

O CIRCUITO DE CHUA É UM OSCILADOR ELETRÔNICO QUE POSSUI UMA NÃO-LINEARIDADE ACOPLADA A UM OSCILADOR LC. UTILIZANDO O MÉTODO DE REALIMENTAÇÃO POR FUNÇÃO SENOIDAL, ALTERA-SE INDIRETAMENTE A CURVA NÃO LINEAR DO CIRCUITO. APRESENTA-SE NESTE TRABALHO, O ESTUDO NUMÉRICO VIA MULTISIM E VIA INTEGRAÇÃO PELO MÉTODO RUNGE-KUTTA. TAMBÉM MOSTRA-SE ATRATORES EXPERIMENTAIS EM UMA BIFURCAÇÃO POR CRISE.

Orientador: HOLOKX ABREU ALBUQUERQUE

Joinville, 2014

ANO  
2014



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
CURSO DE MESTRADO EM FÍSICA

FLAVIO PREBIANCA | ESTUDO DE UM CIRCUITO DE CHUA COM REALIMENTAÇÃO TIPO SENO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
**ESTUDO DE UM CIRCUITO DE CHUA COM REALIMENTAÇÃO TIPO SENO**

FLAVIO PREBIANCA

JOINVILLE, 2014

**FLAVIO PREBIANCA**

**ESTUDO DE UM CIRCUITO DE CHUA COM  
REALIMENTAÇÃO TIPO SENO**

Dissertação apresentada para obtenção  
do título de mestre em Física pela Uni-  
versidade do Estado de Santa Cata-  
rina, Centro de Ciências Tecnológicas  
- CCT .

Orientador: Holokx Abreu Albu-  
querque

**JOINVILLE**

**2014**

P922e Prebianca, Flavio

Estudo de um circuito de Chua com  
realimentação tipo seno / Flavio Prebianca. -  
2015.

81 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

Bibliografia: 79-81 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade do  
Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências  
Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em  
Física, Joinville, 2015.

1. Chua. 2. Caos experimental. 3. N-rolos.  
4. Multisim. 5. Crise. 6. Lyapunov. I. Albu-  
querque, Holokx Abreu. II. Universidade do  
Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-  
-Graduação em Física. III . Título.

CDD: 530 - 23. ed.

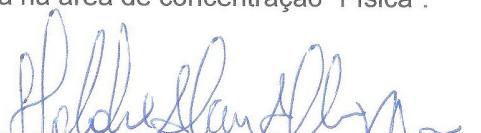
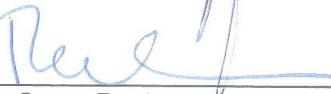
**FLAVIO PREBIANCA**

**ESTUDO DE UM CIRCUITO DE CHUA COM REALIMENTAÇÃO  
DO TIPO SENO**

Dissertação apresentada ao Curso de Programa de Pós-Graduação em Física como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração “Física”.

**Banca Examinadora**

Orientador:

  
Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque  
CCT/UDESC  


**Membros**

Prof. Dr. Paulo Cesar Rech  
CCT/UDESC

  
Prof. Dr. Emilson Ribeiro Viana Junior  
DAFIS/UTFPR

---

**Joinville, SC, 04 de dezembro de 2014.**



Dedico a Kleity, minha esposa,  
pelo amor, fé e paciência.



## AGRADECIMENTOS

- À minha família, pelo apoio;
- Ao orientador, pela oportunidade de pesquisa;
- Aos professores da Pós-Graduação, pelo conhecimento compartilhado;
- Aos colegas do grupo de pesquisa Dinâmica Não-linear, pelas conversas e discussões;
- À UDESC e CAPES, pelo apoio financeiro;
- A Deus, pela saúde e pela vida.



”Agradeço ao construtor do universo, por tê-lo feito não-linear.”

Antônio J. Fidélis



## RESUMO

PREBIANCA, Flavio. **Estudo de um circuito de Chua com realimentação tipo seno.** 2014. 81p Dissertação (Mestrado Acadêmico em Física - Área: Dinâmica não-linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-graduação em Física, Joinville, 2014.

O circuito de Chua é um oscilador eletrônico que possui uma não-linearidade acoplada a um oscilador LC, viabilizando o estudo de caos experimental. Utilizando o método de realimentação por função senoidal da tensão do capacitor  $C_1$ , altera-se indiretamente a curva não linear do circuito, com novos pontos de operação do oscilador, possibilitando o surgimento de atratores de quatro rolos. Uma consequência desta realimentação é o surgimento de uma nova região de caos no espaço de parâmetros. Apresenta-se neste trabalho, o estudo numérico qualitativo simulado via MULTISIM/SPICE. Também apresenta o estudo por integração numérica pelo método Runge-Kutta de quarta ordem, para a construção do espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov e diagrama de bifurcação. Explora-se a região de crise no estudo numérico e mostra-se atratores experimentais em tal fenômeno. Buscamos comparar o fenômeno de crise relacionando o número de visitas que o atrator faz nas regiões  $+V_1$  e  $-V_1$ .

**Palavras-chave:** Chua; Caos experimental; N-rolos; MULTISIM; Crise, Lyapunov.



## ABSTRACT

PREBIANCA, Flavio. **Study of Chua's circuit with feedback sinusoidal** 2014. 81p Dissertation (MSc in Physics Academic - Area: Nonlinear dynamics) - University of the State of Santa Catarina. Graduate Program in Physics, Joinville, 2014.

The Chua's circuit is an electronic oscillator that has a nonlinearity coupled to an LC oscillator, enabling the study of experimental chaos. Using the method of feedback with sine function of the voltage from  $C_1$  capacitor, indirectly alters the nonlinear curve of the circuit, with new operation points allowing the emergence of four scroll attractors. A consequence of this feedback is the emergence of a new chaotic region in the parameter space. We present here a qualitative numerical study simulated via MULTISIM/SPICE. It also presents the study by fourth order Runge-Kutta numerical integration for the construction of the parameter space of the largest Lyapunov exponent and bifurcation diagram. It explores the crisis region in the numerical study and show the experimental attractors in this phenomenon. We seek to compare the crisis phenomenon relating the number of visits that system is in the regions  $+V_1$  and  $-V_1$ .

**Key-words:** Chua; Experimental Chaos; N-Scroll; MULTISIM; Crisis, Lyapunov.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
2	CIRCUITO DE CHUA . . . . .	21
2.1	IMPLEMENTAÇÕES NO CIRCUITO DE CHUA . . . . .	26
3	ESTUDO NUMÉRICO . . . . .	33
3.1	Crise . . . . .	35
3.2	Espaços de Parâmetros . . . . .	36
3.3	Diagrama de bifurcação . . . . .	43
4	MULTISIM . . . . .	51
5	EXPERIMENTAL . . . . .	59
5.1	Configuração de Montagem . . . . .	60
5.2	Aquisição . . . . .	63
5.3	Resultados experimentais . . . . .	64
5.4	Crise experimental . . . . .	72
6	CONCLUSÃO . . . . .	77
	REFERÊNCIAS . . . . .	79



## 1 INTRODUÇÃO

Um modelo de sistema dinâmico consiste na formulação matemática do conceito científico geral de um processo determinístico. Os estados futuro e passados de muitos sistemas físicos, podem ser previstos através de leis que governam sua evolução. Comprovado que estas leis não se alteram no tempo, o comportamento do sistema pode ser considerado como completamente definido pelo seu estado inicial. Assim, a definição de um sistema dinâmico inclui um conjunto de seus estados possíveis (espaço de estados) e uma lei de evolução do estado no tempo [1]. O tempo em um sistema dinâmico pode ter uma variação contínua (fluxo) ou assumir somente valores discretos inteiros (mapa) [2]. Define-se um sistema dinâmico contínuo através de equações diferenciais. Um sistema tridimensional não linear autônomo a tempo contínuo pode ser expresso da seguinte forma

$$\dot{x} = f(x, y, z, p), \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = g(x, y, z, p), \quad (1.2)$$

$$\dot{z} = h(x, y, z, p), \quad (1.3)$$

sendo  $f$ ,  $g$ ,  $h$  as funções reais, com pelo menos uma não linearidade,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  as variáveis dinâmicas e  $p$  representa o conjunto de parâmetros de controle ou condições iniciais. Para existir caos em um sistema que representa um fluxo, o mesmo deve conter no mínimo três equações diferenciais no tempo linearmente independentes. Além disso, o sistema deve apresentar alta sensibilidade nas condições iniciais, ou seja, condições infinitamente próximas levam a dinâmicas diferentes, também chamada a assinatura do caos.

O circuito de Chua é um circuito eletrônico desenvolvido para evidenciar a existência de caos experimentalmente, refutando a idéia de que os resultados obtidos por Lorenz [3] eram simplesmente matemáticos. Baseado em uma

curva  $I \times V$  não linear, porém linear por partes, com uma dinâmica rica de estudo, motivo no qual foi muito estudado nos últimos trinta anos [4]. O circuito de Chua apresenta em geral quatro tipos de atratores, sendo: ponto fixo, ciclo limite ou periódico, *single scroll* (único rolo), *double scroll* (duplo rolo). A transição do comportamento *single scroll* para *double scroll* é chamada de crise interna, caracterizada pelo aumento abrupto da amplitude. Curiosamente, essa transição apresenta intermitência até um ponto crítico.

Utilizando métodos estatísticos, estudamos a fronteira da entre estas duas dinâmicas (único rolo e duplo rolo) e percebemos o fenômeno de intermitência. A curiosidade científica deste estudo, surge ao visualizar várias vezes esse atrator experimentalmente, inicialmente desprezado por sua posição de ruído.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de estudo de caos experimental e numérico. Implementamos no circuito de Chua uma realimentação trigonométrica senoidal da variável  $V_1$  em série com o indutor [5]. Esta realimentação estabilizou a região de crise via experimento e também criou uma nova região de caos no espaço de parâmetros. Utilizamos a não-linearidade padrão do diodo de Chua, sendo a linear por partes (*piecewise linear*), juntamente com o indutor eletrônico (*inductorless*) [6]. Comenta-se a seguir a sequência de abordagem dos próximos capítulos. Cada capítulo é iniciado com a revisão teórica do tópico abordado pelo mesmo.

O capítulo dois refere-se a história do circuito de Chua e a motivação em estudá-lo. Iniciando no conceito da sua formulação, à configuração do circuito. Finaliza com a demonstração da implementação sugerida nesta dissertação.

No capítulo três apresentamos o estudo numérico via integração por Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo. Este capítulo é caracterizado pelos espaços de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e

atratores. Neste, enfatizamos os conceitos de caos em um sistema dinâmico e destacamos o fenômeno de crise.

No capítulo quatro abordamos brevemente o estudo do sistema via ambiente MULTISIM. Simulamos o circuito neste software destacando sua importância no desenvolvimento do projeto. Esclarecemos a necessidade da divisão do circuito em subcircuitos definindo a função de cada.

No capítulo cinco, descrevemos os métodos experimentais utilizados e resultados. Comenta-se brevemente sobre a confecção da placa, valores reais dos componentes eletrônicos, equipamentos, configuração de montagem e aquisição de dados. Apresentamos alguns atratores experimentais, mostrando também uma das séries temporais juntamente com o histograma de máximos calculado com TISEAN (Times Séries Analyses)[7] [8]. Finalizamos esse capítulo com a demonstração do fenômeno de crise.

O capítulo seis destina-se a discussão de resultados, conclusões e viabilizações de projetos futuros.



## 2 CIRCUITO DE CHUA

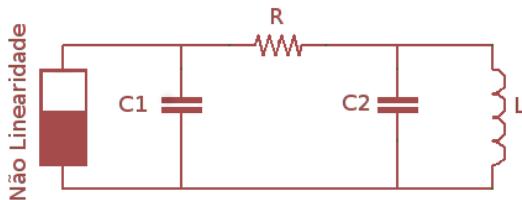
Na década de 80, havia um desejo profundo de um circuito caótico reproduzível que apresentasse evidência experimental do caos, permitindo a refutação da suspeita de que esse fenômeno era apenas uma abstração matemática. Isso levou Leon Ong Chua investigar sobre a possibilidade de projetar um circuito caótico. Uma maneira de realizar essa idéia é montar um circuito com tal configuração que as equações diferenciais de um sistema caótico sejam as mesmas do circuito. Essa linha de raciocínio está relacionada a computação analógica. Porém, o projeto de L. O. Chua era diferente, em vez de partir de sistemas caóticos conhecidos, como Lorenz ou Rössler, ele destinou-se a concepção de um circuito eletrônico se comportando de uma maneira caótica [9].

O raciocínio de L. O. Chua começou a partir de uma observação, notando que nos sistemas de Rössler e Lorenz a origem ao caos foi a presença de pelo menos dois pontos de equilíbrio instáveis. Assim, ele projetou um circuito autônomo fisicamente realizável com três pontos de equilíbrio instáveis, com o mínimo possível de elementos passivos (resistores, capacitores e indutores) e apenas um resistor não linear de dois terminais com característica linear por partes. L. O. Chua, então, seguiu uma abordagem passo-a-passo sistemático para projetar seu circuito [4].

Em primeiro lugar, determinou o número de elementos do circuito. Tendo em mente que um sistema dinâmico autônomo para ser caótico exige que seja no mínimo de dimensão três, Chua fixou os elementos que o seu circuito deve conter: três elementos de armazenamento de energia, uma resistência não-linear de dois terminais e um número (o menor possível) de resistência passiva linear. Ao selecionar a configuração do circuito, excluiu as configurações em que

os elementos de armazenamento sejam todos indutores ou capacitores, uma vez que não poderia oscilar, preferindo as configurações com dois capacitores e um indutor, sendo um capacitor em paralelo com o elemento não linear e o outro capacitor em paralelo com o indutor formando um oscilador LC. O acoplamento entre os dois conjuntos é feito pelo resistor R e aterrados no mesmo ponto. A figura 1 ilustra o esquema elétrico do circuito escolhida por L. O. Chua.

Figura 1 – Esquema elétrico do circuito caótico.

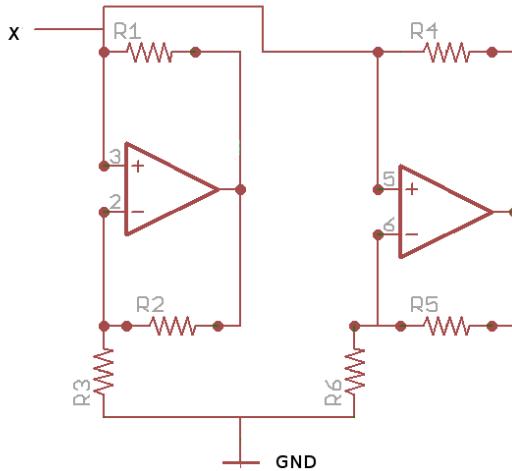


Fonte: o autor, com base em [4].

A última parte da bela argumentação de L.O. Chua focado na escolha da característica não-linear do chamado diodo de Chua, foi projetar um circuito com três pontos de equilíbrio instáveis, a não-linearidade contendo três segmentos com inclinação negativa. Lembrando que todos os outros elementos do circuito são passivos, assim o diodo de Chua precisa estar ativo para garantir a instabilidade dos pontos de equilíbrio. Esta observação, juntamente com a restrição de que a característica deve ser uma função de corrente controlado pela tensão, levaram à escolha da não-linearidade essencial para se obter os três pontos de equilíbrio instáveis [9].

A configuração eletrônica mostrada na figura 2, tem comportamento descrito pela equação 2.1, ilustrado gra-

Figura 2 – Combinação de amp-op para o diodo de Chua.

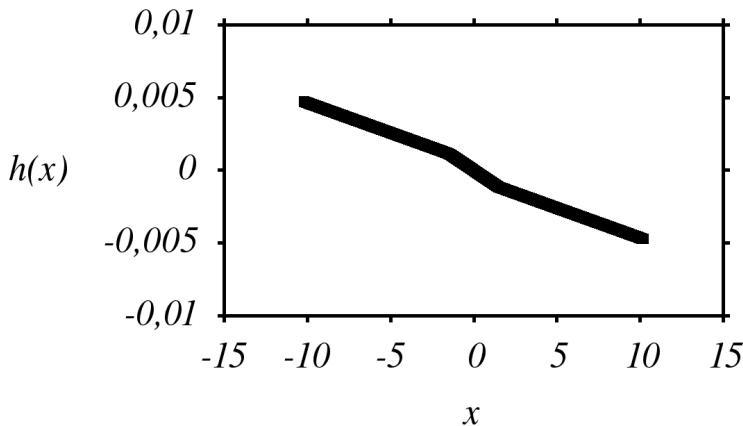


Fonte: o autor, com base em [10].

ficamente pela curva da  $I \times V$  da figura 3. Ao referenciar o modelo de curva linear em três partes e expressar a equação da não linearidade por  $h(x)$ , estamos tratando no modelo adimensional. O valor de  $m_0$  influencia na inclinação da parte central da curva  $h(x)$ , sendo  $m_1$  relacionado com as outras duas partes, por fim  $B_p$  refere-se a mudança de inclinação da curva  $h(x)$ . A variável  $x$  está relacionada com a tensão elétrica obtida em  $V_1$ , respectivo ao capacitor  $C_1$ .

$$h(x) = m_0 x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x + B_p| - |x - B_p|) \quad (2.1)$$

Após a escolha da melhor configuração do circuito, seus parâmetros foram escolhidos por Matsumoto, Chua e Komuro através de simulações computacionais em ambiente SPICE tendo em conta que a linha de carga deve cruzar em três pontos dos três segmentos internos da não-linearidade

Figura 3 – Curva  $h(x)$  do diodo de Chua.

Fonte: o autor, com base em [4].

da figura 3. Eles, finalmente, descobriram a aparência do espaço de fase, *double-scroll*, confirmando assim que o circuito é efetivamente capaz de gerar um comportamento caótico [4].

O fato dessa não linearidade ser linear por partes, permitiu que os matemáticos da época pudessem estudá-las analiticamente. Para determinar as equações que descrevem o sistema, utilizamos as Leis de Kirchhoff, sendo duas obtidas pela leis dos nós (eq. 2.2 e 2.3) e a outra obtida pela lei das malhas (eq. 2.4). Dessa forma organizando adequadamente os sistema temos que,

$$\dot{V}_1 = \frac{V_2 - V_1}{RC_1} - \frac{i_d(V_1)}{C_1}, \quad (2.2)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{V_1 - V_2}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2}, \quad (2.3)$$

$$\dot{i}_L = -\frac{V_2}{L} - i_L \frac{r_L}{L}. \quad (2.4)$$

As variáveis do sistema são  $V_1, V_2, i_L$ , respectivamente a tensão do capacitor  $C_1$ , a tensão do capacitor  $C_2$  e a corrente elétrica que flui pelo indutor  $L$ . Os valores de  $C_1$  e  $C_2$  são fixos, sendo capacitâncias,  $L$  é o valor fixo de indutância.  $R$  e  $r_L$  são valores de resistências elétricas e também são os parâmetros variáveis de controle do sistema.  $r_L$  é a resistência intrísseca do indutor. A corrente elétrica apresentada pelo elemento não-linear é descrito pela função  $i_d(V_1)$ .

Os pontos de operação do circuito são definidos pela intersecção da linha de carga com a curva linear por partes [11]. Esses pontos também são chamados de pontos quiescentes. Para obtermos a linha de carga, consideramos no equilíbrio que não há variação temporal de tensão nos capacitores e que o indutor esteja em curto circuito, sendo matematicamente expresso pela eq. (2.5),

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{i}_L = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{V_2 - V_1}{RC_1} - \frac{i_d(V_1)}{C_1} = 0 \rightarrow i_d(V_1) = \frac{V_2 - V_1}{R}, \quad (2.6)$$

$$\frac{V_1 - V_2}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2} = 0 \rightarrow i_L = \frac{V_2 - V_1}{R}. \quad (2.7)$$

Logo, concluímos que  $i_d(V_1) = i_L$ . Para  $i_L$ , considerando  $r_L$  um valor muito pequeno, desprezível, então

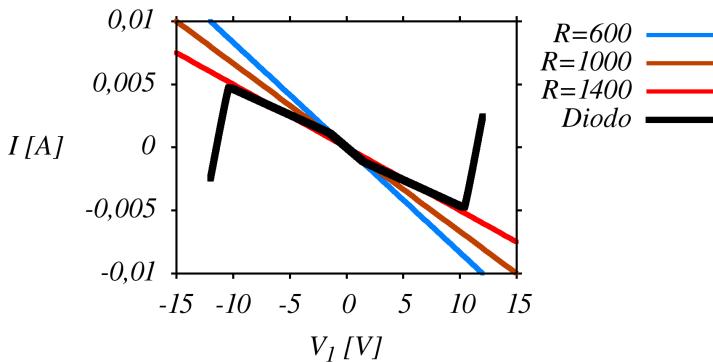
$$-\frac{V_2}{L} - i_L \frac{r_L}{L} = 0 \rightarrow V_2 = 0. \quad (2.8)$$

Com isso, conclui-se que,

$$i_d(V_1) = -\frac{V_1}{R}. \quad (2.9)$$

A figura 4 ilustra a intersecção dessas retas. Alterar o valor da resistência  $R$  do circuito implica em mudar a inclinação da linha de carga.

Figura 4 – Curva  $I \times V$  do diodo de Chua em preto, linhas coloridas representam as linhas de carga, obtidas variando o parâmetro  $R$ .



Fonte: o autor, com base em [11].

## 2.1 IMPLEMENTAÇÕES NO CIRCUITO DE CHUA

Analizando o circuito de Chua, podemos interpretá-lo como um oscilador LC interligado por um resistor a um componente que apresenta curva de condutividade negativa, NDC, um componente com tal característica, ao invés de dificultar o fluxo da corrente elétrica, ele fornece energia para o sistema, sendo a fonte do circuito. A NDC pode ser construída por amplificadores operacionais (Amp-Ops). Desta forma, há uma grande literatura científica desse circuito com diferentes não linearidades, com acoplamentos e forçamentos externos [9, 12, 10, 13, 14, 15, 16, 17].

Neste trabalho propomos a adição da função  $Asen(V_1)$  em série com o indutor, verificando a consequência desta realimentação por estudo numérico e experimental. Utilizamos o conceito de indutor eletrônico (*inductorless*) neste circuito [6]. Inductorless é construído por duas portas de amplificadores operacionais em conjunto de valores de resistências elétricas e capacitância bem definidas, conforme figura 5. O mesmo simula o comportamento do indutor, ocupando menos espaço físico na placa de circuito impresso. Outras vantagens podem ser citadas, como seu baixo custo, a obtenção de valores de indutância comercialmente não existentes, menos suscetível a interferências eletromagnéticas. O valor da indutância equivalente é calculado por,

$$L_{eq} = \frac{R_7 R_9 R_{10} C_3}{R_8}. \quad (2.10)$$

Ao fato da utilização do indutor eletrônico, temos o parâmetro  $r_L$ , relacionado com o valor da resistência elétrica intríssica do indutor. O esquema elétrico simplificado da implementação sugerida neste trabalho é apresentado na figura 6. Para nosso estudo, as equações do circuito proposto ficam,

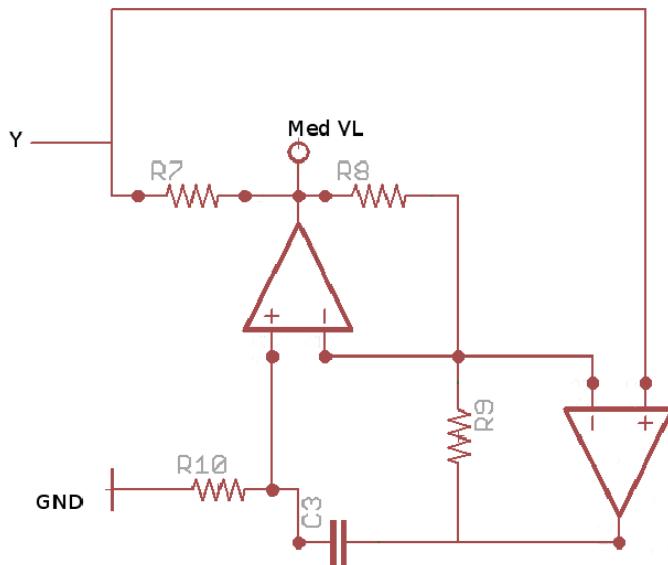
$$\dot{V}_1 = \frac{V_2 - V_1}{RC_1} - \frac{i_d(V_1)}{C_1}, \quad (2.11)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{V_1 - V_2}{RC_2} - \frac{i_L}{C_2}, \quad (2.12)$$

$$\dot{i}_L = -\frac{V_2}{L} - i_L \frac{r_L}{L} - \frac{A}{L} \text{sen}(V_1). \quad (2.13)$$

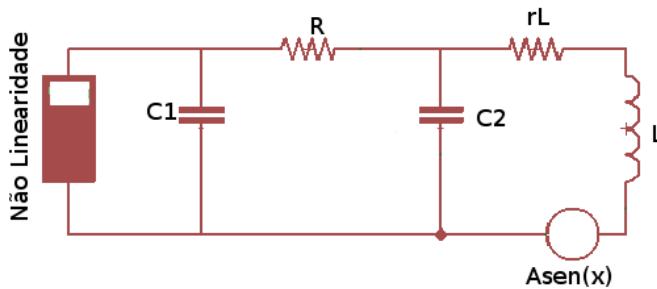
Agora, temos além dos parâmetros  $R$  e  $r_L$ , também o parâmetro  $A$ , sendo a amplitude da realimentação. Para obter os pontos de operação, fazemos conforme descrito ante-

Figura 5 – Esquema elétrico do indutor eletrônico.



Fonte: o autor, com base em [6].

Figura 6 – Esquema elétrico simplificado do circuito de Chua com rea-  
limentação.



Fonte: o autor, com base em [11].

riamente, resultando uma alteração na componente  $\dot{i_L} = 0$ .

$$-\frac{V_2}{L} - i_L \frac{r_L}{L} + \frac{A}{L} \operatorname{sen}(V_1) = 0 \rightarrow V_2 = -A \operatorname{sen}(V_1). \quad (2.14)$$

Desta forma, a não linearidade sofre alteração com a realimentação, recebendo a implementação  $A \operatorname{sen}(V_1)$ , na curva  $I \times V$ . A nova curva não linear fica,

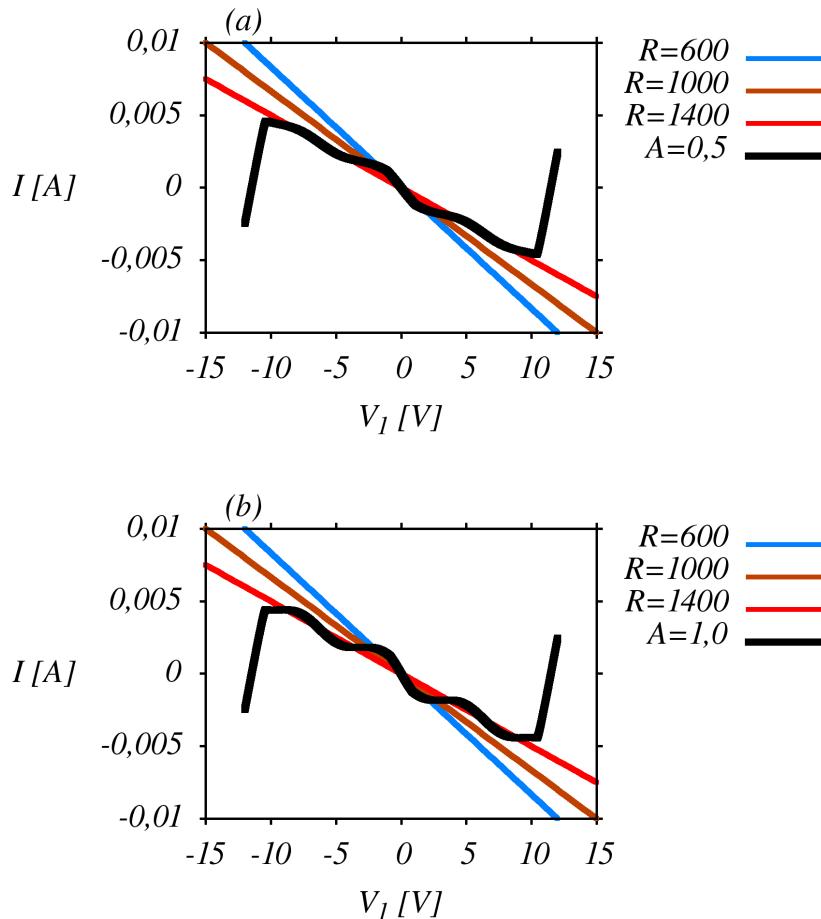
$$i_{dnovo}(V_1) = i_{dpadrao}(V_1) + A \operatorname{sen}(V_1). \quad (2.15)$$

Logo, a linha de carga é expressa por,

$$i_{dnovo}(V_1) = \frac{-V_1}{R}, \quad (2.16)$$

graficamente apresentada na figura 7. Onde temos em preto a curva  $i_{dnovo}(V_1)$  para  $A = 0,5$  (figura 7(a)) e  $A = 1,0$  (figura 7(b)) sendo as linhas coloridas são obtidas variando o parâmetro  $R$ . Dependendo da combinação de  $R$  e  $A$  podemos obter novos pontos de operação do circuito.

Figura 7 – Curva  $I \times V$  do diodo de Chua em preto, obtida com a variação do parâmetro  $A$ , linhas coloridas representam as linhas de carga, obtidas variando o parâmetro  $R$ . (a)  $A = 0,5V$ ; (b)  $A = 1,0V$ .



Fonte: o autor, com base em [11].

O sistema de equações admensionalizado[18], utilizado para integração numérica, são escritas por,

$$\dot{X} = \alpha_1(X - Y) + i_d(X), \quad (2.17)$$

$$\dot{Y} = 0,1(\alpha_1(Y - X) - \frac{(V - Y)}{R_7 m_0}), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \gamma Y + \beta(V - Y) - \theta(V - Y) - \alpha_2(X - Y) \\ & - \gamma \left( \frac{A}{B_p} \right) \operatorname{sen}(X). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sendo,

$$X = V_1/B_p, \quad V = (i_L R_7 m_0)/B_p + Y, \quad Y = V_2/B_p,$$

$$T = m_0/C_1 t, \quad \alpha_2 = C_1/m_0 C_2 R, \quad \alpha_1 = 1/m_0 R,$$

$$\theta = C_1/m_0 R_7 C_2, \quad \beta = C_1 r_L/m_0 L, \quad \gamma = C_1 R_7/m_0 L$$

$$L = 4,23 \times 10^{-4} H, \quad m_0 = -4.09 \times 10^{-4} S, \quad B_p = 1,8 V,$$

$$C_1 = 23,5 \eta F \quad C_1 = 235 \eta F, \quad R_7 = 1,0 K\Omega,$$

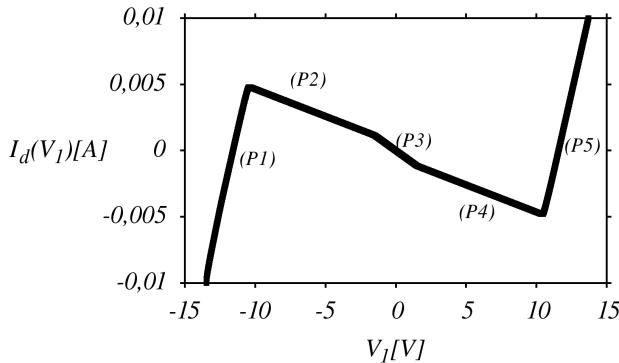
$$i_d(X) = i_d(x)/m_0 B_p.$$

Os valores das inclinações das retas, da curva linear por partes, foram obtidas com simulação numérica via MULTISIM e ajustadas pelo GNUPLOT. Sendo os parâmetros das retas mostradas na tabela 1, sendo a reta do tipo  $I_d(V_1) = aV_1 + b$ . Na figura 8 mostramos graficamente as inclinações das retas, composta por cinco regiões lineares, sendo três delas de condutividade diferencial negativa (regiões P2,P3,P4) e outras duas ôhmicas (regiões P1 e P5), devido a saturação dos amplificadores operacionais, característica de um diodo real. Quando a linha de carga intersecciona a região P1 e P5 não há dinâmica caótica, apenas ciclo limite de período 1.

Tabela 1 – Regiões da curva  $I(V_1)$  do diodo de Chua, via MULTISIM.

Parte	a(mS)	Erro a	b(mA)	Erro b
P1	4,82229	$\pm 8,302 \times 10^{-7}$ (0,017%)	0,0557914	$\pm 89,982 \times 10^{-6}$ (0,018%)
P2	-0,410988	$\pm 82,004 \times 10^{-10}$ (0,001%)	0,000533305	$\pm 81,29 \times 10^{-9}$ (0,002%)
P3	-0,764491	$\pm 82,415 \times 10^{-12}$ (0,001%)	-5,99176e-08	$\pm 81,814 \times 10^{-12}$ (0,003%)
P4	-0,410972	$\pm 82,012 \times 10^{-10}$ (0,001%)	-0,000533436	$\pm 81,295 \times 10^{-9}$ (0,001%)
P5	4,00467127	$\pm 82,661 \times 10^{-7}$ (0,006%)	-0,0540419	$\pm 83,173 \times 10^{-6}$ (0,001%)

Fonte: o autor.

Figura 8 – Curva  $I(V_1)$  simulado via MULTISIM, composta por 5 regiões lineares.

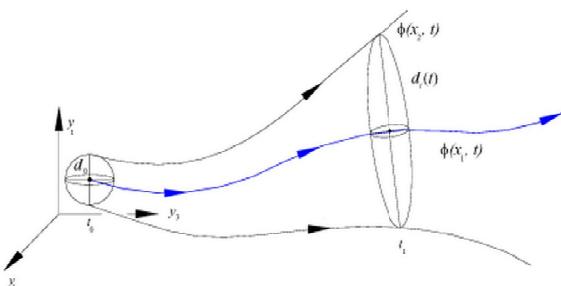
Fonte: o autor, com base em [11].

### 3 ESTUDO NUMÉRICO

Uma das técnicas existentes para investigar os comportamentos de um sistema dinâmico é a integração numérica, muito útil para cálculo do expoente de Lyapunov e obtenção da série temporal. O expoente de Lyapunov é uma forma de qualificar a caoticidade do sistema, sendo definido pela taxa média de expansão ou contração entre duas trajetórias que iniciam infinitamente próximas.

Para calcular os expoentes de Lyapunov considere um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias, na qual existe uma hiperesfera de condições iniciais centrada num ponto  $x(t_0)$ . Conforme o tempo evolui, o volume se deforma, ilustrado na figura 9.

Figura 9 – Representação gráfica da estimativa do expoente de Lyapunov.



Fonte: adaptado de [19].

Considerando que ao longo da  $j$ -ésima dimensão ( $j = 1, \dots, n$ ), o raio inicial  $d_j(t_0)$  variou exponencialmente no tempo, de forma que seu valor corresponda a  $d_j(t)$  no instante  $t$ , temos,

$$d_j(t) = d_j(t_0) e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (3.1)$$

que pode ser reescrita por,

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0} \quad (3.2)$$

onde os  $\lambda_j$  são chamados de expoentes de Lyapunov. Para sistemas dissipativos, o somatório dos expoentes de Lyapunov deve ser negativo [20].

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (3.3)$$

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0} \quad (3.4)$$

Em fluxo, podem existir regiões limitadas do espaço de fases, chamadas de atratores, para as quais as trajetórias convergem. Um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico possui um atrator estranho no seu espaço de fase. Ele é estranho, porque, usualmente, apresenta detalhes em escalas infinitesimalmente pequenas [2]. Para o atrator ser caótico deve satisfazer duas condições: não ser periódico e ter um dos expoentes Lyapunov maior que zero. Vamos calcular o maior expoente de Lyapunov porque a partir desse podemos separar os pontos fixos, ciclo limite e caóticos, conforme a tabela 2.

Tabela 2 – Características dos atratores para fluxo tridimensional.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Atrator	Dimensão	Dinâmica
–	–	–	ponto de equilíbrio	0	estático
0	–	–	ciclo limite	1	periódico
0	0	–	torus-2	2	quasiperiodicidade
+	0	–	estranho	2 a 3	caótico

Fonte: adaptado de [20].

### 3.1 CRISE

O termo crise foi utilizado pela primeira vez por Grebogi para designar mudanças qualitativas abruptas em atratores caóticos quando há variação de algum parâmetro de controle [21]. Estas mudanças ocorrem pela colisão de um atrator caótico com uma órbita periódica instável. Para todos os três tipos de crise há uma dependência temporal característica associada de órbitas típicos para os valores dos parâmetros perto a crise. Considere  $p$  o valor do parâmetro variável e  $p_c$  o valor do parâmetro crítico referente a crise, assim temos, que as mudanças descontínuas normalmente são de três tipos,

- A crise de fronteira ocorre quando um atrator colide com uma órbita periódica instável presente no contorno de sua bacia de atração. Neste encontro o atrator é destruído mas, para valores do parâmetro  $p$  somente um pouco maior do que  $p_c$ , é observado um transiente caótico antes do sistema abandonar esta região.
- A crise interior ocorre quando há encontro do atrator caótico com uma órbita periódica instável. Em geral um aumento repentino no tamanho do atrator. Neste caso, há uma dependência temporal caracterizada pela existência de comportamentos intermitentes. Para valores de  $p$  um pouco maiores do que  $p_c$ , o atrator permanece a maior parte do tempo confinado na região anterior à crise havendo rápidas visitas à nova região.
- A crise de misturas de atratores é observada em sistemas que possuem simetria. Sua ocorrência se dá quando dois atratores coexistentes atingem simultaneamente a fronteira de suas bacias de atração formando um único atrator. Assim como nas crises interiores, para valores de  $p$  um pouco maiores do que  $p_c$ ,

o sistema se comporta de maneira intermitente. Neste caso, há permanência em cada um dos atratores existente para  $p$  maior que  $p_c$  durante um longo período de tempo.

### 3.2 ESPAÇOS DE PARÂMETROS

Para os atratores obtidos numericamente, foram salvos pontos equivalentes a um segundo da série temporal experimental.

Para integrarmos o sistema e calcular o maior expoente de Lyapunov, utilizamos o método Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração fixo em  $t = 10^{-1}$ . Utilizando a relação  $T = \frac{m_0}{C_1}t$  [18] sendo  $t$  o tempo computacional e  $T$  o tempo experimental, integramos cada ponto aproximadamente  $10^6$  vezes, pois assim temos o equivalente a cinco segundos da série em tempo experimental, sendo considerado um tempo suficiente para os estudos numéricos.

A figura 10 mostra a evolução dos espaços de parâmetros com o aumento do valor do parâmetro  $A$ . Entre a figura 10(a) até a figura 10(k), discretizamos uma variação do parâmetro amplitude em  $\Delta A = 0,1V$  e entre figura 10(k) até a figura 10(n) a variação do parâmetro amplitude em  $\Delta A = 1,0V$ . Para cada espaço de parâmetros utilizamos uma malha de  $400 \times 400$  valores de parâmetros. Realizou-se a integração variando os três parâmetros ( $R, rL, A$ ). Resolvemos apresentar apenas o plano  $R \times rL$ , demonstrando o efeito da realimentação  $Asen(V_1)$ . A região branca nos espaços de parâmetros do maior expoente de Lyapunov é caracterizada pelo caso particular de ponto fixo. A região preta são estruturas periódicas. As regiões amarela e vermelha são regiões de caos, sendo mais caótico quanto mais próximo do vermelho.

Os espaços de parâmetros do maior expoente de Ly-

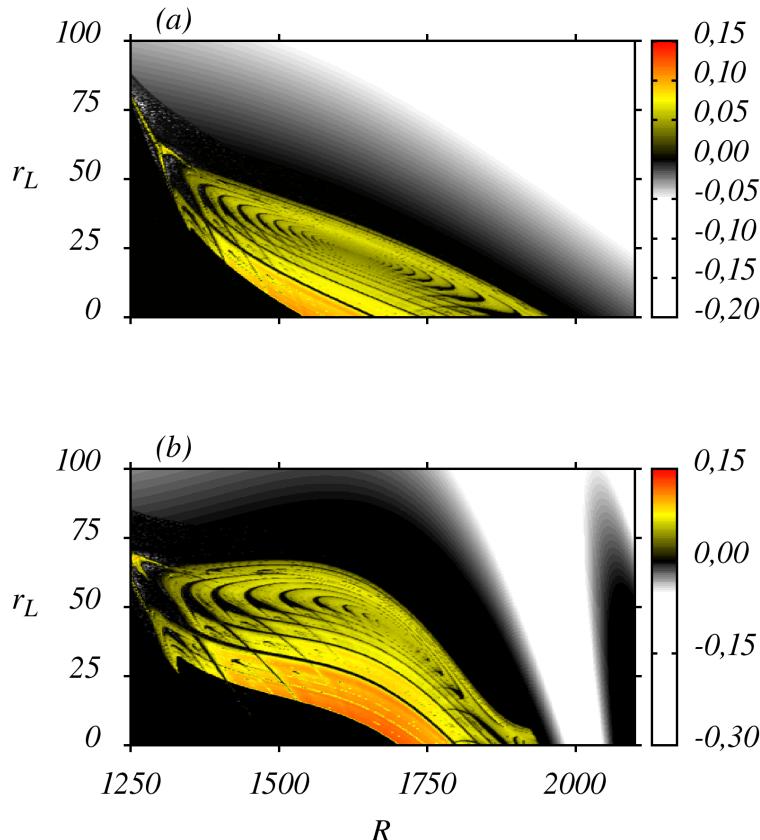
punov mostrado nas figuras 10(a) até a figura 10(d), apresenta o deslocamento nas espirais [22] e flexionamento nas estruturas, também diminui a região branca, ou seja, ao aumentar o forçamento, diminuimos a região de ponto fixo (branca), aumentando assim a região de ciclo limite (preta).

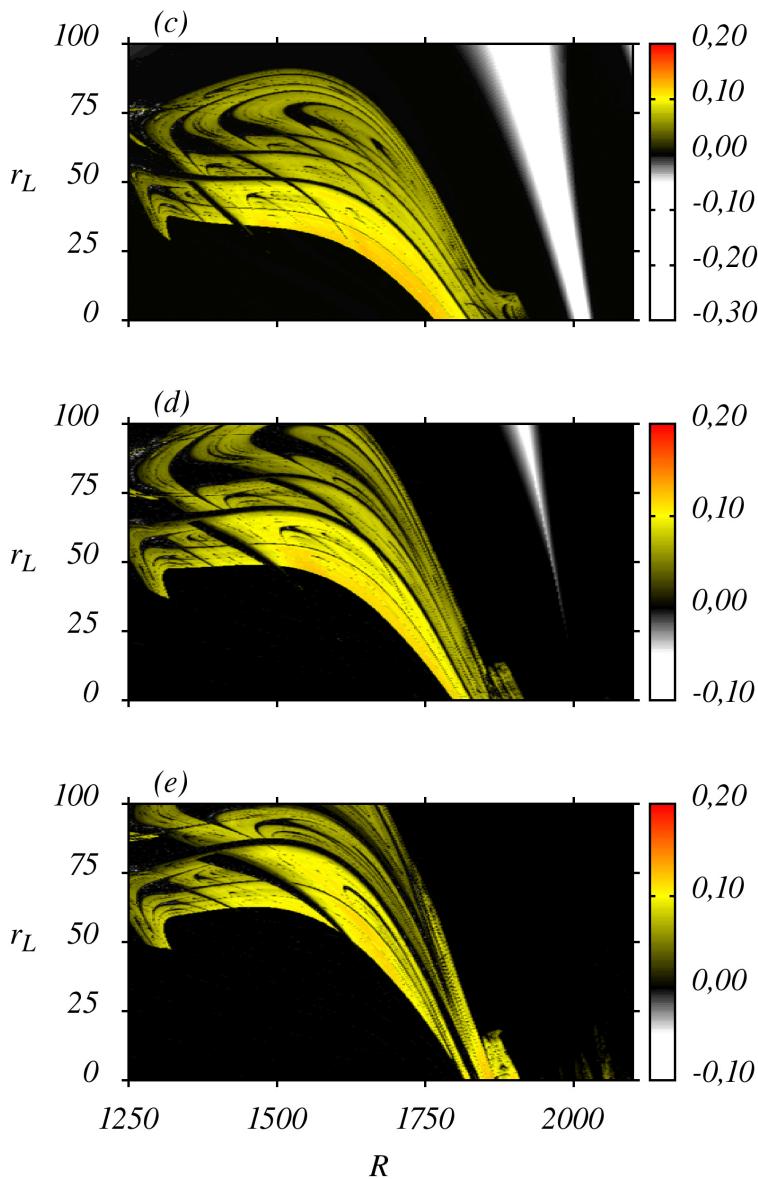
Entre as figuras 10(e) até a figura 10(i) aparece uma outra região de caos (a direita, parte inferior), conforme aumenta-se o valor da amplitude da realimentação aumenta-se essa nova região de caos.

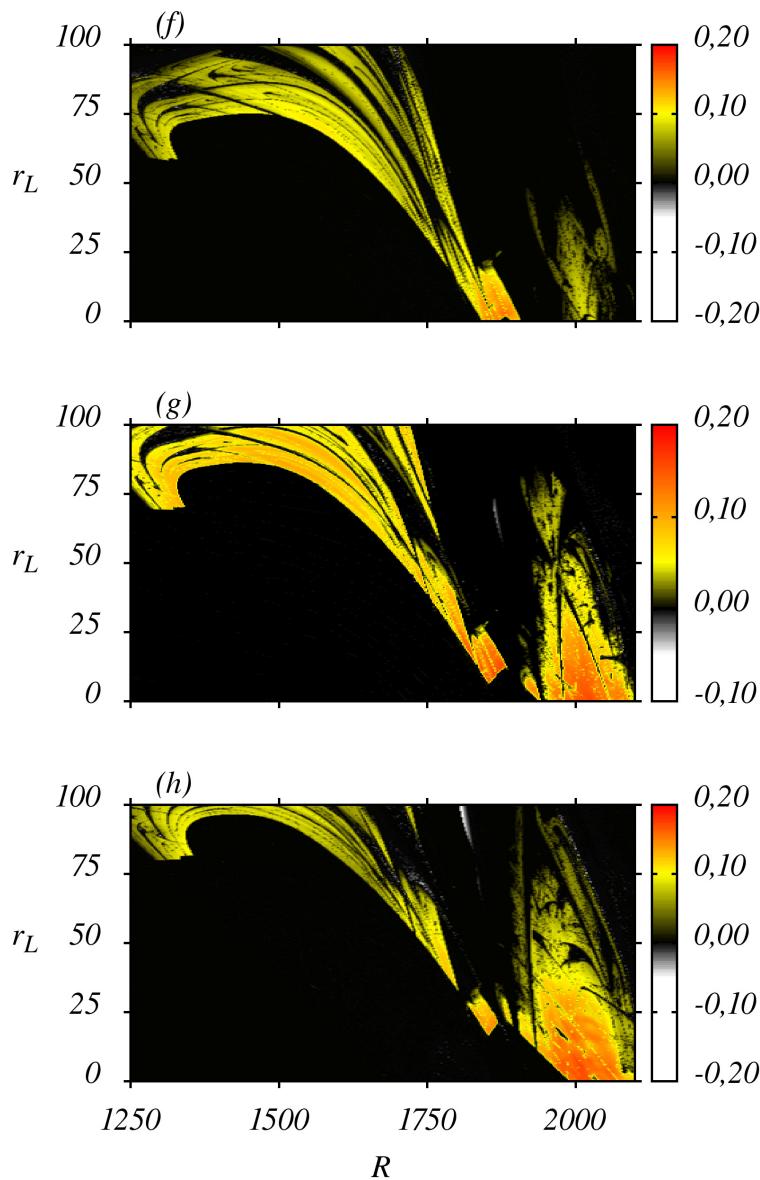
Entre as figuras 10(i) até a figura 10(l) a região predominante de caos é a chamada nova região de caos, que surgiu a partir de  $A = 0,4V$  na figura 10(d)(inferior a direita).

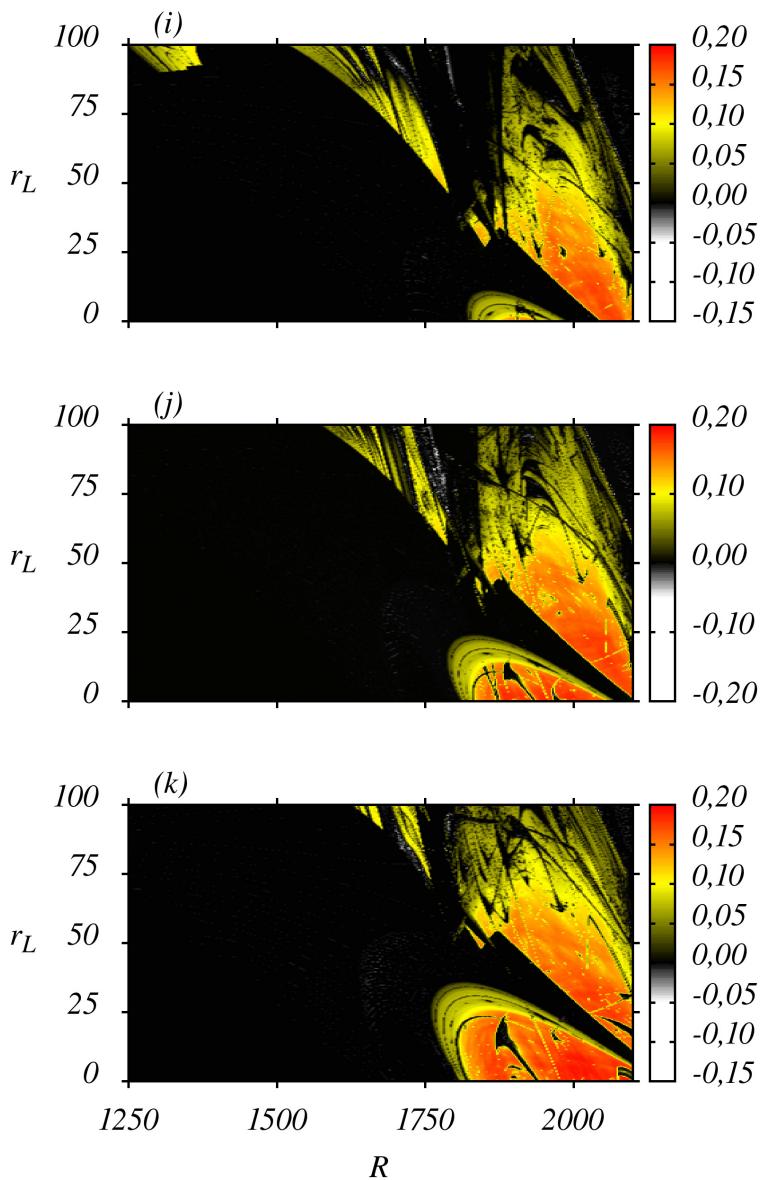
Entre as figuras 10(m) até a figura 10(n) a região de caos é suprimida, com isso a cor dominante no espaço de parâmetros é preta, representando dinâmica periódica. Logo, temos que o sistema apresenta uma riqueza de estruturas, motivando o estudo numérico.

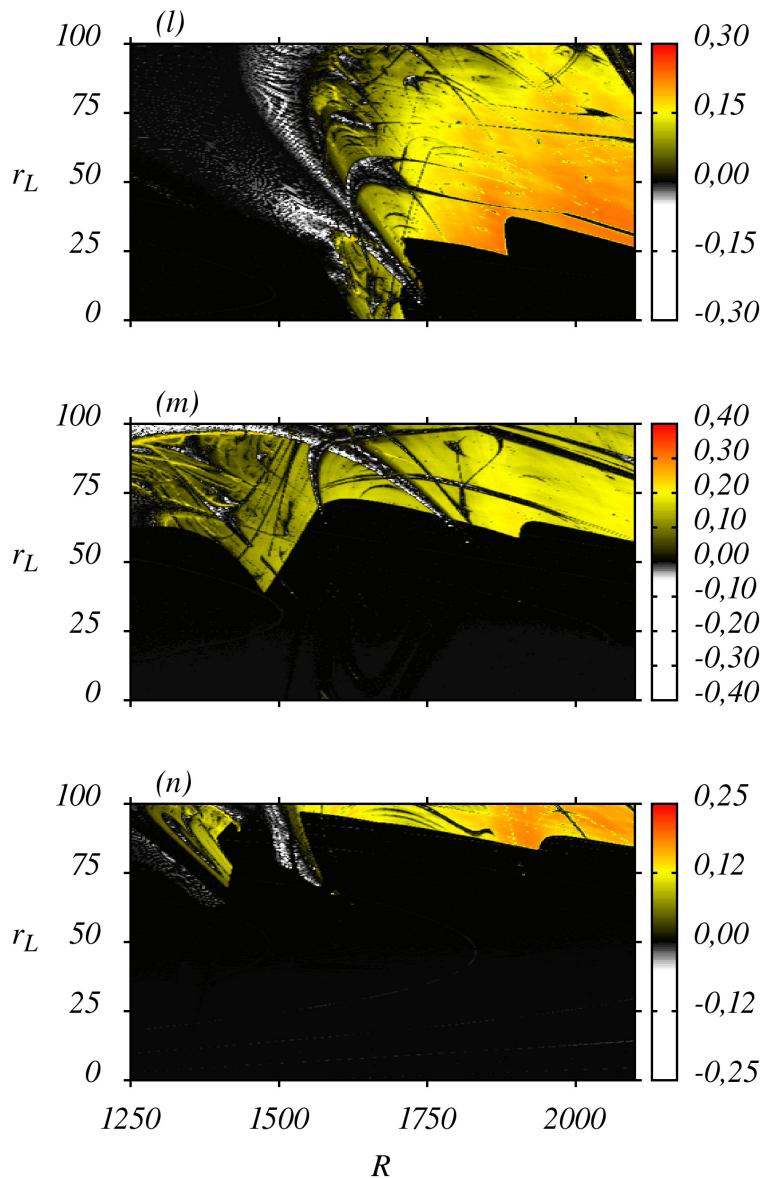
Figura 10 – Efeito da realimentação  $A\text{sen}(V_1)$  no espaço de parâmetros de  $0V$  a  $4,0V$ . (a)  $A = 0,0V$ ; (b)  $A = 0,1V$ ; (c)  $A = 0,2V$ ; (d)  $A = 0,3V$ ; (e)  $A = 0,4V$ ; (f)  $A = 0,5V$ ; (g)  $A = 0,6V$ ; (h)  $A = 0,7V$ ; (i)  $A = 0,8V$ ; (j)  $A = 0,9V$ ; (k)  $A = 1,0V$ ; (l)  $A = 2,0V$ ; (m)  $A = 3,0V$ ; (n)  $A = 4,0V$ .











Continuação da figura 10. Fonte: o autor.

### 3.3 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

É muito comum analisar as estruturas apresentadas no espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, utilizando de diagramas de bifurcação e atratores. Escolhemos uma reta que cruza o espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, está reta refere-se ao domínio de parâmetros para representá-lo graficamente pelo diagrama de bifurcação. Nossa sistema não pode apresentar hipercaos (dois expoentes de Lyapunov maior que zero) por ser um estudo de fluxo tridimensional, porém pode ou não apresentar Torus (dois expoentes de Lyapunov igual a zero). Porém não observamos torus para os valores de parâmetros estudados na dissertação.

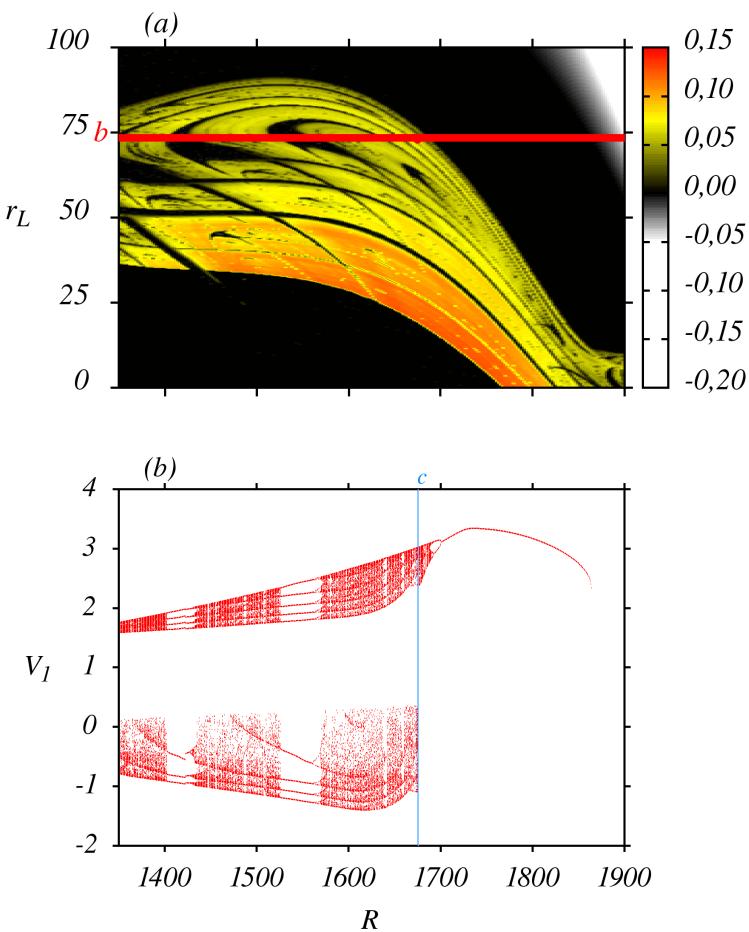
Iniciamos o estudo no espaço de parâmetros com  $A = 0,2V$ , mostrado na figura 11(a). Fixamos o parâmetro  $r_L = 73\Omega$ , variando  $R$  de  $1350\Omega$  a  $1900\Omega$ . Nesta linha, apresentamos o diagrama de bifurcação, mostrado na 11(b), variando o parâmetro  $R$  da esquerda para direita, analisando a variável  $V_1$ . Neste caso, exploramos a região que apresenta aumento abrupto do tamanho do atrator, sendo uma região de crise. Após encontrar a região de crise, refaz-se o diagrama de bifurcação, em ampliação na fronteira entre o atrator rolo simples e duplo rolo, mostrado na figura. Com testes com diferentes escalas de tempo, destacamos a janela de tempo de dois segundos, mostrado na figura 11(c).

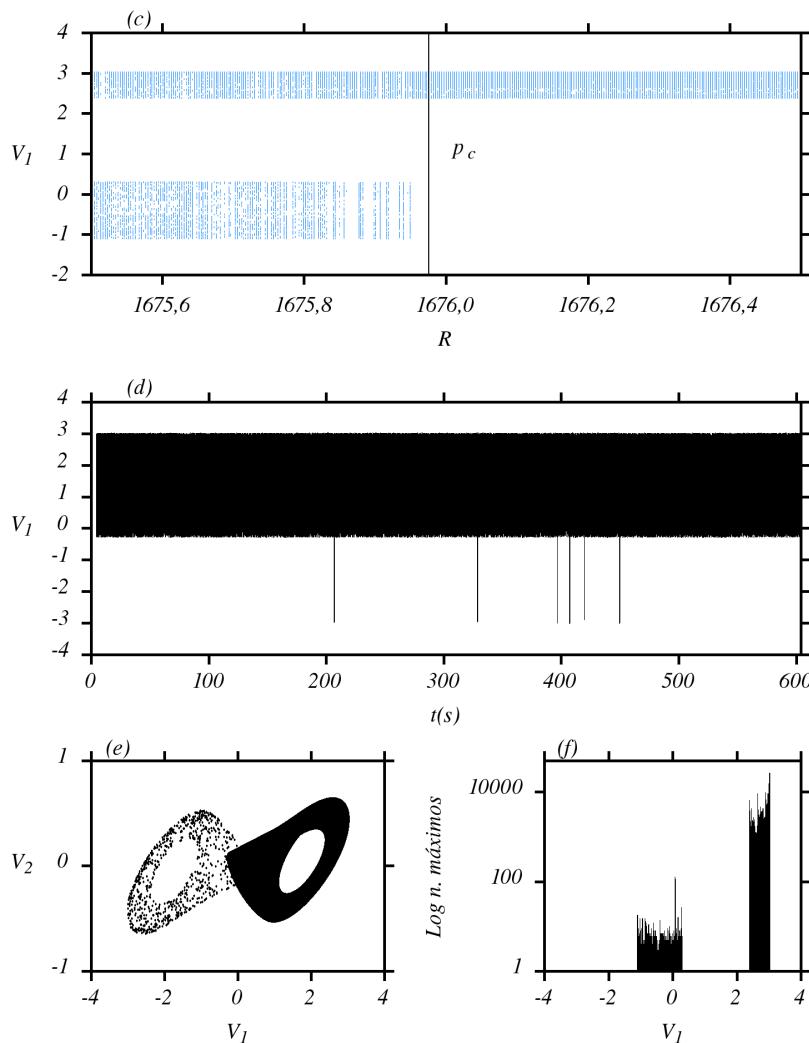
Verificamos que a crise ocorre em parâmetros diferentes. Extrapolando o tempo em uma série temporal de 600 segundos, mostrado na figura 11(d), para um ponto de rolo simples no diagrama de bifurcação da figura 11(c), temos um fenômeno de intermitência, com raras visitas em  $-V_1$ . O atrator é mostrado na 11(e). Podemos afirmar que este atrator está em  $p_c$ , ou seja, é um valor de parâmetro crítico na crise. Quanto mais próximo desse valor ( $R = 1675, 97588$ ),

mais visitas temos a região  $-V_1$ .

Na figura 11(f), apresentamos um histograma das posições em  $V_1$  dos número de máximos, como uma forma de caracterizar tal fenômeno. O número de visitas do rolo  $+V_1$  é na ordem de dezenas de milhares enquanto em  $-V_1$  é na ordem de dezenas. Isso ocorre pelo fato do atrator está intermitente, ou seja, maior parte do tempo está na região  $+V_1$ , porém visita  $-V_1$  sem haver uma frequência de ocorrência definida. Quanto mais próximo do duplo rolo, a intermitência torná-se mais frequente, visitando igualmente as duas regiões. Neste caso, crise com intermitência é característica de crise interna [21]. Em outros teste numéricos, vimos que as visitas ao outro lado da região é mais frequente, quanto mais próximo dos parâmetros que levam ao atrator de duplo rolo.

Figura 11 – (a) Espaço de parâmetros do maior expoente Lyapunov, com  $A = 0,2V$ ; (b) Diagrama de bifurcação da linha em destaque em vermelho do espaço de parâmetros com  $r_L = 73$ ; (c) Ampliação do diagrama de bifurcação de  $R = 1675,5$  até  $R = 1676,5$ ; (d) Série temporal em  $p_c$  (parâmetro em crise) com o fenômeno de intermitênci, com  $R = 1675,97588$ ,  $r_L = 73$ ,  $A = 0,2$ ; (e) Atrator em  $p_c$ ; (f) Histogramas dos máximos em  $\log n.\max. \times V_1$  em  $p_c$ .

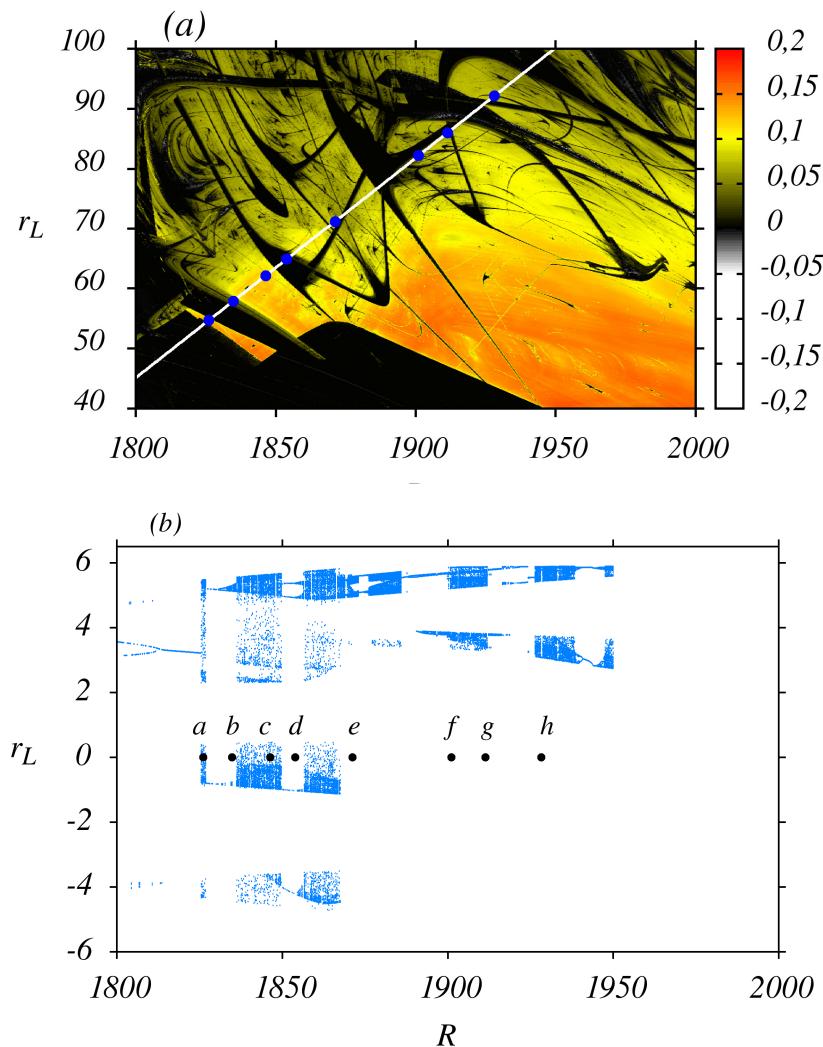




Continuação da figura 11. Fonte: o autor.

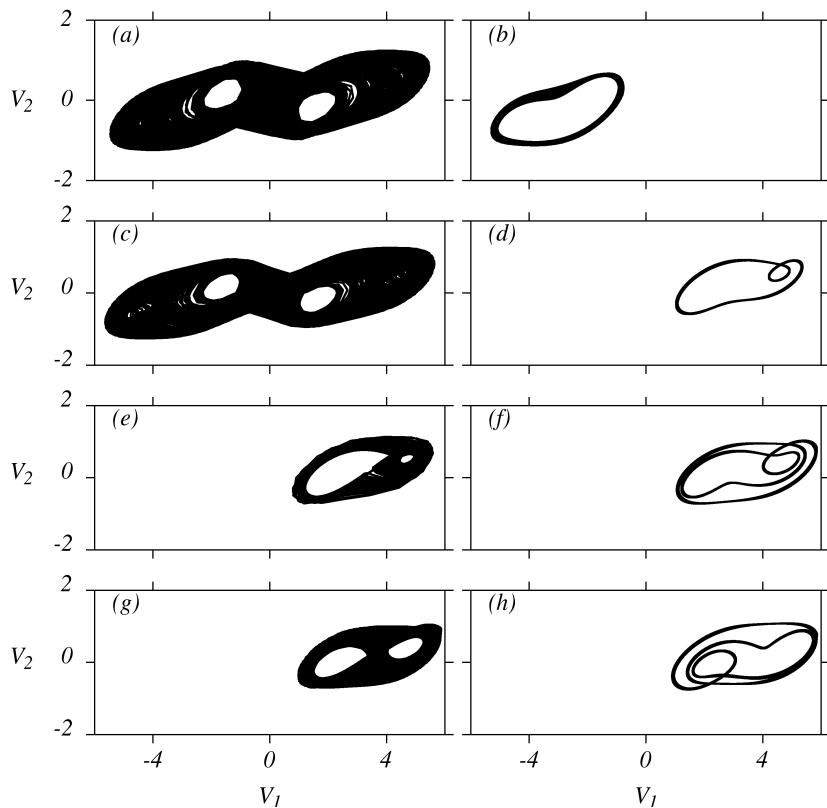
Destacando a nova região de caos, devido a realimentação, com o parâmetro para  $A = 1,0V$ , fizemos um espaço de parâmetros de  $1000 \times 1000$ , mostrado na figura 12. Neste espaço de parâmetros, escolhemos uma reta inclinada com intenção de analisar o maior número de estruturas possíveis. Os pontos em destaque no espaço de parâmetros referem-se ao atratores mostrados na figura 13. Pelo diagrama de bifurcação mostrado na figura 12(b) observamos várias regiões de crise interna, ou seja, quando há aumento abrupto da amplitude do atrator, semelhante o que ocorre do rolo simples para duplo rolo, temos também a crise interna de outros atratators, sendo de duplo rolo ( 13(e) 13(g) para quatro rolos( 13(a) e 13(c). O surgimento de *n*-scroll é característico de uma influência senoidal na não linearidade, pois implica em novos pontos de operação do circuito [23, 24].

Figura 12 – Estudo numérico para o parâmetro  $A = 1,0V$ ; (a) Espaço de Parâmetros  $r_L \times R$ ; (b) diagrama de bifurcação da linha em destaque.



Fonte: o autor.

Figura 13 – Atratores referentes aos pontos destacados no espaço de parâmetros e no diagrama de bifurcação para  $A = 1,0V$ .  
 (a)  $R = 1826, 13, r_L = 54, 71$ ; (b)  $R = 1834, 83, r_L = 57, 90$ ;  
 (c)  $R = 1846, 39, r_L = 62, 14$ ; (d)  $R = 1853, 90, r_L = 64, 89$ ;  
 (e)  $R = 1871, 17, r_L = 71, 22$ ; (f)  $R = 1901, 05, r_L = 82, 18$ ;  
 (g)  $R = 1911, 41, r_L = 85, 98$ ; (h)  $R = 1928, 22, r_L = 92, 14$ .



Fonte: o autor.



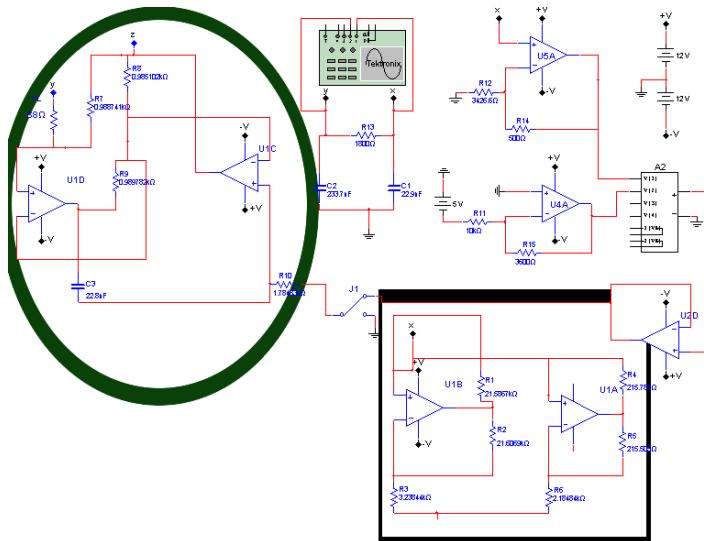
## 4 MULTISIM

MULTISIM é um software da National Instruments, baseado em linguagem SPICE (Programa de Simulação com Ênfase Circuito Integrado), sendo sua principal utilidade a simulação de circuitos eletrônicos. Desenvolvido na Universidade da Califórnia, campus de Berkeley, no final dos anos 1960. Simulação SPICE tem sido usada há mais de 30 anos prevendo o comportamento dos circuitos eletrônicos. Antes de confeccioná-los, fazemos o esquema elétrico e simulamos, isso ajuda na região de interesse dos valores dos parâmetros. Também, a simulação de circuitos é uma parte importante de qualquer processo de desenvolvimento, onde na simulação podemos detectar erros no início do processo de confecção da placa.

Durante este trabalho, viabilizamos dois estudos via MULTISIM, o circuito de Chua apresentado neste trabalho e o regulador de Watt, não enfatizado na dissertação. O diagrama elétrico do circuito de Chua no MULTISIM é mostrado pela figura 14. A região destacada em verde refere-se ao indutor simulado eletronicamente. A região destacada em preto refere-se ao diodo de Chua. O acoplamento entre a não linearidade e oscilador LC é realizada pelo resistor R.

O MULTISIM contém instrumentos virtuais, sendo um deles o analisador de curva  $I \times V$ , também há opção de osciloscópios, com opção de importação de dados para arquivos com padrão ASCI. Utilizando o recurso de analisador de curva  $I \times V$ , colocamos os valores experimentais dos resistores para o diodo de Chua e acoplamos no analisador, obtendo os pontos da curva  $I_d(V_1)$ , mostrado na figura 8. Está é uma forma de aproximar a curva teórica utilizada na simulação numérica da curva experimental. Com os pontos da curva  $I \times V$ , calculamos as inclinações das partes utilizando o GNU-PLOT com o recurso de ajuste de curva, mostrado na tabela

Figura 14 – Esquema elétrico do circuito de Chua, ambiente MULTISIM.



Fonte: o autor.

1.

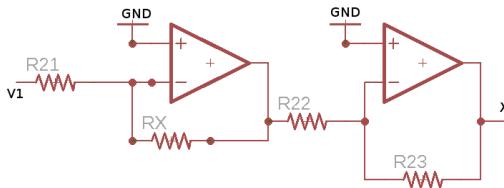
Para o confecção física da placa, dividimos o circuito em três partes: circuito de Chua padrão, dimensionador de  $V_1$  e função  $\text{Asen}(V_1)$ . O dimensionador de  $V_1$  é necessário para equivaler a função  $\text{sen}$  numérica com a função trigonométrica realizada pelo componente eletrônico AD639. Conforme o *datasheet* do AD639, para obtermos o domínio da função trigonométrica de 0 a  $2\pi$ , o sinal de tensão na entrada deve apresentar uma variação de 7,6V. Para a função  $\text{sen}$  numérica ter o mesmo domínio é obtido por uma variação de 6,2830. Nesta ideia multiplicamos o sinal de  $V_1$  para equivaler os dois domínios. Utilizando os conceitos de computação analógica, multiplicadores e inversores [25], obtemos a configuração eletrônica mostrada na figura 15 e a

expressão matemática equivalente é,

$$V_1 = \frac{R_x}{R_{21}} \frac{R_{23}}{R_{22}} V_{rad}. \quad (4.1)$$

O valor de  $V_{rad}$  é o valor de tensão medido no capacitor  $C_1$ . Os valores de  $R_{22}$  e  $R_{23}$  devem ser iguais para multiplicar o sinal por  $-1$  (operador inversor [25]). A relação entre  $R_x$  e  $R_{21}$  deve ser o mais próximo de 1,1476, pois este é o fator para adequar o sinal  $V_{rad} = V_1$ .

Figura 15 – Esquema elétrico do dimensionador de  $V_1$ .



Fonte: o autor.

O terceiro subcírcuito mencionado é o circuito função  $Asen(V_1)$ . A implementação no MULTISIM equivalente ao AD639 é feita pelo componente *nonlinear dependent*, no qual permite-nos escrever uma função, com possibilidade de depender de quatro sinais de tensão e dois sinais de corrente elétrica. Assim, obtemos o componente AD639 simulado no MULTISIM. O controle do parâmetro  $A$ , é realizado por amplificadores operacionais, semelhante ao dimensionador de  $V_1$ . Experimentalmente, utilizamos uma bateria selada de 5V/1,2Ah como sinal fixo, então a função de controle de  $A$  pode ser escrita por,

$$A = \left(-\frac{R_{Amp}}{Ref}\right)(-5). \quad (4.2)$$

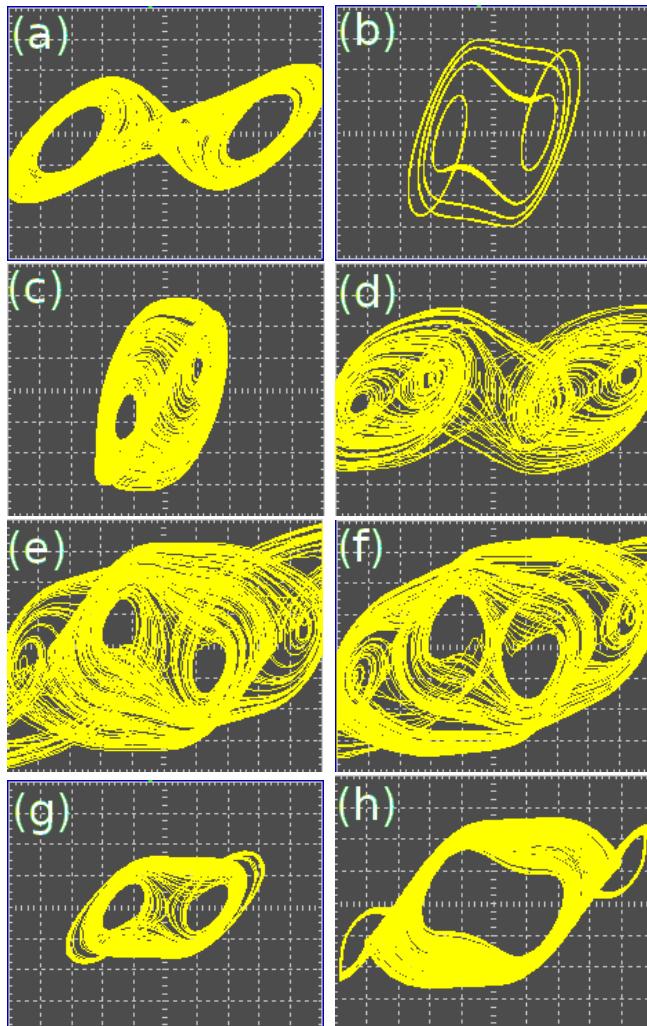
O primeiro sinal negativo existe pela característica da configuração dos amplificadores operacionais, multiplicador inversor [25], e para compensar esse efeito colocamos a bateria com sinal invertido, justificando o segundo sinal negativo. Desta forma a amplitude é sempre positiva. O resistor de  $R_{ef}$  é de referência, ou seja, usamos um componente com resistência fixa. Portanto, para variar o parâmetro  $A$ , utilizamos um potenciômetro (ou conjunto de potenciômetros) para o  $R_{Amp}$ . O produto entre  $A$  e  $\text{sen}(V_1)$  é realizado pelo próprio AD639. É válido ressaltar que este componente eletrônico realiza outras operações trigonométricas (desde que seus pinos sejam configurados para tal função).

Por fim, podemos simular o circuito, alterando os parâmetros manualmente, simulando um conjunto de parâmetros por vez. Como já dito, o MULTISIM apresenta alguns instrumentos virtuais, semelhante ao existente fisicamente, como o osciloscópio da Tektronikx. Já nos testes no MULTISIM, percebemos a influência da auto-alimentação, pois o parâmetro  $r_L$  pode assumir valores maiores em regime de caos (figura 16(a)) e laços externos aos três pontos instáveis, mostrado na figura 16(b). A divisão da escala nas figuras 16(a-c), são de 1V para o eixo  $x$  (respectivo  $V_1$ ) e 0,5V para o eixo  $y$  (respectivo  $V_2$ ). A figura 16(c) está deslocada da origem em  $x = -6,0V$ , ou seja, tem comportamento de um atrator duplo rolo desslocado. Para as figuras 16(d-h), temos divisões de 2V para  $x$  e 1V para  $y$ . As figuras 16(d-f) mostram a topologia típica de atratores de quatro rolos que esse circuito apresenta, com o aumento dos parâmetros  $R$  e  $A$  e valores baixos de do parâmetro  $r_L$ . A figura 16(g) é uma atrator idêntico ao obtido experimentalmente (figura 23(a)). Na figura 16(h) destaca a região central do atrator, não ocupada, caracterizando um ponto fixo instável altamente repulsivo.

Outro circuito desenvolvido e estudado durante o mes-

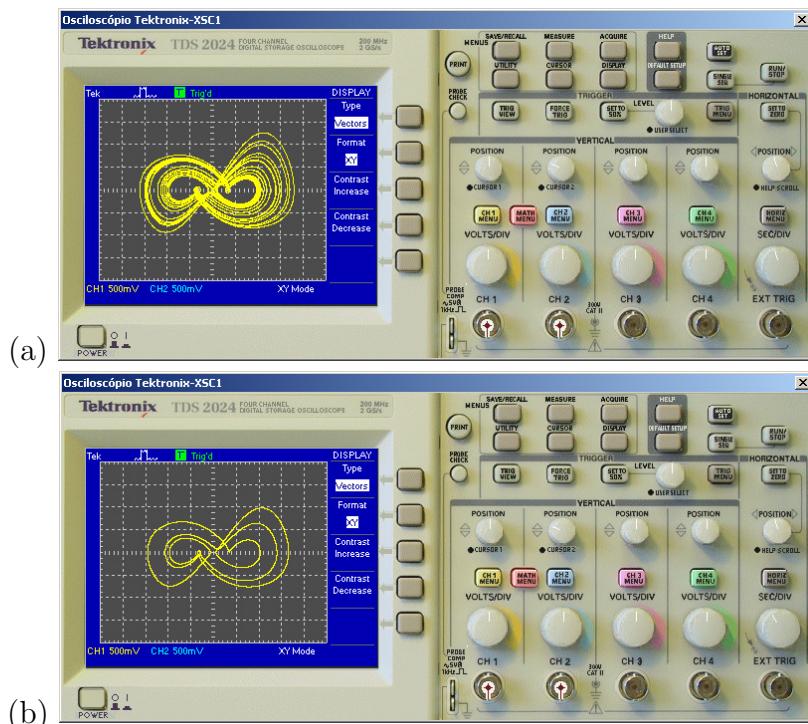
trado no MULTISIM foi o regulador de Watt [26]. O projeto consiste em obter um circuito analógico, com equações diferenciais análogas ao regulador de Watt mecânico, existentes nas máquinas a vapor. A construção do circuito é feita pelos princípios de computação analógica, baseado no sistema de equações de movimento, configurando amplificadores operacionais para realização de soma, multiplicação e integração [25]. Mostramos na figura 17 duas dinâmicas obtidas do regulador de Watt por via MULTISIM.

Figura 16 – Atratores obtidos via MULTISIM. (a)  $R = 1650\Omega$ ,  $r_L = 74\Omega$ ,  $A = 0,2V$ ; (b)  $R = 1650\Omega$ ,  $r_L = 74\Omega$ ,  $A = 0,7V$ , (c)  $R = 1650\Omega$ ,  $r_L = 30\Omega$ ,  $A = 0,7V$ ; (d)  $R = 2000\Omega$ ,  $r_L = 20\Omega$ ,  $A = 0,7V$ ; (e)  $R = 2000\Omega$ ,  $r_L = 20\Omega$ ,  $A = 2,0V$ ; (f)  $R = 1800\Omega$ ,  $r_L = 68\Omega$ ,  $A = 1,8V$ ; (g)  $R = 1900\Omega$ ,  $r_L = 15\Omega$ ,  $A = 0,92V$ ; (h)  $R = 1630\Omega$ ,  $r_L = 90\Omega$ ,  $A = 0,92V$ .



Fonte: o autor.

Figura 17 – Atratores do circuito análogo ao regulador de Watt, via MULTISIM; (a) caótico; (b) periódico.



Fonte: o autor.



## 5 EXPERIMENTAL

Neste capítulo, esplanamos os métodos experimentais utilizados relacionados a confecção do circuito, montagem, configurações e obtenção dos dados experimentais.

Após a configuração do circuito e alguns testes de valores de parâmetros realizados no ambiente MULTISIM, destinamos ao trabalho do projeto físico do circuito. Para desenhar as trilhas dos circuitos, posições e dimensão dos componentes físicos (resistores, capacitores e amplificadores operacionais), utilizou-se o software EAGLE CAD. Para simplificar o projeto (tamanho da placa), dividimos-os em três subcircuitos, sendo o circuito de Chua, figura 18(a), dimensionador de  $V_1$ , na figura 18(b) e a função  $Asen(V_1)$ , 18(c). Sendo assim, a gravação das trilhas na placa de circuito impresso, realizou-se por processo fotossensível e finalizado com a corrosão por percloroeto de ferro. O circuito foi confeccinado no Laboratório de Caos Experimental da UDESC. Apenas a furação da placa realizou-se na Oficina da Física da própria UDESC.

Os valores reais dos componentes do projeto encontram-se na tabela 3. Os valores das resistências foram medidos pelo multímetro digital de bancada Kethley 2100 de seis dígitos e meio. Os valores dos capacitores são obtidos por associação em série de capacitores, resultando nos valores mostrados na tabela 3. Os valores das capacitâncias foram medidos pelo leitor RLC de mão de três dígitos e meio.

Ainda foram utilizados três amplificadores operacionais TL084 para função do diodo de Chua, indutor eletrônico, controle de amplitude, e dimensionador de  $V_1$ . Também foi utilizado um AD639 para a função trigonométrica. O custo na confecção de um circuito de Chua modelo padrão é considerado baixo, próximo de R\$15,00. Porém, dependendo da resolução da variação dos parâmetros (qualidade dos po-

Tabela 3 – Valores reais e teóricos dos componentes utilizados no circuito de Chua.

R	Real ( $K\Omega$ )	Teórico ( $K\Omega$ )	Erro %
R1	21,5867	22,0	1,879
R2	21,6069	22,0	1,787
R3	3,23844	3,3	1,865
R4	0,215781	0,220	1,918
R5	0,215505	0,220	2,043
R6	2,18484	2,2	0,689
R7	0,988741	1,0	1,126
R8	0,985102	1,0	1,490
R9	0,989782	1,0	1,022
R10	1,78483	1,8	1,517
C	Real $\eta F$	Teórico $\eta F$	Erro %
C1	22,90	23,5	2,553
C2	233,7	235	0,553
C3	22,80	23,5	2,979

Fonte: o autor

tenciômetros) o investimento aumenta consideravelmente. O componente AD639 é considerado obsoleto, com dificuldade de encontrá-lo comercialmente e com preço próximo R\$130,00.

## 5.1 CONFIGURAÇÃO DE MONTAGEM

Circuitos eletrônicos são suscetíveis a interferência de ondas eletromagnéticas. Para evitar de tal efeito, alocamos o circuito de estudo dentro de uma caixa de metal retangular. Nesta caixa, acoplamos um interruptor para ligar e

desligar o circuito do sistema de alimentação realizado por duas baterias de 12V/7AH ligadas em série. Ainda na caixa metálica, fixamos potenciômetros para os parâmetros e os conectores BNC para medições das variáveis  $V_1$  e  $V_2$ . Os potenciômetros utilizados são do modelo multivoltas de precisão (modelo 3590S), sendo o ajuste grosso da marca SUNDTAN e de ajuste fino da marca VISHAY. Os potenciômetros são de 10 voltas, utilizados marcadores para o mesmo, chamados de dial.

Quanto a averiguação da resistência equivalente para os potenciômetros de ajuste fino, realizou-se medidas em 100 posições do dial, sendo 10 voltas divididas em 10 partes. As subdivisões das centésimas partes do potenciômetro foram obtidas por interpolação linear. Para os potenciômetros de ajuste grosso, foram medidos apenas os valores da volta completa, fazendo interpolação linear para os demais valores.

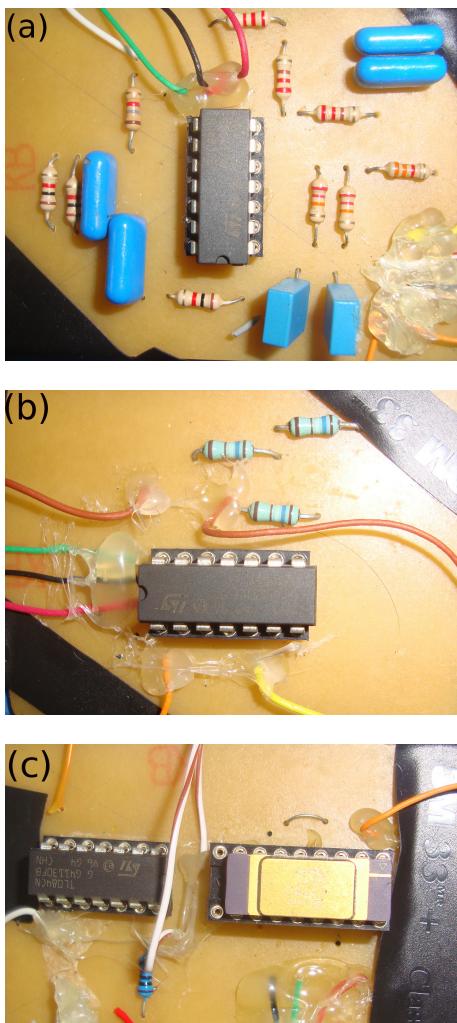
Pelo fato da fixação dos potenciômetros na carcaça de metal e o projeto ser dividido em subcircuitos, o circuito de Chua fica compacto, de  $6cm \times 6cm$ , mostrado na figura 18(a). Conforme já dito, o dimensionador tem a função de adequar o valor de  $V_1$  para corresponder a função trigonométrica numérica com a analógica. O valores reais deste subcircuito são expressos na tabela 4. O valor de  $R_x$  foi obtido por um potenciômetro em série com um resistor.

Tabela 4 – Valores reais dos resistores para o dimensionador de  $V_1$ .

Resistores	$K\Omega$
R21	1,68755
R22	1,68620
R23	1,68744
R <sub>x</sub>	1,936

Fonte: o autor.

Figura 18 – Foto dos circuitos.(a) circuito de Chua;(b) dimensionador de  $V_1$ ; (c) função a  $\text{Asen}(V_1)$ .



Fonte: o autor.

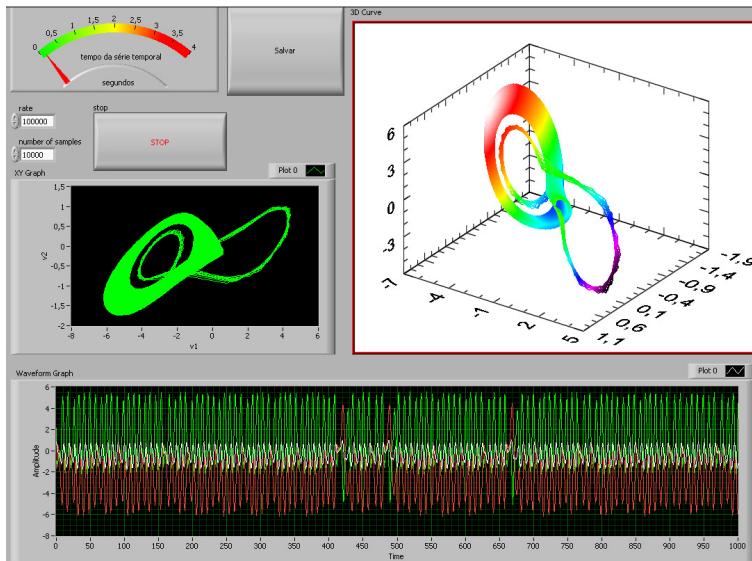
Para o  $R_{ef}$  relacionado a obtenção do parâmetro  $A$ , foi escolhido um resistor de precisão de valor igual a  $10,06065K\Omega$ . Para  $R_{Amp}$ , associamos em série três potênciometros, com variações limites de  $10K\Omega$ ,  $1K\Omega$  e  $100\Omega$ .

## 5.2 AQUISIÇÃO

Outros programas utilizados na pesquisa foram o Labview da National Instruments, TISEAN e GNUPLOT. O LABVIEW é um ambiente de programação com a finalidade de criar rotinas de instrumentos virtuais (*VI*). Seu método de interpretação é baseado no princípio de fluxo de dados. Ele foi utilizado para aquisição de dados e visualização dos atratores em tempo real. No instrumento virtual, figura 19, apresentamos simultaneamente a série temporal das três variáveis, o atrator tridimensional, a projeção do atrator. As figuras dos atratores apresentadas na dissertação foram feitas no GNUPLOT. Para cálculo dos expoentes de Lyapunov, histogramas e máximos, foi utilizado o programa TISEAN. Obtemos os dados utilizando um computador Intel Core 2 Duo com frequência de processador de  $3,16Ghz$ , equipado de 3GB de memória RAM, com placa mãe Intel. A placa de aquisição de dados da empresa National Instruments, modelo 6259 PCIe, em conjunto com o bloco BNC 2090A. O limite da placa de aquisição de dados é de 1 MS/s (um milhão de pontos por segundo). As saídas do circuito são conectadas em um *buffer* para isolar o sistema da placa de aquisição de dados devido a baixa impedância da mesma.

A taxa de atualização na aquisição de dados foi de  $350KHz$ , ou seja, o passo do tempo entre um ponto e o consequente é de  $2,857 \times 10^{-6}$ . O número de pontos foi de 100 mil pontos para atratores típicos e 700 mil pontos para o estudo de crise interna, respectivamente, equivalendo a  $0,285s$  e  $2s$  da série temporal.

Figura 19 – Instrumento virtual criado em ambiente Labview para aquisição de dados.



Fonte: o autor.

### 5.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os atratores mostrados nas figuras 20 e 21, periódico e caótico, respectivamente, assemelham-se ao conhecido duplo rolo do circuito de Chua, com destaque para o alongamento dos extremos em  $V_1$ , influenciado pela realimentação  $Asen(V_1)$ . Além de apresentarmos o atrator, mostramos também a série temporal (b) e o logarítmico do número de máximos em  $V_1$  (c). Para a construção dos histogramas foram utilizados os comandos *extrema* com os parâmetros,

```
extrema -c2 arq_serie.dat -o arq_max.dat
```

e *histogram* com os parâmetros,

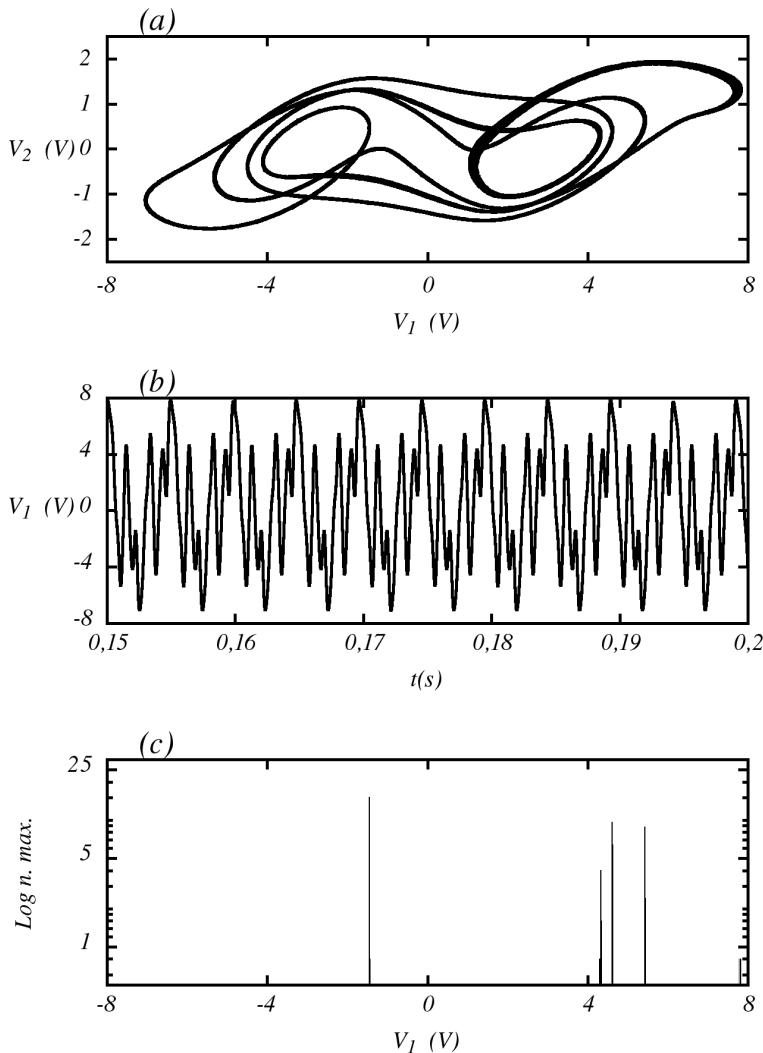
```
histogram -c1 -b1000 arq_max.dat -o arq_hist.dat
```

ambos do TISEAN [7, 27]. O parâmetro  $-c$  refere-se a coluna utilizada do arquivo e o parâmetro  $-o$  a saída do arquivo. O parâmetro  $-b$  configura o número de intervalos do histograma.

Os estudo por histograma dos máximos da série temporal é para comparar o número de vezes que eles são visitados. Em atratores periódicos, essas regiões apresentam ilhas pequenas no histograma. Para o caso de caos, temos uma distribuição discreta e larga no histograma. Para a região de crise interna, temos uma região principal de distribuição discreta e larga com outra distribuição com poucos eventos.

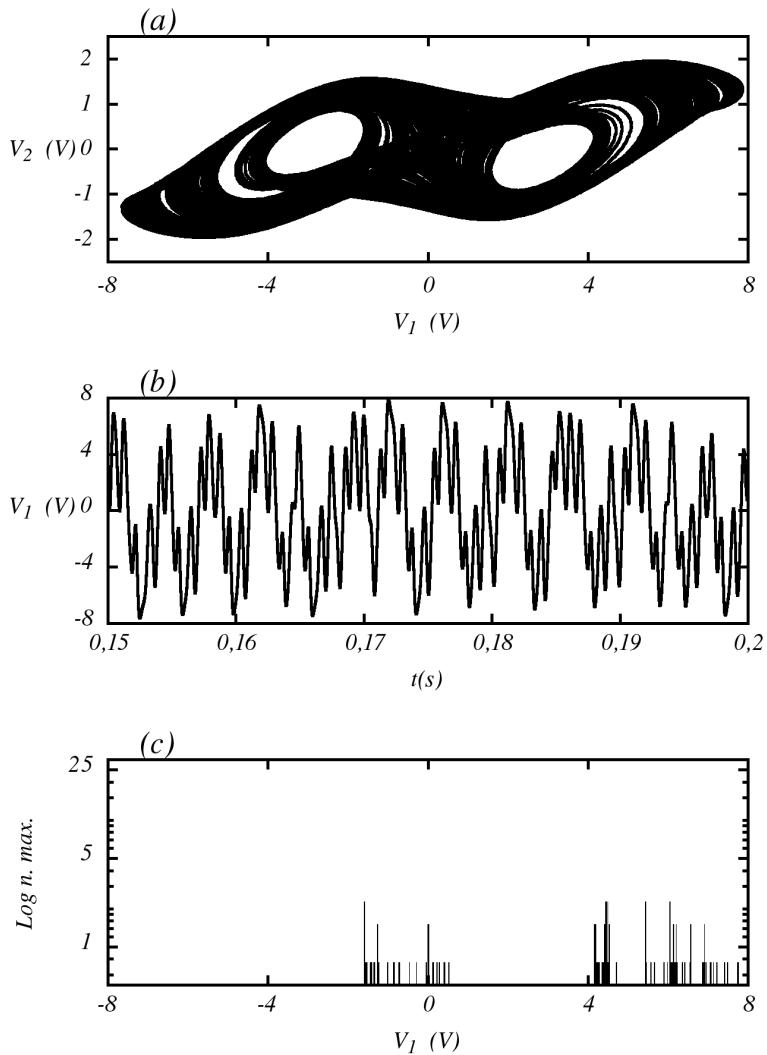
O atrator apresentado na figura 22(a), tem período 2, e aparentemente temos um novo ponto de equilíbrio. Já as figuras 23, 24 e 25 são atratores pouco comum do Chua padrão.

Figura 20 – Parâmetros  $R = 1727, 6\Omega$ ,  $r_L = 79, 91\Omega$ ,  $A = 0, 92V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



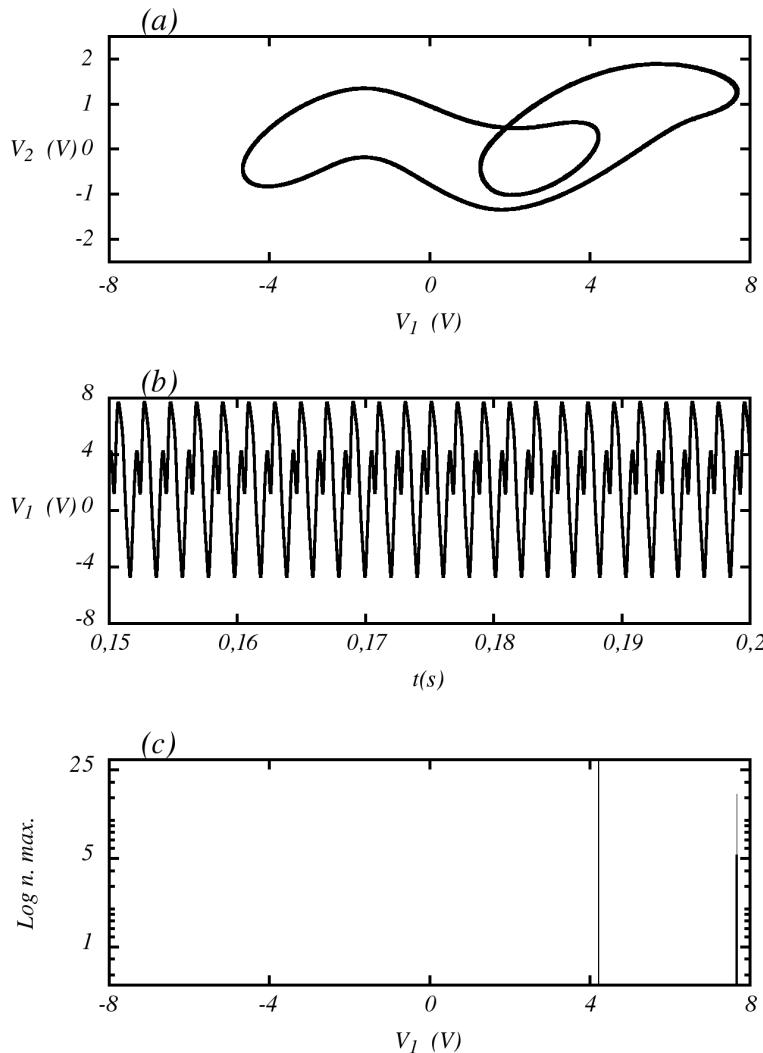
Fonte: o autor.

Figura 21 – Parâmetros  $R = 1731, 8\Omega$ ,  $rL = 87, 86\Omega$ ,  $A = 0, 92V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



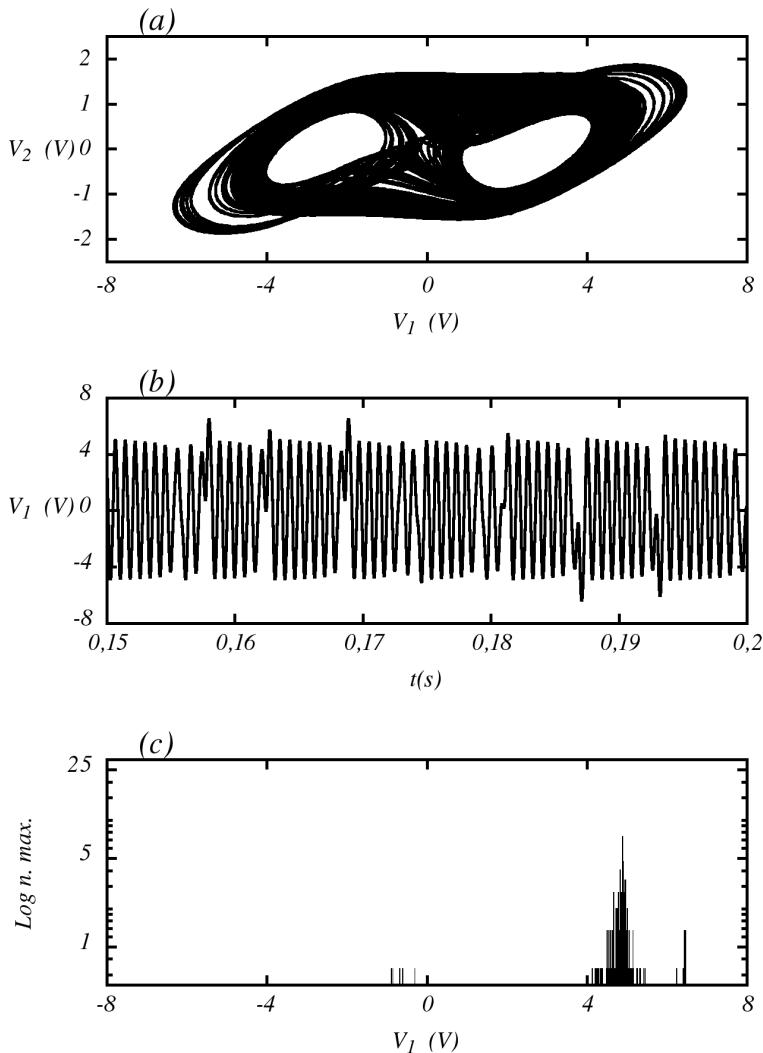
Fonte: o autor.

Figura 22 – Parâmetros  $R = 1731, 8\Omega$ ,  $r_L = 73, 16\Omega$ ,  $A = 0, 92V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



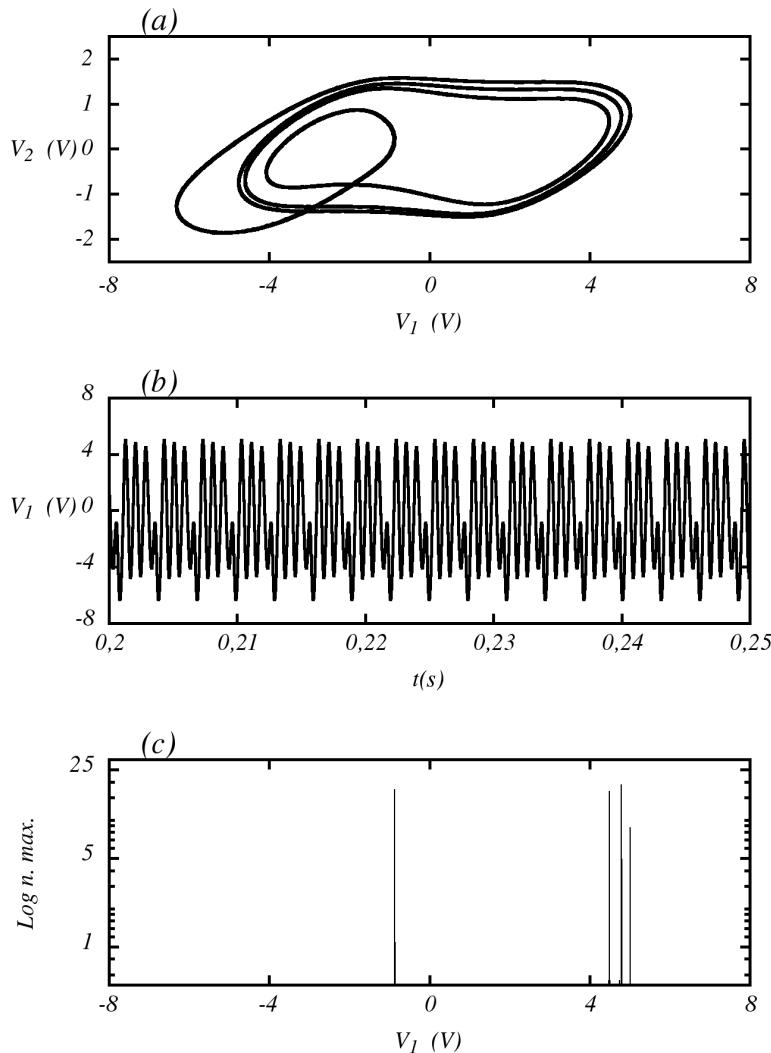
Fonte: o autor.

Figura 23 – Parâmetros  $R = 1622, 6\Omega$ ,  $r_L = 85, 86\Omega$ ,  $A = 0, 92V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



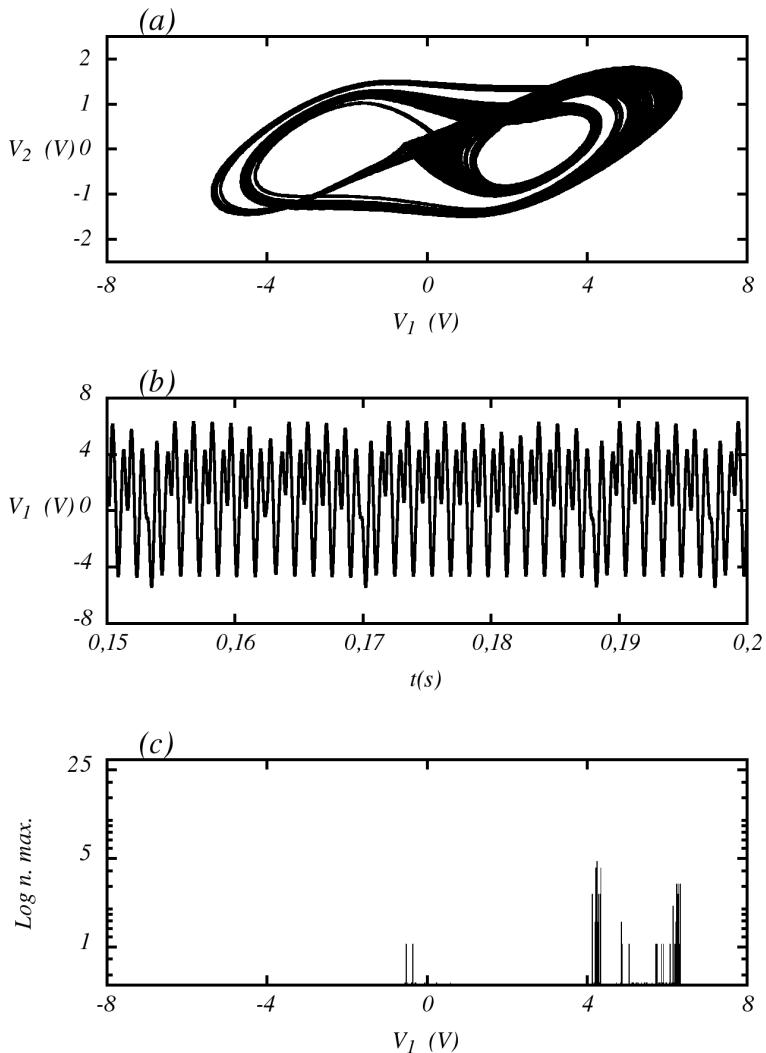
Fonte: o autor.

Figura 24 – Parâmetros  $R = 1622, 6\Omega$ ,  $r_L = 89, 17\Omega$ ,  $A = 0, 92V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



Fonte: o autor

Figura 25 – Parâmetros  $R = 1622, 6\Omega$ ,  $r_L = 97, 73\Omega$ ,  $A = 0, 92V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



Fonte: o autor.

## 5.4 CRISE EXPERIMENTAL

Um atrator que destacamos, está representado nas próximas figuras 26, 27, 28 e 29. Aparentemente, temos na região  $-V_1$  um atrator caótico de único rolo e na região  $+V_1$  um atrator periódico. Esse atrator está localizado na fronteira entre os atratores único rolo e duplo rolo, conforme discutido na sessão numérica.

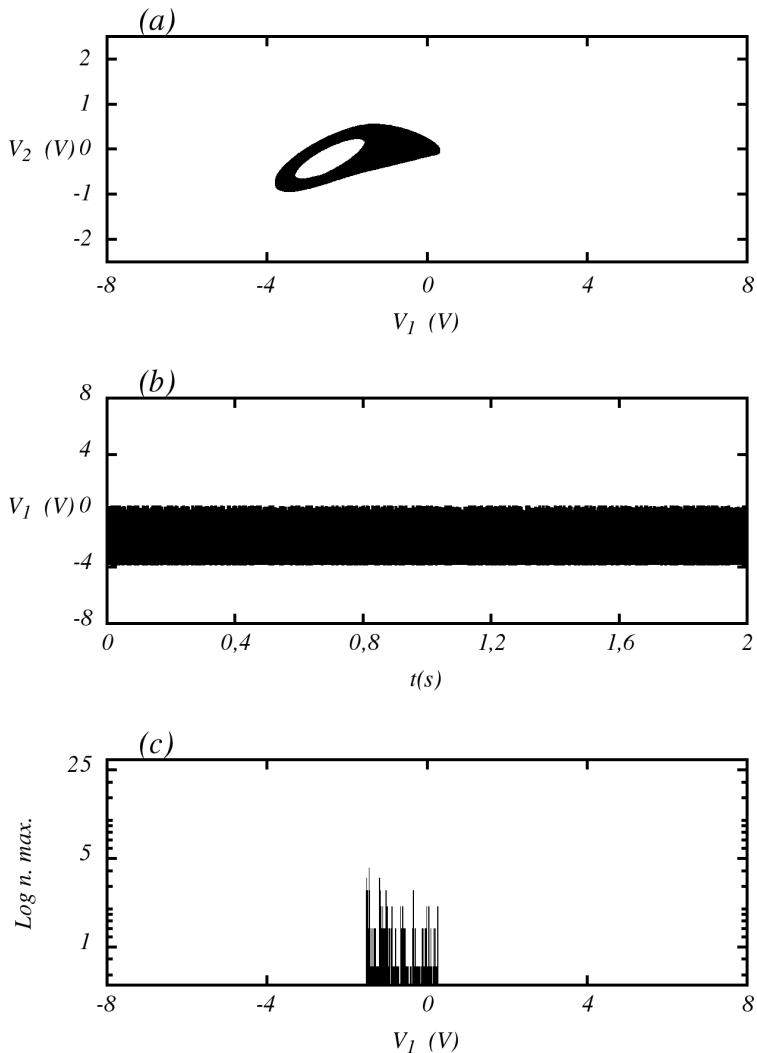
Esse fenômeno ocorre quando o atrator único rolo aumenta sua amplitude por crise interna passando ao comportamento de duplo rolo. Comumente é dito que essa mudança é abrupta, mas há uma dependência na escala de tempo em que é analizada, onde verificamos a visita intermitente na outra região dos espaços de fase.

Experimentalmente, demonstramos quatro atratores na seguinte sequência: único rolo, figura 26; crise sendo o atrator em parâmetro crítico, figura 27; crise após parâmetro crítico, figura 28; e duplo rolo, figura 29. No ponto crítico ( $p_c$ ), temos que a ocorrência dos máximos em  $+V_1$  possui um número de ocorrência extremamente pequena, mesmo em escala logarítmica é quase imperceptível.

Alterando apenas  $0,10\Omega$  no parâmetro  $r_L$  chegamos ao ponto crítico, o qual define a fronteira entre os atratores único rolo e duplo rolo, sendo a colisão de um atrator caótico com um órbita periódica instável. Diminuindo o parâmetro em  $0,10\Omega$  percebemos que a visita ao lado  $+V_1$  tem maior frequência. Aumentando o número de máximos conforme esse parâmetro é alterado.

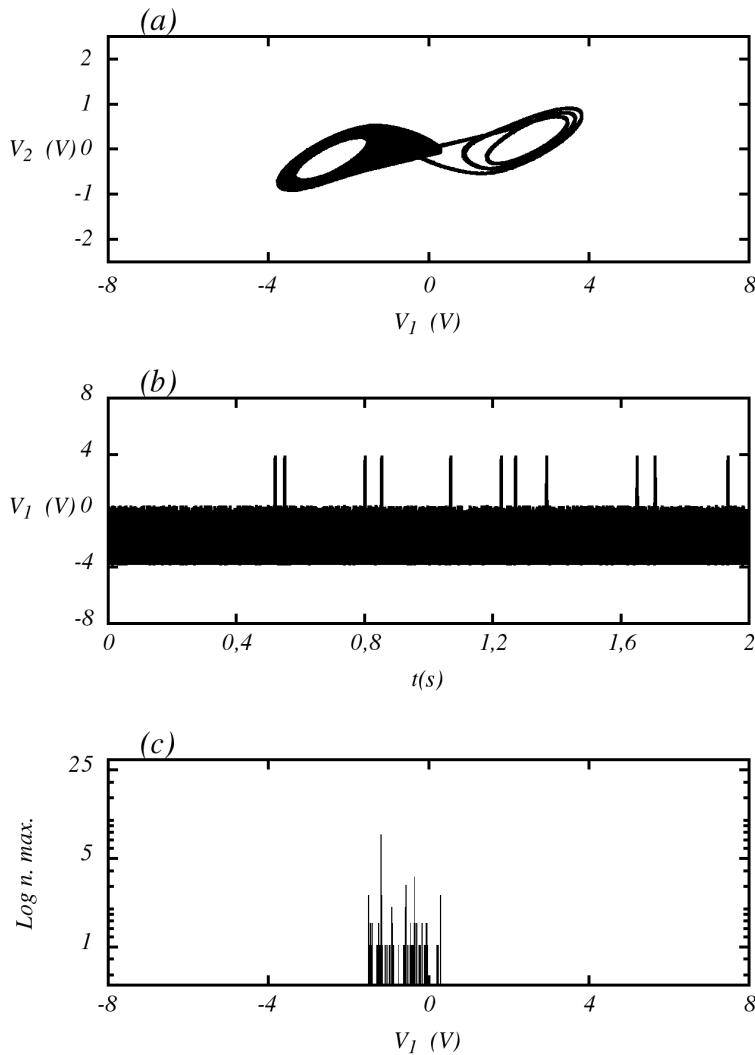
Diminuindo o parâmetro em  $r_L = 76,79\Omega$ , obtém-se o atrator duplo rolo, com valor de número de máximos semelhantes entre  $+V_1$  e  $-V_1$ , mostrado na figura 29(c).

Figura 26 – Parâmetros  $R = 1433$ ,  $7\Omega$ ,  $r_L = 77, 29\Omega$ ,  $A = 0, 2V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



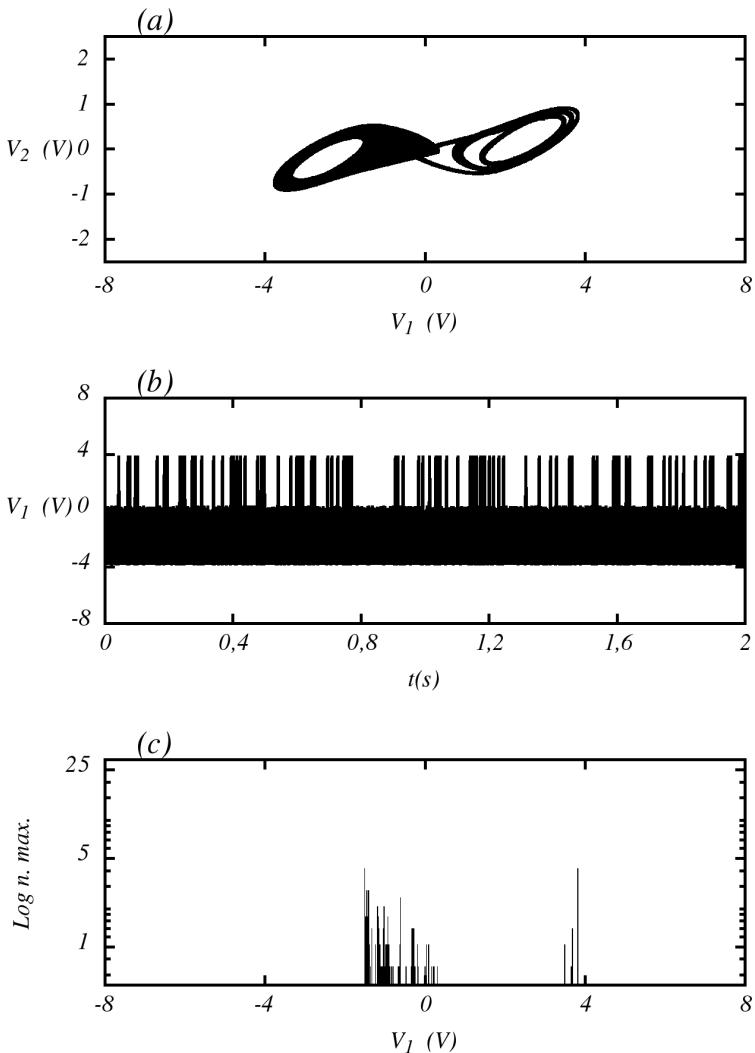
Fonte: o autor.

Figura 27 – Parâmetros  $R = 1433, 7\Omega$ ,  $r_L = 77, 19\Omega$ ,  $A = 0, 2V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



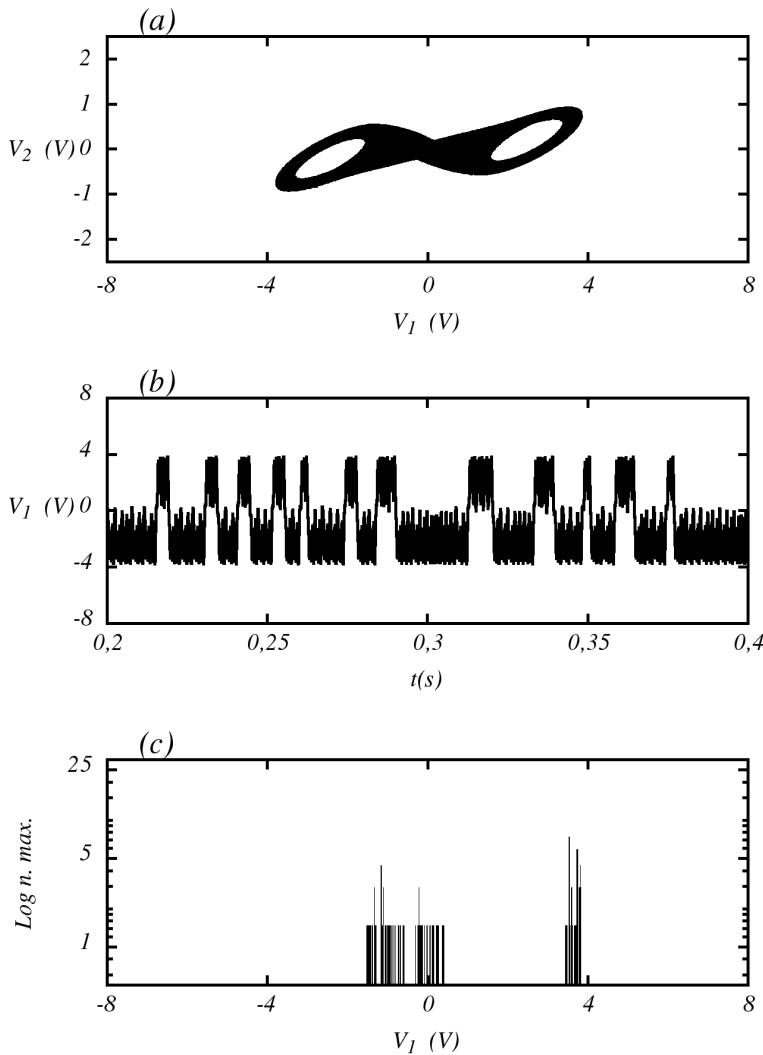
Fonte: o autor.

Figura 28 – Parâmetros  $R = 1433, 7\Omega$ ,  $r_L = 77, 09\Omega$ ,  $A = 0, 2V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



Fonte: o autor.

Figura 29 – Parâmetros  $R = 1433, 7\Omega$ ,  $r_L = 76, 79\Omega$ ,  $A = 0, 2V$ ; (a) atrator  $V_2 \times V_1$ ; (b) Série temporal de  $V_1$ ; (c) Histograma dos máximos  $\log n.\max \times V_1$ .



Fonte: o autor.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos o circuito de Chua com re-alimentação de um função senoidal do tipo  $Asen(V_1)$ . Através de simulação numérica, observamos nos espaços de parâmetros do maior expoente de Lyapunov que esta implementação deslocou as estruturas periódicas, supriu a região de ponto fixo, apresentou uma outra região de caos para um conjunto de valores do espaço de parâmetros. Esta nova região está relacionada a mudança indireta que a realimentação faz na curva  $I \times V$ , caracterizada pelos novos pontos de operação do circuito. A exploração experimental dessa região pode ser viável com a utilização da placa de aquisição de dados para o controle do parâmetro  $A$ , diminuindo o número de potênciometros de ajuste grosso, que possuem baixa qualidade.

Via o estudo numérico, concluímos que com o aumento da amplitude de realimentação (parâmetro  $A$ ) a valores maiores que  $A = 4,0V$  suprimimos o caos do espaço de parâmetros da região estudada, sendo resultado oposto com o método de forçamento externo com a observação de supressão de periodicidade com o aumento da amplitude de forçamento [12].

A viabilização do estudo experimental incentivou o estudo numérico deste sistema, com uma rica dinâmica a ser explorada, especialmente pelos novos pontos de equilíbrio do sistema. Os atratores numéricos, via MULTISIM e experimentais apresentam comportamentos idênticos, apesar de um deslocamento de valores de parâmetros, conforme a figura 16(g) com parâmetros de  $R = 1900\Omega$ ,  $r_L = 15\Omega$ ,  $A = 0,92V$  obtida via MULTISIM e a figura 23 com parâmetros  $R = 1622,6\Omega$ ,  $r_L = 85,86\Omega$ ,  $A = 0,92V$  obtido experimentalmente. Também podemos citar a figura 16(e) com parâmetros  $R = 2000\Omega$ ,  $r_L = 20\Omega$ ,  $A = 2,0V$  obtido via

MULTISIM e a figura 13(c) com parâmetros  $R = 1846, 39\Omega$ ,  $r_L = 62, 14\Omega$ ,  $A = 1, 0V$  obtida via simulação numérica por Runge-Kutta de quarta ordem.

O MULTISIM demonstrou ser um software confiável no seu método de integração, sendo que o observado via experimental e método numérico por Runge-Kutta assemenlhamsse. Em princípio com resultados qualitativos, como ferramenta inicial para desenvolvimento de novos circuitos caóticos.

A observação experimental e numérica do atrator na fronteira de crise interna, comprova que sua existência não deve-se ao fato de ruídos externos e sim pertencente a própria dinâmica do circuito. Com o estudo do diagrama de bifurcação podemos encontrar tal região, explorando a escala de tempo a ser analizada. Verificamos numericamente várias regiões de ocorrência de crise e concluímos que a aquisição de dados em uma janela de tempo mal escolhido o fenômeno de intermitência não é observado. Finalmente, estudamos o  $p_c$  (ponto crítico ou parâmetro em crise) através do histograma de máximos na variável  $V_1$ , com o objetivo de caracterizar o fenômeno de intermitência para estudos futuros.

## REFERÊNCIAS

- [1] KUZNETSOV, I. A. *Elements of applied bifurcation theory*. [S.l.]: Springer, 1998.
- [2] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.
- [3] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- [4] CHUA, L. O. The genesis of chua's circuit. *Archiv fur Eletronik and Ubertragungstechnik*, 1992.
- [5] KAPITANIAK, T. *Controlling chaos*. [S.l.]: Academic Press, 1996.
- [6] AGUIRRE, L. et al. Inductorless Chua's circuit. *Electronics Letters*, IET, v. 36, n. 23, p. 1915–1916, 2000.
- [7] SPROTT, J. C.; SPROTT, J. C. *Chaos and time-series analysis*. [S.l.]: Oxford University Press Oxford, 2003.
- [8] HEGGER, R.; KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. 2014. Disponível em: <[http://www.mpiks-dresden.mpg.de/~tisean/Tisean\\_3.0.0/](http://www.mpiks-dresden.mpg.de/~tisean/Tisean_3.0.0/)>.
- [9] FORTUNA, L.; FRASCA, M.; XIBILIA, M. *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*. [S.l.]: World Scientific Pub, 2009. (World Scientific series on nonlinear science. Series A).
- [10] KILIÇ, R. *A Practical Guide for Studying Chua's Circuits*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2010. (World Scientific Series on Nonlinear Science: Series A).

- [11] VIANA, E. R. J. *Espaços de Pâmetros para um Circuito Caótico Experimental*. Dissertação (Mestrado) — UFMG, 2010.
- [12] MATHIAS, A. C.; RECH, P. C. Periodicity suppression in continuous-time dynamical systems by external forcing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 22, n. 4, p. 043147, 2012.
- [13] VIANA, E. R. J. et al. High-resolution parameter space of an experimental chaotic circuit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 20, n. 2, p. 023110, 2010.
- [14] CHAKRABORTY, S.; DANA, S. K. Shil 'nikov chaos and mixed-mode oscillation in Chua circuit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 20, n. 2, p. 023107, 2010.
- [15] MEDRANO-T, R. O.; ROCHA, R. The negative side of chua's circuit parameter space: Stability analysis, period-adding, basin of attraction metamorphoses, and experimental investigation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 24, n. 09, 2014.
- [16] MARANHÃO, D. et al. Experimental observation of a complex periodic window. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 3, p. 037202, 2008.
- [17] PREBIANCA, F.; ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M. On the effect of a parallel resistor in the Chua's circuit. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2011. v. 285, n. 1, p. 012005.
- [18] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. Self-similar structures in a 2D parameter-space of an

- inductorless Chua's circuit. *Phys. Lett. A*, v. 372, p. 4793–4798, 2008.
- [19] SAVI, M. Chaos and order in biomedical rhythms. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 27, n. 2, p. 157–169, 2005.
- [20] SPROTT, J. C. *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. [S.l.]: World Scientific, 2010.
- [21] GREBOGI, C. et al. Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Physical Review A*, APS, v. 36, n. 11, p. 5365, 1987.
- [22] ALBUQUERQUE, H. A.; RECH, P. C. Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a Chua circuit. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, Wiley Online Library, v. 40, n. 2, p. 189–194, 2012.
- [23] BIOTTA, E.; PANTANO, P. *A Gallery of Chua Attractors*. [S.l.]: World Scientific, 2008. (World Scientific Series on Nonlinear Science).
- [24] TANG, W. K. et al. Generation of n-scroll attractors via sine function. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 48, n. 11, p. 1369–1372, 2001.
- [25] BOYLESTAD, R. L.; NASHELSKY, L. *Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos*. [S.l.]: Prentice-Hall do Brasil, 1984.
- [26] SOTOMAYOR, J.; MELLO, L. F.; BRAGA, D. d. C. Análise de bifurcação do sistema regulador de watt. *Computational & Applied Mathematics*, v. 26, n. 1, p. 19–44, 2007.
- [27] KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear time series analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.