrator quase-periódico:** tem-se  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 0$ , de modo que as trajetórias atratoras situam-se sobre uma superfície;

- **atrator caótico:** tem-se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 < 0$ , um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensível às condições iniciais; ao longo da trajetória o expoente de Lyapunov tem que ser nulo; o terceiro deve ser negativo e maior, em módulo, do que o primeiro, para que o sistema seja dissipativo, isto é,  $\sum \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_3 < 0$ .

## 2.4 Espaço de Parâmetros

Todo sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de parâmetros. São chamados de parâmetros de controle do sistema, tal que um sistema pode ser pensado como uma função desses parâmetros. Com isso, alterando o valor destes, podemos modificar o comportamento dinâmico do sistema. O plano de parâmetros é um gráfico tridimensional, onde a representação bidimensional equivale a variação de quaisquer dois parâmetros que compõem o sistema, associado à magnitude do maior valor do expoente de Lyapunov utilizando um gradiente de cores para representar o seu valor em relação ao par de parâmetros escolhidos [26]. Esta variação de cores associadas ao maior expoente de Lyapunov permite verificar onde o sistema apresenta regiões de equilíbrio, regiões periódicas, regiões de divergência e as regiões caóticas. Na Fig. 2.5 esta representada o plano de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua original. A paleta de cores esta associada aos valores dos expoentes de Lyapunov, sendo a cor azul para região de divergência, a cor branca representa atratores tipo ponto de equilíbrio, preta para regiões periódicas e o gradiente de amarelo para vermelho, onde estão localizados os maiores expoentes de Lyapunov, o regime caótico apresentado no sistema.

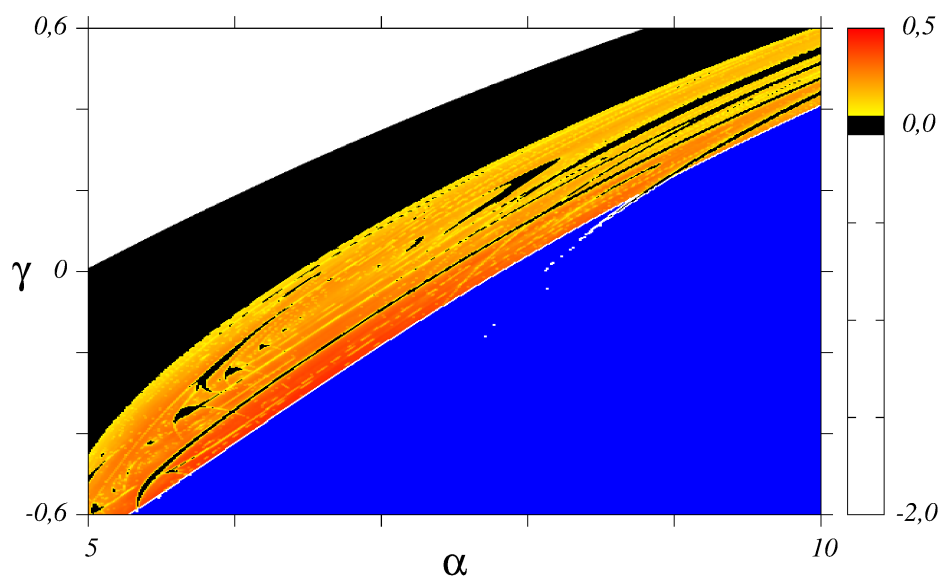


Figura 2.5: Plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua. As cores representam o valor do maior expoente de Lyapunov, sendo a cor azul para divergência, branco para pontos de equilíbrio, preto para comportamentos periódicos e o gradiente do amarelo para o vermelho domínios caóticos.

Para facilitar o estudo dos espaços de parâmetros, variamos dois parâmetros e fixamos os demais. Resolvemos numericamente o conjunto de equações diferenciais obtidos a partir do circuito de Chua, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo de  $1 \times 10^{-2}$  e um tempo de integração de  $2 \times 10^6$ , em uma malha discretizada de  $600 \times 600$  pontos igualmente espaçados. Estes resultados se encontram no Cap. 4.

### 2.4.1 Diagramas de *Isospikes*

Além de caracterizar a dinâmica do cChua com o espectro de Lyapunov, usamos também os diagramas de *isospikes*, que representam o número de picos máximos contidos em um período de oscilações regulares para cada ponto do plano de parâmetros. Essa abordagem além de exibir as mesmas informações fornecidas pelo diagrama de Lyapunov, os diagramas de *isospikes* apresentam duas informações adicionais conforme apresentados em [26, 27, 28]: Em primeiro lugar, suas cores exibem o número de picos contidos em cada oscilação periódica, como exemplificado na Fig. 2.6 em que as regiões coloridas ilustram a forma e a extensão características das oscilações estáveis no cChua original, com um número constante de picos. Em segundo lugar, os limites entre distintos domínios periódicos, permitem visualizar como o número de picos das oscilações periódicas evoluem quando os parâmetros de controle são alterados. Em outras palavras, os diagramas de *isospikes* exibem o acúmulo sistemático do número de picos, isto é, quão rápido e onde no espaço de parâmetros do sistema o número mínimo de picos se acumula [27].

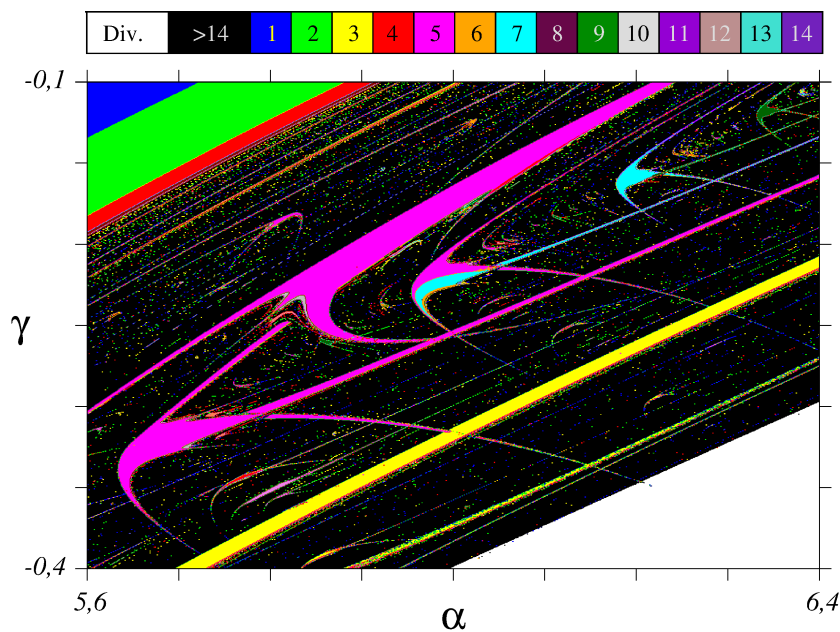


Figura 2.6: Diagrama de *isospikes* ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua. As cores representam o número de máximos locais contidos em um período das órbitas, sendo a cor branca para divergência e preto para comportamentos caóticos ou períodos maiores que 14.

Determinamos a periodicidade do atrator assintótico correspondente a cada condição inicial, para um conjunto de valores fixos de parâmetros da seguinte forma: Primeiro, descartamos um tempo transitório (transiente) necessário para chegar perto o suficiente do atrator assintótico correspondente à condição inicial usada [28]. Com isso, determinamos se a órbita é periódica, levando em conta a contagem de períodos até um valor máximo, por exemplo, um ponto  $(x^*, y^*)$  é considerado pertencendo a uma órbita de período  $k$ , se  $k$  for o menor inteiro tal que, para todos os pontos da órbita, tivermos,

$$\|\mathbf{x}_{t+k} - \mathbf{x}_t\| < \epsilon_d \quad (2.10)$$

sendo  $\epsilon_d$  um número pequeno que representa a precisão numérica do teste [28]. Logo, determinamos os períodos das estruturas periódicas no plano de parâmetros do cChua forçado, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Discretizamos uma malha quadrada  $400 \times 400$  e integramos o sistema com passo fixo de  $2 \times 10^{-4}$  e um tempo de integração de  $1 \times 10^6$ , descartando um transiente de  $1 \times 10^7$  para encontrar os períodos com uma precisão de  $5 \times 10^{-4}$ , que será apresentado no Cap. 4, referente aos resultados numéricos.

Na seção seguinte mostramos os diagramas de bifurcações, embora neste trabalho não foram caracterizados, achamos interessante evidenciar as diferentes bifurcações que podem aparecer em um sistema contínuo, como no cChua.

## 2.4.2 Diagramas de Bifurcações

Um diagrama de bifurcação é a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas para cada valor de um determinado parâmetro, é construído evoluindo uma das variáveis em função de um parâmetro de controle. São utilizadas para estudar de maneira global a periodicidade e investigar os tipos de rotas para o caos existentes no sistema. Em outras palavras, os diagramas de bifurcação ilustram como a dinâmica de um sistema muda quando variamos um parâmetro de controle [29, 30].

Em sistemas dinâmicos contínuos, a estrutura qualitativa do fluxo pode mudar ao variar alguns parâmetros. Em particular, pontos de equilíbrio podem ser criados ou destruídos, ou alterar sua estabilidade. Estas mudanças qualitativas na dinâmica são chamadas bifurcações e os valores dos parâmetros no qual elas ocorrem são chamados pontos de bifurcações. Em outras palavras, bifurcação é uma mudança do tipo topológica do sistema quando seus parâmetros passam por um valor crítico [15].

Existem quatro tipos de bifurcação em sistemas dinâmicos contínuos tridimensionais, ao qual pontos de equilíbrios podem ser criados ou destruídos, ou ter sua estabilidade alterada ao variar um ou mais parâmetros. São identificadas na referência [16] a partir da análise dos autovalores da matriz jacobiana do sistema:

1. **Bifurcação sela-nó:** É o mecanismo básico de criação e destruição de pontos de equilíbrio, também chamada de bifurcação de dobra, ponto limite ou ponto de retorno. Este tipo de bifurcação aparece quando um autovalor da matriz jacobiana é nula, isto é,  $\lambda = 0$ .
2. **Bifurcação transcritical:** Há situações em que dois pontos de equilíbrio existem para todos os valores de um parâmetro, embora as estabilidades desses pontos sejam trocadas quando o parâmetro passa por um valor crítico. Esta bifurcação é o mecanismo associado a esse tipo de mudança.
3. **Bifurcação de forquilha:** Essa bifurcação aparece em sistemas que apresentam algum tipo de simetria. Em tais sistemas, um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade pode aparecer ou desaparecer simultaneamente, quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico.
4. **Bifurcação de Hopf:** É uma bifurcação que liga equilíbrio a movimento periódico. Implica no surgimento de um ciclo limite apresentando duas formas, subcrítica ou supercrítica. Essa bifurcação é caracterizada pela existência de um par de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação.

A diferença entre as bifurcações discutidas anteriormente e a bifurcação de Hopf é que, para os primeiros casos todos os ramos obtidos representam equilíbrio. Por sua vez, na bifurcação de Hopf o sistema antes representado por um equilíbrio passa a ser por um ciclo-limite onde as oscilações são regulares, logo esta bifurcação liga equilíbrio a movimento periódico. Um ciclo limite gerado por uma bifurcação de Hopf pode crescer variando adequadamente os parâmetros do sistema. Esses ciclos podem gerar bifurcações de codimensão 1 (codimensão é o número de parâmetros cujos valores são variados a fim de se produzir a bifurcação em estudo), por exemplo a bifurcação de dobramento de período, como identificadas na referência [16].

A partir de agora entraremos no problema em questão estudado, mostrando os resultados obtidos. Primeiramente ilustramos o circuito de Chua, em seguida identificamos a modificação (forçamento) proposta nesse trabalho e mostramos os resultados analíticos obtidos para os pontos de equilíbrio, usando uma aproximação linear para o forçamento.

## Capítulo 3

# O CIRCUITO DE CHUA FORÇADO

Um dos sistemas dinâmicos amplamente investigados é o circuito de Chua (cChua). O cChua foi projetado em 1983 por Leon O. Chua baseado em um circuito eletrônico  $RLC$ , construído originalmente para mostrar que o caos modelado pelas equações de Lorenz é realmente um fenômeno físico e não um resultado devido a simulação numérica. Na década de 1980 havia uma intensa busca para tentar montar um circuito caótico que apresentasse evidências experimentais de comportamentos caóticos [18]. O raciocínio de Leon O. Chua foi que para a existência de comportamentos caóticos em sistemas tridimensionais é necessário pelo menos dois pontos de equilíbrio instável, como acontece nos sistemas de Lorenz e Rössler [2], com isso, ele projetou um circuito autônomo, experimentalmente possível, com três pontos de equilíbrio instável formado por dois capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , um resistor  $R$ , um indutor  $L$  com uma resistência interna  $r_L$  e um diodo de Chua [17], conforme mostrado na Fig. 3.1.

Por definição um sistema dinâmico é dito autônomo quando seu conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não dependem explicitamente do tempo. Para este tipo de sistema dinâmico apresentar comportamento caótico é necessário um conjunto com no mínimo três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou seja, o sistema tem que ter dimensão no mínimo igual a três. Sabendo disso, Chua implementou três elementos de armazenamento de energia, uma resistência não-linear e uma resistência com valor já definido. A não-linearidade do circuito está presente no diodo de Chua [17]. A Fig. 3.1 ilustra o esquema elétrico do cChua, sendo as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , as diferenças de potencial nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  e a corrente que passa no indutor  $L$  respectivamente, e  $i_d(x)$  a corrente no diodo de Chua [3, 4, 6].

### 3.1 O Circuito de Chua

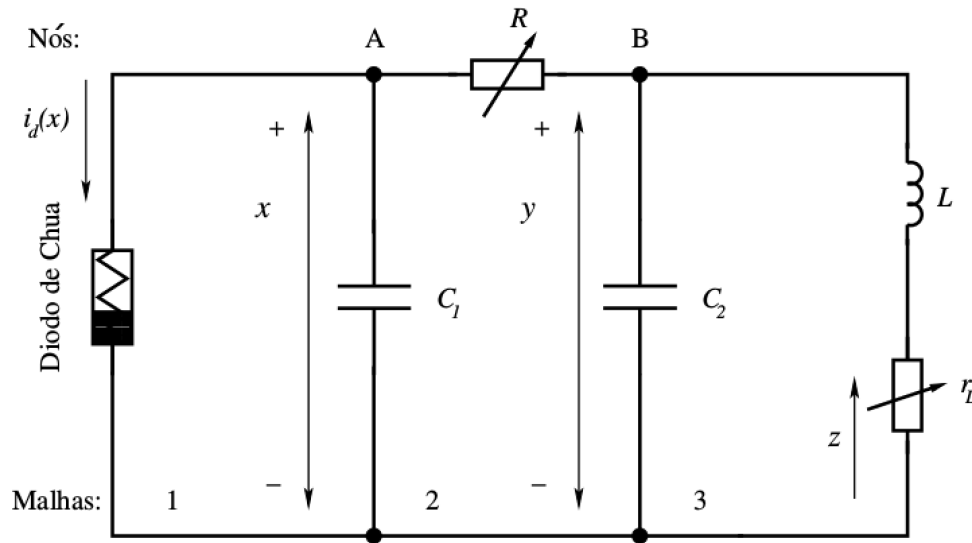


Figura 3.1: Representação esquemática do circuito  $RLC$  caótico de Chua, formado por três malhas (1, 2 e 3) e dois nós (A e B), contendo um resistor  $R$ , dois capacitores  $C_1$ ,  $C_2$  e um indutor  $L$  com uma resistência interna  $r_L$ . As variáveis  $x$  e  $y$  correspondem as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente e a variável  $z$  a corrente que atravessa o indutor.

Para entendermos melhor o funcionamento do cChua, podemos estudar cada malha separadamente de forma isolada. Na malha 3 imagine que  $C_2$  esteja carregado, essas cargas elétricas armazenadas em  $C_2$  circulam pelo indutor  $L$ . Essa corrente gera uma diferença de potencial entre os terminais de  $L$ , gerando assim uma corrente contrária a corrente inicial até anulá-la. Com isso, a corrente inverte seu sentido passando a carregar novamente o capacitor. Esse processo é, então, periódico gerando um sinal oscilatório. Suponha agora que na malha 1,  $C_1$  tenha uma pequena carga (pouco carregado), de modo que a tensão sobre ele seja levemente positiva, isso acarreta em uma tensão também positiva no diodo de Chua, implicando em uma resposta com uma corrente  $i_d(x)$  negativa. Assim, essa corrente alimentará o capacitor que aumentará sua tensão. Uma diferença de potencial maior em  $C_1$  gera uma corrente  $i_d(x)$  negativa também maior. Não existindo um mecanismo que dissipe energia, esse sistema isolado tende a saturação, ou seja, a um limite máximo de energia. A função do resistor  $R$  é proporcionar um acoplamento entre essas duas malhas. O comportamento caótico ocorre pois o funcionamento periódico não depende somente do capacitor  $C_2$  e do indutor  $L$ , mas sim do conjunto das malhas 1 e 3, e o resistor  $R$ . Se este conjunto mostrar instabilidade, temos o comportamento caótico proposto pelo Chua.

Neste trabalho propomos a adição de uma função periódica e assimétrica  $F(x)$  em série com o indutor, como mostra a Fig. 3.2, e verificarmos como esse forçamento modifica a dinâmica do cChua original. Para isso, estudamos a consequência deste forçamento no cChua através de um análise numérica e analítica. A função  $F(x)$  é definida como:

$$F(x) = K [\sin(x) + A \cos(2x)], \quad (3.1)$$

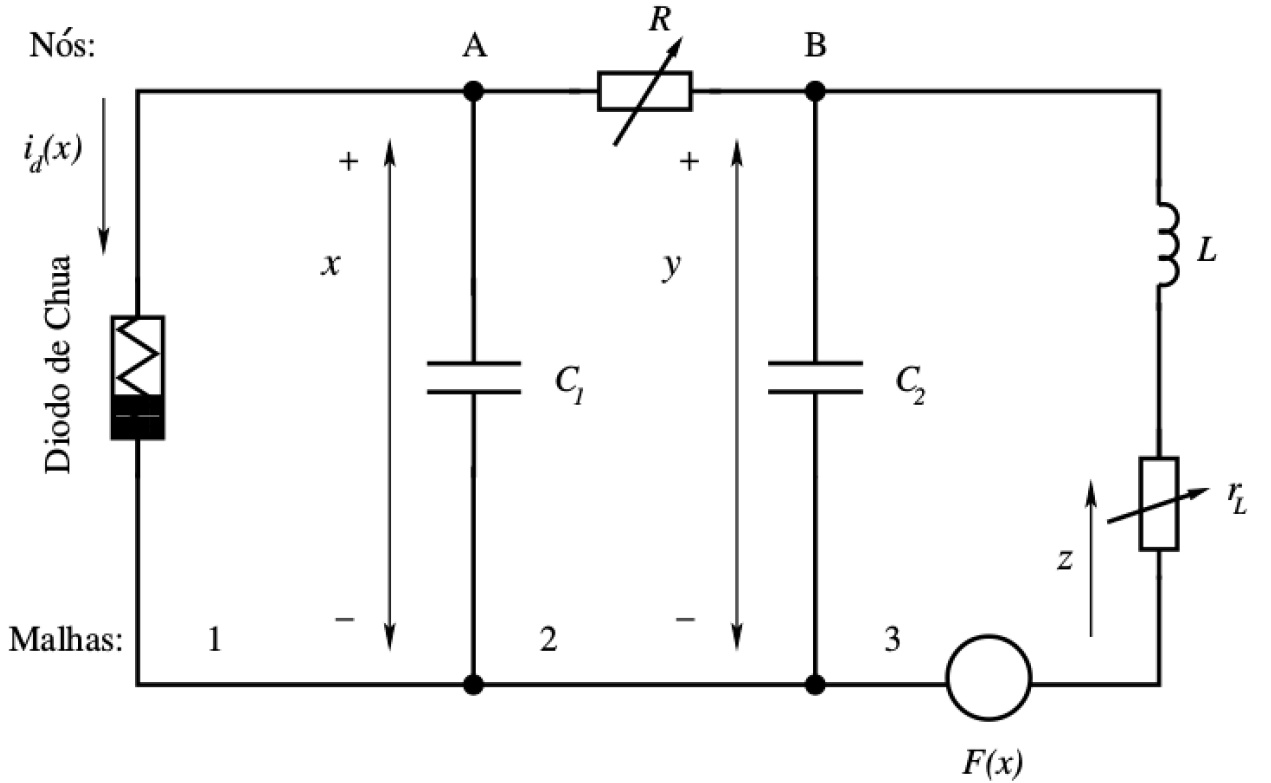


Figura 3.2: Representação do circuito  $RLC$  caótico de Chua forçado, contendo um resistor  $R$ , dois capacitores  $C_1$ ,  $C_2$  e um indutor  $L$  com uma resistência interna  $r_L$  em série com o forçamento  $F(x)$ . As variáveis  $x$  e  $y$  correspondem as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente e a variável  $z$  a corrente que atravessa o indutor.

sendo  $K$  a amplitude da realimentação,  $A$  a amplitude da parte assimétrica e  $x$  a diferença de potencial no capacitor  $C_1$ . Esta função é periódica pois, existe um número real  $T$ , que é o período da função, tal que  $F(x + T) = F(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , assimétrica em relação ao eixo da abcissa, isto é, seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $G(x, F(x))$  o gráfico de  $F$  no plano, temos  $G(x, -F(x)) \neq G(x + t, F(x + t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  e em relação ao eixo da ordenada,  $F(x) \neq F(-x)$ . A Fig 3.3, mostra as configurações desta função para  $K = 1,0$  e diferentes valores de  $A$  e demonstra como a parte assimétrica acentua-se para pequenas variações de  $A$ .



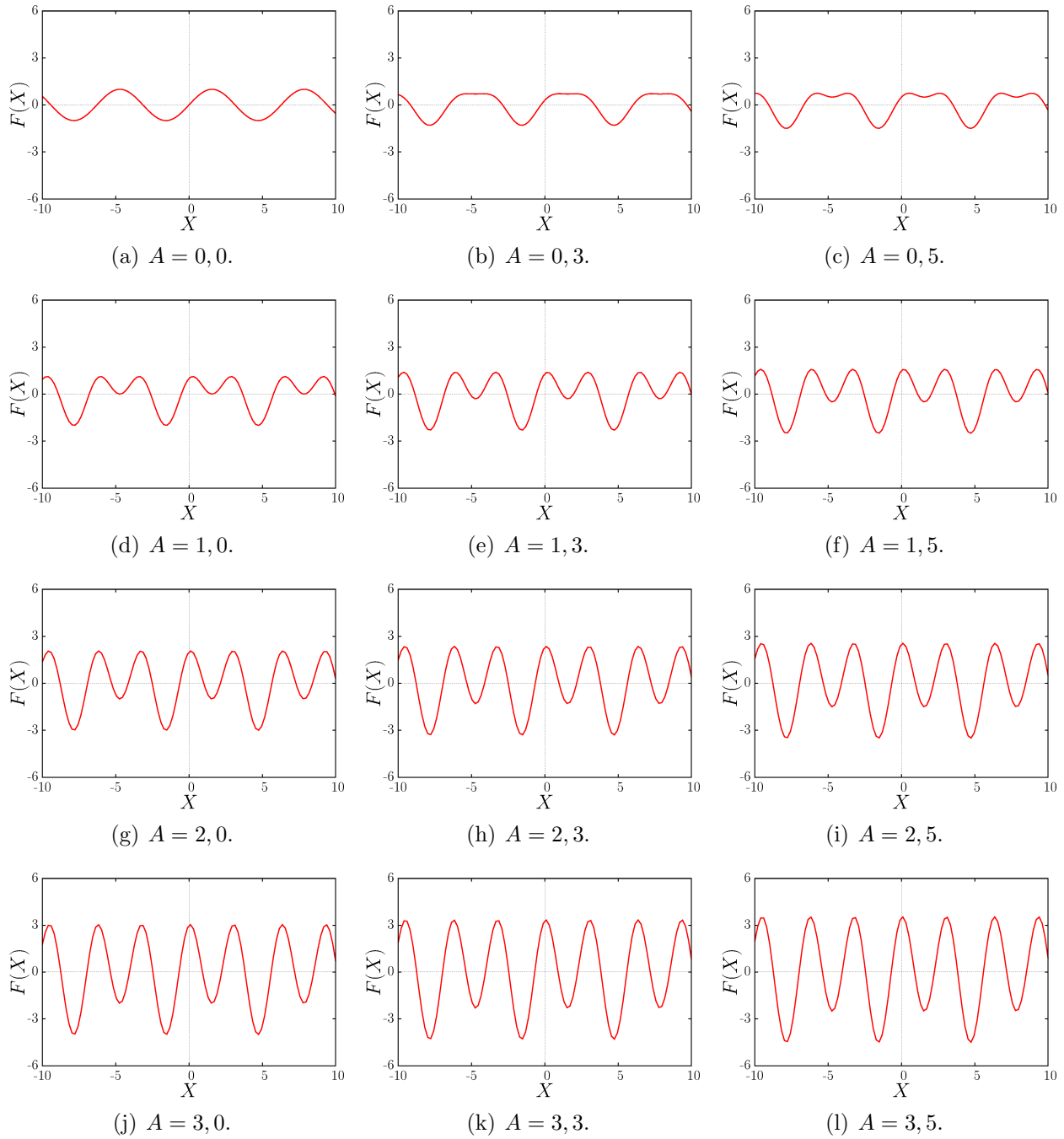


Figura 3.3: Gráficos  $x \times F(x)$ , fixando  $K = 1, 0$  e variando o parâmetro  $A$  gradativamente. Nesta figura nota-se como a parte assimétrica do forçamento  $F(x)$  acentua-se conforme aumentamos o valor do parâmetro  $A$ .

A corrente  $i_d(x)$  é uma função das características elétricas do diodo de Chua. A Fig. 3.4 apresenta as três regiões lineares, R1, R2 e R3, que a corrente  $i_d(x)$  possui: duas externas com o mesmo coeficiente angular  $m_0$  e uma central com inclinação mais acentuada  $m_1$ . Os parâmetros  $m_0$  e  $m_1$  possuem dimensão de admitância (inverso de resistência) e  $B_p$  refere-se à mudança da inclinação da curva  $i_d(x)$  e tem dimensão de tensão, conforme definido abaixo:

$$i_d(x) = m_0x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x + B_p| - |x - B_p|). \quad (3.2)$$

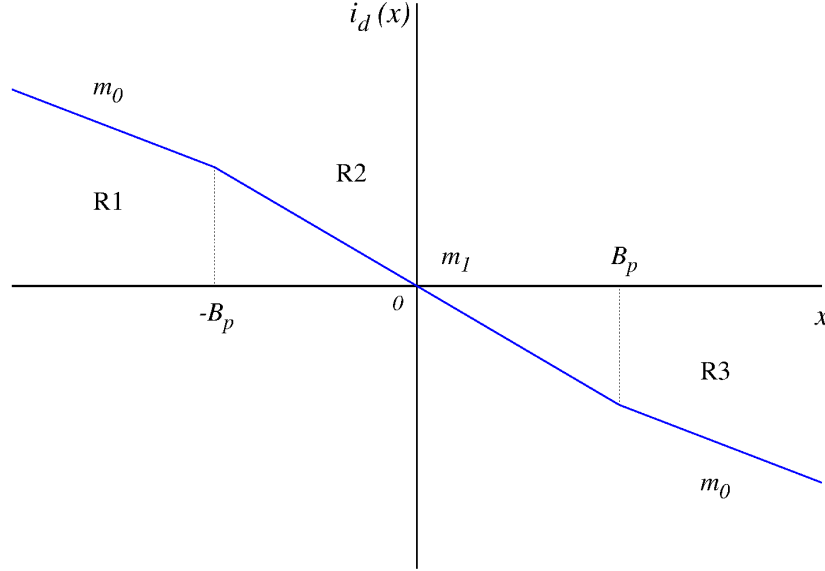


Figura 3.4: Gráfico  $x \times i_d(x)$ . Esta figura evidencia as três regiões (R1, R2 e R3) lineares da Eq. (3.2). Os parâmetros  $m_0$  e  $m_1$ , que são os coeficientes angulares, tem dimensão de admitância e o parâmetro  $B_p$ , onde a inclinação muda, tem dimensão de tensão.

Conforme discutimos brevemente acima, o principal objetivo deste estudo é caracterizar as implicações na dinâmica do cChua devido à presença de um forçamento  $F(x)$ , dado pela Eq. (3.1), em série com o indutor  $L$ . Para isso, realizamos várias simulações numéricas com o cálculo do espectro de Lyapunov, que caracteriza os domínios caóticos e periódicos, além do cálculo dos *isospikes* usado para estimar o número de máximos locais em um período das órbitas. Maiores detalhes sobre estas medidas serão apresentados em detalhes no Cap. 4. Além disso, realizamos também um breve estudo analítico sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio do cChua forçado. Através destas análises, mostramos como determinados comportamentos periódicos do cChua original são suprimidos devido ao forçamento periódico e assimétrico.

## 3.2 Resultados Analíticos

O sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica do cChua forçado é obtido através das leis de Kirchhoff, analisando as tensões e as correntes nas malhas 2 e 3, e nos nós A e B da Fig. 3.2. A diferença de potencial no indutor é diretamente proporcional a taxa de variação da corrente, com a constante de proporcionalidade definida como a indutância  $L$ , e a corrente em um capacitor é proporcional a taxa de variação da tensão, cuja constante de

proporcionalidade definida como a capacitância  $C$ , de tal forma que:

$$V_L = -L \frac{dz}{dt}, \quad i_C = C \frac{dV_C}{dt}. \quad (3.3)$$

Sabendo disto e aplicando a lei dos nós em A e B, obtemos,

$$i_R - i_{C_1} - i_d(x) = 0 \Rightarrow i_{C_1} = i_R - i_d(x) \Rightarrow C_1 \frac{dx}{dt} = i_R - i_d(x), \quad (3.4)$$

$$z - i_{C_2} - i_R = 0 \Rightarrow i_{C_2} = z - i_R \Rightarrow C_2 \frac{dy}{dt} = z - i_R, \quad (3.5)$$

e aplicando a lei das malhas em 2 e 3, podemos identificar a corrente que passa no resistor  $R$  tal que,

$$y - V_R - x = 0 \Rightarrow y - i_R R - x = 0 \Rightarrow i_R = \frac{y - x}{R}, \quad (3.6)$$

$$y - V_L + V_{r_L} + F(x) = 0 \Rightarrow -L \frac{dz}{dt} = V_{r_L} + y + F(x). \quad (3.7)$$

Com isso, encontramos o conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas, que descreve a dinâmica do sistema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{(y - x)}{RC_1} - \frac{i_d(x)}{C_1}, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{(x - y)}{RC_2} + \frac{z}{C_2}, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -\frac{y}{L} - z \left( \frac{r_L}{L} \right) - \frac{F(x)}{L}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Fazendo  $K \rightarrow 0$ , voltamos para o cChua original sem a realimentação [3, 4, 5, 6, 9]. Este conjunto de equações diferenciais pode ainda ser simplificado e adimensionalizado a partir da escolha conveniente de variáveis paramétricas, que permitem a redução do número de parâmetros envolvidos sem mudar o comportamento da dinâmica do sistema. Nessa situação, as variáveis de estado  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são obtidas medindo apenas as tensões nos capacitores e no indutor [11],

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x}{B_p}, \quad Y = \frac{y}{B_p}, \quad Z = \frac{z}{B_p} R, \\
\alpha &= \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, \quad \gamma = \frac{R r_L C_2}{L},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$T = \frac{t}{RC_2}, \quad I(X) = \frac{i_d(x)}{B_p} R, \quad a = Rm_1 \quad \text{e} \quad b = Rm_0.$$

Aplicando essas transformações nas Eqs. (3.1) e (3.2) no conjunto de Eqs. (3.8), conseguimos diminuir o número de parâmetros que antes eram dez ( $R, C_1, C_2, L, r_L, m_0, m_1, K, A$  e  $B_p$ ) para oito ( $\alpha, \beta, \gamma, a, b, K, A$  e  $B_p$ ). Chegamos nas seguintes relações para as variáveis adimensionais do sistema, o forçamento  $F(x)$  e para a função  $I(X)$  linear por partes,

$$I(X) = \frac{Rm_0 x}{B_p} + \frac{R}{2B_p} (m_1 - m_0) (|B_p X + B_p| - |B_p X - B_p|), \tag{3.10}$$

$$I(X) = Rm_0 X + \frac{R}{2B_p} (m_1 - m_0) B_p (|X + 1| - |X - 1|), \tag{3.11}$$

$$I(X) = bX + \frac{1}{2} (a - b) (|X + 1| - |X - 1|), \tag{3.12}$$

no forçamento  $F(x)$ ,

$$F(X) = K [\sin(X B_p) + A \cos(2X B_p)], \tag{3.13}$$

e em  $\dot{x}$ ,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{B_p \dot{X}}{RC_2} = \frac{B_p (Y - X)}{RC_1} - \frac{i_d(x)}{C_1}, \tag{3.14}$$

$$\dot{X} = \frac{C_2}{C_1} \left[ (Y - X) - \frac{R}{B_p} i_d(x) \right], \tag{3.15}$$

$$\dot{X} = \alpha [Y - X - I(X)], \tag{3.16}$$

e em  $\dot{y}$ ,

$$\dot{y} = \frac{dy}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{B_p \dot{Y}}{RC_2} = \frac{B_p(X - Y)}{RC_2} + \frac{B_p Z}{RC_2}, \quad (3.17)$$

$$\dot{Y} = X - Y + Z, \quad (3.18)$$

e em  $\dot{z}$ ,

$$\dot{z} = \frac{dz}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{B_p \dot{Z}}{R^2 C_2} = -\frac{B_p Y}{L} - \frac{B_p Z r_L}{RL} - \frac{F(X)}{L}, \quad (3.19)$$

$$\dot{Z} = -\frac{R^2 C_2 Y}{L} - \frac{R r_L C_2 Z}{L} - \frac{R^2 C_2}{B_p L} F(X), \quad (3.20)$$

$$\dot{Z} = -\beta Y - \gamma Z - \left( \frac{\beta}{B_p} \right) F(X). \quad (3.21)$$

As Eqs. (3.16), (3.18) e (3.21), formam o conjunto de equações diferenciais autônomas e adimensionais de primeira ordem, que descreve o comportamento da dinâmica do cChua forçado,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \frac{dX}{dT} = \alpha [Y - X - I(X)], \\ \dot{Y} = \frac{dY}{dT} = X - Y + Z, \\ \dot{Z} = \frac{dZ}{dT} = -\beta Y - \gamma Z - \left( \frac{\beta}{B_p} \right) F(X), \end{array} \right. \quad (3.22)$$

com,

$$I(X) = \left\{ \begin{array}{ll} bX + a - b, & \text{se } X \geq 1, 0 \quad (\text{Região R1}), \\ aX, & \text{se } |X| < 1, 0 \quad (\text{Região R2}), \\ bX - a + b, & \text{se } X \leq -1, 0 \quad (\text{Região R3}). \end{array} \right. \quad (3.23)$$

O conjunto de Eqs. (3.22) junto com as Eqs. (3.13) e (3.23), foram utilizados nas simulações numéricas para os cálculos dos espectros de Lyapunov e diagramas de isospikes, apresentados no Cap. 4. Além disso, usamos estes para encontrar e analisar a estabilidade dos pontos de

equilíbrio do sistema, utilizando o critério de Routh-Hurwitz mostrado na Seção 3.2.2.

### 3.2.1 Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio são calculados fazendo o conjunto de Eqs. (3.22) ser nulo. Esses pontos representam as soluções estacionárias, isto é, quando os valores de  $\vec{w}$  forem iguais aos pontos de equilíbrio, o sistema pára de se mover no espaço de fases, e logo  $d\vec{w}/dt = 0$ . Para a análise da estabilidade destes pontos de equilíbrio, expandimos em série de Taylor a Eq. (3.13) e, para facilitar as contas, só usamos o primeiro termo da expansão, ou seja, para  $j = 0$ . Assim, conseguimos isolar as variáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e calcular os pontos de equilíbrio para as regiões delimitada pela Eq. (3.23) e, com isso, fazer o estudo da estabilidade do sistema para as regiões R1, R2 e R3,

$$F(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{(-4)^j K A X^{2j}}{(2j!)} + \frac{(-1)^j [B_p K X (B_p X)^{2j}]}{(1 + 2j!)} \right], \quad (3.24)$$

que para  $j = 0$  temos:

$$F(X) = K(A + B_p X). \quad (3.25)$$

Fazendo  $\dot{X} = 0$  e  $\alpha \neq 0$  no conjunto de Eqs. (3.22), teremos:

$$Y - X - I(X) = 0 \Rightarrow Y = X + I(X), \quad (3.26)$$

com  $\dot{Y} = 0$  e usando a Eq. (3.26),

$$X - Y + Z = 0 \Rightarrow Z = I(X), \quad (3.27)$$

e com  $\dot{Z} = 0$  e usando as Eqs. (3.26) e (3.27),

$$-Y\beta - Z\gamma - \frac{\beta}{B_p} K(A + B_p X) = 0 \Rightarrow X = \frac{-\beta K A - I(X) B_p (\beta + \gamma)}{B_p \beta (1 + K)}. \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.26), obtemos os pontos de equilíbrio do sistema em função da corrente  $I(X)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{-\beta K A - I(X) B_p (\beta + \gamma)}{B_p \beta (1 + K)}, \\ Y = \frac{-\beta K A - I(X) B_p (\gamma - \beta K)}{B_p \beta (1 + K)}, \\ Z = I(X). \end{array} \right. \quad (3.29)$$

A análise da estabilidade foi feita para cada região delimitada pela Eq. (3.23) utilizando a matriz jacobiana do conjunto de Eqs. (3.22), que será então dada por [16]:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \dot{Z}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \left(1 + \frac{dI}{dX}\right) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -\beta K & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

sendo que, o termo  $\frac{dI}{dX}$  obtemos derivando a Eq. (3.23),

$$\frac{dI}{dX} = \begin{cases} b, & \text{se } X \geq 1, 0 \quad (\text{Região R1}), \\ a, & \text{se } |X| < 1, 0 \quad (\text{Região R2}), \\ b, & \text{se } X \leq -1, 0 \quad (\text{Região R3}). \end{cases} \quad (3.31)$$

Para isso, obtemos os três pontos de equilíbrio, um para cada região delimitada pela Eq. (3.23). Assim conseguimos isolar as três variáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do sistema:

para a região R1 temos  $I(X) = bX + a - b$ , o ponto de equilíbrio ficam,

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{-\beta K A - B_p(a - b)(\beta + \gamma)}{B_p[\beta + K\beta + b\beta + b\gamma]}, \\ Y = \frac{-\beta K A(1 + b) - B_p(a - b)(\gamma - K\beta)}{B_p[\beta + K\beta + b\beta + b\gamma]}, \\ Z = \frac{-\beta K A b + B_p\beta(a - b)(1 + K)}{B_p[\beta + K\beta + b\beta + b\gamma]}, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

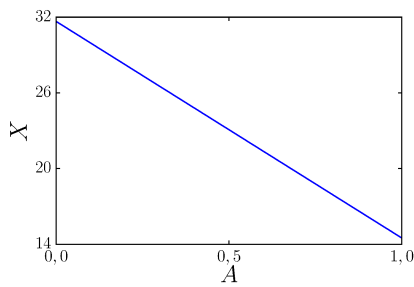
para a região R2 temos  $I(X) = aX$ , ficamos com,

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{-\beta K A}{B_p[\beta + K\beta + a\beta + a\gamma]}, \\ Y = \frac{-\beta K A(1 + a)}{B_p[\beta + K\beta + a\beta + a\gamma]}, \\ Z = \frac{-\beta K A a}{B_p[\beta + K\beta + a\beta + a\gamma]}, \end{array} \right. \quad (3.33)$$

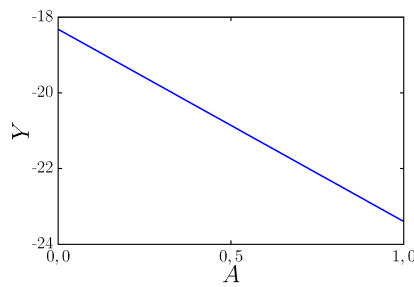
e para a região R3 temos  $I(X) = bX - a + b$ , o ponto de equilíbrio ficam,

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{-\beta K A + B_p(a - b)(\beta + \gamma)}{B_p[\beta + K\beta + b\beta + b\gamma]}, \\ Y = \frac{-\beta K A(1 + b) + B_p(a - b)(\gamma - K\beta)}{B_p[\beta + K\beta + b\beta + b\gamma]}, \\ Z = \frac{-\beta K A b - B_p\beta(a - b)(1 + K)}{B_p[\beta + K\beta + b\beta + b\gamma]}. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

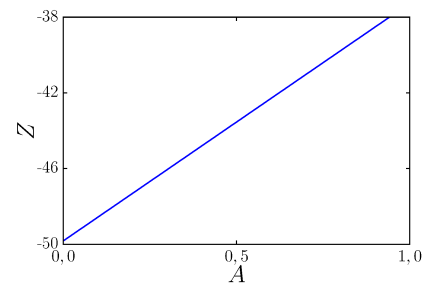
Geramos os gráficos de cada ponto de equilíbrio para as três regiões, conforme mostrado nas Figs. 3.5 e 3.6 variando os parâmetros  $K$  e  $A$  respectivamente, visando identificar como esses pontos são caracterizados variando os mesmos separadamente em um intervalo  $[0,1]$ .



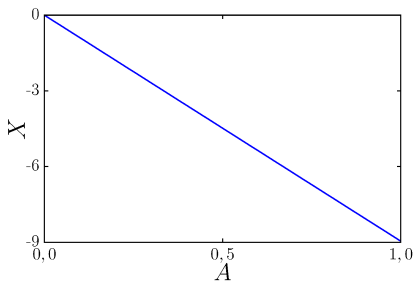
(a) Variável  $X$  na região R1.



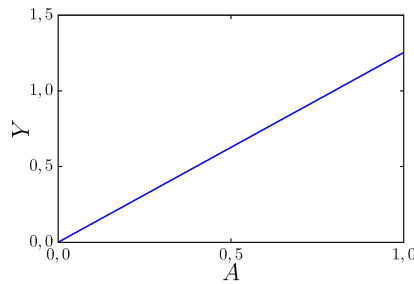
(b) Variável  $Y$  na região R1.



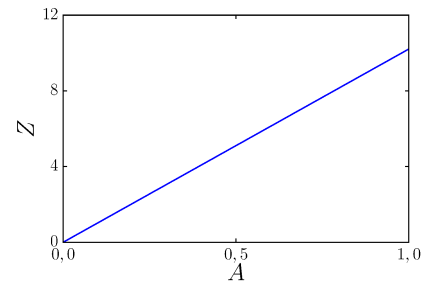
(c) Variável  $Z$  na região R1.



(d) Variável  $X$  na região R2.



(e) Variável  $Y$  na região R2.



(f) Variável  $Z$  na região R2.



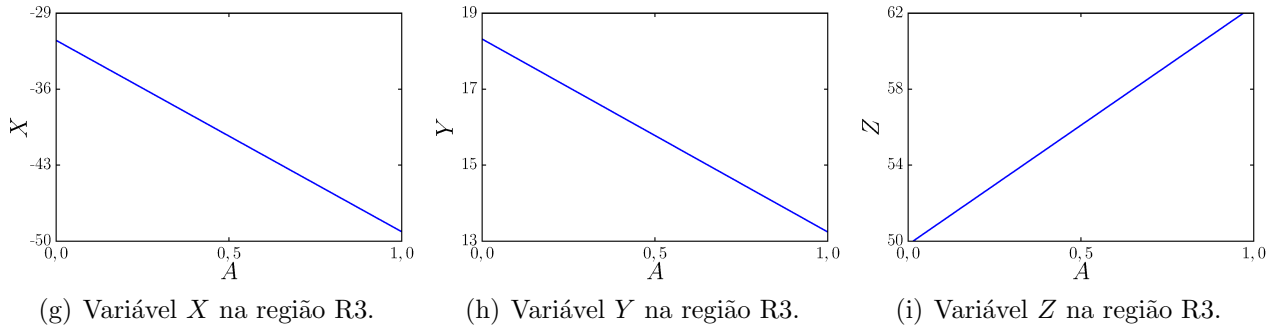


Figura 3.5: Gráficos dos pontos de equilíbrio fixando  $K = 1,0$  e variando  $A$  para cada região delimitada pela Eq. (3.23).

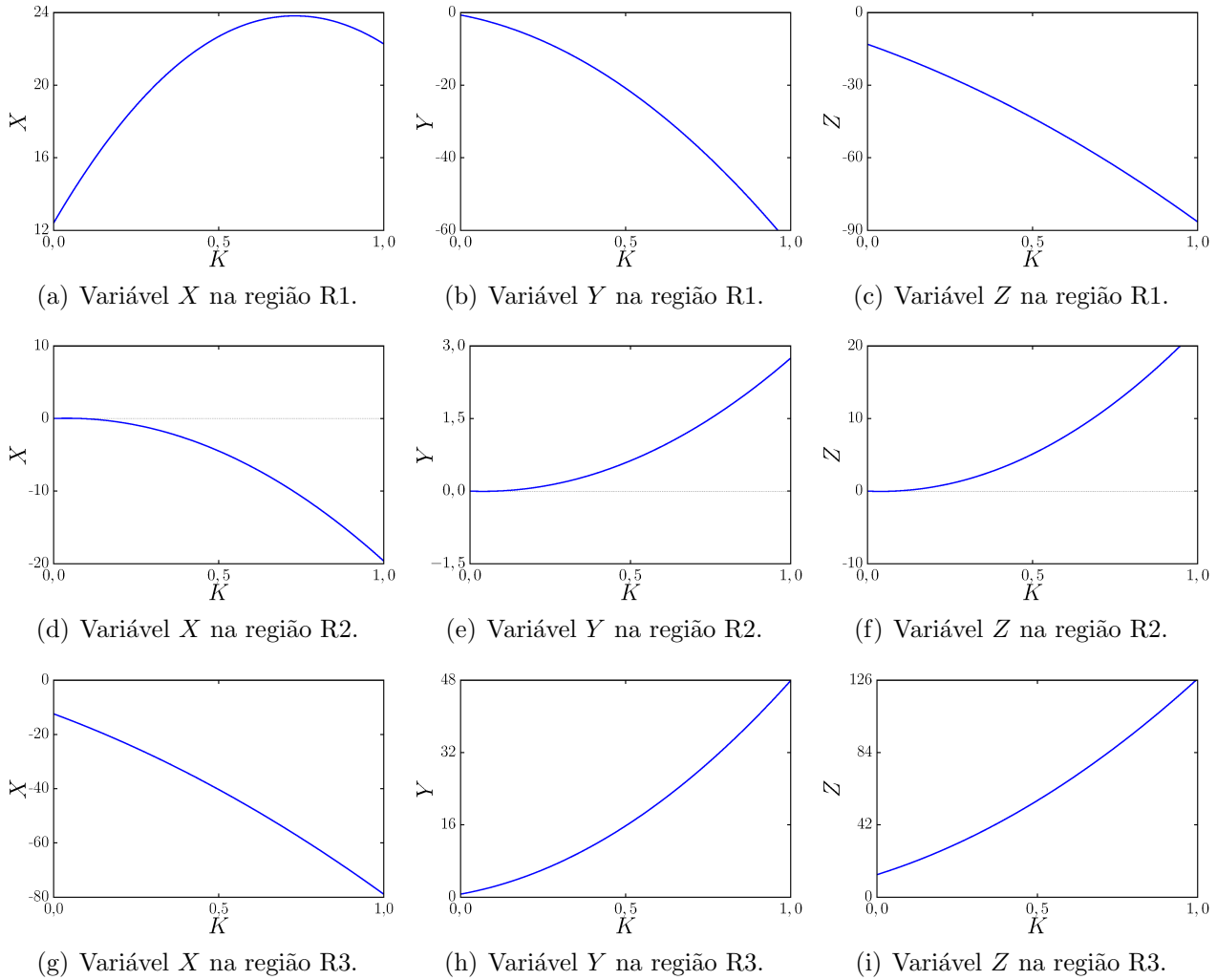


Figura 3.6: Gráficos dos pontos de equilíbrio fixando  $A = 1,0$  e variando  $K$  para cada região delimitada pela Eq. (3.23).

### 3.2.2 Análise da Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

O objetivo dessa seção é encontrar as regiões no espaço de parâmetros onde os pontos de equilíbrio de cada região são estáveis, em outras palavras, queremos determinar os intervalos dos parâmetros  $K$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  para que os pontos de equilíbrio das regiões R1, R2 e R3 sejam estáveis e, com isso, delimitar as regiões de estabilidade.

Para isso, usando a matriz jacobiana (3.30), conseguimos encontrar as equações características para cada região delimitada pela Eq. (3.31), fazendo  $\det(J - \lambda I) = 0$ , sendo  $I$  a matriz identidade. Como a matriz jacobiana independe das variáveis do sistema e  $\frac{dI}{dX}$  possui o mesmo valor para duas regiões distintas, ficamos com duas equações características, uma para as regiões R1 e R3, e outra para a região R2. Então, temos a equação característica dada por:

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (3.35)$$

Para as regiões R1 e R3, temos a equação característica

$$\lambda^3 + \lambda^2[\alpha(1+b) + 1 + \gamma] + \lambda[\alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta] + \alpha[\beta(1+b+K) + b\gamma] = 0, \quad (3.36)$$

sendo os coeficientes,

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \\ a_2 &= \alpha(1+b) + 1 + \gamma, \\ a_1 &= \alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta, \\ a_0 &= \alpha[\beta(1+b+K) + b\gamma], \end{aligned}$$

e para a região R2 ficamos com a equação característica

$$\lambda^3 + \lambda^2[\alpha(1+a) + 1 + \gamma] + \lambda[\alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta] + \alpha[\beta(1+a+K) + a\gamma] = 0, \quad (3.37)$$

sendo os coeficientes,

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \\ a_2 &= \alpha(1+a) + 1 + \gamma, \\ a_1 &= \alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta, \\ a_0 &= \alpha[\beta(1+a+K) + a\gamma]. \end{aligned}$$

O estudo da estabilidade foi feito usando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz (RH) [12, 13, 23]. É um método que serve para determinar a estabilidade do sistema examinando os coeficientes da equação característica calculada em cada um dos pontos de equilíbrio, nesse caso, em cada região delimitada pela Eq. (3.23). Esse método é qualitativo e não envolve o cálculo explícito das raízes do polinômio (3.35) porém, nos diz basicamente que, um sistema é estável se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna do arranjo de RH forem positivos. Para determinar a estabilidade do sistema usando o critério de RH, temos que checar duas condições:

1ª condição: Dois argumentos necessários, mas não suficientes, para todas as raízes possuírem parte real negativa são:

1. Todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal.
2. Todos os coeficientes do polinômio devem ser diferentes de zero.

Se a 1ª condição for satisfeita, então calculamos a série de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|ccc}
 \lambda^n & a_n & a_{n-2} & \cdots \\
 \lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\
 \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & \cdots \\
 \lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots \\
 \vdots & & & \\
 \lambda^1 & & & \\
 \lambda^0 & \vdots & \vdots & \cdots
 \end{array} \tag{3.38}$$

sendo os  $a'_n$ s os coeficientes do polinômio e os coeficientes restantes são calculados da seguinte forma:

$$b_1 = \frac{-1}{a_{n-1}}(a_n a_{n-3} - a_{n-2} a_{n-1}), \tag{3.39}$$

$$b_2 = \frac{-1}{a_{n-1}}(a_n a_{n-5} - a_{n-4} a_{n-1}), \tag{3.40}$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1}(b_2 a_{n-1} - b_1 a_{n-3}), \tag{3.41}$$

$$c_2 = \frac{-1}{b_1}(b_3 a_{n-1} - b_1 a_{n-5}). \tag{3.42}$$

2ª condição: O argumento necessário para todas as raízes possuírem parte real negativa, é que todos os elementos da primeira coluna da série devem possuir o mesmo sinal. O número de mudanças de sinal é igual ao número de raízes com parte real positiva.

O critério de RH possui ainda um caso especial, que contempla a situação na qual todos os elementos de uma mesma linha são zeros. Neste caso, o polinômio possui um par de raízes puramente imaginárias. A linha nula ocorrerá associada com uma potência ímpar de  $\lambda$  [31].

A Fig. 3.7 representa o plano complexo das raízes da equação característica. Para pontos de equilíbrio que possuem raízes reais negativas, ou raízes complexas cuja parte real é negativa, são ditos estáveis. Já, quando os pontos de equilíbrio possuem raízes reais positivas, ou raízes complexas cuja parte real é positiva, são ditos instáveis. Em outras palavras, quando os pontos de equilíbrio estiverem no lado esquerdo do plano complexo, são estáveis e, para os que estão no lado direito são instáveis.

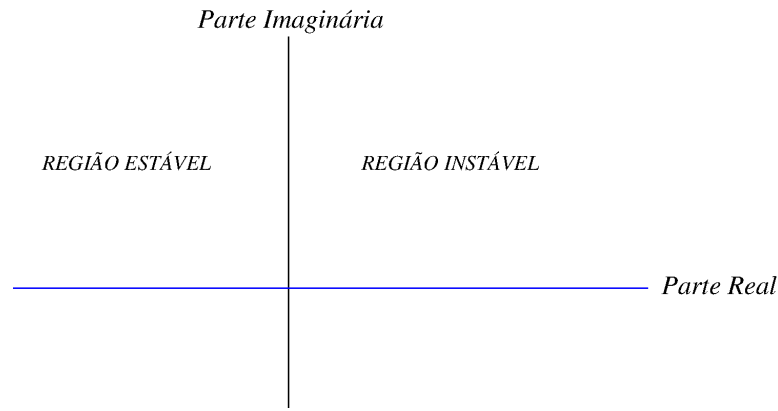


Figura 3.7: Regiões de estabilidade no plano complexo das raízes da equação característica. Os pontos de equilíbrio com parte real negativa estão no lado esquerdo do plano complexo e são estáveis. Já os pontos de equilíbrio que possuem parte real positiva, ditos instáveis, estão à direita do plano.

O estudo da estabilidade usando o critério de RH apresentado a seguir, foi feito para as regiões R1, R2 e R3, usando os seguintes valores para os parâmetros do sistema:

$$a = -1,13996128, \quad b = -0,712000613, \quad \beta = 9,701, \quad (3.43)$$

$$-1 \leq \gamma \leq 1, \quad K > 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0,$$

esses valores foram calculados utilizando as transformações (3.9) e os dados da referência [11] para os valores de  $R$ ,  $m_0$  e  $m_1$ .

### 3.2.3 Regiões R1 e R3

Para que a 1ª condição do critério de RH seja satisfeita usando os valores já mencionados dos parâmetros  $b$  e  $\beta$ , no intervalo  $-1 \leq \gamma \leq 1$ ,  $K > 0$  e para  $\alpha > 0$ , as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$a_3 = 1 > 0,$$

$$a_2 = \alpha(1+b) + 1 + \gamma > 0 \implies \alpha > \frac{-1-\gamma}{1+b} \implies \alpha > 0, \quad (3.44)$$

$$a_1 = \alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta > 0 \implies \alpha > \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + b + b\gamma} \implies \alpha > 25,23813457, \quad (3.45)$$

$$a_0 = \alpha[\beta(1+b+K) + b\gamma] > 0 \implies K > \frac{-b\gamma - \beta(1+b)}{\beta} \implies K > -0,361393945. \quad (3.46)$$

Uma vez que a 1ª condição é satisfeita, calculamos os demais termos da série de RH descritas pelas Eqs. (3.39) a (3.42),

$$b_1 = \frac{\alpha^2[\gamma(1+b) + b](1+b) - \alpha[\beta K - \gamma(\gamma+2)(1+b) - b] + (\gamma+\beta)(1+\gamma)}{\alpha(1+b) + 1 + \gamma},$$

$$b_2 = 0, \quad (3.47)$$

$$c_1 = a_0 = \alpha[\beta(1+b+K) + b\gamma],$$

$$c_2 = 0,$$

que pode então ser construída, resultando,

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & \alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta \\ \lambda^2 & \alpha(1+b) + 1 + \gamma & \alpha[\beta(1+b+K) + b\gamma] \\ \lambda^1 & b_1 & 0 \\ \lambda^0 & \alpha[\beta(1+b+K) + b\gamma] & 0. \end{array} \quad (3.48)$$

Aplicando a 2ª condição do critério de RH, analisamos o sinal do coeficiente  $b_1$  e encontramos uma nova condição para o parâmetro  $K$  que, juntamente com as Eqs. (3.44), (3.45) e (3.46) dão as condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio, em termos dos parâmetros, nas regiões R1 e R3.

$$\alpha > \frac{-1 - \gamma}{1 + b}, \quad \alpha > \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + b + b\gamma}, \quad (3.49)$$

$$K > \frac{-b\gamma - \beta(1 + b)}{\beta}, \quad (3.50)$$

$$K < \frac{\alpha^2[\gamma(1 + b) + b](1 + b) + \alpha[\gamma(\gamma + 2)(1 + b) + b] + (\gamma + \beta)(1 + \gamma)}{\alpha\beta}. \quad (3.51)$$

Nas Figs. 3.8(a) e 3.8(b), estão representadas as análises de sinais dos coeficientes  $a_1$  e  $b_1$  respectivamente. Os *insets* são ampliações dos retângulos sendo que, as regiões cujos sinais dos coeficientes são positivos (CP) estão pintadas de roxo e as regiões para a qual os sinais são negativos (CN) estão pintadas de ciano. Para a ocorrência de pontos de equilíbrio estáveis os valores dos coeficientes devem ser positivos, então os valores dos parâmetros devem estar na região pintada de roxo.

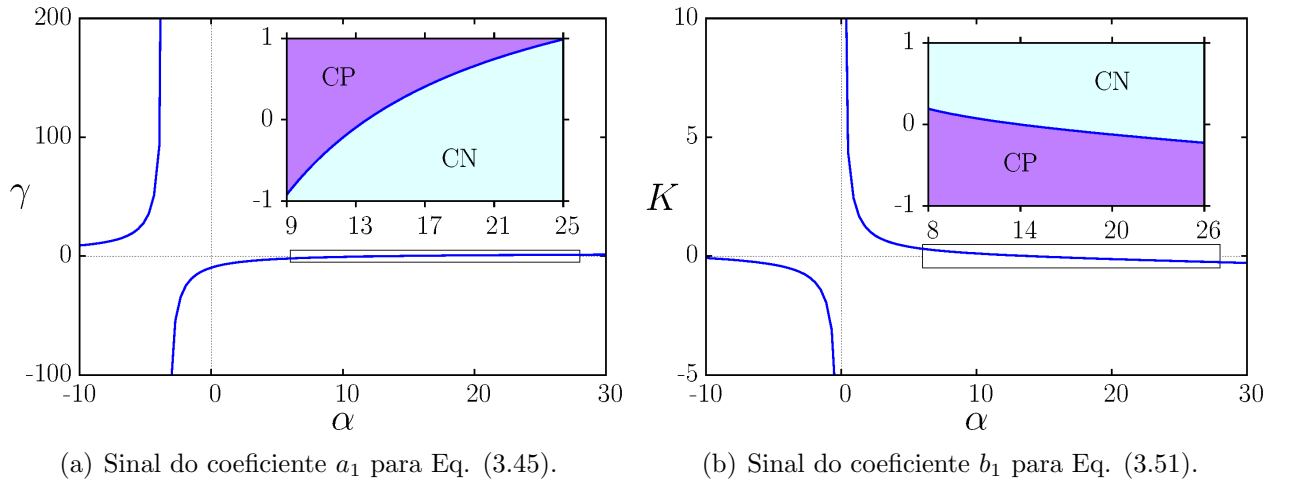
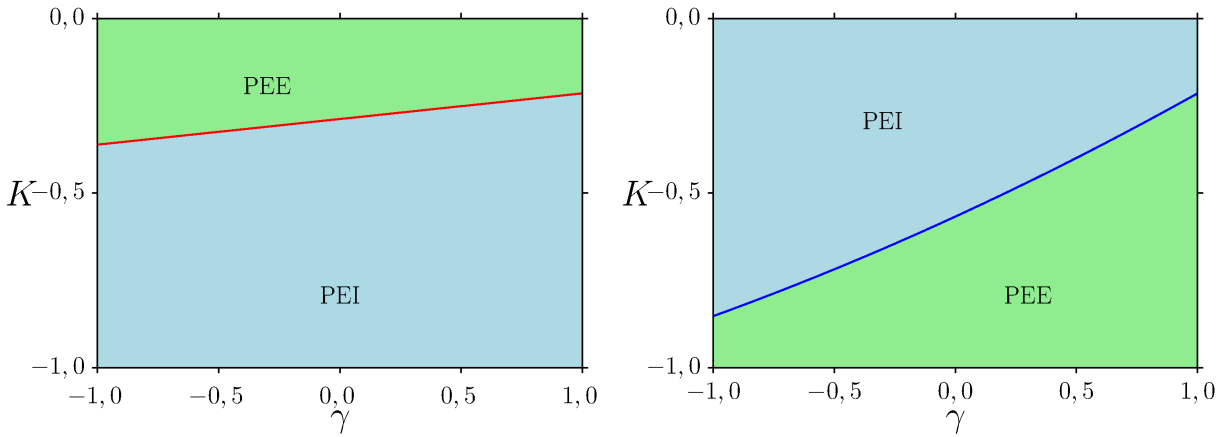


Figura 3.8: Análises dos sinais dos coeficientes  $a_1$  e  $b_1$  no plano de parâmetros para as regiões R1 e R3. Os *insets* são ampliações dos retângulos de cada região e mostram os intervalos de interesse para cada parâmetro. Região pintada de roxo, coeficientes positivos (CP) e região em ciano, coeficientes negativos (CN).

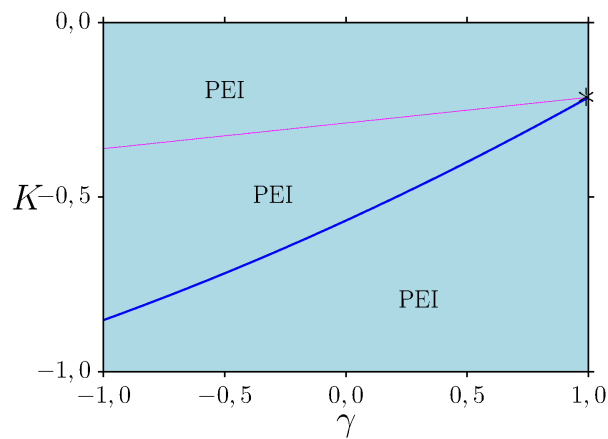
As Figs. 3.9(a) e 3.9(b) mostram as regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio no plano de parâmetros ( $\gamma \times K$ ) dada pelas Eqs. (3.46) (linha vermelha) e (3.51) (linha azul) respectivamente. As regiões em que os pontos são estáveis (PEE) estão pintadas de verde e para pontos instáveis (PEI) em azul. Existe uma inversão de regiões de estabilidade entre essas equações, como mostrada na Fig. 3.9(c), porém não existe uma superposição de regiões estáveis para os valores de interesse dos parâmetros,  $K > 0$  e  $-1 \leq \gamma \leq 1$ . Ainda na Fig. 3.9(c), existe

um ponto onde as curvas das Eqs. (3.46) e (3.51) se encontram, evidenciada no gráfico com um ‘\*’, porém como o valor de parâmetro  $K$  é negativo neste ponto (e estamos interessados nos valores positivos de  $K$ ), o sinal do coeficiente  $b_1$  é negativo, então ocorrem duas mudanças de sinais nos elementos da primeira coluna da série de RH:  $a_2 \rightarrow b_1$  e  $b_1 \rightarrow a_0$ , concluímos que o sistema tem dois polos do lado direito do plano complexo, logo os pontos de equilíbrio das regiões R1 e R3 são instáveis para os valores e intervalos de parâmetros de interesse.

$\lambda^3$	$a_3 > 0$	$a_1$	(3.52)
$\lambda^2$	$a_2 > 0$	$a_0$	
$\lambda^1$	$b_1 < 0$	0	
$\lambda^0$	$a_0 > 0$	0.	



(a) Região de estabilidade dos pontos de equilíbrio para Eq. (3.46). (b) Região de estabilidade dos pontos de equilíbrio para Eq. (3.51).



(c) Interseção das regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio para as Eqs. (3.46) (linha em vermelho) e (3.51) (linha em azul).

Figura 3.9: Análises de estabilidade dos pontos de equilíbrio para as Regiões R1 e R3 no plano de parâmetros  $(\gamma \times K)$  gerado pelas Eqs. (3.46) (linha em vermelha) e (3.51) (linha em azul). Região cujos pontos de equilíbrio são estáveis (PEE) estão pintada de verde e instáveis (PEI) de azul.

Passamos agora a analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio da região R2. Aplicando a 1ª e a 2ª condição do critério de RH usando os mesmos valores já mencionados dos parâmetros para determinar os sinais dos coeficientes da equação característica e, com isso, determinar as regiões de estabilidade.

### 3.2.4 Região R2

Para que a 1ª condição do critério de RH seja satisfeita usando os valores já mencionados dos parâmetros  $a$  e  $\beta$ , no intervalo  $-1 \leq \gamma \leq 1$ ,  $K > 0$  e para  $\alpha > 0$ , as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$a_3 = 1 > 0,$$

$$a_2 = \alpha(1 + a) + 1 + \gamma > 0 \implies \alpha > \frac{-1 - \gamma}{1 + a} \implies \alpha > 0, \quad (3.53)$$

$$a_1 = \alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta > 0 \implies \alpha > \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + a + a\gamma} \implies \alpha > 8,36066207, \quad (3.54)$$

$$a_0 = \alpha[\beta(1 + a + K) + a\gamma] > 0 \implies K > \frac{-a\gamma - \beta(1 + a)}{\beta} \implies K > 0,257470947. \quad (3.55)$$

Satisfazendo a 1ª condição, calculamos os demais termos da série de RH de acordo com as Eqs. (3.39) a (3.42),

$$b_1 = \frac{\alpha^2[\gamma(1 + a) + a](1 + a) - \alpha[\beta K - \gamma(\gamma + 2)(1 + a) - a] + (\gamma + \beta)(1 + \gamma)}{\alpha(1 + a) + 1 + \gamma},$$

$$b_2 = 0, \quad (3.56)$$

$$c_1 = a_0 = \alpha[\beta(1 + a + K) + a\gamma],$$

$$c_2 = 0,$$

Com esse resultado, aplicamos a 2ª condição do critério de RH e analisamos o sinal do coeficiente  $b_1$ . Com isso, encontramos uma nova condição para o parâmetro  $K$  que, juntamente com as Eqs. (3.53), (3.54) e (3.55) dão as condições de estabilidade do ponto de equilíbrio, em termos dos parâmetros, na região R2.

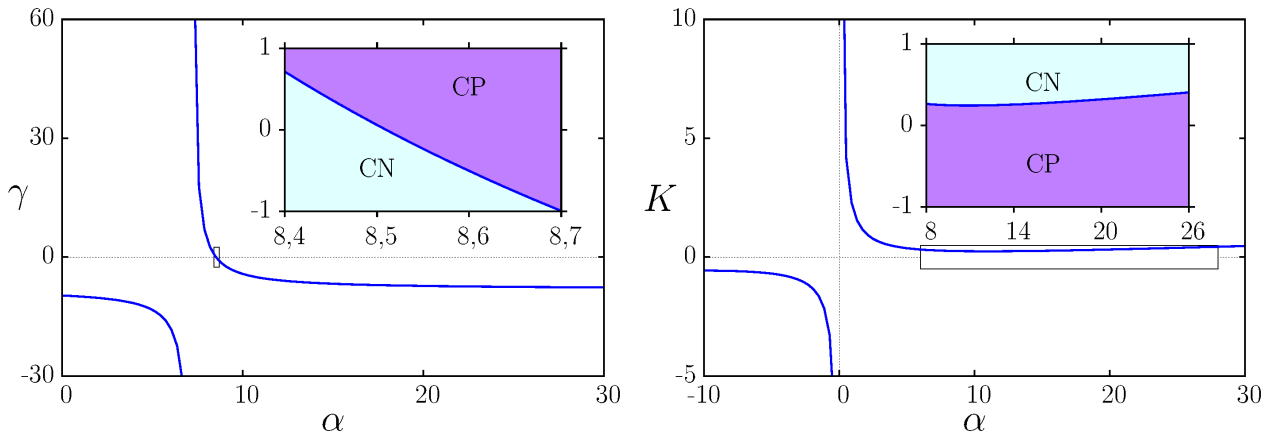


$$\alpha > \frac{-1 - \gamma}{1 + a}, \quad \alpha > \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + a + a\gamma}, \quad (3.57)$$

$$K > \frac{-a\gamma - \beta(1 + a)}{\beta}, \quad (3.58)$$

$$K < \frac{\alpha^2[\gamma(1 + a) + a](1 + a) + \alpha[\gamma(\gamma + 2)(1 + a) + a] + (\gamma + \beta)(1 + \gamma)}{\alpha\beta}. \quad (3.59)$$

As Figs. 3.10(a) e 3.10(b) mostram a evolução das Eqs. (3.54) e (3.59) e evidenciam os intervalos para os quais há uma troca de sinais dos coeficientes  $a_1$  e  $b_1$  respectivamente. Os *insets* são ampliações dos retângulos sendo que, as regiões cujos sinais dos coeficientes são positivos (CP) estão pintadas de roxo e as regiões para a qual os sinais são negativos (CN) estão pintadas de ciano. Para a ocorrência de pontos de equilíbrio estáveis os valores dos coeficientes devem ser positivos, então os valores dos parâmetros devem estar na região pintada de roxo.



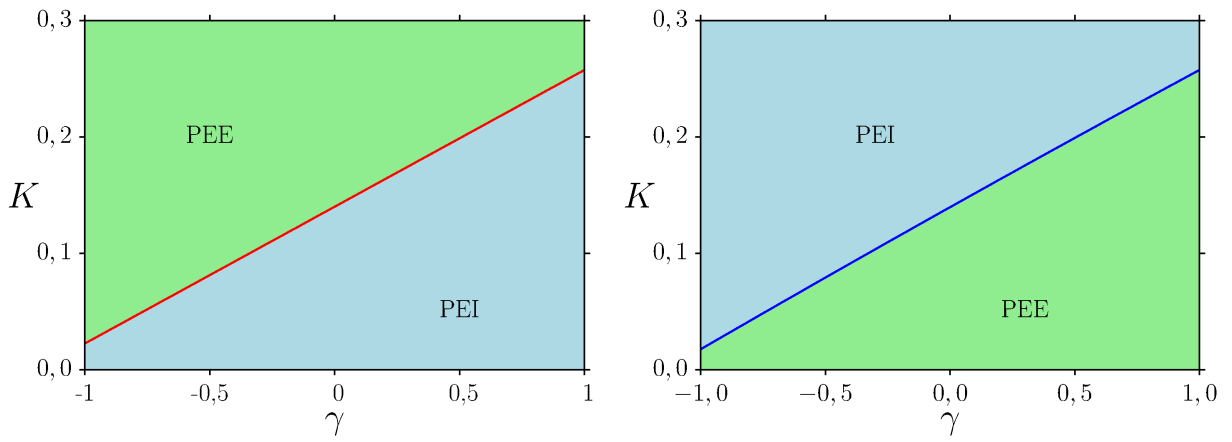
(a) Sinal do coeficiente  $a_1$  para Eq. (3.54).

(b) Sinal do coeficiente  $b_1$  para Eq. (3.59).

Figura 3.10: Análises dos sinais dos coeficientes  $a_1$  e  $b_1$  no plano de parâmetros para a região R2. Os *insets* são ampliações dos retângulos de cada região e mostram os intervalos de interesse para cada parâmetro. Região pintada de roxo, coeficientes positivos (CP) e região em ciano, coeficientes negativos (CN).

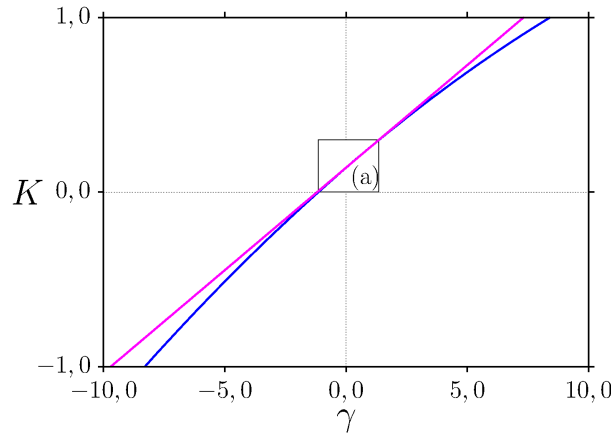
As Figs. 3.11(a) e 3.11(b) mostram as regiões de estabilidade do ponto de equilíbrio no plano de parâmetros ( $\gamma \times K$ ) dada pelas Eqs. (3.55) (linha vermelha) e (3.59) (linha azul) respectivamente. As regiões em que o ponto é estável (PEE) estão pintadas de verde e instáveis (PEI) em azul. Existe uma região onde há uma superposição das regiões estáveis, mostrada na Fig. 3.11(c) no retângulo (a), para os valores de parâmetros desejados,  $K > 0$  e  $-1 \leq \gamma \leq 1$ .

Para essa região de superposição, o ponto de equilíbrio é estável, fora desta área é instável. Na Fig. 3.12(a) estão representadas as interseções entre as curvas das Eqs. (3.55) (linha vermelha) e (3.59) (linha azul), a região estável é aquela onde a curva em azul está acima da curva em vermelho, representado nas Figs. (3.12)(b) a (3.12)(d), que são os *insets* da Fig. (3.12)(a). Na Fig. (3.12)(b), como a linha vermelha está acima da azul, não há superposição de regiões estáveis. Já na Fig. (3.12)(c), a linha azul começa a ultrapassar a linha vermelha, gerando uma região estável que vai até um determinado ponto, como mostrado na Fig. (3.12)(d). Logo depois, a curva em vermelho volta a passar a curva azul, tornando os pontos de equilíbrio instáveis novamente.



(a) Região de estabilidade dos pontos de equilíbrio para Eq. (3.55).

(b) Região de estabilidade dos pontos de equilíbrio para Eq. (3.59).



(c) Interseção das regiões de estabilidade do ponto de equilíbrio para as Eqs. (3.55) (linha em vermelha) e (3.59) (linha em azul).

Figura 3.11: Análises de estabilidade do ponto de equilíbrio da Região R2 no plano de parâmetros ( $\gamma \times K$ ) gerado pelas Eqs. (3.55) (linha em vermelha) e (3.59) (linha em azul). Região cujos pontos de equilíbrio são estáveis (PEE) estão pintada de verde e instáveis (PEI) de azul.

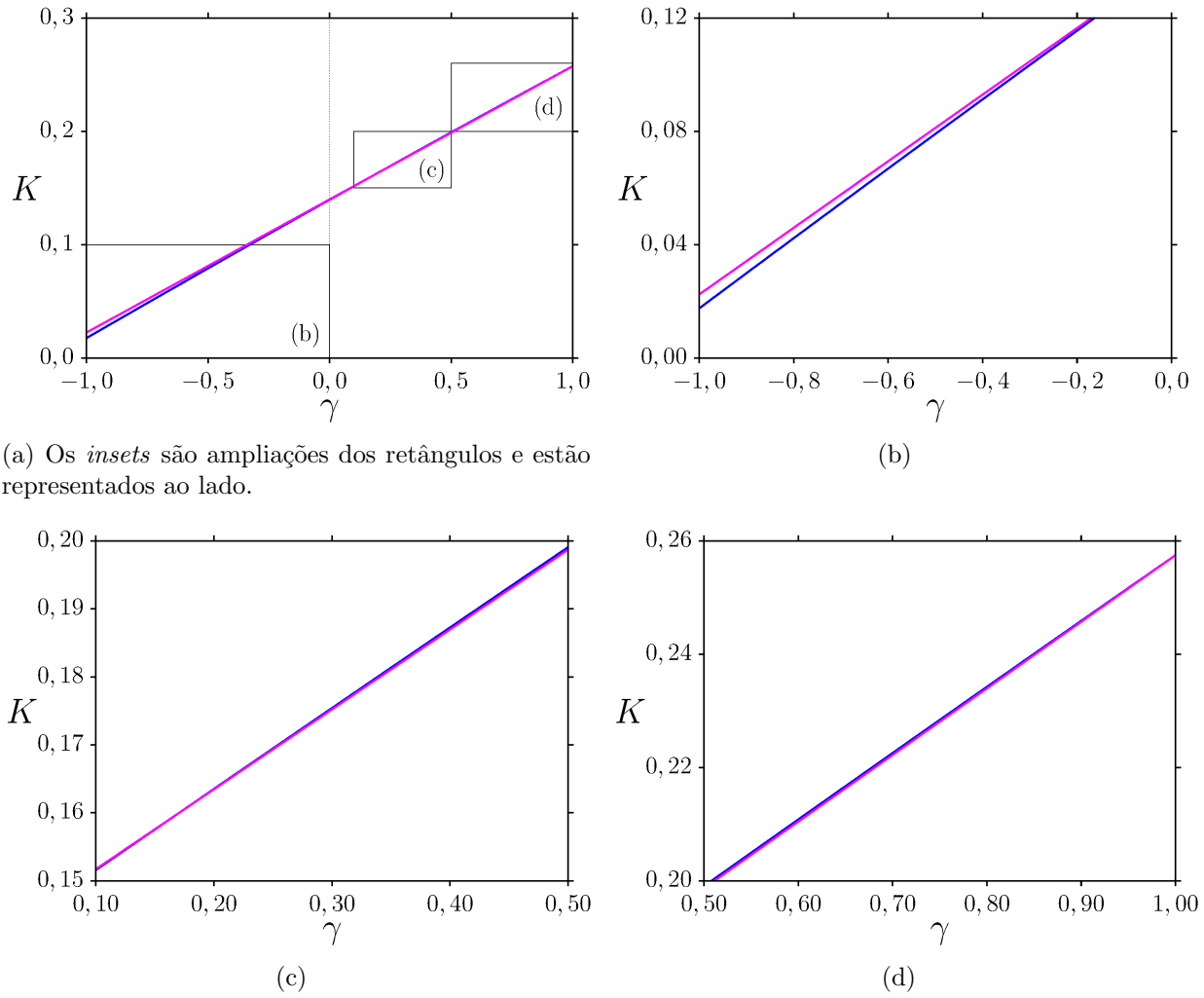


Figura 3.12: Interseção das regiões de estabilidade do ponto de equilíbrio para as Eqs. (3.55) (linha em vermelho) e (3.59) (linha em azul).

Estes resultados mostram que os pontos de equilíbrio das regiões R1 e R3, para os valores e intervalos de parâmetros usados, são sempre instáveis. Para a região R2, existe um intervalo dos parâmetros  $K$  e  $\gamma$  tal que o ponto de equilíbrio é estável. Nossas conclusões analíticas, usando uma aproximação linear para o forçamento  $F(X)$  e o critério de RH, indicam que o sistema tem comportamento instável em R1 e R3 e para a região R2, existe uma “faixa” de valores dos parâmetros onde o sistema é estável, fora desta “faixa” o sistema tem um comportamento instável.

O próximo passo deste trabalho é obter e analisar os resultados numéricos do cChua forçado, foram gerados os planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e os diagramas de *isospikes* tanto para o forçamento trigonométrico quanto para a aproximação linear, a fim de comparar os resultados entre si, e determinar qual a influência do forçamento (trigonométrico e linear) na dinâmica do cChua.

# Capítulo 4

## RESULTADOS NUMÉRICOS

O objetivo desta seção é investigar numericamente a influência do forçamento trigonométrico, dada pela Eq. (3.13), na dinâmica do sistema gerado pela Eq. (3.22) e comparar com a aproximação em primeira ordem dada pela Eq. (3.25). Para evidenciar isto, usamos o plano de parâmetros  $(\alpha \times \gamma) = [5, 0 : 10, 0] \times [-0, 6 : 0, 6]$  para o maior expoente de Lyapunov e os diagramas de *isospikes*. Integramos numericamente o sistema através do método de Runge-Kutta de quarta ordem e usamos  $(X = 0, 1; Y = 0, 0; Z = 0, 0)$  como condição inicial, para as simulações numéricas, discretizamos uma malha quadrada de  $600 \times 600$  pontos igualmente espaçados e integramos o sistema com passo fixo de  $1 \times 10^{-2}$  e um tempo total de integração de  $2 \times 10^6$ . Os digramas de *isospikes* foram obtidos também utilizando o método de Runge-Kutta, com passo fixo de  $2 \times 10^{-4}$ , removendo um transiente de  $1 \times 10^7$  e com  $1 \times 10^6$  integrações para encontrar o período com uma precisão de  $5 \times 10^{-4}$ , em uma malha discretizada de  $400 \times 400$ . Todos as figuras foram construídas utilizando o software Gnuplot versão 4.2.

### 4.1 Diagramas de Lyapunov

Em cada um dos diagramas a seguir, estão representados os planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua: à esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para a aproximação linear. As cores estão associadas à magnitude do maior expoente de Lyapunov gerado pelo sistema:

- Branca - Expoentes de Lyapunov mais negativos: região de pontos de equilíbrio;
- Preto - Expoentes nulos: regiões de atratores periódicos;
- Amarelo para Vermelho - Expoentes de Lyapunov positivos e crescentes: atratores caóticos;
- Azul - Região de divergência;

Primeiramente apresentamos o plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua não forçado ( $K = 0$  e  $A = 0$ ), representado na Fig. 4.1. Percebemos a existência de regiões de pontos de equilíbrio (branco), atratores periódicos (preto), divergência (azul) e onde a dinâmica é caótica (amarelo e vermelho), com o maior expoente de Lyapunov variando entre  $(0,05 : 0,5)$ , de acordo com a barra de cores. Notamos, também, uma espiral de regiões periódicas interligadas, mergulhadas no regime caótico.

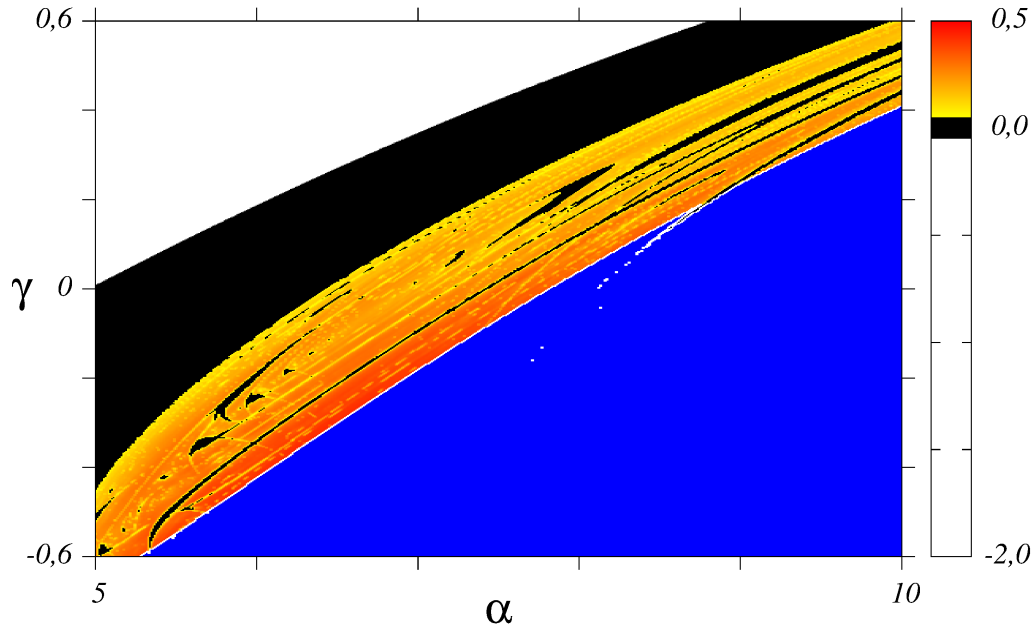


Figura 4.1: Plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua. As cores representam o valor do maior expoente de Lyapunov, sendo a cor azul para divergência, branco para pontos de equilíbrio, preto para comportamentos periódicos e o gradiente do amarelo para o vermelho domínios caóticos.

A seguir na Fig. 4.2, aplicamos apenas parte senoidal do forçamento trigonométrico ( $K \neq 0$  e  $A = 0$ ), para caracterizar a dinâmica do sistema e comparar-lá com a aproximação linear (também com  $K \neq 0$  e  $A = 0$ ). Usamos  $K = 1 \times 10^{-5}$  [Figs. 4.2(a) e 4.2(b)],  $K = 1 \times 10^{-2}$  [Figs. 4.2(c) e 4.2(d)] e  $K = 1 \times 10^{-1}$  [Figs. 4.2(e) e 4.2(f)]. Notamos que para  $K \neq 0$  e  $A = 0$  os domínios regulares e caóticos sofrem deslocamentos para valores de  $K \leq 1 \times 10^{-2}$ , diferente entre os forçamentos trigonométrico e linear. Para valores de  $K \geq 1 \times 10^{-1}$  existe uma grande diferença na dinâmica do sistema quando comparados a valores maiores de  $K$  e entre os forçamentos, como mostrado nas Figs. 4.2(e) e 4.2(f). O forçamento trigonométrico suprime as estruturas imersas em domínios caóticos para  $K = 1 \times 10^{-1}$ , enquanto que a aproximação linear desloca os domínios regulares e caóticos mantendo as estruturas intactas.

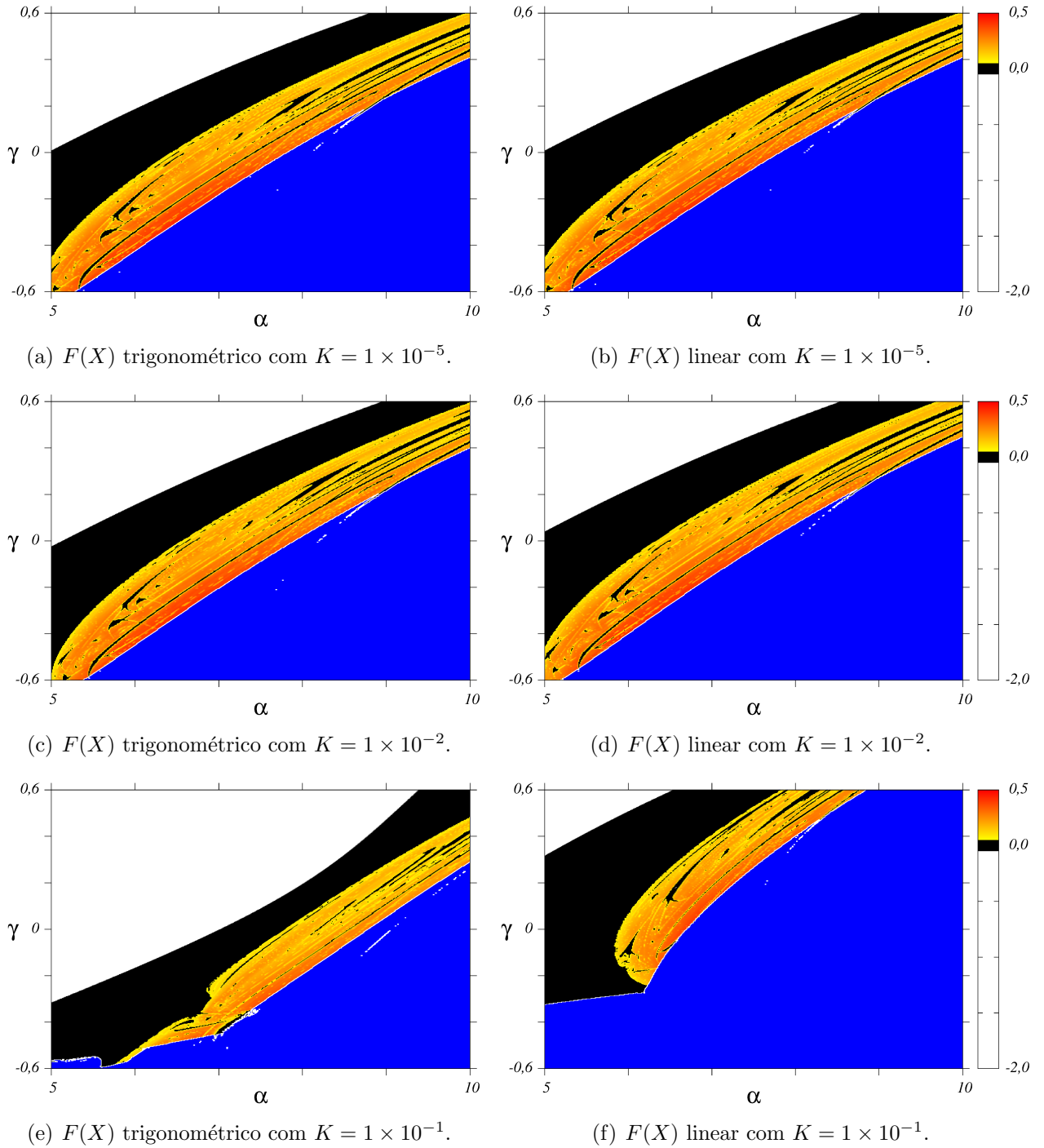


Figura 4.2: Planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua, variando  $K$  e fixando  $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear.

A supressão das estruturas periódicas no forçamento trigonométrico e o deslocamento dos domínios causados pela aproximação linear, estão relacionados com o fato de a não-linearidade  $I(X)$  presente no diodo de Chua sofrer alterações devido da presença do forçamento, recebendo a implementação de  $F(X)$  na curva  $X \times I(X)$ , da forma [14]

$$i(X) = I(X) + F(X), \quad (4.1)$$

sendo  $i(X)$  a nova corrente do diodo de Chua,  $I(X)$  a corrente original do diodo de Chua

adimensional e  $F(X)$  o forçamento aplicado. Na Fig. 4.3 está representada a curva  $X \times I(X)$  para diferentes valores do parâmetro  $K$  e  $A = 0$ , com o forçamento trigonométrico à direita (linha em azul) e o linear à esquerda (linha em vermelho), a linha pontilhada em preto representa a curva da cChua sem o forçamento. Notamos que, quando o forçamento trigonométrico suprime as estruturas periódicas contidas em domínios caóticos ( $K = 1 \times 10^{-1}$ ), a curva  $X \times I(X)$  torna-se assimétrica sem regiões lineares, conforme Fig. 4.3(e) e para a aproximação linear com  $K = 1 \times 10^{-1}$ , o deslocamento dos domínios regulares e caóticos é devido a mudança na inclinação da curva  $X \times I(X)$  demonstrada na Fig. 4.3(f).

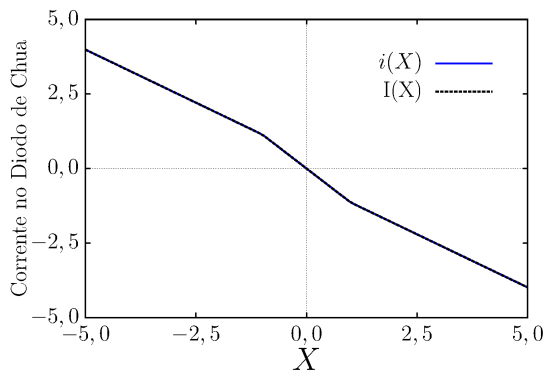
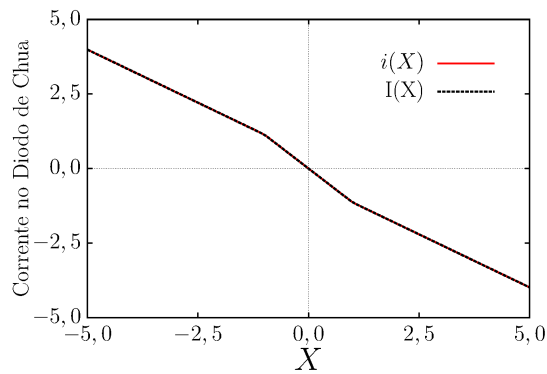
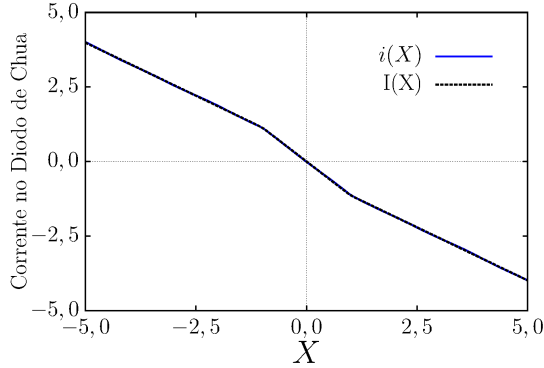
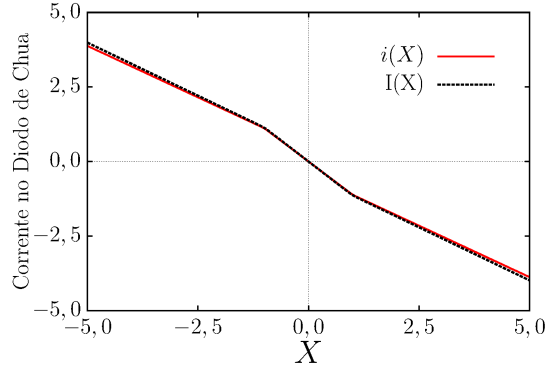
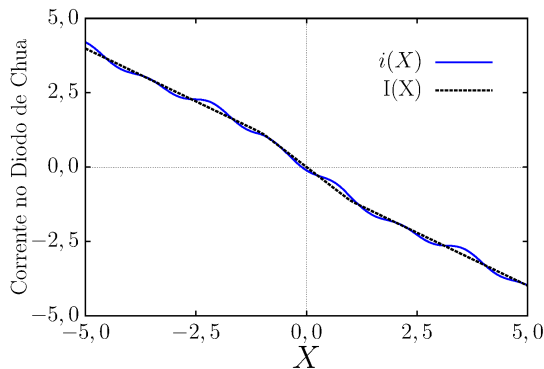
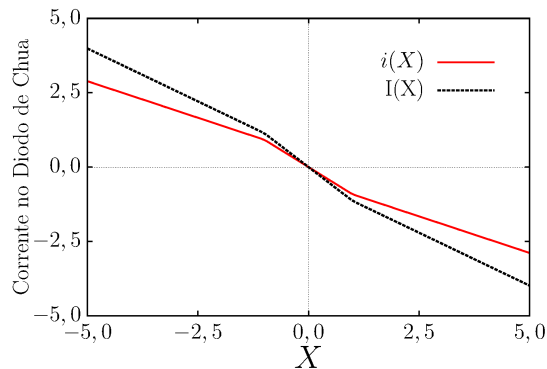
(a)  $F(X)$  trigonométrico com  $K = 1 \times 10^{-5}$ .(b)  $F(X)$  linear com  $K = 1 \times 10^{-5}$ .(c)  $F(X)$  trigonométrico com  $K = 1 \times 10^{-2}$ .(d)  $F(X)$  linear com  $K = 1 \times 10^{-2}$ .(e)  $F(X)$  trigonométrico com  $K = 1 \times 10^{-1}$ .(f)  $F(X)$  linear com  $K = 1 \times 10^{-1}$ .

Figura 4.3: Gráficos  $X \times I(X)$ , variando  $K$  e fixando  $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelha). A linha pontilhada em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento.

Para determinar qual a função do forçamento senoidal na dinâmica do cChua e comparar com a aproximação linear, variamos  $1 \times 10^{-2} < K < 1 \times 10^{-1}$  e usamos  $A = 0$  em ambos, conforme a Fig. 4.4. Usamos  $K = 5 \times 10^{-2}$  [Figs. 4.4(a) e 4.4(b)],  $K = 7 \times 10^{-2}$  [Figs. 4.4(c) e 4.4(d)] e  $K = 9 \times 10^{-2}$  [Figs. 4.4(e) e 4.4(f)]. Notamos que o forçamento linear (à direita) serve para deslocar o plano de parâmetros do sistema para cima e para a direita, conforme aumentamos o valor de  $K$ . Enquanto que, para o forçamento senoidal (à esquerda), a região periódica (preto) “invade” a região de regime caótico e, com isso, vai suprimindo as estruturas periódicas presentes no mesmo.

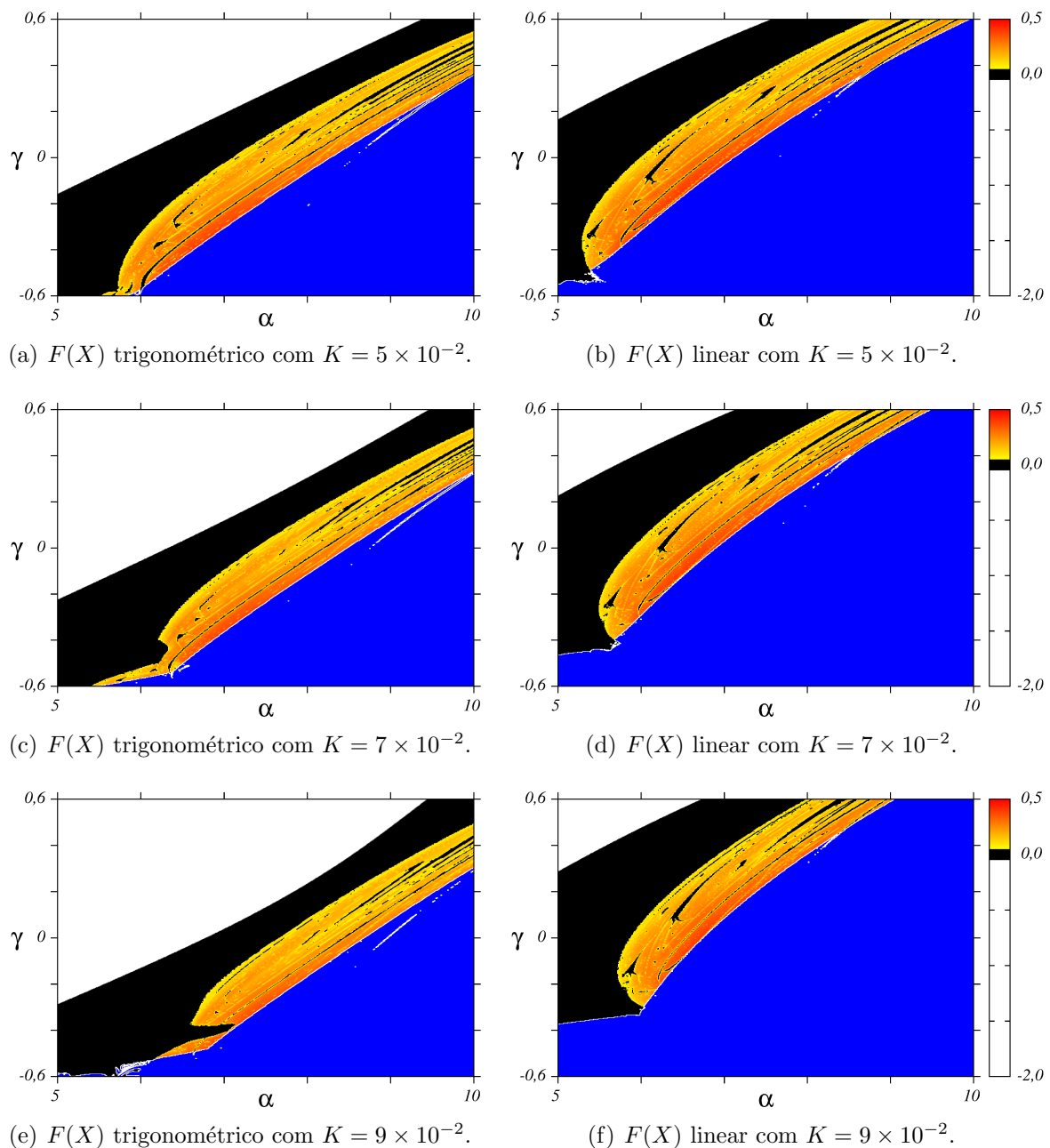


Figura 4.4: Planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com  $1 \times 10^{-2} < K < 1 \times 10^{-1}$  e  $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear.

Conforme aumentamos o valor de  $K$ , para o forçamento trigonométrico, a curva  $X \times I(X)$  vai sendo deformada e com isso, perdendo sua linearidade local (por partes), mostrada na Fig.



4.5, esta deformação está relacionada com a supressão das estruturas periódicas presentes no regime caótico. Já para o forçamento linear, quando aumentamos o valor de  $K$ , a inclinação da curva em vermelho diminui, de acordo com a Fig. 4.5, indicando um deslocamento dos domínios caótico e regulares.

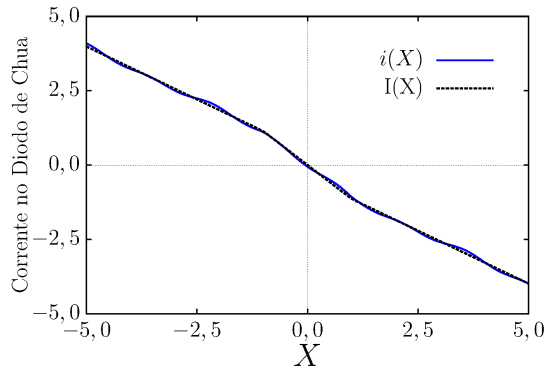
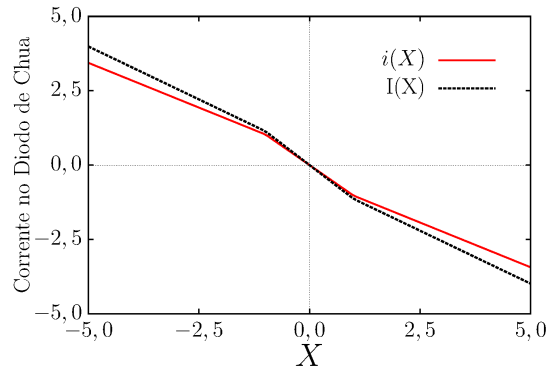
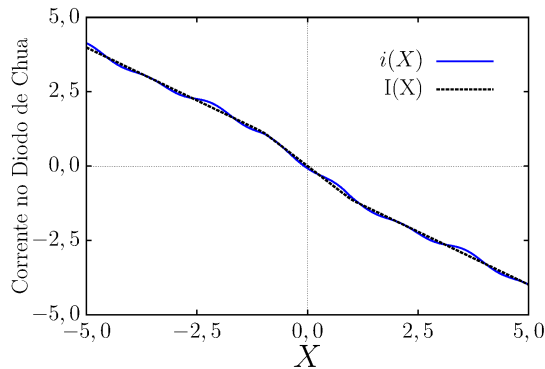
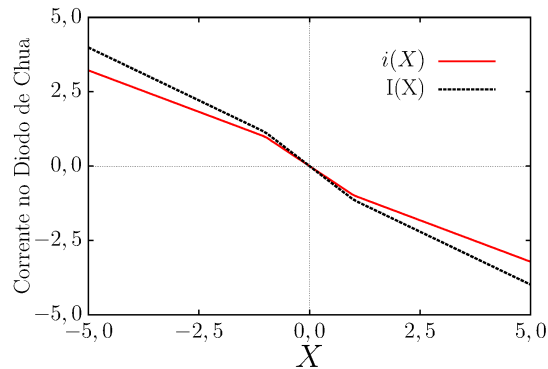
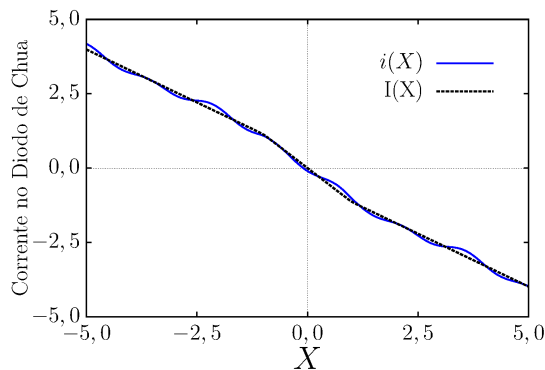
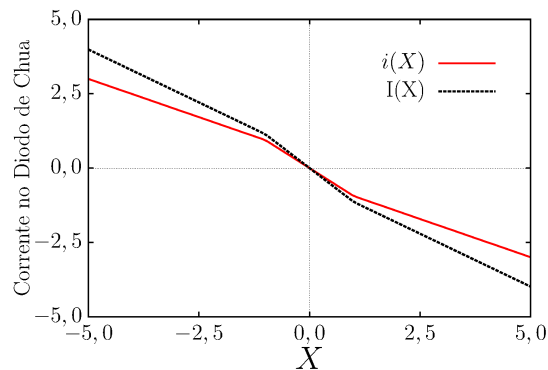
(a)  $F(X)$  trigonométrico com  $K = 5 \times 10^{-2}$ .(b)  $F(X)$  linear com  $K = 5 \times 10^{-2}$ .(c)  $F(X)$  trigonométrico com  $K = 7 \times 10^{-2}$ .(d)  $F(X)$  linear com  $K = 7 \times 10^{-2}$ .(e)  $F(X)$  trigonométrico com  $K = 9 \times 10^{-2}$ .(f)  $F(X)$  linear com  $K = 9 \times 10^{-2}$ .

Figura 4.5: Gráficos  $X \times I(X)$ , variando  $1 \times 10^{-2} < K < 1 \times 10^{-1}$  e fixando  $A = 0$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelha). A linha em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento.

Para caracterizarmos a influência do forçamento como um todo, na dinâmica do sistema, fixamos dois valores de  $K$  e variamos o parâmetro  $A$ . Para valores de  $K \leq 1 \times 10^{-5}$  não notamos uma diferença visível na dinâmica do sistema. Primeiramente escolhemos o valor  $K = 1 \times 10^{-2}$  e variamos o parâmetro  $A$ , que estão representados na Fig. 4.6. Usamos  $A = 1 \times 10^{-5}$  [Figs.

4.6(a) e 4.6(b)],  $A = 1 \times 10^{-2}$  [Figs. 4.6(c) e 4.6(d)] e  $A = 1 \times 10^{-1}$  [Figs. 4.6(e) e 4.6(f)]. Não existe, também, uma diferença significativa no plano de parâmetros entre os forçamentos, porém percebemos que no forçamento trigonométrico, as estruturas periódicas vão diminuindo conforme aumentamos o valor de  $A$ , indicando que este forçamento serve para suprimir estas estruturas. Já para o forçamento linear, as estruturas periódicas permanecem inalteradas, ocorrendo um deslocamento dos domínios regulares e caóticos.

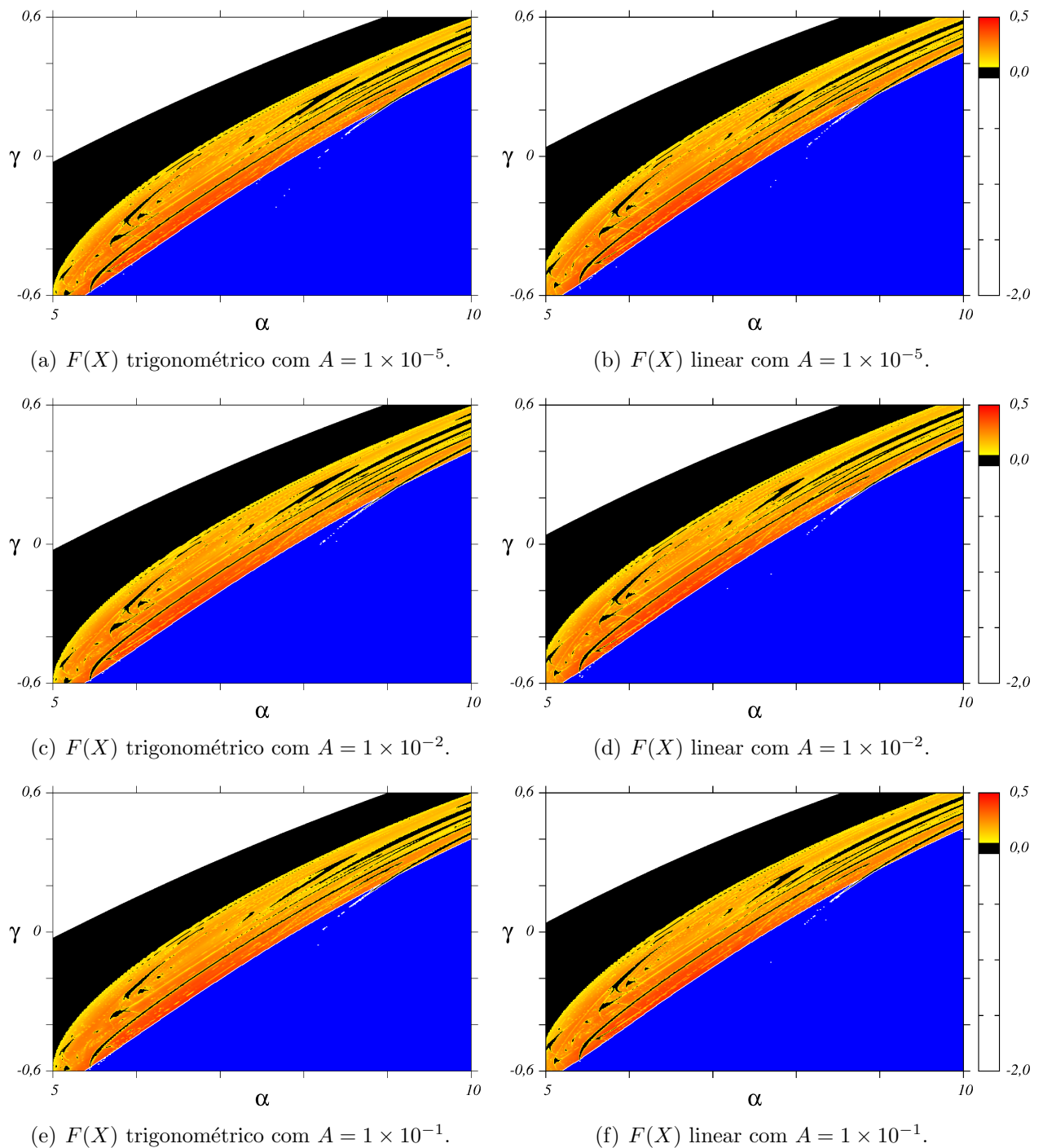


Figura 4.6: Planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com  $K = 1 \times 10^{-2}$  e variando  $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear.

Quando fixamos o valor de  $K = 1 \times 10^{-2}$  e variamos o parâmetro  $A$ , para o forçamento trigonométrico, a curva  $X \times I(X)$  permanece inalterada, conforme a Fig. 4.7. Já para o forçamento linear, usando os mesmos valores de  $K$  e  $A$ , a inclinação da curva em vermelho sofre uma pequena diminuição, indicando um Pequeno deslocamento dos domínios caótico e regulares.

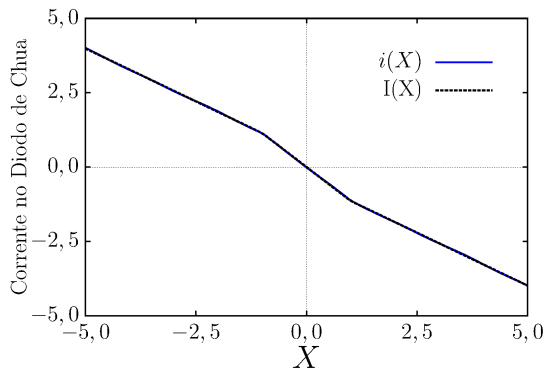
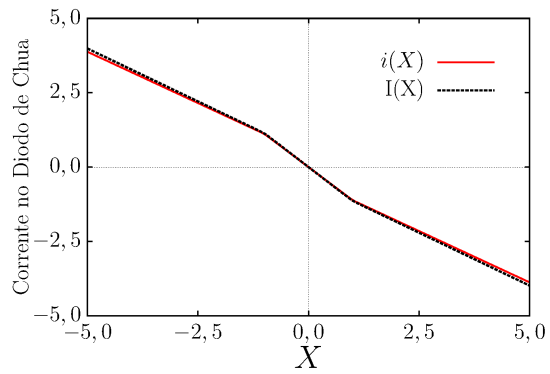
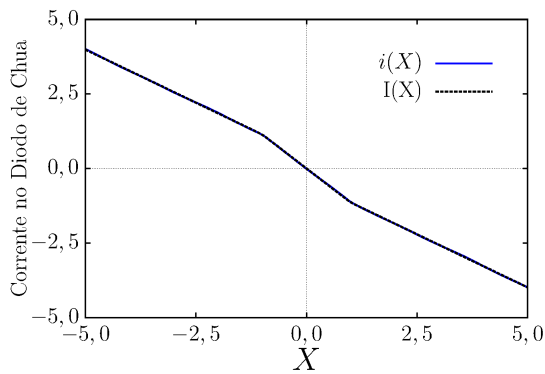
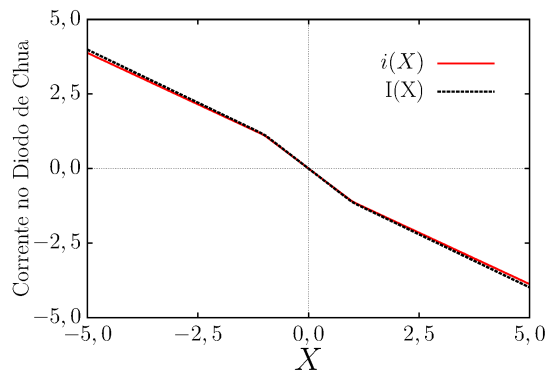
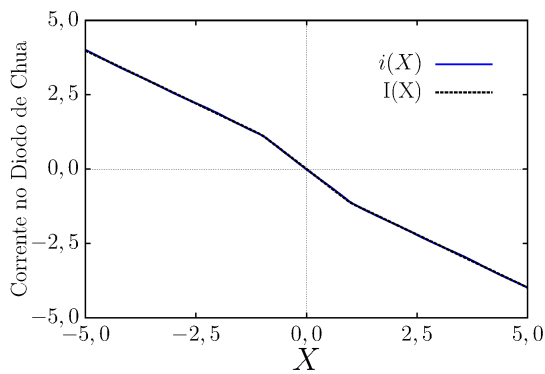
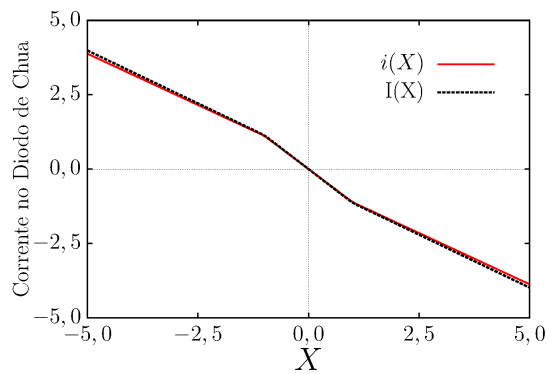
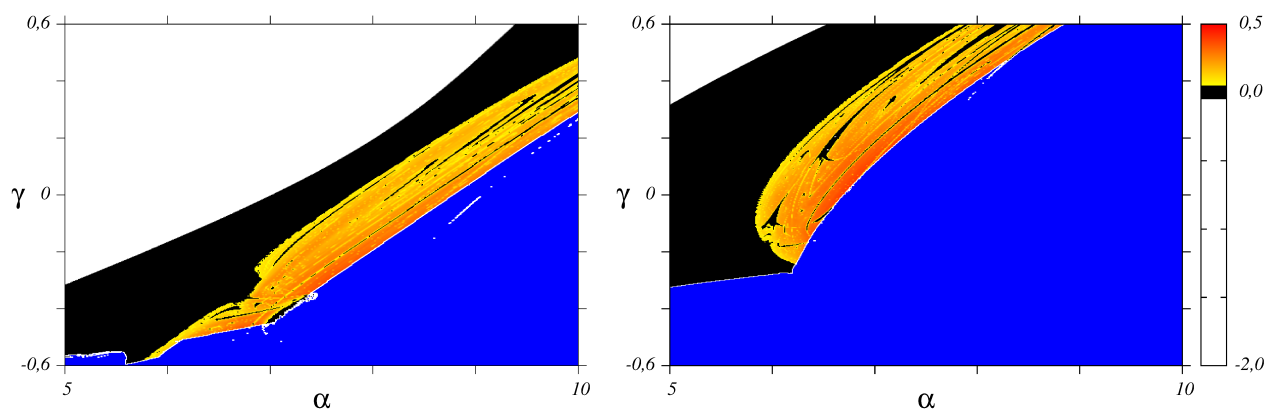
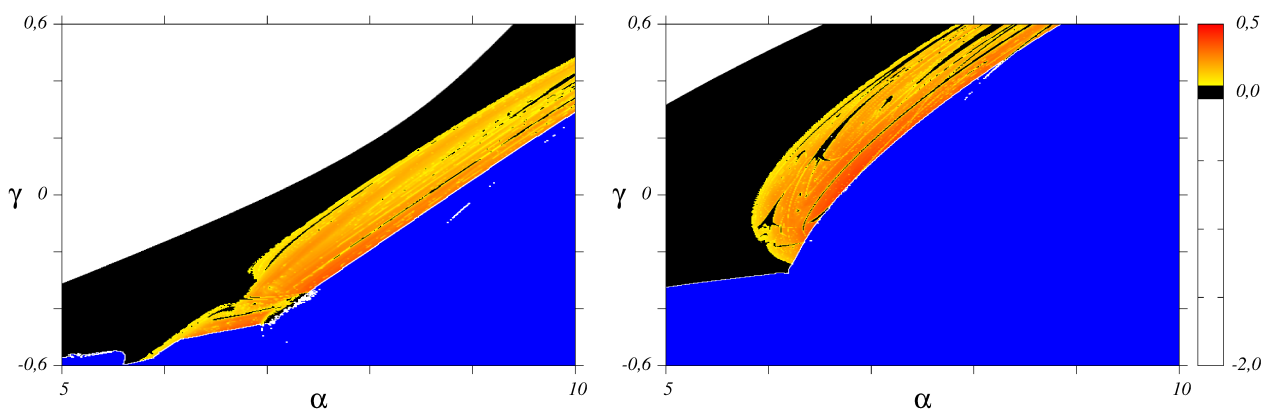
(a)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .(b)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .(c)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .(d)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .(e)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-1}$ .(f)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-1}$ .

Figura 4.7: Gráficos  $X \times I(X)$  com  $K = 1 \times 10^{-2}$  e variando  $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelho). A linha em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento.

Como vimos que para valores do parâmetro  $K \leq 1 \times 10^{-2}$ , não ocorre uma mudança aparente na dinâmica do sistema, aumentamos o valor para  $K = 1 \times 10^{-1}$ , a fim de investigar as implicações dos forçamentos quando variamos o parâmetro  $A$ , conforme a Fig. 4.8. Usamos  $A = 1 \times 10^{-5}$  [Figs. 4.8(a) e 4.8(b)],  $A = 1 \times 10^{-2}$  [Figs. 4.8(c) e 4.8(d)] e  $A = 1 \times 10^{-1}$  [Figs. 4.8(e) e 4.8(f)]. Aqui, notamos uma grande diferença na dinâmica do sistema quando comparamos os forçamentos trigonométrico e linear. Para esses valores de  $K$  e  $A$ , os domínios no plano de parâmetros para o forçamento linear sofrem um deslocamento se comparado aos outros valores usados para os mesmos, enquanto que para o trigonométrico não há um deslocamento aparente. Conforme aumentamos o valor de  $A$  no forçamento trigonométrico, notamos que a região de pontos de equilíbrio (branco) vai aumentando e, com isso, a região periódica (preto) “invade” a região de regime caótico, suprimindo as estruturas periódicas presentes no mesmo. No caso do forçamento linear, não notamos uma diferença significativa no plano de parâmetros conforme aumentamos o valor de  $A$ , apenas um grande deslocamento dos domínios.

(a)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .(b)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .(c)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .(d)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .

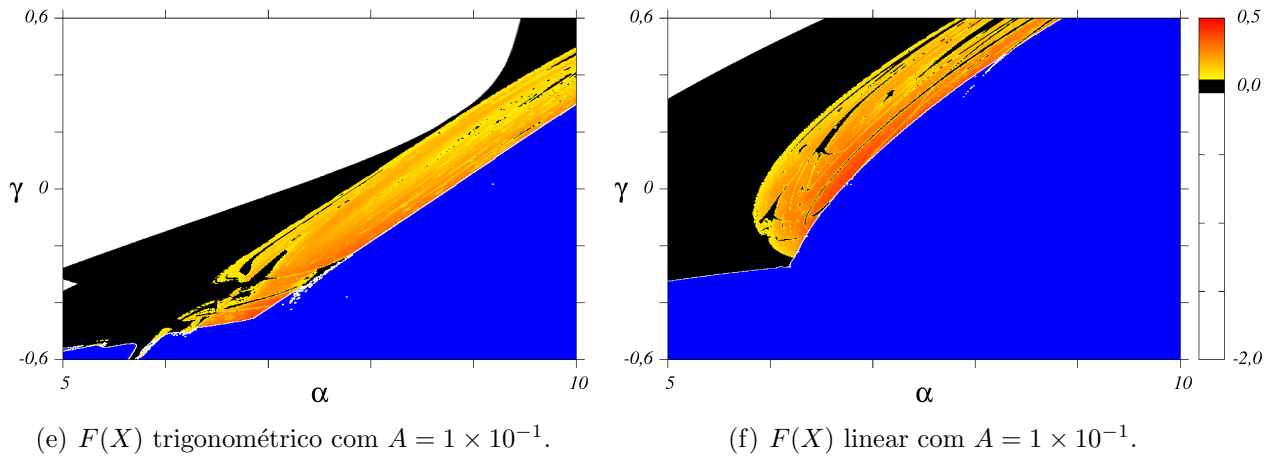
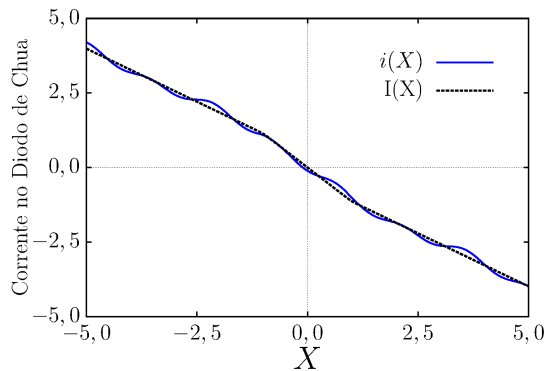
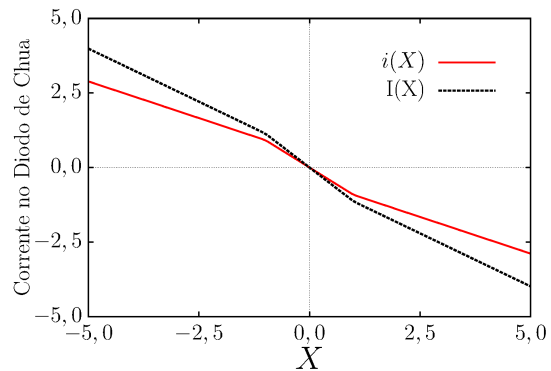


Figura 4.8: Planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variando  $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico e à direita para o linear.

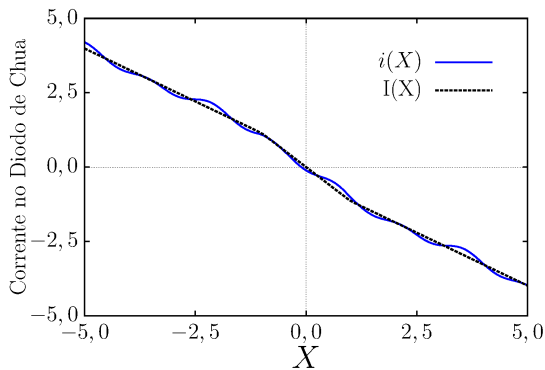
Quando fixamos o valor de  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variamos o parâmetro  $A$ , para o forçamento trigonométrico, a curva  $X \times I(X)$  vai sendo deformada e com isso, perdendo sua linearidade local (por partes), mostrada na Fig. 4.9, esta deformação está relacionada com a supressão das estruturas periódicas presentes no regime caótico. Já para o forçamento linear, quando aumentamos o valor de  $K$ , a inclinação da curva em vermelho diminui, de acordo com a Fig. 4.9, indicando um deslocamento dos domínios caótico e regulares.



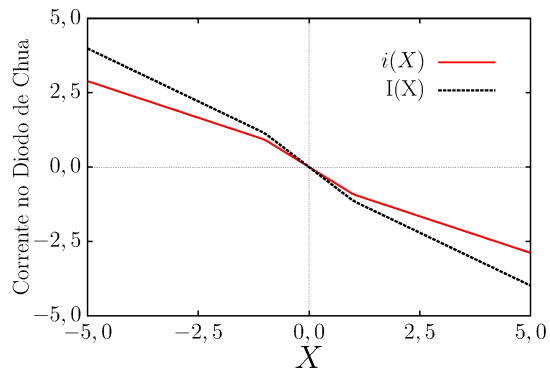
(a)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .



(b)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .



(c)  $F(X)$  trigonométrico com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .



(d)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .

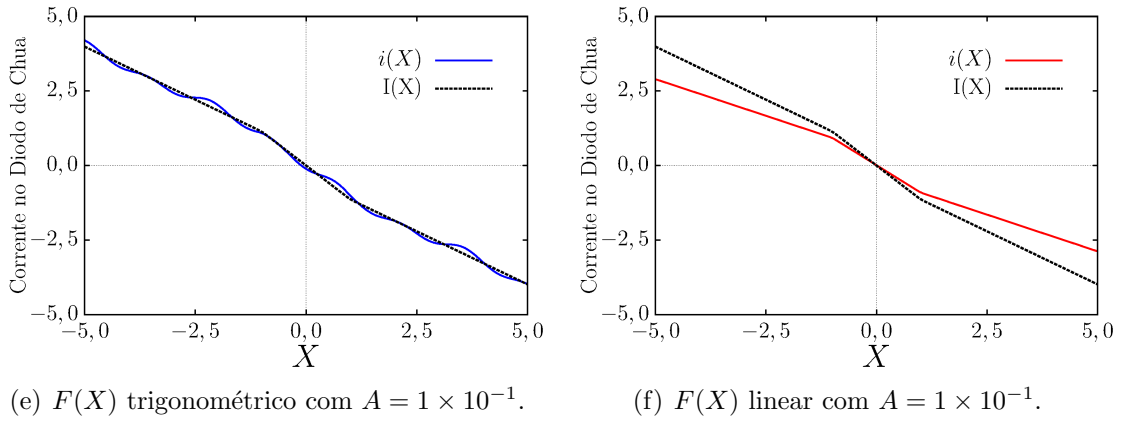


Figura 4.9: Gráficos  $X \times I(X)$  com  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variando  $A$ . À esquerda para o forçamento trigonométrico (linha em azul) e à direita para o linear (linha em vermelho). A linha em preto representa a curva da corrente para o cChua sem o forçamento.

Os resultados mais significativos são mostrados na Tabela 4.1. Vimos que não existe uma diferença qualitativa na dinâmica do sistema quando comparamos os forçamentos trigonométrico e linear para  $K \leq 1 \times 10^{-2}$ , só existindo uma mudança significativa no plano de parâmetros entre eles para valores de  $K > 1 \times 10^{-2}$ . Quando ligamos apenas a parte senoidal do forçamento ( $K \neq 0$  e  $A = 0$ ) e usamos  $K > 1 \times 10^{-2}$ , notamos que o forçamento trigonométrico suprime as estruturas periódicas enquanto que para o linear, as mesmas são preservadas, existindo apenas um deslocamento dos regimes regulares e caóticos no plano de parâmetros, como mostrado na Fig. 4.4. Fixando o valor de  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variando  $A$ , conforme a Fig. 4.8, notamos que não existe mais uma semelhança no plano de parâmetros entre os forçamentos. Para o trigonométrico, conforme aumentamos o valor de  $A$  a região periódica “invade” a região de regime caótico e suprime as estruturas periódicas presentes, enquanto que o forçamento linear desloca os domínios regulares e caóticos. Nossos resultados indicam que a supressão das estruturas periódicas devido ao forçamento trigonométrico, está relacionado com a perda da linearidade local na curva  $X \times I(X)$  causado pelo mesmo e que, o deslocamento dos domínios regulares e caóticos no espaço de parâmetros com o forçamento linear, é resultado da mudança na inclinação na curva  $X \times I(X)$  quando aplicamos o mesmo.

Na Seção 4.2 a seguir, expomos os diagramas de *isospikes* para analisar o número de máximos locais presentes em cada ponto do plano de parâmetros e tentar identificar os períodos das estruturas periódicas existentes no regime caótico. Para isso ampliamos algumas regiões de interesse nos planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, para ambos os forçamentos, e comparamos com os seus respectivos diagramas de *isospikes*.

Amplitudes/Forçamentos	Trigonométrico	Linear
$K \leq 1 \times 10^{-5}$ e $A \geq 0$	Sem mudanças significativas.	Sem mudanças significativas.
$K \leq 1 \times 10^{-2}$ e $A = 0$	Pequeno deslocamento dos domínios regulares e caóticos.	Pequeno deslocamento dos domínios regulares e caóticos.
$K = 1 \times 10^{-1}$ e $A = 0$	Supressão das estruturas periódicas no regime caótico.	Deslocamento dos domínios regulares e caóticos.
$1 \times 10^{-2} < K < 1 \times 10^{-1}$ e $A = 0$	Supressão das estruturas periódicas no regime caótico.	Deslocamento dos domínios regulares e caóticos.
$K = 1 \times 10^{-2}$ e $A \leq 1 \times 10^{-2}$	Sem mudanças significativas.	Pequeno deslocamento dos domínios regulares e caóticos.
$K = 1 \times 10^{-2}$ e $A = 1 \times 10^{-1}$	Supressão das estruturas periódicas no regime caótico.	Pequeno deslocamento dos domínios regulares e caóticos.
$K = 1 \times 10^{-1}$ e $A \geq 0$	Supressão das estruturas periódicas no regime caótico.	Deslocamento dos domínios regulares e caóticos.

Tabela 4.1: Resumo dos resultados numéricos para os forçamentos trigonométrico e linear.

## 4.2 Diagramas de *Isospikes*

Nos diagramas a seguir, as cores estão associadas ao número de máximos locais contidos em um período das órbitas, que podemos associar à periodicidade de cada região do plano de parâmetros, sendo a cor branca para quando o sistema diverge e preta para comportamento caótico ou para períodos maiores que 14, conforme a Fig. 4.10.



Figura 4.10: Paleta de cores e seus respectivos períodos para os Diagramas de *isospikes*. Sendo a cor branca para região onde o sistema diverge e a região em preto onde o sistema apresenta comportamento caótico ou periódico com períodos maiores que 14.

Primeiramente apresentamos as ampliações do plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov para o cChua com o forçamento trigonométrico usando  $K = 1 \times 10^{-2}$  e  $A \geq 0$  e seus respectivos diagramas de *isospikes*, conforme Fig. 4.11. Nesta figura identificamos uma rota para o caos via dobramento de período na região onde o atrator é periódico (região onde o maior expoente de Lyapunov é nulo), partindo do período 1 (azul), passando para período 2 (verde), período 4 (vermelho) até chegar no domínio caótico (preto). Notamos, também, os períodos das estruturas imersas no regime caótico: Primeira estrutura, período 5 (magenta); Segunda estrutura, períodos 5 (magenta) e 7 (ciano); Terceira estrutura, período 7 (ciano). Vamos falar mais sobre os períodos na Seção 4.3. Para  $K = 1 \times 10^{-2}$  e  $A = 1 \times 10^{-1}$  ocorre supressão das estruturas periódicas no regime caótico mencionadas na seção anterior.



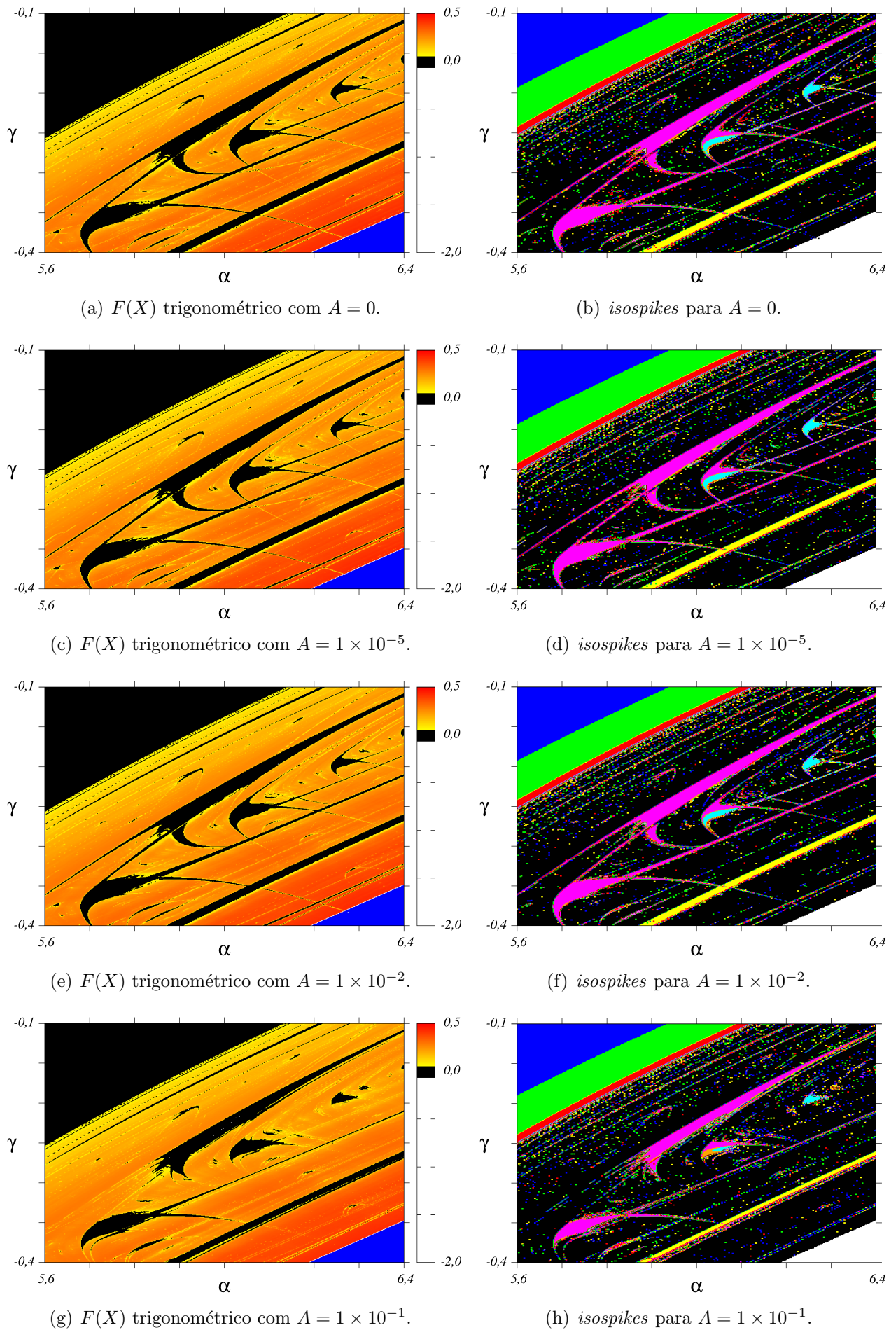
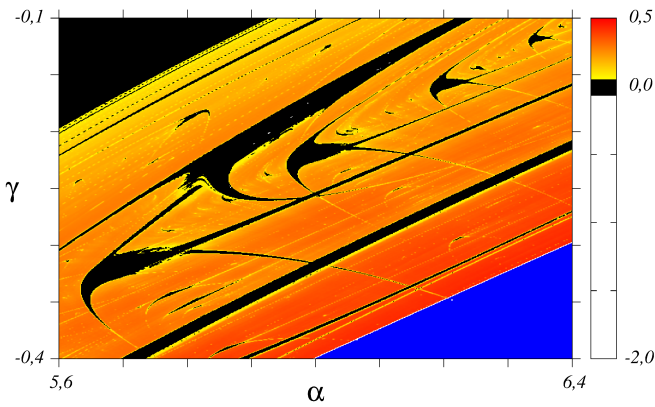
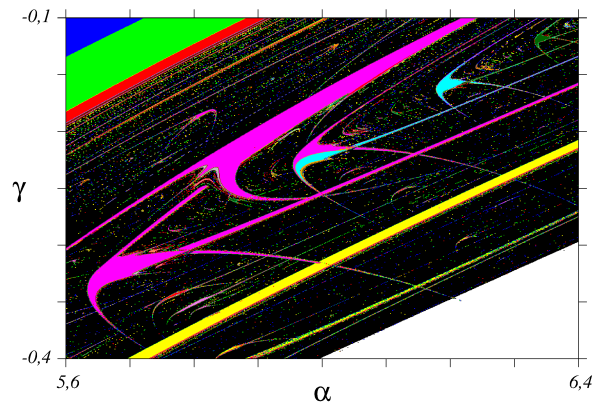
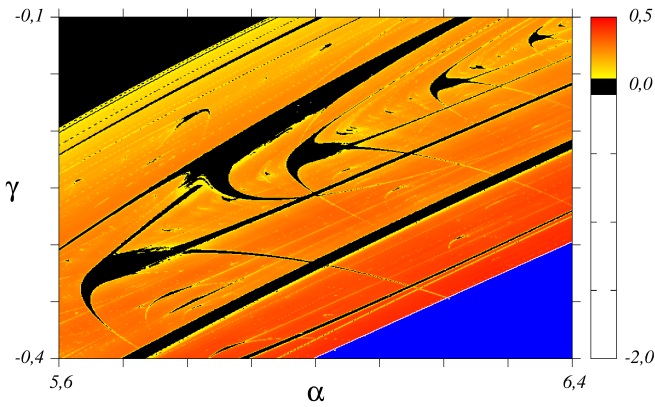
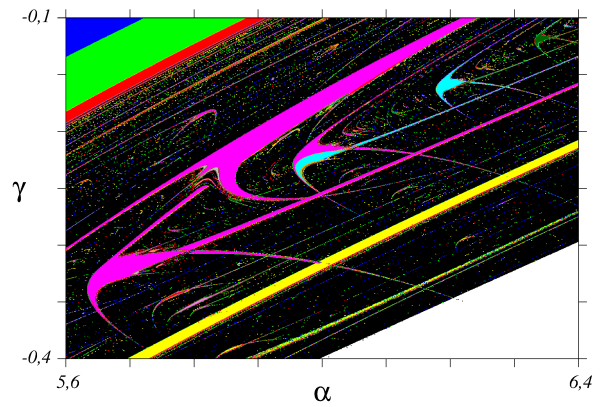
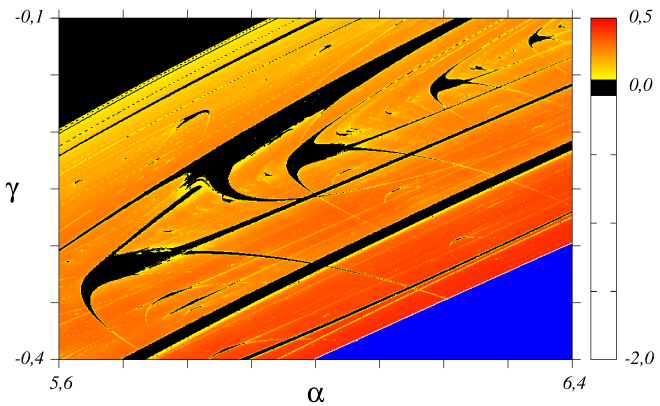
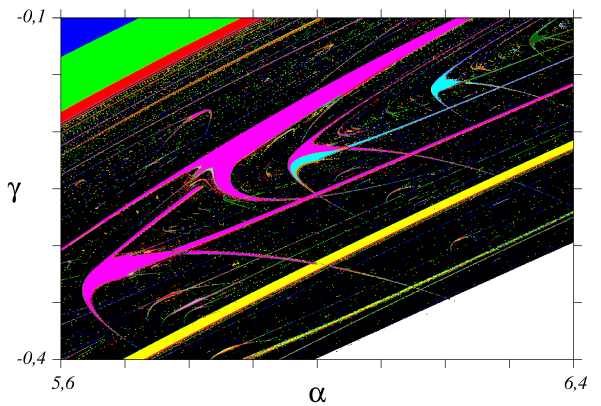


Figura 4.11: *Insets* dos planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com o forçamento trigonométrico usando  $K = 1 \times 10^{-2}$  e variando  $A$  com os seus respectivos diagramas de *isospikes*.



A seguir na Fig. 4.12, ampliamos o plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov com o forçamento linear usando  $K = 1 \times 10^{-2}$  e  $A \geq 0$  e seus respectivos diagramas de *isospikes*, gerados utilizando uma malha discretizada de  $1000 \times 1000$ . Percebemos a mesma rota para o caos via dobramento de período presente quando usamos o forçamento trigonométrico, porém com cada domínio deslocado no plano de parâmetros para cima devido ao forçamento. Contudo, diferentemente para o caso do forçamento trigonométrico, a aproximação linear preserva as estruturas periódicas imersas no regime caótico, com os seus respectivos períodos: Primeira estrutura, período 5 (magenta); Segunda estrutura, períodos 5 (magenta) e 7 (ciano); Terceira estrutura, período 7 (ciano); Quarta estrutura, período 9 (verde escuro).

(a)  $F(X)$  linear com  $A = 0$ .(b) *isospikes* para  $A = 0$ .(c)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-5}$ .(d) *isospikes* para  $A = 1 \times 10^{-5}$ .(e)  $F(X)$  linear com  $A = 1 \times 10^{-2}$ .(f) *isospikes* para  $A = 1 \times 10^{-2}$ .

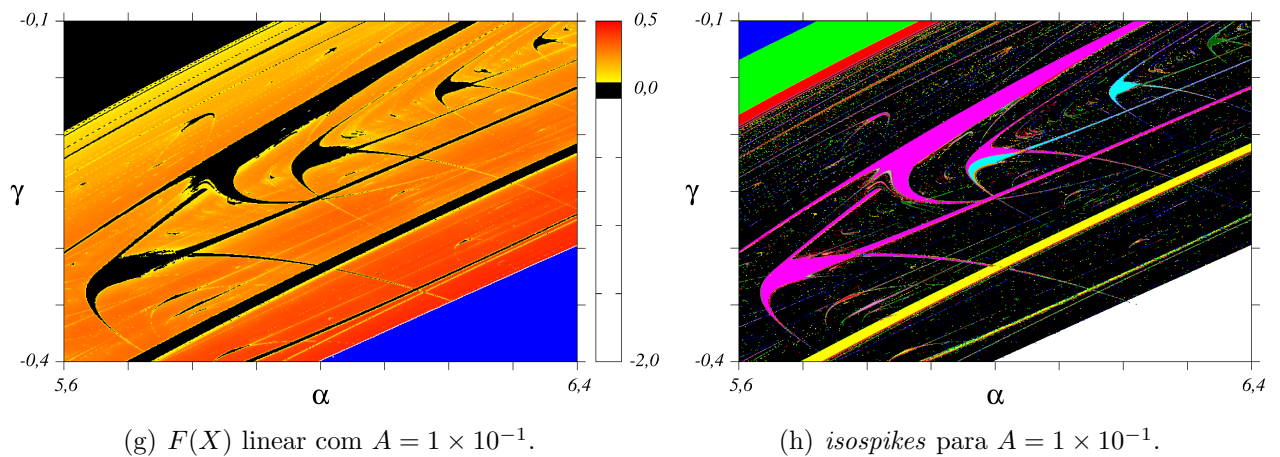
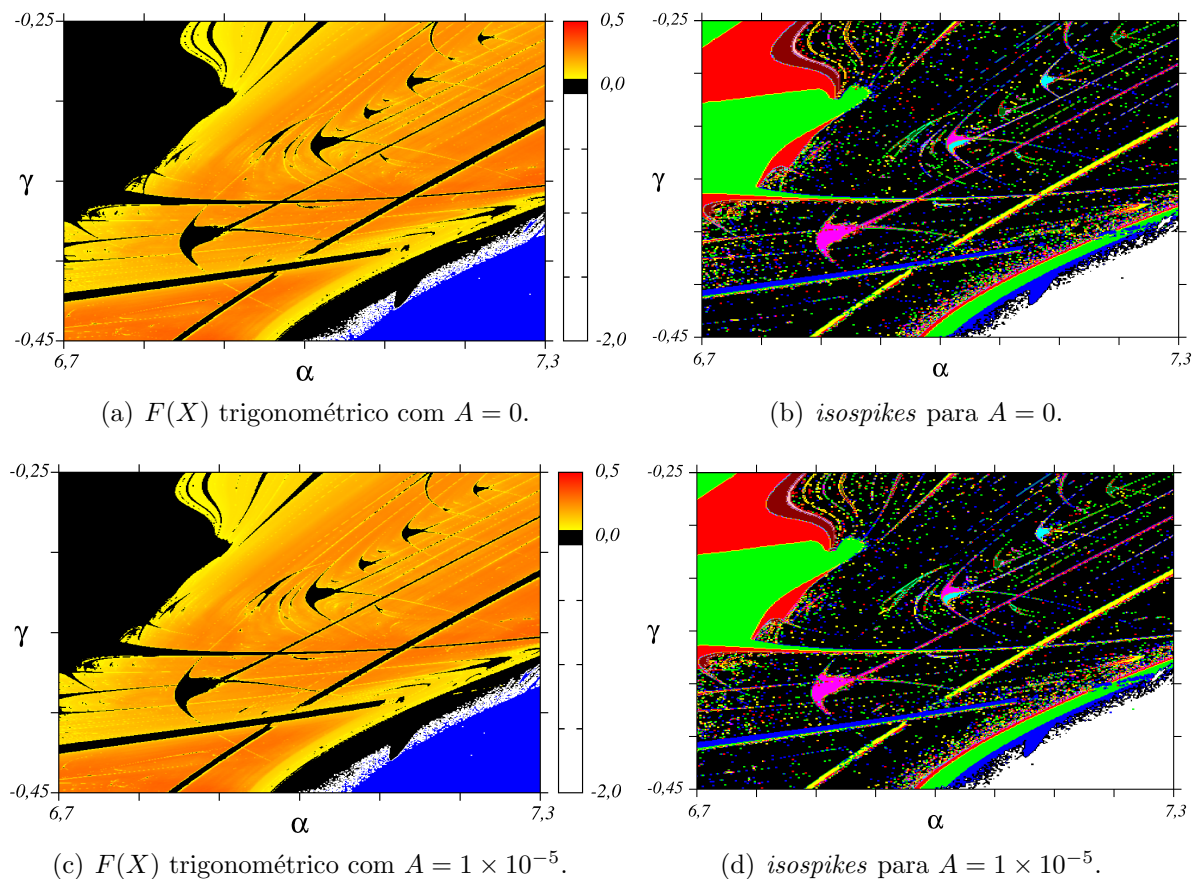


Figura 4.12: *Insets* dos planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com o forçamento linear usando  $K = 1 \times 10^{-2}$  e variando  $A$  com os seus respectivos diagramas de *isospikes*.

Como discutido anteriormente, as mudanças mais significativas ocorrem para valores de  $K \geq 1 \times 10^{-1}$ , então ampliamos o plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov com os valores  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A \geq 0$  e geramos seus respectivos diagramas de *isospikes*, primeiramente sob a ação do forçamento trigonométrico, conforme Fig. 4.13. Percebemos uma “invasão” da região periódica no domínio caótico, ocorrendo a supressão das estruturas periódicas. Determinamos os períodos dessas estruturas, que basicamente são as mesmas daquelas discutidas nas Figs. 4.11 e 4.12.



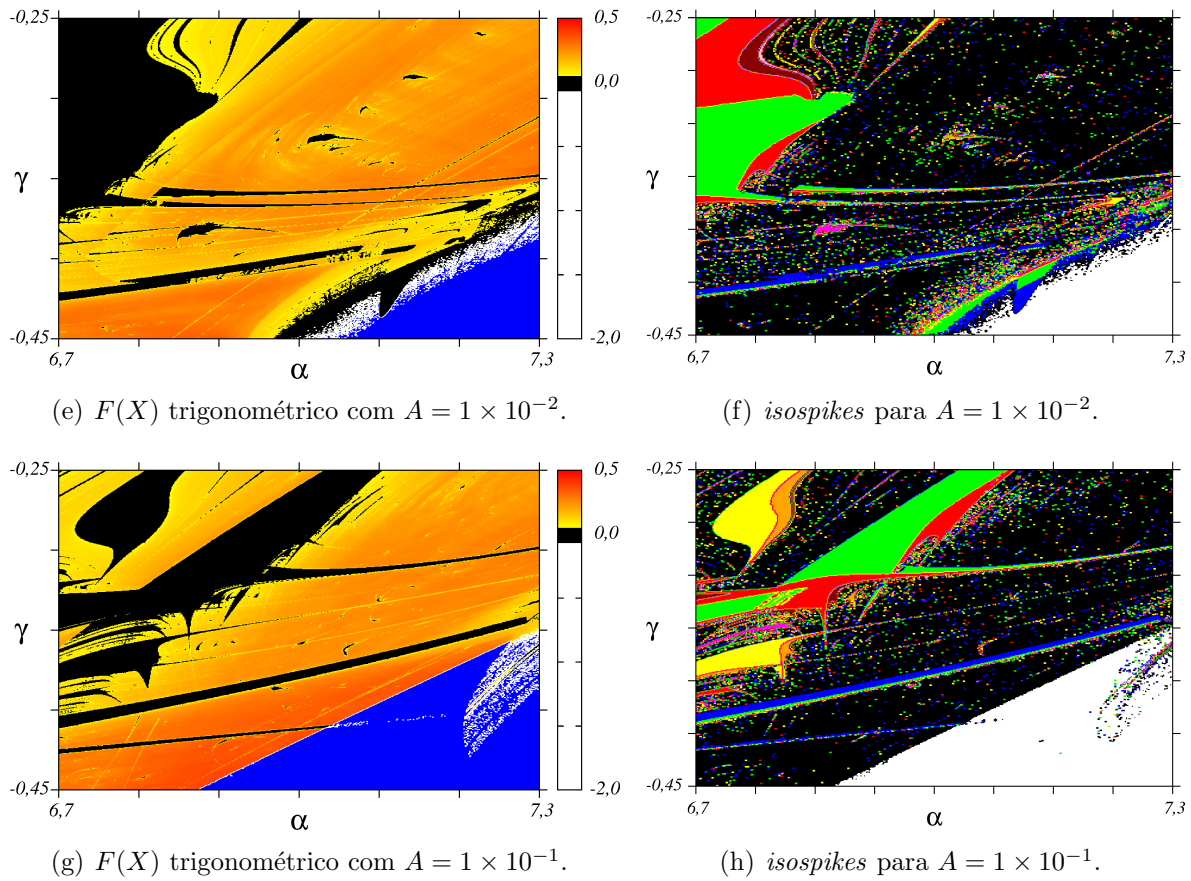
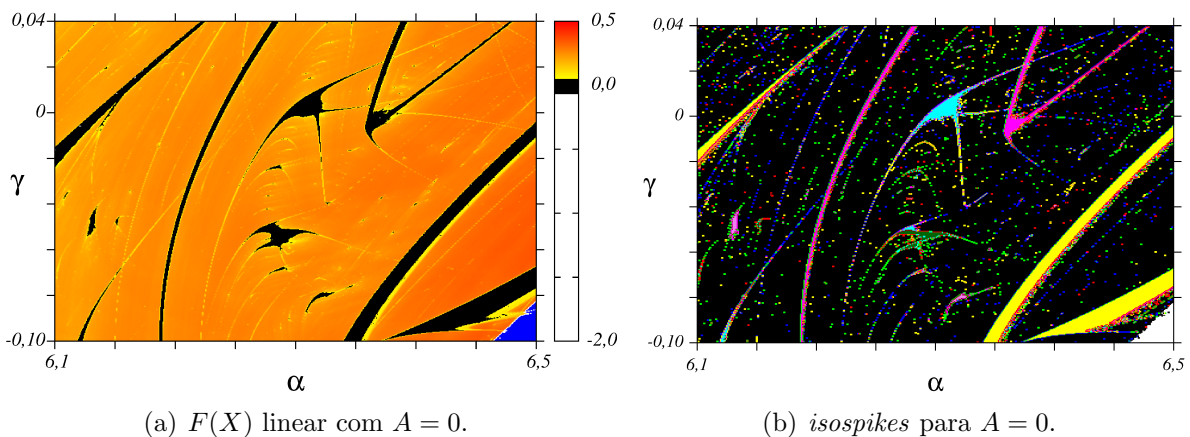


Figura 4.13: *Insets* dos planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com o forçamento trigonométrico usando  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variando  $A$  com os seus respectivos diagramas de *isospikes*.

Em seguida, conforme Fig. 4.14, aplicamos o forçamento linear usando  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A \geq 0$  e ampliamos o plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov e geramos seus diagramas de *isospikes*. Notamos o grande deslocamento dos domínios no plano de parâmetros mencionado na seção anterior e percebemos que as estruturas periódicas são preservadas com os seus respectivos períodos: Primeira estrutura, período 9 (verde escuro); Segunda estrutura, período 7 (ciano); Terceira estrutura, período 5 (magenta).





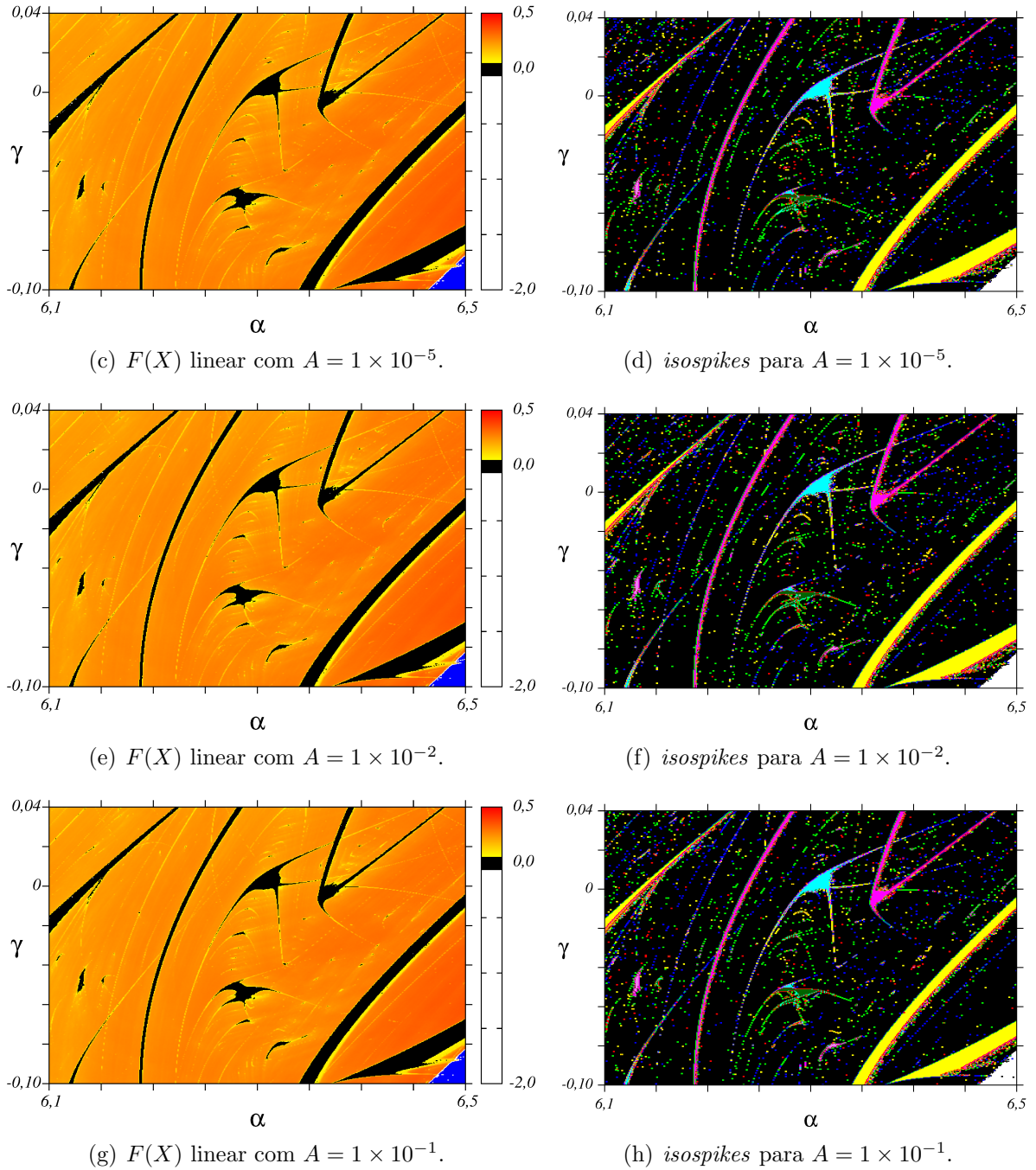


Figura 4.14: *Insets* dos planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com o forçamento linear usando  $K = 1 \times 10^{-1}$  e variando  $A$  com os seus respectivos diagramas de *isospikes*.

Os resultados discutidos nesta seção mostram que os forçamentos trigonométrico e linear não alteram os períodos das estruturas periódicas imersas em domínios caóticos, embora (i) haja a supressão de caos (para  $K \geq 1 \times 10^{-2}$  e  $A \geq 0$ ) devido ao primeiro tipo de forçamento e; (ii) a aproximação linear desloca os domínios regulares e caóticos no plano de parâmetros. Esta conclusão é reforçada através da análise dos atratores apresentados na próxima seção e relacionados às estruturas periódicas discutidas aqui. Além disso, usando os diagramas *isospikes* caracterizamos também uma rota para o caos via dobramento de período na região onde o atrator é periódico. Tal resultado não pode ser obtido utilizando os planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov.

Na Seção 4.3 a seguir, expomos as representações dos atratores a fim de confirmar os períodos das estruturas periódicas existentes no regime caótico. Para isso, repetimos algumas ampliações das regiões de interesse dos planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, para ambos os forçamentos, e comparamos com os seus respectivos atratores.

### 4.3 Atratores

Para a construção dos atratores, integramos o sistema (3.22) utilizando o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo  $1 \times 10^{-3}$ , considerando  $1 \times 10^5$  passos, descartando um transiente de  $1 \times 10^6$  e usando como condição inicial  $(X = 0, 1; Y = 0, 0; Z = 0, 0)$ .

Inicialmente expomos os diferentes atratores presentes no cChua não forçado ( $K = 0$  e  $A = 0$ ). Estão representados os atratores: (i) Ciclo-limite ( $\alpha = 6, 0$  e  $\gamma = 0, 0$ ), representado na Fig. 4.15(a); (ii) Periódico ( $\alpha = 5, 05$  e  $\gamma = -0, 59$ ), exposto na Fig. 4.15(b); e (iii) caótico ( $\alpha = 5, 4$  e  $\gamma = -0, 4$ ), mostrado na Fig. 4.15(c).

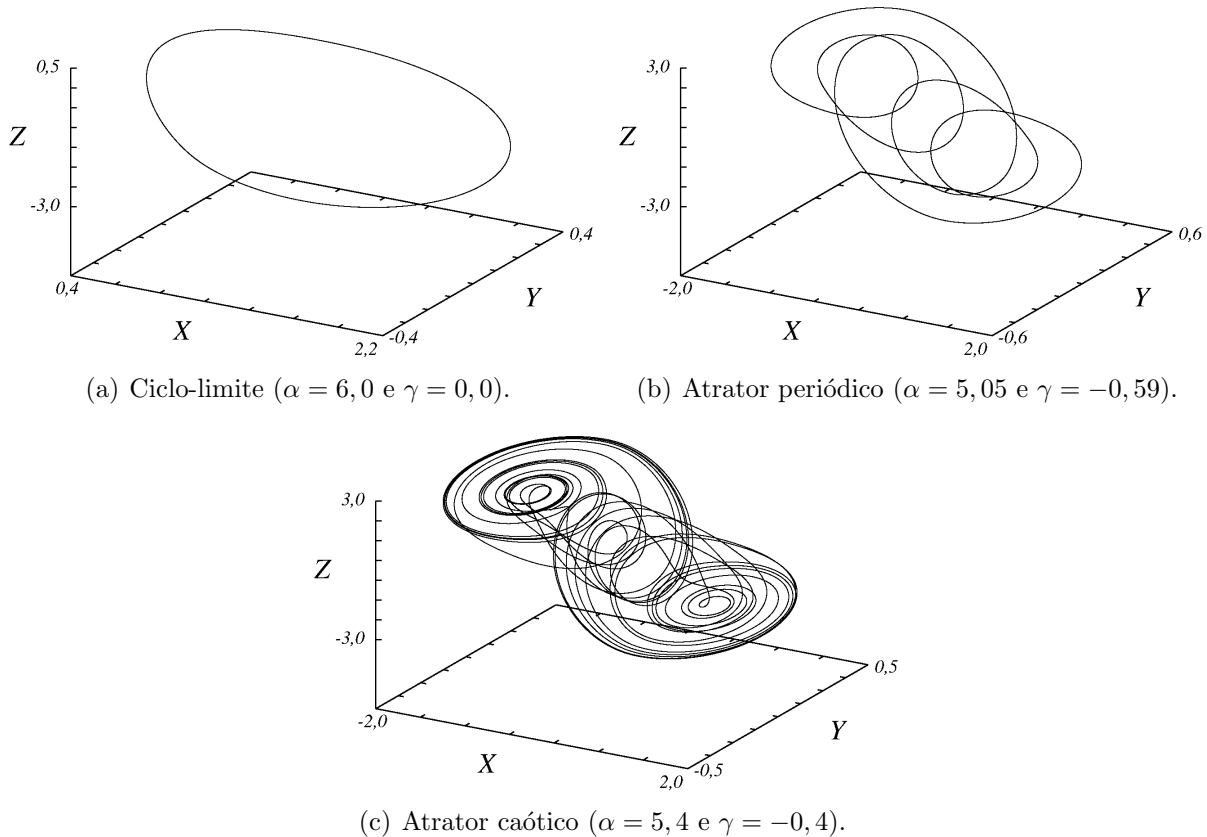


Figura 4.15: Atratores do cChua não forçado ( $K = 0$  e  $A = 0$ ). Na figura (a) atrator ciclo-limite, (b) periódico e em (c) atrator caótico.

Agora aplicamos os forçamentos trigonométrico e linear, com  $K = 1 \times 10^{-2}$  e  $A = 1 \times 10^{-1}$ , e geramos os atratores das três estruturas periódicas e um caótico. Para facilitar a observação, repetimos as figuras dos planos de parâmetros para cada forçamento, expostos na Fig. 4.16, com o trigonométrico à esquerda e o linear à direita. Os respectivos atratores estão evidenciados na Fig. 4.17.

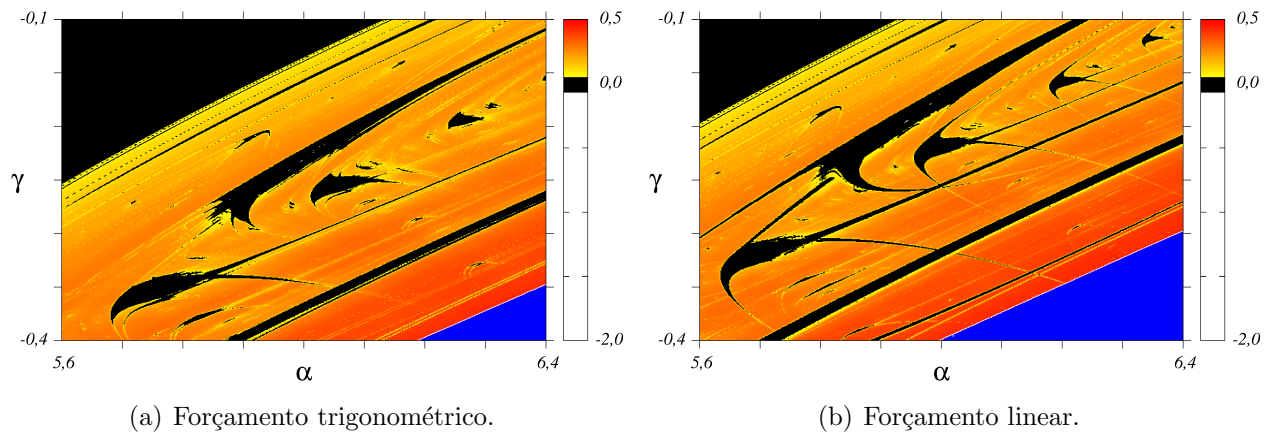
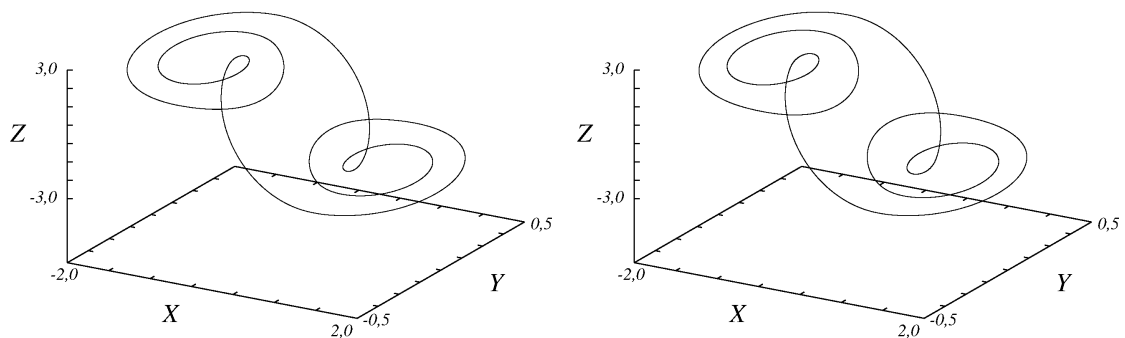
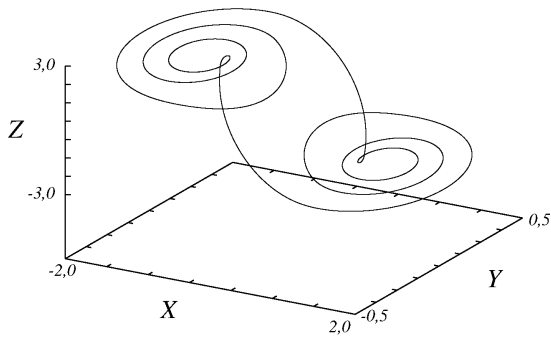


Figura 4.16: *Insets* dos planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando  $K = 1 \times 10^{-2}$  e  $A = 1 \times 10^{-1}$ .

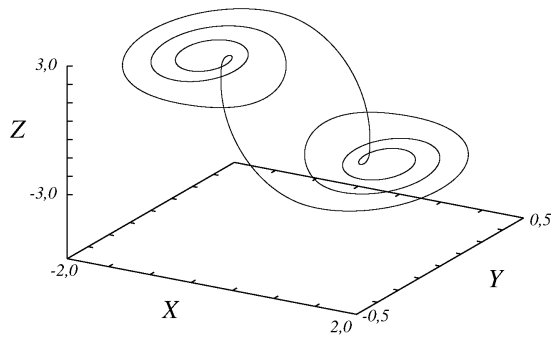
Como apresentado anteriormente, o forçamento trigonométrico suprime as estruturas periódicas no regime caótico e o forçamento linear desloca os domínios no plano de parâmetros. A partir da Fig. 4.17 percebemos que, apesar deste deslocamento, os atratores permanecem os mesmos para ambos os forçamentos, indicando que estes não alteram os períodos destas estruturas. Os atratores indicam que os períodos são: Primeira estrutura, Figs. 4.17(a) e 4.17(b), período 5; Segunda estrutura, Figs. 4.17(c) e 4.17(d), período 7; Terceira estrutura, Figs. 4.17(e) e 4.17(f), período 9, diferentemente dos diagramas de *isospikes*, que mostraram um período 7. Os atratores das Figs. 4.17(g) e 4.17(h) são caóticos. Como mencionado anteriormente, para estes valores dos parâmetros  $K$  e  $A$ , não há uma mudança significativa na dinâmica do sistema, quando comparamos os forçamentos entre si.



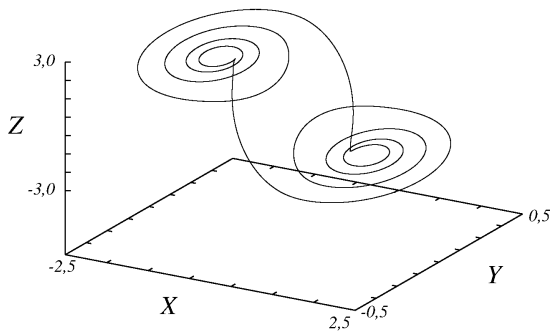
(a) Atrator periódico ( $\alpha = 5,75$  e  $\gamma = -0,35$ ) para o forçamento trigonométrico. (b) Atrator periódico ( $\alpha = 5,70$  e  $\gamma = -0,32$ ) para o forçamento linear.



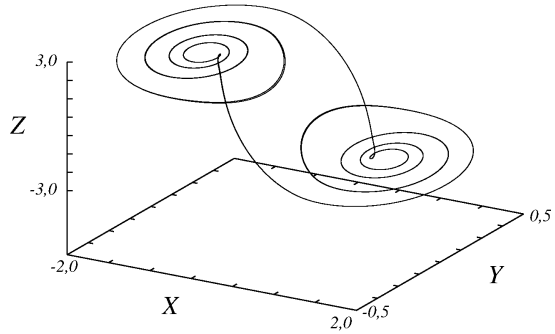
(c) Atrator periódico ( $\alpha = 6,03$  e  $\gamma = -0,26$ ) para o forçamento trigonométrico.



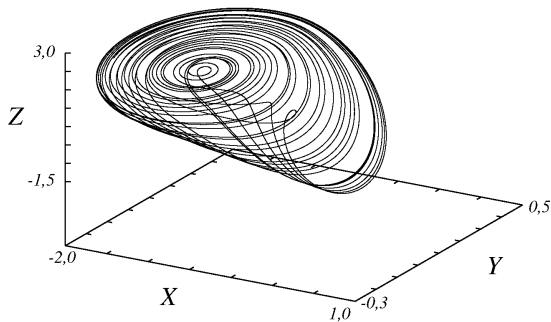
(d) Atrator periódico ( $\alpha = 6,00$  e  $\gamma = -0,22$ ) para o forçamento linear.



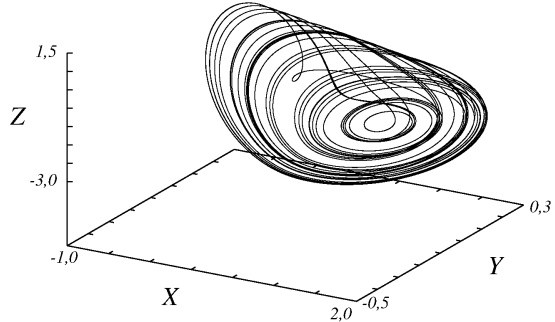
(e) Atrator periódico ( $\alpha = 6,26$  e  $\gamma = -0,19$ ) para o forçamento trigonométrico.



(f) Atrator periódico ( $\alpha = 6,21$  e  $\gamma = -0,16$ ) para o forçamento linear.



(g) Atrator caótico ( $\alpha = 5,7$  e  $\gamma = -0,3$ ) para o forçamento trigonométrico.



(h) Atrator caótico ( $\alpha = 5,70$  e  $\gamma = -0,25$ ) para o forçamento linear.

Figura 4.17: Atratores do cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando os valores  $K = 1 \times 10^{-2}$  e  $A = 1 \times 10^{-1}$ .

Agora aplicamos os forçamentos trigonométrico e linear, com  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A = 1 \times 10^{-2}$ , e geramos os atratores das três estruturas periódicas e um caótico. Para facilitar a observação, repetimos as figuras dos planos de parâmetros para cada forçamento, exposto na Fig. 4.18, com o trigonométrico à esquerda e o linear à direita. Os respectivos atratores estão evidenciados na Fig. 4.19.

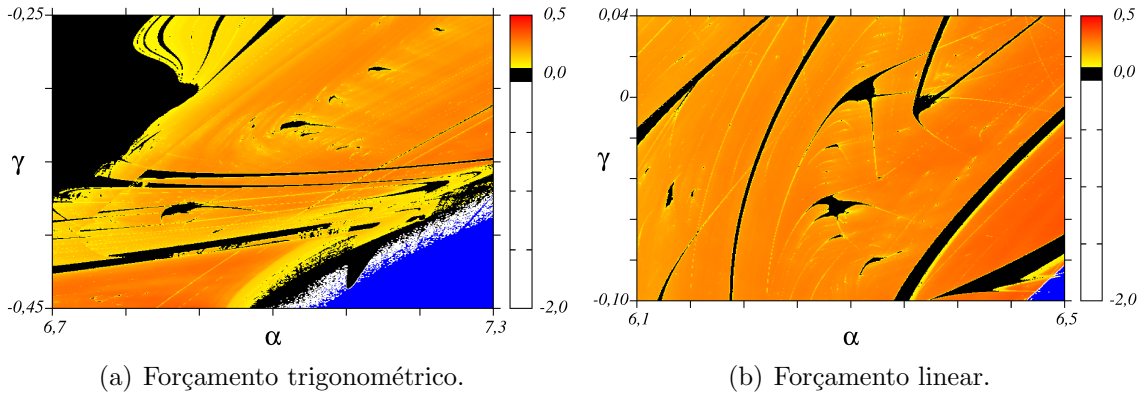
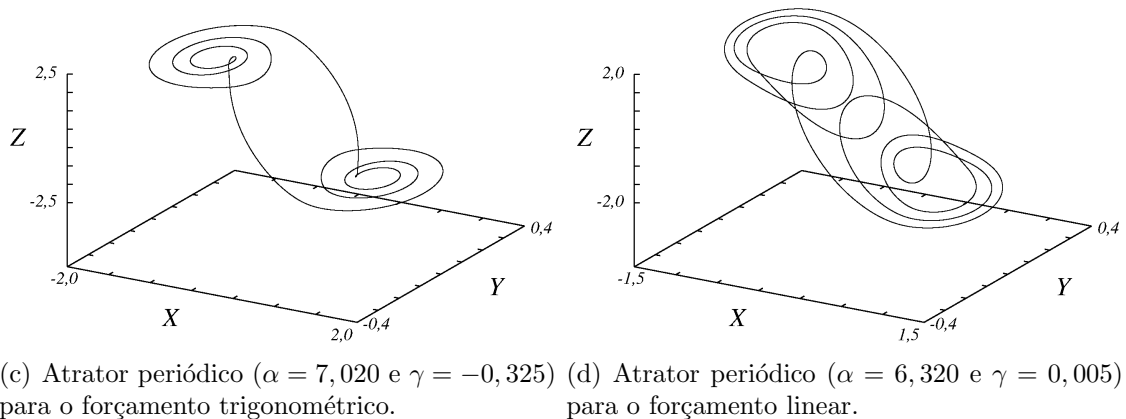
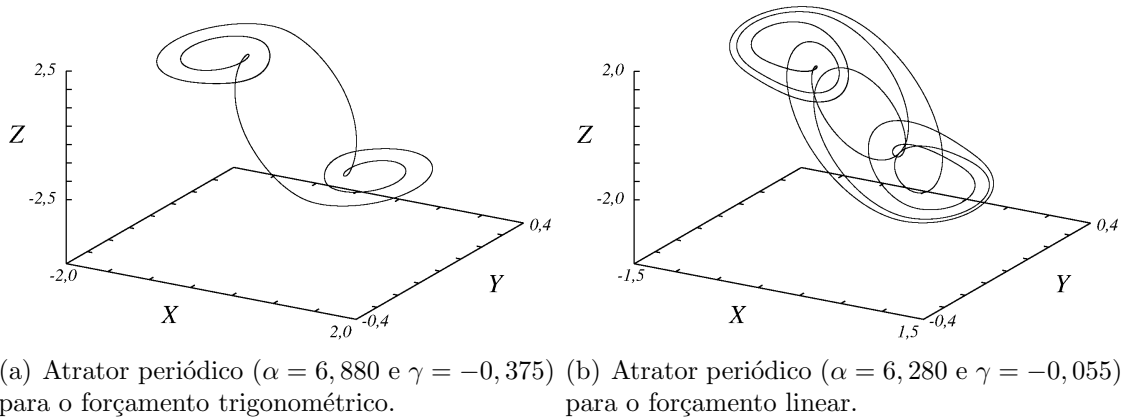
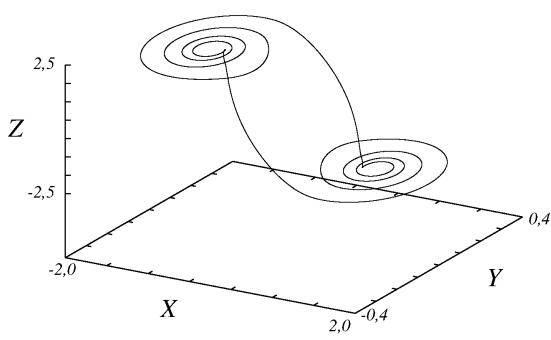


Figura 4.18: *Insets* dos planos de parâmetros ( $\alpha \times \gamma$ ) para o cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A = 1 \times 10^{-2}$ .

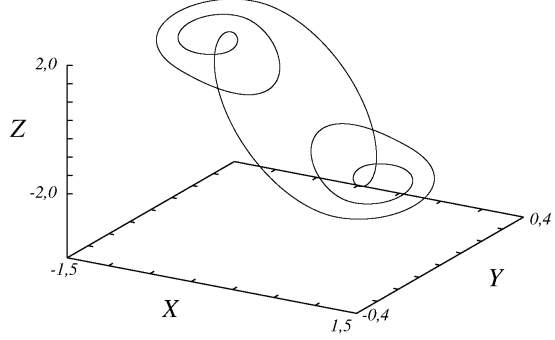
Notamos uma grande diferença na dinâmica do sistema quando comparamos os forçamentos. Como dito anteriormente, no forçamento trigonométrico, conforme aumentamos o valor de  $A$ , a região periódica invade o regime caótico e, com isso, suprime as estruturas periódicas contidas no mesmo. Já para o forçamento linear, ocorre um deslocamento dos domínios regulares e caóticos ao variarmos os valores do mesmo. Os atratores indicam que os períodos são, (i) Para o forçamento trigonométrico: Primeira estrutura, Fig. 4.19(a), período 5; Segunda estrutura, Fig. 4.19(c), período 7; Terceira estrutura, Fig. 4.19(e), período 9. (ii) Para o forçamento linear: Primeira estrutura, Fig. 4.19(b), período 9; Segunda estrutura, Fig. 4.19(d), período 7; Terceira estrutura, Fig. 4.19(f), período 5. Os atratores das Fig. 4.19(g) e 4.19(h) são caóticos.



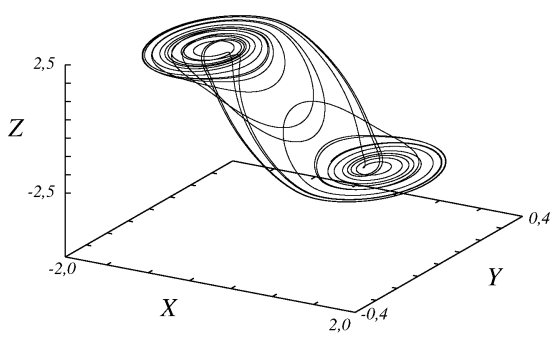




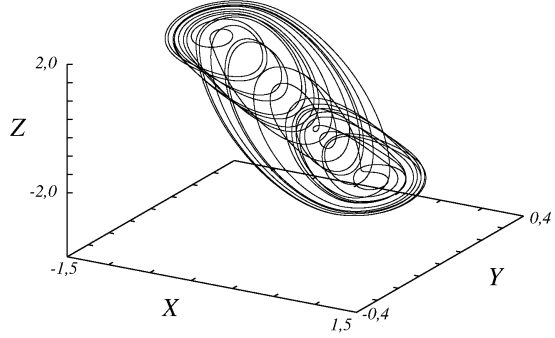
(e) Atrator periódico ( $\alpha = 7,142$  e  $\gamma = -0,287$ ) para o forçamento trigonométrico.



(f) Atrator periódico ( $\alpha = 6,360$  e  $\gamma = -0,005$ ) para o forçamento linear.



(g) Atrator caótico ( $\alpha = 7,2$  e  $\gamma = -0,3$ ) para o forçamento trigonométrico.



(h) Atrator caótico ( $\alpha = 6,40$  e  $\gamma = -0,08$ ) para o forçamento linear.

Figura 4.19: Atratores do cChua com o forçamento trigonométrico à esquerda e linear à direita, usando os valores  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A = 1 \times 10^{-2}$ .

## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, estudamos as implicações de um forçamento periódico e assimétrico (trigonométrico) na dinâmica do circuito de Chua. Aplicamos as leis de Kirchhoff para encontrar as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que regem a dinâmica do sistema. Efetuamos um estudo analítico sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio nas regiões R1, R2 e R3, limitadas pela Eq. (3.23). Para tal expandimos o forçamento em série de Taylor e, a fim de facilitar os cálculos, usamos apenas o primeiro termo da expansão, tornando o forçamento linear. Então, para o estudo numérico, investigamos as consequências dos forçamentos trigonométrico e linear na dinâmica do circuito de Chua, para diferentes valores dos parâmetros  $K$  e  $A$  no sistema de equações (3.22). Usamos como ferramentas os planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, diagramas de *isospikes* e a representação dos atratores.

Através dos resultados analíticos, encontramos os pontos de equilíbrio e estudamos a sua estabilidade. Utilizando o critério de Routh-Hurwitz (RH) investigamos os sinais dos coeficientes das equações características. Com isso, concluímos que como há uma inversão de sinal do coeficiente  $b_1$  nas regiões R1 e R3 e não existe uma superposição de estabilidade nas Eqs. (3.46) e (3.51), representada na Fig. 3.9, então ocorrem duas mudanças de sinais nos elementos da primeira coluna da série de RH:  $a_2 \rightarrow b_1$  e  $b_1 \rightarrow a_0$ , logo o sistema tem dois polos do lado direito do plano complexo, resultando em uma instabilidade dos pontos de equilíbrio nessas regiões para os intervalos dos parâmetros  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $-1 \leq \gamma \leq 1$ . Já para a região R2, existe uma superposição de estabilidade nas Eqs. (3.55) e (3.59), representada na Fig. 3.12, para os mesmos intervalos dos parâmetros acima. Para essa região de superposição o ponto de equilíbrio é estável, fora desta área é instável.

Investigamos numericamente a influência dos forçamentos trigonométrico e linear na dinâmica do sistema e comparamos os resultados para diferentes valores das amplitudes  $K$  (parte periódica) e  $A$  (parte assimétrica). Os resultados mostram que: (i) para valores de  $K \leq 1 \times 10^{-2}$  e di-

ferentes valores de  $A$  não há uma mudança significativa entre o forçamento trigonométrico e a aproximação linear na dinâmica do sistema e os domínios regulares e caóticos sofrem pequenos deslocamentos diferentes em cada caso, mas mantendo as estruturas periódicas e as regiões cujo comportamento é caótico. Uma mudança é vista para  $A = 1 \times 10^{-1}$ , onde as estruturas periódicas presentes no regime caótico começam a ser suprimidas para o forçamento trigonométrico devido a influência do mesmo na corrente  $I(X)$  do diodo de Chua, destruindo a linearidade local (por partes) presente; (ii) para valores de  $K = 1 \times 10^{-1}$  e  $A \neq 0$  existem diferenças no espaço de parâmetros para o forçamento trigonométrico e linear, certamente devido ao fato de a aproximação ser linear e não possuir parte assimétrica, diferentemente do caso geral. Com o forçamento trigonométrico, a região periódica invade a região de regime caótico e suprime as estruturas periódicas presentes no mesmo, este comportamento está relacionado com a destruição da linearidade (por partes) presente na corrente do diodo de Chua. Para a aproximação linear, usando os mesmos valores de  $K$  e  $A$ , mesmo com um comportamento totalmente diferente do trigonométrico, as estruturas periódicas são preservadas e os domínios regulares e caóticos sofrem um deslocamento no plano de parâmetros conforme aumentamos  $A$ , fato ligado à mudança na inclinação das regiões lineares da corrente  $I(X)$ . Nos diagramas de *isospikes* mostramos que os períodos das estruturas imersas no domínio caótico não sofrem alteração quando aplicamos ambos os forçamentos, resultado confirmado com a representação dos atratores. Encontramos uma rota para o caos via dobramento de período na região onde o atrator é periódico, partindo do período 1, passando para período 2, período 4 até chegar no domínio caótico. Com todos esses dados, concluímos que a aproximação linear para o forçamento  $F(X)$  é válido para os valores de  $K \leq 1 \times 10^{-2}$  e  $A \leq 1 \times 10^{-2}$  das amplitudes, enquanto que, para valores maiores ela deixa de ser uma aproximação válida. Porém, também mostram que ambos os forçamentos servem para deslocar os domínios presentes no espaço de parâmetros do sistema, principalmente com a aproximação linear, e que a parte assimétrica do forçamento trigonométrico é um bom supressor de estruturas periódicas, para valores de  $K \geq 1 \times 10^{-2}$  e  $A \geq 1 \times 10^{-1}$ .

Para trabalhos futuros, podemos realizar um estudo via continuação numérica utilizando o software MATCONT [7], a fim de obter as curvas de bifurcações do cChua com os forçamentos. Propomos analisar ainda, via o critério de Routh-Hurwitz, a dinâmica do cChua quadridimensional com apenas três malhas, adicionando uma componente de armazenamento de energia. Efetuaremos um estudo numérico sobre a dinâmica deste circuito, usando como ferramentas os planos de parâmetros para os dois maiores expoentes de Lyapunov, para caracterizar as regiões periódicas, caóticas e hipercaóticas, os diagramas de *isospikes* e a representação dos atratores.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AGUIRRE, L. et al. *Inductorless Chua's circuit*. Eletronics Letters, IET, v. 36, n. 23, p. 1915-1916, 2000.
- [2] FORTUNA, L.; FRASCA, M.; XIBILIA, M. *Chua's Circuit Implementations: Yestarday, Today and Tomorrow*. World Scientific Pub, (World Scientific series on nonlinear science. Series A), 2009.
- [3] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. *Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless Chua's circuit*. ScienceDirect. Physics D, v. 233, p. 66-72, 2007.
- [4] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. *Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit*. Physics Letters A, v. 372, p. 4793-4798, 2008.
- [5] ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. *Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of chua circuit*. International Journal of Circuit Theory and Applications, v. 40, p. 189-194, 2012.
- [6] CARDOSO, J. C. D.; ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M. *Complex pediodic structures in bi-dimensional bifurcation diagrams of RLC circuit model with a nonlinear NDC device*. Physics Letters A, v. 373, p. 2050-2053, 2009.
- [7] HOFF, A.; SILVA, D. T. S.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A. *Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model*. Physics Letters A, v. 378, p. 171-177, 2014.
- [8] RECH, P. C.; ALBUQUERQUE, H. A. *a Hyperchaotic Chua System*. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 19, n. 11, p. 3823-3828, 2009.
- [9] PREBIANCA, F.; ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M. *On the effect of a parallel resistor in the Chua's circuit*. Jornal of Physics: Conference Series 285 (2011) 012005.
- [10] BROWN, R. *Generalizations of the Chua Equations*. IEEE Transactions on Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications, v. 40, n. 11, p. 878-884, 1993.
- [11] PARLITZ, U. *Lyapunov Exponents from Chua's Circuit*. Jornal of Circuits, Systems, and Computers, v. 3, n. 2, p. 507-523, 1993.
- [12] MEDRANO-T, R. O.; ROCHA, R. *The Negative Side of Chua's Circuit Parameter Space: Stability Analysis, Period-Adding, Basin of Attraction Metamorphoses, and Experimental Investigation*. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 24, n. 9, p. 1430025-1–14350025-17, 2014.
- [13] ROCHA, R.; MEDRANO-T, R. O. *Stability Analysis and Mapping of Multiple Dynamics of Chua's in Full Four-Parameter Space*. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 25, n. 13, p. 1530037-1–1530037-16, 2015.

- 
- [14] PREBIANCA, F. *Estudo de um circuito de Chua com realimentação tipo seno*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 81 páginas, 2014.
- [15] KUZNETSOV, I. *Elements of applied bifurcation theory*. [S.1.]: Springer, 1998.
- [16] ALVES MONTEIRO, L. H. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [17] CHUA, L. O. *The genesis of Chua's circuit*. Archiv for Elektronik and Übertragungstechnik, 1992.
- [18] CHUA, L. O. *Chua circuit ten years later*. IEICE Trans. Electron, v. E77-A, n. 11, p. 1811-1822, 1994.
- [19] CHUA, L. O.; WU, C. W.; HUANG, A.; ZHONG, G. Q. *A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos-Part 1: Routes to Chaos*. IEEE Transactions on Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications, v. 40, n. 10, p. 732-744, 1993.
- [20] CHUA, L. O.; WU, C. W.; HUANG, A.; ZHONG, G. Q. *A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos-Part 2: Strange Attractors*. IEEE Transactions on Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications, v. 40, n. 10, p. 745-761, 1993.
- [21] RAMÍREZ-ÁVILA, G. M.; GALLAS, J.A. *How similar is the performance of cubic and piecewise-linear circuits of Chua?* Physics Letters A, v. 375, p. 143-148, 2010.
- [22] RUBINGER, R. M.; NASCIMENTO, A. W. M.; MELLO, L. F.; RUBINGER, C. P. L.; MANZANARES FILHO, N.; ALBUQUERQUE, H. A. *Inductorless Chua's Circuit: Experimental Time Series Analysis*. Mathematical Problems in Engineering, v. 2007, Article ID 83893, 16 pages, 2007.
- [23] CHENG, D. K. *Analysis of Linear Systems*. Londres: Editora Addison-Wesley Publishing Company, INC. Reading, Massachusetts, U.S.A, 1961.
- [24] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [25] WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*. Physica 16D, North-Holland, Amsterdam, v. 13, n. 3, p. 285-317, 1985.
- [26] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. *Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows*. Physical Review E, v. 84, 016216, 2011.
- [27] GALLAS, M. R.; GALLAS, J. A. C. *Distribution of chaos and periodic spikes in three-cell population model of cancer*. Eur. Phys. J. Special Topics, v. 223, p. 2131-2144, 2014.
- [28] MARTINS, L. C.; GALLAS, J. A. C. *Multistability, Phase Diagrams and Statistical Properties of the Kicker Rotor: A Map with many Coexisting Attractors*. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 18, n. 6, p. 1705-1717, 2008.
- [29] ALLIGOOD K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer Verlag, 1996.
- [30] SPROTT, J. C. *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. [S.1.]: World Scientific, 2010.
- [31] GANTMACHER, F. R. *Theory of Matrices, vol. 1*. Chelsea, New York, 1989.

# Apêndice A

## O CIRCUITO DE CHUA

O objetivo deste apêndice é analisar o comportamento da dinâmica do cChua original, mostrado na Fig. A.1. Para isso, partimos do conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas que descreve o comportamento da dinâmica do circuito, e encontramos os pontos de equilíbrio a fim de analisar a estabilidade do sistema nas três regiões delimitadas pela Eq. (3.23).

### A.1 O Circuito de Chua Original

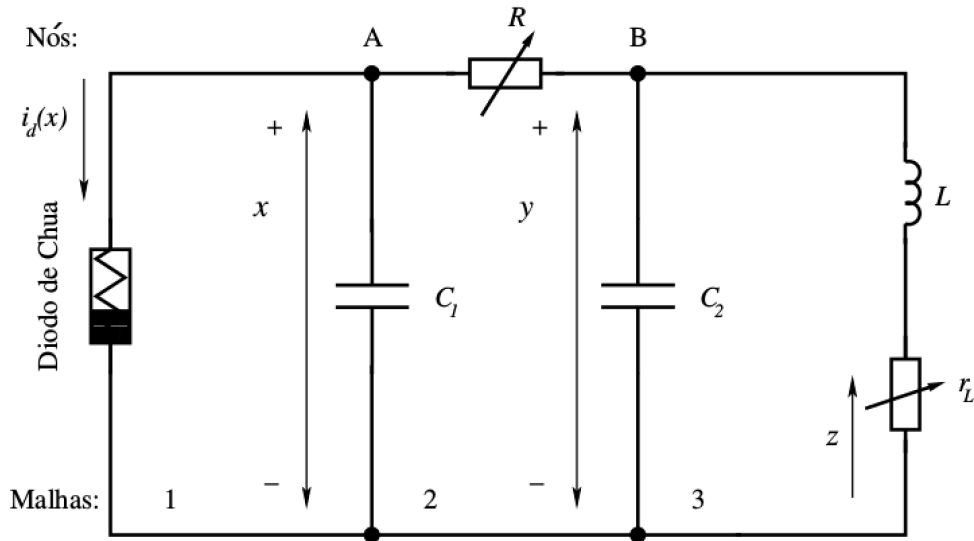


Figura A.1: Representação do circuito  $RLC$  caótico de Chua, contendo um resistor  $R$ , dois capacitores  $C_1$ ,  $C_2$  e um indutor  $L$  com uma resistência interna  $r_L$ . As variáveis  $x$  e  $y$  correspondem as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente e a variável  $z$  a corrente que atravessa o indutor.

Para encontrar o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica do cChua, aplicamos as leis de Kirchhoff nas malhas 2 e 3, e a lei dos nós em A e B. Como todos esses cálculos já foram feitos no Cap. 3, e a fim de evitar repetir cálculos em excesso, partiremos da Eq. (3.8) fazendo  $K \rightarrow 0$ , e aplicamos as transformações (3.9) para encontrar o conjunto de equações

diferencias autônomas e adimensionais de primeira ordem, que descreve o comportamento da dinâmica do cChua original,

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{dX}{dT} = \alpha [Y - X - I(X)], \\ \dot{Y} = \frac{dY}{dT} = X - Y + Z, \\ \dot{Z} = \frac{dZ}{dT} = -\beta Y - \gamma Z, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

com,

$$I(X) = \begin{cases} bX + a - b, & \text{se } X \geq 1, 0 \quad (\text{Região R1}), \\ aX, & \text{se } |X| < 1, 0 \quad (\text{Região R2}), \\ bX - a + b, & \text{se } X \leq -1, 0 \quad (\text{Região R3}). \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

O conjunto de Eqs. (A.1) junto com a Eq. (A.2), foram utilizados para encontrar e analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, utilizando o critério de Routh-Hurwitz mostrado na Seção 3.2.2.

### A.1.1 Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio são calculados fazendo o conjunto de Eqs. (A.1) ser nulo. Assim, conseguimos isolar as variáveis X, Y e Z e calcular os pontos de equilíbrio para as regiões delimitada pela Eq. (A.2) e, com isso, fazer o estudo da estabilidade do sistema para as regiões R1, R2 e R3. Os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{cases} X = \frac{-I(X)(\beta + \gamma)}{\beta}, \\ Y = \frac{-I(X)\gamma}{\beta}, \\ Z = I(X). \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a Eq. (A.2), encontramos os pontos de equilíbrio para cada região delimitada: para região R1 temos  $I(X) = bX + a - b$ , o ponto de equilíbrio fica,

$$\begin{cases} X = \frac{-(a - b)(\beta + \gamma)}{\beta + b\beta + b\gamma}, \\ Y = \frac{-(a - b)\gamma}{\beta + b\beta + b\gamma}, \\ Z = \frac{(a - b)\beta}{\beta + b\beta + b\gamma}, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

para região R2 temos  $I(X) = aX$ , ficamos com,

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

e para região R3 temos  $I(X) = bX - a + b$ , o ponto de equilíbrio fica,

$$\begin{cases} X = \frac{(a-b)(\beta + \gamma)}{\beta + b\beta + b\gamma}, \\ Y = \frac{(a-b)\gamma}{\beta + b\beta + b\gamma}, \\ Z = \frac{-(a-b)\beta}{\beta + b\beta + b\gamma}. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Geramos os gráficos de cada ponto de equilíbrio para as regiões R1 e R3, visando identificar como esses pontos são caracterizados variando o parâmetro  $\gamma$  em um intervalo  $[-1,1]$ . A Fig. A.2 mostra essa evolução para a região R1 e a Fig. A.3 para a região R3.

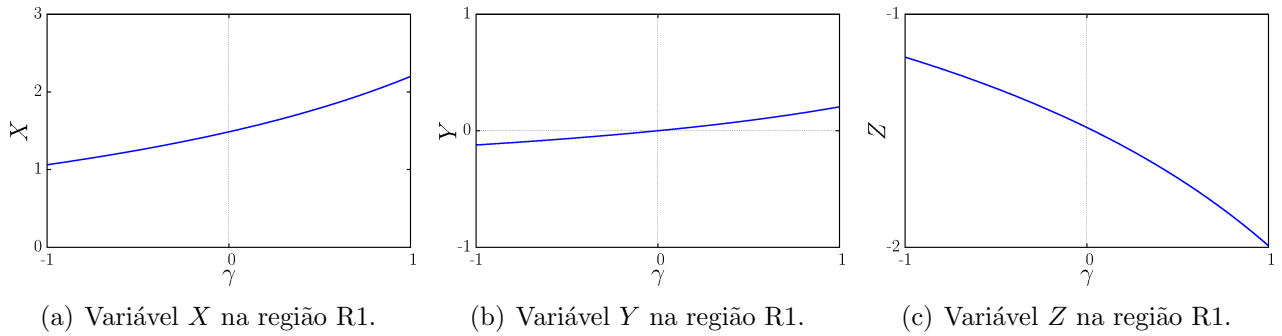


Figura A.2: Gráficos do ponto de equilíbrio da região R1.

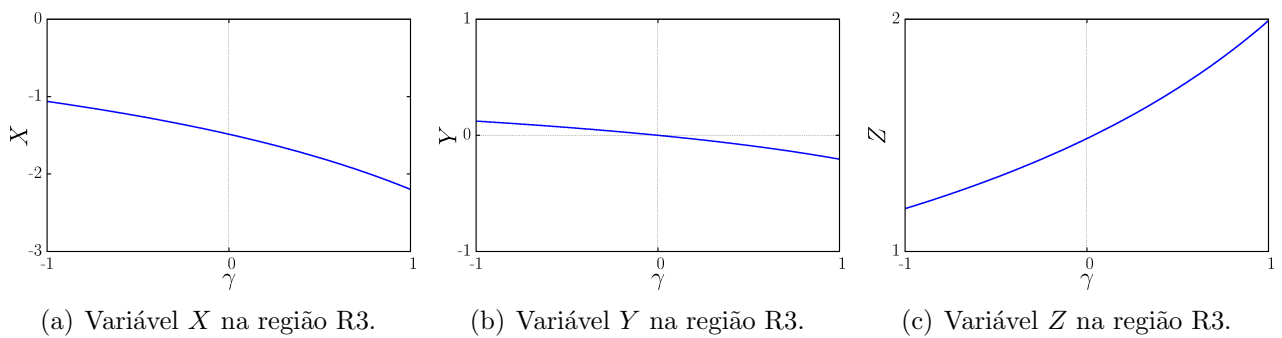


Figura A.3: Gráficos do ponto de equilíbrio da região R3.



### A.1.2 Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio

O objetivo é encontrar as regiões no espaço de parâmetros onde os pontos de equilíbrio de cada região são estáveis, em outras palavras, queremos determinar os intervalos dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$ , para que os pontos de equilíbrio das regiões R1, R2 e R3 sejam estáveis e, com isso, delimitar as regiões de estabilidade usando o critério de RH [12, 13]. Para isso usamos a matriz jacobiana descrita pela Eq. (A.7) para encontrar as equações características de cada região delimitada pela Eq. (A.2), fazendo  $\det(J - \lambda I) = 0$ , sendo  $I$  a matriz identidade. Como a matriz jacobiana independe das variáveis do sistema e  $\frac{dI}{dX}$  possui mesmo valores para as regiões R1 e R3, de acordo com a Eq. (A.8), ficamos com duas equações características, uma para as regiões R1 e R3 e outra para a região R2.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \dot{Z}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \left(1 + \frac{dI}{dX}\right) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

sendo que, o termo  $\frac{dI}{dX}$  obtemos derivando a Eq. (3.23),

$$\frac{dI}{dX} = \begin{cases} b, & \text{se } X \geq 1,0 \quad (\text{Região R1}), \\ a, & \text{se } |X| < 1,0 \quad (\text{Região R2}), \\ b, & \text{se } X \leq -1,0 \quad (\text{Região R3}). \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Então, temos a equação característica dada por:

$$a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (\text{A.9})$$

que, para as regiões R1 e R3 temos,

$$\lambda^3 + \lambda^2[\alpha(1+b) + 1 + \gamma] + \lambda[\alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta] + \alpha[\beta(1+b) + b\gamma] = 0, \quad (\text{A.10})$$

sendo os coeficientes,

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \\ a_2 &= \alpha(1+b) + 1 + \gamma, \\ a_1 &= \alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta, \\ a_0 &= \alpha[\beta(1+b) + b\gamma], \end{aligned}$$

e para a região R2 fica da seguinte forma,

$$\lambda^3 + \lambda^2[\alpha(1+a) + 1 + \gamma] + \lambda[\alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta] + \alpha[\beta(1+a) + a\gamma] = 0, \quad (\text{A.11})$$

sendo os coeficientes,

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \\ a_2 &= \alpha(1+a) + 1 + \gamma, \\ a_1 &= \alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta, \\ a_0 &= \alpha[\beta(1+a) + a\gamma]. \end{aligned}$$

O estudo da estabilidade usando o critério de RH apresentado a seguir, foi feito para as regiões R1, R2 e R3, usando os seguintes valores para os parâmetros do sistema:

$$a = -1,13996128, \quad b = -0,712000613, \quad \beta = 9,701, \quad (\text{A.12})$$

$$-1 \leq \gamma \leq 1 \quad \text{e} \quad \alpha > 0,$$

esses valores foram calculados utilizando as transformações (3.9) e os dados da referência [11] para os valores de  $R$ ,  $m_0$  e  $m_1$ .

### A.1.3 Regiões R1 e R3

Para que a 1ª condição do critério de RH seja satisfeita usando os valores já mencionados dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\beta$ , no intervalo  $-1 \leq \gamma \leq 1$  e para  $\alpha > 0$ , as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$a_3 = 1 > 0,$$

$$a_2 = \alpha(1+b) + 1 + \gamma > 0 \implies \alpha > \frac{-1-\gamma}{1+b} \implies \alpha > 0, \quad (\text{A.13})$$

$$a_1 = \alpha(\gamma + b + b\gamma) + \gamma + \beta > 0 \implies \alpha > \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + b + b\gamma} \implies \alpha > 25,23813457, \quad (\text{A.14})$$

$$a_0 = \alpha[\beta(1+b) + b\gamma] > 0 \implies \gamma > \frac{-\beta(1+b)}{b} \implies \gamma > 3,92398827. \quad (\text{A.15})$$

Uma vez que a Eq. (A.15) indica que, para todas as raízes possuírem parte real negativa,  $\gamma$  tem que ser maior que 3,92398827. Concluimos que, para os valores e intervalos dos parâmetros de interesse, os pontos de equilíbrio nas regiões R1 e R3 são instáveis para  $-1 \leq \gamma \leq 1$  e  $\alpha > 0$ .

### A.1.4 Regiões R2

Passamos agora a analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio da região R2. Aplicando a 1ª condição do critério de RH usando os mesmos valores já mencionados dos parâmetros, obtemos as relações:

$$a_3 = 1 > 0,$$

$$a_2 = \alpha(1 + a) + 1 + \gamma > 0 \implies \alpha > \frac{-1 - \gamma}{1 + a} \implies \alpha > 0, \quad (\text{A.16})$$

$$a_1 = \alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta > 0 \implies \alpha > \frac{-\gamma - \beta}{\gamma + a + a\gamma} \implies \alpha > 8,36066207, \quad (\text{A.17})$$

$$a_0 = \alpha[\beta(1 + a) + a\gamma] > 0 \implies \gamma > \frac{-\beta(1 + a)}{a} \implies \gamma > -1,191061838. \quad (\text{A.18})$$

Satisfazendo a 1ª condição, calculamos os demais termos da série de RH de acordo com as Eqs. (3.39) a (3.42),

$$b_1 = \frac{\alpha^2[\gamma(1 + a) + a](1 + a) + \alpha[\gamma(\gamma + 2)(1 + a) + a] + (\gamma + \beta)(1 + \gamma)}{\alpha(1 + a) + 1 + \gamma},$$

$$b_2 = 0, \quad (\text{A.19})$$

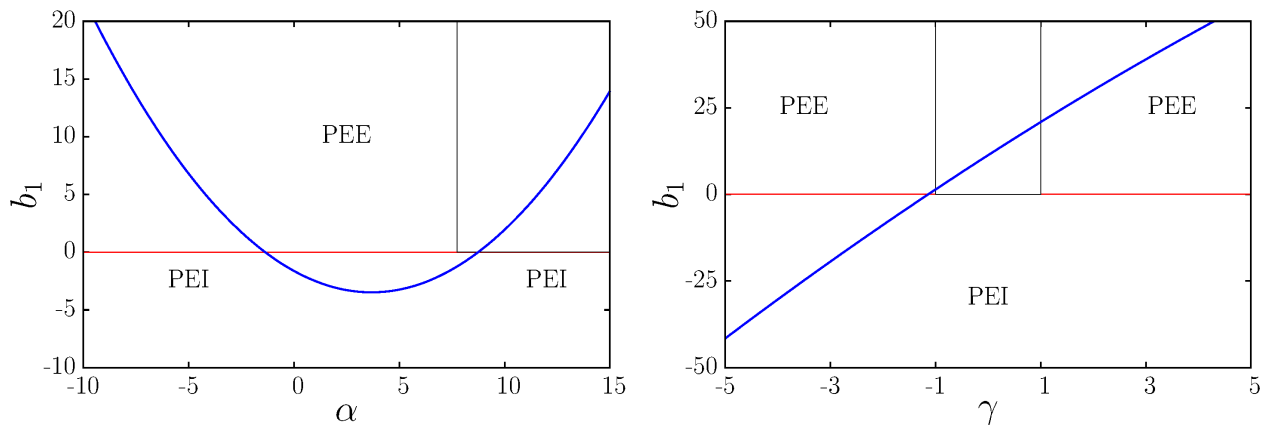
$$c_1 = a_0 = \alpha[\beta(1 + a) + a\gamma],$$

$$c_2 = 0,$$

que pode então ser construída, resultando,

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & \alpha(\gamma + a + a\gamma) + \gamma + \beta \\ \lambda^2 & \alpha(1 + a) + 1 + \gamma & \alpha[\beta(1 + a) + a\gamma] \\ \lambda^1 & b_1 & 0 \\ \lambda^0 & \alpha[\beta(1 + a) + a\gamma] & 0. \end{array} \quad (\text{A.20})$$

Com esse resultado, aplicamos a 2ª condição do critério de RH e analisamos o sinal do coeficiente  $b_1$ . A Fig. A.4 expressa os comportamentos do coeficiente  $b_1$  em termos dos parâmetros  $\alpha$  (Fig. A.4(a)) e  $\gamma$  (Fig. A.4(b)). Para  $b_1 < 0$  (linha em azul abaixo da linha em vermelha) o ponto de equilíbrio é instável (PEI), já para os valores de  $b_1 > 0$  (linha em azul acima da linha em vermelha), e usando os intervalos de interesse para os parâmetros ( $-1 \leq \gamma \leq 1$  e  $\alpha > 8,36066207$ ), encontramos as regiões onde o ponto de equilíbrio é estável (PEE), que são as regiões dentro do retângulo preto na Fig. A.4.



(a) Regiões de estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ . (b) Regiões de estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ .

Figura A.4: Gráficos das análises dos sinais do coeficiente  $b_1$  para a região R2. Para toda a região na qual a linha azul está acima da linha vermelha, o ponto de equilíbrio é estável. Para valores negativos de  $b_1$  o ponto de equilíbrio é instável.

Esses resultados mostram que os pontos de equilíbrio das regiões R1 e R3, são sempre instáveis. Para a região R2, é necessário que  $\alpha > 8,36066207$  para que o ponto de equilíbrio seja estável. Nossas conclusões analíticas indicam que o sistema tem comportamento instável nas regiões R1 e R3. Já na região R2 o sistema é estável dentro dos intervalos de interesse dos parâmetros de controle.