

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

JULIO CÉZAR D'AMORE CARDOSO

**Estudo Numérico da Dinâmica de Osciladores Forçados
no Espaço de Parâmetros**

Joinville, SC

2012

JULIO CÉZAR D'AMORE CARDOSO

**Estudo Numérico da Dinâmica de Osciladores Forçados
no Espaço de Parâmetros**

Dissertação apresentada para obtenção do título
de Mestre em Física pela Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnoló-
gicas - CCT.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

Joinville, SC

2012

JULIO CÉZAR D'AMORE CARDOSO

**Estudo Numérico da Dinâmica de Osciladores Forçados
no Espaço de Parâmetros**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

área de concentração em "física", e aprovada em sua forma final pelo
CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Banca examinadora

Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC (presidente/orientador)

Dr. Luis Fernando de Osório Mello
UNIFEI

Dr. César Manchein
CCT/UDESC

Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC (suplente)

FICHA CATALOGRÁFICA

C268e

Cardoso, Julio Cézar D'Amore.

Estudo Numérico da Dinâmica de Osciladores Forçados no Espaço de Parâmetros
/Julio Cézar D'Amore Cardoso;

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

- Joinville - SC

75 f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina,
Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2012.

1. Dinâmica não-linear. 2. Exponente de Lyapunov.

CDD 531.1

A toda a minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Elio e Rejane, que sempre me deram apoio, amor, carinho e atenção e, também, suporte financeiro que, em diversos momentos foram importantes.

Aos meu tios Aristóteles e Vera por participarem da correção do texto.

À Camilla minha namorada, pela paciência e compreensão nos momentos difíceis.

Aos meus amigos do mestrado, Anne, Kelaine, Amilson, Denilson, Thiago, José, Alex, Douglas, Jorge, Willian, Taline, Antonio, pelas discussões e brincadeiras que vivenciamos durante dois anos.

Ao João Norberto P. dos Santos, um amigo em especial, que deixou saudades a todos que puderam conviver com ele.

A todos do grupo de dinâmica não-linear.

A todos os professores que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação e, para o meu conhecimento e, em especial, aos professores Paulo C. Rech e ao meu orientador, Holokx A. Albuquerque.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES e à Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação estudamos a dinâmica dos osciladores forçados, via estudo do espaço (plano) de parâmetros. Para caracterizar o comportamento no espaço de parâmetros, usamos dois métodos: um que calcula somente o maior expoente de Lyapunov e o outro que calcula o espectro de Lyapunov. Os sistemas estudados nessa dissertação são: três osciladores complexos forçados e um circuito de Chua forçado no espaço quadridimensional. Com a construção dos espaços de parâmetros, foi possível observar diversos comportamentos dinâmicos. Usamos também, outras técnicas conhecidas, como a construção de diagramas de bifurcação e trajetórias no espaço de fase, para caracterizar a dinâmica dos sistemas. Porém, o método que apresentou mais recursos para caracterizar a dinâmica de um sistema, foi o que calcula o espectro de Lyapunov, pois, a partir daí, é possível construir os espaços de parâmetros para o primeiro e para o segundo maiores expoentes de Lyapunov.

Palavras-chave: Caos. Espaço de parâmetros. Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

In this work we studied the dynamical behavior of driven oscillators on the parameter spaces. To characterize the behavior on parameter spaces, we use two numerical methods: one to calculate the most positive Lyapunov exponent and one to calculate the spectrum of the exponents. The dynamical systems studied in this work are: three complex driven oscillators and a four-dimensional Chua circuit. With the help of the parameter spaces, it was possible to observe various dynamical behaviors of the systems. We also use others techniques, as bifurcation diagrams and trajectories on phase space (attractors) to characterize the systems dynamics. However, between the two numerical methods used, the best one was that calculate the Lyapunov exponent spectrum, because it is possible to construct the parameter spaces for the first and the second largest Lyapunov exponent.

Key words: Chaos. Parameter Space. Lyapunov Exponents.

Sumário

1	Introdução	13
2	Estudo da Dinâmica de Sistemas Não-Lineares Via Espaço de Parâmetros	16
2.1	Estado da Arte	16
2.2	Caracterização da Dinâmica no Espaço de Parâmetros Baseado no Espectro de Lyapunov	34
3	Osciladores Complexos Forçados	39
3.1	Osciladores Complexos Forçados	39
3.1.1	Sistema (A)	40
3.1.2	Sistema (B)	44
3.1.3	Sistema (C)	48
4	Círcuito de Chua Forçado	54
4.1	Resultados Numéricos	54
5	Conclusões	68

Listas de Figuras

2.1	Espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Figura extraída da Ref. [12].	18
2.2	Camarões imersos no mar de caos ao longo de uma direção específica α . Os números referem-se à periodicidade. Figura extraída da Ref. [12].	19
2.3	Existência de domínios de atratores periódicos π (região de periodicidade), no espaço de parâmetros (ε, δ) . Figura extraída da Ref. [17].	20
2.4	Ampliação do domínio π perto da bifurcação tipo <i>cusp</i> C_p .Figura extraída da Ref. [17].	20
2.5	(a) Visão global do espaço de parâmetros do modelo de laser de CO ₂ mostrando uma rede regular de ilhas de estabilidades. (b) zoom da caixa em (a). Os números indicam o período principal de cada ilha de estabi- lidade. (c) Ampliação da ilha de estabilidade de período-11 (indicado em (b) por um circulo no número 11), exibindo a forma genérica de todas as ilhas de estabilidade. Figura extraída da Ref. [16].	22
2.6	Espaço de parâmetros para diferentes valores do expoente de Lyapunov. Cinza para órbitas periódicas (à esquerda da linha pontilhada) e para pontos fixos (à direita da linha pontilhada), verde representa a transição de órbitas periódicas para caóticas e azul para regiões de divergência. Figura extraída da Ref. [7].	24
2.7	Ampliações das quatro caixas (1, 2, 3 e 4) da Fig. 2.6, mostrando detalhes do espaço de parâmetros. O esquema de cores é o mesmo usado na Fig. 2.6. Figura extraída da Ref. [7].	25

2.8	Espaço de parâmetros para o circuito resistivo simples, onde uma hierarquia infinita de espirais alinhados ligados pelo foco. O diagrama mostra a magnitude dos expoentes de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [9].	26
2.9	Visão global do espaço de parâmetros, associando diferentes intensidades de cores para valores diferentes do expoente de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [26].	26
2.10	Visão global do espaço de parâmetros associando intensidades diferentes de cores para diferentes valores dos expoentes de Lyapunov na escala ao lado direito. Os números indicam a periodicidade principal de cada estrutura. Figuras extraídas da Ref. [10].	28
2.11	Ampliação da caixa B da Fig. 2.10. As intensidades diferentes de cores referem-se aos diferentes valores dos expoentes de Lyapunov na escala ao lado direito. Figura extraídas da Ref. [10].	28
2.12	Regiões de diferentes comportamentos dinâmicos no espaço de parâmetros (a, r) do sistema proposto. (a) O maior expoente de Lyapunov. (b) Segundo maior expoente de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [31].	30
2.13	Espaço de parâmetros (α, β) para o modelo de Chua quadridimensional, com $s = 0,1$ e $\gamma = 0,32$. (a) Para o maior expoente de Lyapunov e (b) o segundo maior expoente de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [32].	32
2.14	Espaços de parâmetros para o circuito de Chua quadridimensional. (a) e (b) mostra, respectivamente, o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço de parâmetros (α, s) com $\beta = 50$ e $\gamma = 0,32$. (c) e (d) mostra, respectivamente, o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço e parâmetros (β, s) com $\alpha = 30$ e $\gamma = 0,32$. (e) e (f) mostra, respectivamente o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço de parâmetros (γ, s) com $\alpha = 30$ e $\beta = 50$.Figura extraída da Ref. [32].	33

3.1	Visão global do espaço de parâmetros para o sistema (A) para o maior expoente de Lyapunov. A escala à direita identifica, em cores, o maior expoente. A linha vermelha em $A = 1$, identifica o estudo feito na Ref. [30] das Eqs. (3.3) e, também, a direção do diagrama de bifurcação da figura 3.2. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores mostrados na figura 3.3.	41
3.2	Diagrama de bifurcação ao longo da linha vermelha da figura 3.1, com Ω variando entre $0,93 < \Omega < 1,1$ e com $A = 1$. As setas vermelhas e os números verdes, indicam as posições dos atratores da figura 3.3.	42
3.3	Retratos de fase para os parâmetros representados pelos símbolos numerados em verde da figura 3.1. Os números dentro referem-se à posição dos atratores na figura 3.1.	43
3.4	Espaço de parâmetros (A, Ω) para o maior expoente de Lyapunov. A escala ao lado direito identifica, em cores, a magnitude dos expoentes. A linha em azul em $A = 1$, indica a região onde foi feito o estudo na Ref. [30]. Os símbolos numerados identificam os valores de parâmetros usados para os atratores mostrados na figura 3.6.	45
3.5	Espaço de parâmetros (A, Ω) para o segundo maior expoente de Lyapunov.	46
3.6	Retratos de fase para os pares de parâmetros identificados pelos símbolos numerados em verde da figura 3.4. Os números dentro, referem-se às posições dos atratores na figura 3.4.	47
3.7	Visão global do espaço de parâmetros do sistema (C) para o maior expoente de Lyapunov. A escala à direita identifica, em cores, a magnitude do maior expoente. A linha azul, pontilhada em $A = 1$ indica o estudo feito na Ref. [30]. Já a linha contínua, também em $A = 1$, mostra o caminho seguido pelo diagrama de bifurcação da figura 3.8. A região interna à caixa A é mostrada ampliada na figura 3.10. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores, na figura 3.9.	49

3.8	Diagrama de bifurcação ao longo da linha azul contínua da figura 3.7, com Ω variando entre $0,6 < \Omega < 1,8$ e $A = 1$. As setas e os números verdes indicam as posições dos atratores na figura 3.9.	50
3.9	Retratos de fase para os símbolos numerados na figura 3.7. Os números, dentro, referem-se às posições dos atratores na figura 3.7.	51
3.10	Ampliação da região dentro da caixa A da figura 3.7. A linha azul indica a região onde o diagrama de bifurcação 3.11 foi construído e os símbolos verdes, as posições dos atratores.	52
3.11	Diagrama de bifurcação ao longo da linha azul da figura 3.10, com Ω variando entre $6,4 < \Omega < 7,3$ e, com $A = 2,24$. As setas vermelhas e os números verdes indicam as posições dos atratores da figura 3.12.	53
3.12	Retratos de fase para os símbolos numerados na figura 3.10. Os números dentro referem-se às posições dos atratores na figura 3.10.	53
4.1	Espaço de parâmetros (A, Ω) para o primeiro maior expoente. Com $r_L = 15$ e $R = 1850$. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores mostrados na figura 4.3.	56
4.2	Espaço de parâmetros (A, Ω) para o segundo maior expoente de Lyapunov. Com $r_L = 15$ e $R = 1850$. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores mostrados na figura 4.3.	57
4.3	Retratos de fase para os símbolos numerados em verde das figura 4.1 e 4.2. Os números dentro referem-se às posições dos atratores nas figuras 4.1 e 4.2. 58	58
4.4	Visão global do espaço de parâmetros (R, A) para o primeiro maior expoente de Lyapunov.	60
4.5	Visão global do espaço de parâmetros (R, A) para o segundo maior expoente de Lyapunov.	61
4.6	Ampliação da caixa A nas figuras 4.4 e 4.5 para o primeiro maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações hipercaóticas.	62
4.7	Ampliação da caixa A nas figuras 4.4 e 4.5 para o segundo maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações hipercaóticas.	62

4.8	Ampliação da caixa B nas figuras 4.4 e 4.5 para o primeiro maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações quase-periódicas.	63
4.9	Ampliação da caixa B nas figuras 4.4 e 4.5 para o segundo maior exponte de Lyapunov. Presença de oscilações quase-periódicas.	63
4.10	Ampliação da caixa C nas figuras 4.4 e 4.5 para o maior exponte de Lyapunov. Estrutura em forma de ganchos, similares as relatadas na Ref. [21].	64
4.11	Visão global do espaço de parâmetros (R, r_L) para o primeiro maior expoente de Lyapunov.	65
4.12	Visão global do espaço de parâmetros (R, r_L) para o segundo maior expoente de Lyapunov.	66
4.13	Ampliação da caixa D, da figura 4.1, para o primeiro maior expoente de Lyapunov.	66
4.14	Ampliação da caixa D, na figura 4.11, para o segundo maior expoente de Lyapunov.	67

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação tem por objetivo estudar numericamente sistemas dinâmicos usando conceitos e termos da Teoria do Caos Determinístico. De fato, em vários momentos, usamos expressões, termos, definições, etc. que são comumente usados nesta área de pesquisa. Portanto, sugerimos aos leitores dessa dissertação quatro referências básicas da área de sistemas dinâmicos para definições dos vários termos aqui apresentados [1-4].

O procedimento de modelar matematicamente certos sistemas dinâmicos determinísticos utilizando um conjunto de equações diferenciais tem aplicações nos mais diversos campos, como na Física, Economia e nas Engenharias de modo geral.

Sabe-se que, em geral, obter soluções analíticas explícitas, em tais sistemas de equações não é uma tarefa trivial. Por isso, se faz necessário analisá-las através de simulações numéricas, o que permite fazer um estudo qualitativo, onde há a preocupação de se investigar características relevantes sobre suas soluções, sem a necessidade de obter soluções analíticas explícitas.

A tradição dos estudos em sistemas dinâmicos remete a Henri Poincaré que, inspirado por problemas em Mecânica Celeste, estudou um sistema de equações diferenciais que descrevia as órbitas de três corpos que interagiam entre si, gravitacionalmente. Ele já tinha percebido que propriedades qualitativas das soluções desse sistema dinâmico podiam ser investigadas sem a necessidade da resolução analítica do sistema de equações diferenciais.

Com o avanço da tecnologia computacional a Teoria do Caos ganhou um impulso

significativo, mostrando que o uso de computadores modernos é uma ferramenta preciosa para estudar sistemas modelados matematicamente por conjuntos de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem.

Em 1963, Edward Norton Lorenz [5], com o uso de computadores, estudava meteorologia e, na tentativa de fazer previsões sobre o clima, criou um modelo de equações diferenciais no espaço tridimensional, que tinha por objetivo explicar a convecção de ar na atmosfera. Lorenz mostrou que um simples sistema de equações diferenciais ordinárias poderia exibir oscilações aperiódicas e sensibilidade nas condições iniciais.

Para que um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem apresente soluções caóticas, são necessários, mas, não suficientes, que o sistema físico seja não-linear e que seja, no mínimo, modelado matematicamente por um sistema de EDOs em R^3 . Logo, observa-se comportamento caótico em sistemas dinâmicos não-lineares muito simples, cujo espaço de fases possui, no mínimo, três ou mais dimensões.

A principal assinatura do caos é a sensível dependência nas condições iniciais. Então, para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto, quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais, utilizamos os expoentes característicos de Lyapunov, este expoente serve para caracterizar a dinâmica do sistema. Para sistemas N -dimensionais, temos N expoentes de Lyapunov, um para cada direção do fluxo.

Para um sistema no espaço tridimensional, pode-se relacionar os valores dos expoentes de Lyapunov ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) ao comportamento dinâmico do sistema. Quando o espectro de Lyapunov é do tipo $(-, -, -)$, ou seja, quando os três expoentes são menores do que zero, o sistema é atraído para um comportamento de ponto de equilíbrio. Para $(-, -, 0)$ tem-se um comportamento de periodicidade e quando o espectro de Lyapunov é representado por $(-, 0, 0)$, o comportamento dinâmico é de quase-periodicidade, tipo torus - 2. Um comportamento dinâmico caótico é observado quando $(+, 0, -)$, ou seja, pelo menos um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensitiva nas condições iniciais. Para um sistema dissipativo, o somatório dos expoentes de Lyapunov deve ser negativo, isto é, $\sum_{j=1}^3 \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

O avanço tecnológico, nos últimos anos, permitiu que sistemas num espaço com quatro ou mais dimensões fossem estudados intensificamente, devido a sua extensa aplicabilidade

no cenário científico. Porém, o interesse no estudo desses sistemas num espaço de alta dimensão, está nos que apresentam dinâmica caótica. Esses sistemas podem ser aplicados para modelar os mais diversos sistemas, nas mais diversas áreas do conhecimento.

Com o contínuo estudo em sistemas dinâmicos, em 1979 Rössler [6] introduziu o termo hipercaos, usado para nomear a órbita caótica com dois ou mais expoentes de Lyapunov positivos. Esse comportamento hipercaótico só pode ser observado em sistemas modelados matematicamente por quatro ou mais equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem.

Pode-se caracterizar os estados dinâmicos de um sistema num espaço quadridimensional, por exemplo, baseado no espectro de Lyapunov, assim como para um sistema no espaço tridimensional. Quando o espectro de Lyapunov for do tipo $(-, -, -, -)$, o sistema é atraído para ponto de equilíbrio. Se o espectro apresentar as configurações $(+, 0, -, -)$ ou $(+, 0, 0, -)$, ou seja, com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, a dinâmica é caótica. A dinâmica periódica é representada pela configuração $(0, -, -, -)$, e para a dinâmica quase-periódica tem-se dois casos, o primeiro é representado por $(0, 0, -, -)$ conhecido como torus-2 e o segundo é dado por $(0, 0, 0, -)$ denominado torus-3.

Portanto, nesta dissertação estudamos alguns sistemas dinâmicos do ponto de vista dos expoentes de Lyapunov. Através deles construímos espaços de parâmetros para classificar a sua dinâmica em termos dos pontos fixos, ciclos limites, caos e hipercaos. Em algumas situações diagramas de bifurcação serão utilizados, além dos espaços de fase, para facilitar a interpretação dos resultados. Assim, no Capítulo 2 haverá uma breve revisão bibliográfica, onde serão discutidos alguns trabalhos que, de certa forma, foram importantes para o entendimento da dinâmica de sistemas não-lineares via espaço de parâmetros. Em seguida, será discutido o método utilizado na construção dos espaços de parâmetros dos sistemas estudados nesta dissertação.

No capítulo 3, serão discutidos os resultados numéricos obtidos para alguns: *osciladores complexos forçados*. Já no capítulo 4, serão discutidos os resultados para um *circuito de Chua forçado por uma força externa*. Por último, serão apresentadas as conclusões sobre o trabalho desenvolvido durante o mestrado.

Capítulo 2

Estudo da Dinâmica de Sistemas Não-Lineares Via Espaço de Parâmetros

Neste capítulo, haverá, inicialmente, um breve relato dos trabalhos que, foram importantes para o entendimento da dinâmica de sistemas não-lineares via espaço de parâmetros. Em seguida, será abordada a metodologia usada na construção e análise dos espaços de parâmetros de diversos modelos físicos, em especial, de sistemas a tempo contínuo. Serão reportados modelos de sistemas a tempo contínuo tridimensionais e quadridimensionais, já estudados, e que, atualmente, têm despertado interesse, devido ao grande volume de trabalhos publicados . Por último, será discutido o método utilizado na construção dos espaços de parâmetros dos sistemas estudados nesta dissertação.

2.1 Estado da Arte

Sistemas dinâmicos que descrevem um sistema físico real dependem, geralmente, de um ou mais parâmetros; são os chamados parâmetros de controle do sistema. Pode-se pensar, então, que um sistema dinâmico é função desses parâmetros de controle. Logo, o comportamento dinâmico do sistema pode mudar conforme ocorra a variação desses

parâmetros.

O comportamento dinâmico que ocorre com a variação de apenas um parâmetro do sistema em função de uma variável (diagrama de bifurcação), já são bem conhecidos, mas ainda não se tem uma boa compreensão de fenômenos que ocorrem em codimensão maior (variação de dois ou mais parâmetros do sistema), principalmente em regiões de alta complexidade.

Para compreender melhor essa relação entre os parâmetros de um sistema e seu comportamento dinâmico, pode-se construir um espaço de parâmetros bidimensional, onde são variados dois parâmetros do sistema [7-11].

A caracterização do comportamento das soluções em função dos parâmetros do sistema é uma questão de grande interesse no estudo de sistemas dinâmicos não-lineares. Com isso, o espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos tem sido estudado extensivamente em modelos de tempo discreto [12-14] e, recentemente, surgiu um grande interesse em analisar o espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos de tempo contínuo [7-10, 15-16].

O presente entendimento que se tem sobre certas estruturas que surgem em regiões de alta complexidade no espaço de parâmetros é bem conhecido em sistemas dinâmicos a tempo discreto, onde muitos resultados já foram obtidos na literatura em relação a mapas, como, por exemplo, a estrutura básica do espaço de parâmetros, as línguas de Arnold em regiões onde o mapa é invertível e o aparecimento de estruturas periódicas mergulhadas em regiões de soluções caóticas. Isso é resultado do baixo custo computacional envolvido na iteração de sistemas discretos, visto que iterar mapas demanda menos tempo do que a integração de equações diferenciais de baixa ordem. Diversos trabalhos [7, 9-16] já identificaram formas semelhantes de bifurcações e estruturas periódicas que apresentam características de auto-similaridade no espaço de parâmetros, através da iteração direta dos mapas com identificação da periodicidade [12, 13, 14] ou através do cálculo dos expoentes de Lyapunov [7, 9-11, 16].

Gallas [12] observou estruturas periódicas auto-similares, de diversas periodicidades, imersas em regiões caóticas, classificando-as como "*camarões*". Segundo o autor, fazendo ampliações no espaço de parâmetros, é possível encontrar outros camarões paralelos, sendo que, pode haver uma certa regularidade no aparecimento dessas estruturas; elas podem

surgir alinhadas ao longo de direções particulares, em regiões caóticas no espaço de parâmetros do mapa de Hénon, como mostram as figuras 2.1 e 2.2. Na verdade, a figura 2.2 é uma visão ampliada de um domínio em torno do camarão de período-8, destacado na figura 2.1. Cada camarão consiste em um corpo principal de período k , acrescido de uma sucessão infinita de domínios adjacentes de períodos $k \times 2^n$, isto é, seguindo uma rota de bifurcação para o caos por duplicação de período, a partir do camarão de corpo principal k .

A estrutura no centro da figura 2.2 consiste, por exemplo, num corpo principal de período-8 (representado por um sombreamento cinza), numa região de período-16 (representado por uma fina região preta adjacente), seguida por uma cascata completa 8×2^n que, devido à escala da imagem, não pode mais ser vista. Essas estruturas auto-similares foram mais bem estudadas nas referências [13, 14].

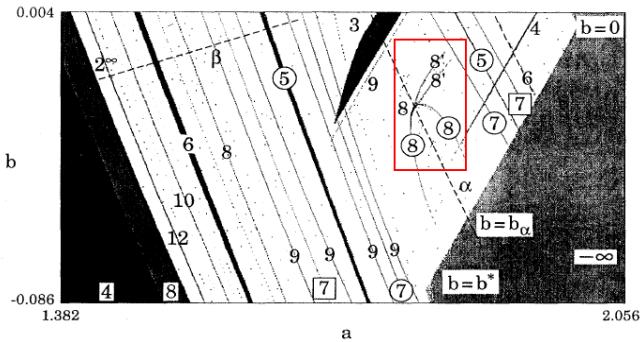


Figura 2.1: Espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Figura extraída da Ref. [12].

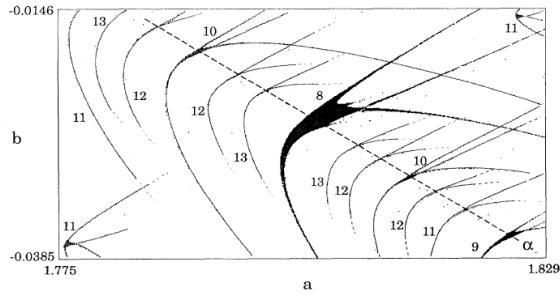


Figura 2.2: Camarões imersos no mar de caos ao longo de uma direção específica α . Os números referem-se à periodicidade. Figura extraída da Ref. [12].

Esse comportamento das estruturas periódicas, como, por exemplo, os camarões, que estão ordenados de forma especial, há de ser uma topologia característica no espaço de parâmetros de sistemas físicos de codimensão maior do que 1.

Essas estruturas periódicas auto-similares, encontradas no espaço de parâmetros do mapa de Hénon, foram observadas anteriormente em sistemas a tempo contínuo [15,17]. Contudo, como foi dito anteriormente, foi Gallas [12] quem as classificou, chamando-as de camarões, pela semelhança e por estarem mergulhadas em regiões caóticas, também chamadas de mar de caos.

Gaspard [17] observou a existência de uma estrutura espiral global, onde várias estruturas de diferentes periodicidades se conectam em torno de um foco no espaço de parâmetros bidimensional. Segundo o autor, a associação da órbita homoclínica com o ponto sela-foco, são responsáveis pela organização dessas estruturas periódicas em forma de espiral em torno de um ponto focal no espaço de parâmetros, como mostra a figura 2.3. Fazendo uma ampliação da figura 2.3, indicada na caixa vermelha, podemos perceber uma estrutura periódica bem definida, conforme mostra a figura 2.4. É fácil perceber que as estruturas das figuras 2.2 e 2.4 tem uma certa semelhança em relação à topologia, ambas tem o formato de camarão.

As regiões de grande complexidade no espaço de parâmetros, principalmente nas regiões caóticas, de sistemas dinâmicos a tempo contínuo, são muito menos conhecidas e requerem mais investigações. Desde Newton, sabemos que os fenômenos da natureza são mais bem modelados por equações diferenciais, ou sistemas de equações diferenciais

e que, em geral, não é possível se obter soluções analíticas explícitas em tais sistemas de equações. Muitas vezes, quando uma solução analítica é encontrada, ela é tão complicada que fica difícil interpretá-la e compreender as suas principais propriedades. Por isso, é necessário analisá-las através de simulações numéricas, o que nos permite fazer um estudo quantitativo das equações diferenciais. Essa abordagem preocupa-se em identificar características importantes de suas soluções, sem resolvê-las analiticamente.

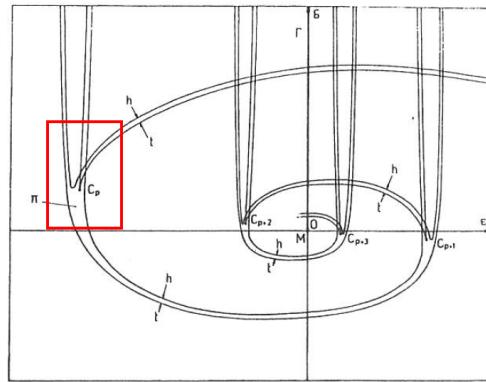


Figura 2.3: Existência de domínios de atratores periódicos π (região de periodicidade), no espaço de parâmetros (ε, δ) . Figura extraída da Ref. [17].

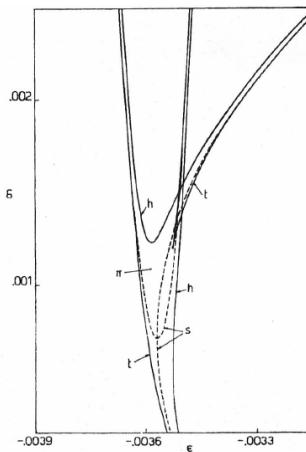


Figura 2.4: Ampliação do domínio π perto da bifurcação tipo *cusp* C_p . Figura extraída da Ref. [17].

Com o avanço tecnológico dos últimos anos, os computadores passaram a ter uma capacidade maior em processar dados e, com isso, realizar cálculos com maior velocidade e gerar diagramas de alta resolução, o que foi de grande importância para o avanço no que diz respeito ao estudo de equações diferenciais e à teoria do caos. O uso de computadores modernos revelou-se uma ajuda preciosa, permitindo compreender muitos aspectos sobre o comportamento desse tipo de sistemas, o que acarretou novas metodologias para estudar o comportamento dinâmico, tanto de sistemas de tempo discreto quanto para sistemas de tempo contínuo. As equações diferenciais, quando olhadas para a variação de dois parâmetros, podem apresentar grandes extensões de regiões caóticas, contendo em seu interior regiões de periodicidade.

Devido ao aperfeiçoamento dos computadores nessa última década, muitos trabalhos, que utilizam o espaço de parâmetros bidimensional para analisar o comportamento dinâmico, foram realizados em sistemas dinâmicos a tempo contínuo nos mais diversos modelos físicos [7 - 11, 16, 19 - 27]. Esses sistemas, entre muitos outros, vêm usando um método bem conhecido na literatura, para fazer a caracterização da dinâmica dos sistemas através da construção do espaço de parâmetros. Tal método serve, resumidamente, para associar a cada par de parâmetros um valor do maior expoente de Lyapunov e, com isso, através de um gradiente de cores, identificar a dinâmica do sistema associada a cada ponto no espaço de parâmetros. Na próxima seção, será discutido esse método, com mais detalhes, em sistemas dinâmicos a tempo contínuo tridimensional e quadridimensional.

Como é sabido, para que um conjunto de equações diferenciais não-lineares apresente soluções caóticas, é necessário, mas não suficiente, que o sistema seja, no mínimo, modelado matematicamente por um sistema de EDOs em R3. Assim, comportamento caótico pode existir apenas em sistemas dinâmicos de tempo contínuo cujo espaço de fases possua três ou mais dimensões. Porém, isso não se aplica a sistemas dinâmicos a tempo discreto, onde é possível existir comportamento caótico mesmo em sistemas com apenas uma dimensão. A seguir, serão apresentados alguns resultados de trabalhos já publicados, que são descritos por um conjunto de três equações diferenciais não-lineares. Feito isso, serão mostrados trabalhos que trazem um conjunto de quatro equações diferenciais não-lineares, cujo estudo tem despertado bastante interesse nos últimos anos.

Pioneiros, na utilização do método que será discutido com mais detalhes na próxima seção, foram Bonatto *et al.* Em trabalho publicado em 2005 [16], Bonatto *et al.* realizaram uma investigação numérica do modelo de laser de CO₂ de dois níveis com perdas modulares, onde foram observadas regiões de periodicidade no espaço de parâmetros desse modelo, cujo tempo é contínuo e essas regularidades, até então, tinham sido encontradas apenas em modelos a tempo discreto. Bonatto *et al.* constataram, que na região caótica do modelo de laser de CO₂, ocorre a existência de infinitas estruturas periódicas auto-similares alinhadas em direções específicas no espaço de parâmetros. O ordenamento dessas estruturas periódicas encaixadas na região caótica do laser de CO₂ é semelhante ao do mapa de Hénon.

A figura 2.5 nos dá uma visão global do espaço de parâmetros do modelo de laser de CO₂ com perdas modulares em função da amplitude (*a*) e frequência (*f*) da modulação.

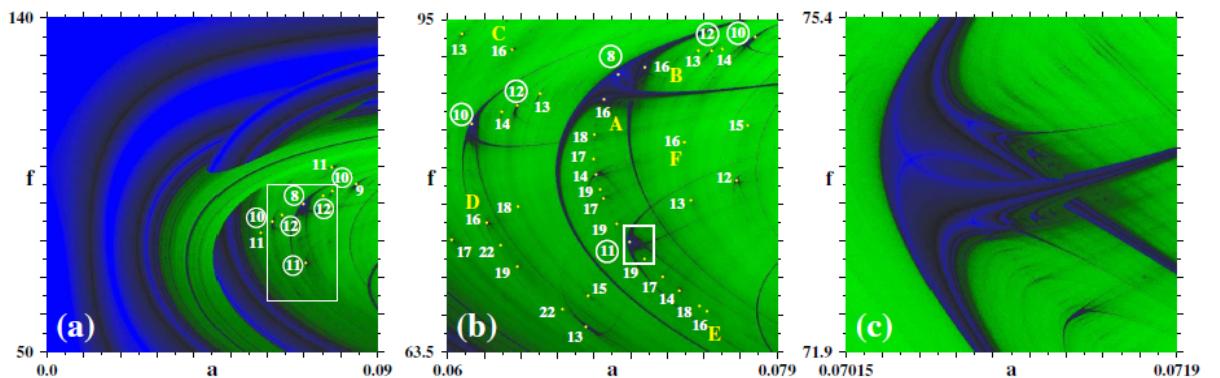


Figura 2.5: (a) Visão global do espaço de parâmetros do modelo de laser de CO₂ mostrando uma rede regular de ilhas de estabilidades. (b) zoom da caixa em (a). Os números indicam o período principal de cada ilha de estabilidade. (c) Ampliação da ilha de estabilidade de período-11 (indicado em (b) por um círculo no número 11), exibindo a forma genérica de todas as ilhas de estabilidade. Figura extraída da Ref. [16].

As intensidades das cores são proporcionais aos expoentes de Lyapunov, sendo que um gradiente de cor entre o azul - cinza escuro, maiores expoentes negativos, denotam regiões de oscilações periódicas e um gradiente de cor entre o verde - cinza claro, maiores

expoentes positivos, mostram regiões de oscilações caóticas, com o preto indicando os expoentes nulos.

Na figura 2.5 (a), visualiza-se uma grande região onde ocorrem oscilações periódicas, representada pelo gradiente azul - cinza escuro, e uma extensa região onde ocorrem oscilações caóticas, representada pelo gradiente verde - cinza claro. No interior da região caótica, surgem, novamente, oscilações periódicas estáveis no laser. Num diagrama de bifurcação, essas oscilações periódicas são as janelas de periodicidade que tipicamente são observadas em determinados intervalos de parâmetros de controle. A característica mais interessante da figura 2.5 (a) é o caso onde as janelas periódicas podem formar uma rede de infinitas estruturas de bifurcações auto-similares no espaço de parâmetros. Essa situação pode ser observada na parte da região caótica onde é possível identificar diversas ilhas de estabilidade. Algumas dessas ilhas estão destacadas pelos algarismos com círculos, onde os números referem-se ao período da região.

A figura 2.5 (b) é uma ampliação, indicada por uma caixa na figura 2.5 (a), de uma porção da região caótica do laser de CO₂ onde há diversas ilhas de estabilidades. Essas estruturas periódicas auto-similares, chamadas de camarões por Gallas [12], contém uma rica estrutura de bifurcação associada. Cada estrutura auto-similar possui um período principal que se desestabiliza via duplicação de período, onde o período principal sofre uma cascata infinita de dobramento de período em direções específicas no espaço de parâmetros, levando a uma transição para o caos. Na figura 2.5 (b), estão marcados os períodos principais de umas dessas estruturas auto-similares, indicados pelos números perto delas. Percebe-se que o comportamento, no que diz respeito ao alinhamento das estruturas auto-similares em direções específicas, do modelo de laser CO₂, é semelhante ao do sistema do mapa de Hénon [12].

Albuquerque *et al.* [7] realizaram uma investigação numérica detalhada do espaço de parâmetros de um modelo do circuito de Chua modificado. Observaram, também, que o espaço de parâmetros apresenta estruturas periódicas auto-similares imersas no mar de caos, chamadas de camarões. Mostraram, igualmente, que essas estruturas periódicas auto-similares organizam-se em uma cascata de bifurcação por adição de período. A figura 2.6 é uma visão geral do espaço de parâmetros para o modelo do circuito de Chua modifi-

cado. O espaço de parâmetros para esse sistema foi computado para o maior expoente de Lyapunov λ em função dos parâmetros de controle e uma escala de cores foi definida para determinados valores de λ . Para $\lambda < 0$ (cor cinza) para pontos fixos, $0 \leq \lambda < 0,005$ (cor cinza) para órbitas periódicas, $0,005 \leq \lambda < 0,02$ (cor verde) para transição de órbitas periódicas para caóticas, e $\lambda \geq 0,02$ (cor branca) para órbitas caóticas. A linha pontilhada separa pontos fixos (direita) da região periódica (esquerda). A cor azul representa a região de divergência do sistema.

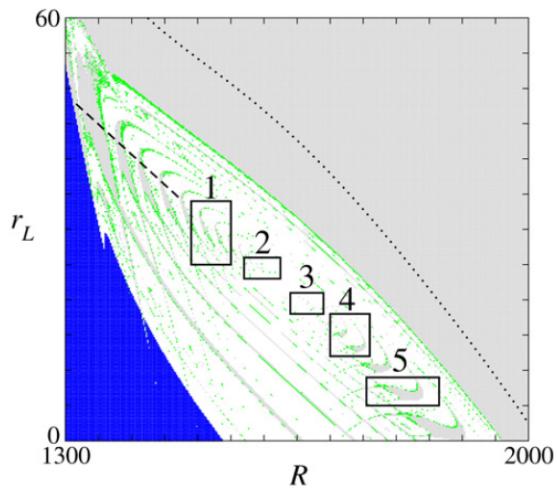


Figura 2.6: Espaço de parâmetros para diferentes valores do expoente de Lyapunov. Cinza para órbitas periódicas (à esquerda da linha pontilhada) e para pontos fixos (à direita da linha pontilhada), verde representa a transição de órbitas periódicas para caóticas e azul para regiões de divergência. Figura extraída da Ref. [7].

A figura 2.7 mostra ampliações das regiões destacadas nas caixas 1 a 4 da figura 2.6. As figuras 2.7 (a) e 2.7 (d) indicam claramente que o sistema apresenta características auto-similares, conclusão essa baseada no fato de que, se forem feitas ampliações entre os camarões das figuras 2.7 (a) e 2.7 (d), serão encontradas figuras semelhantes. Maranhão *et al.* [28] ilustram, de uma forma simples, um espaço de parâmetros experimental para o circuito de Chua, onde os autores encontram uma estrutura caótica, chamada de fibra caótica, paralela a uma janela de período - 3, observada no diagrama de bifurcação experimental do circuito de Chua. Em outro trabalho, Maranhão *et al.* [29] observam ex-

perimentalmente a existência de complexas estruturas periódicas no espaço de parâmetros do circuito de Chua.

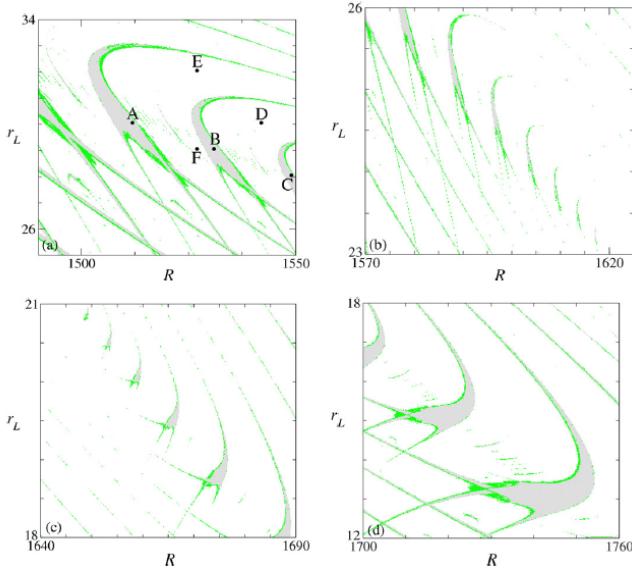


Figura 2.7: Ampliações das quatro caixas (1, 2, 3 e 4) da Fig. 2.6, mostrando detalhes do espaço de parâmetros. O esquema de cores é o mesmo usado na Fig. 2.6. Figura extraída da Ref. [7].

Bonatto *et al.* [9] investigaram um circuito eletrônico que foi introduzido por Nishio *et al.* [30]. O modelo consiste de dois indutores, um capacitor, uma resistência linear negativa e uma resistência não-linear composta de dois diodos. A rica dinâmica que esse modelo de circuito apresenta é devido à não-linearidade da resistência constituída pelos dois diodos. Essa resistência não-linear possui uma curva $i(V)$ que é representada por uma equação linear por partes. A função da curva *corrente-tensão* $i(V)$ é composta por três segmentos, onde esta relaciona a queda de tensão nos diodos em função da corrente que passa por eles. Bonatto *et al.*, ao investigarem uma porção do espaço de parâmetros para esse sistema, observaram uma organização muito regular formada por espirais auto-similares em torno de um ponto focal. Na verdade, esses espirais são estruturas periódicas auto-similares dentro de uma região caótica no espaço de parâmetros. Como podemos ver na figura 2.8, a região caótica contém uma hierarquia infinita de espirais aninhadas que, juntas, compõem uma organização extremamente estruturada. No espaço

de parâmetros, cada uma das espirais é caracterizada por uma oscilação regular específica de um determinado período.

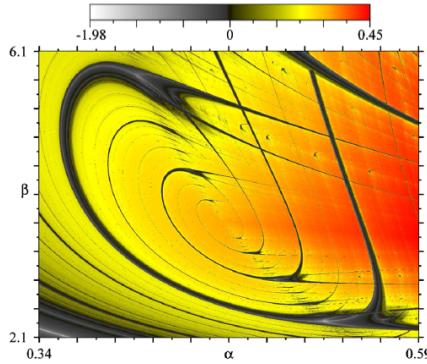


Figura 2.8: Espaço de parâmetros para o circuito resistivo simples, onde uma hierarquia infinita de espirais alinhados ligados pelo foco. O diagrama mostra a magnitude dos expoentes de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [9].

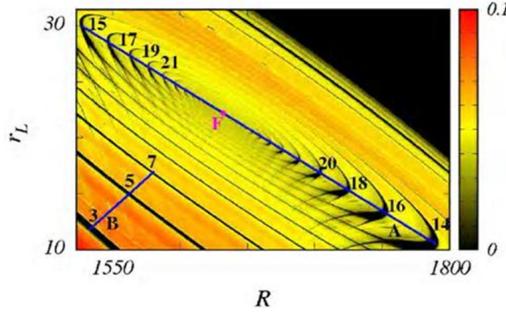


Figura 2.9: Visão global do espaço de parâmetros, associando diferentes intensidades de cores para valores diferentes do expoente de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [26].

O autor observa duas características marcantes no espaço de parâmetros para o modelo:
 a) que ele contém um emaranhado de espirais que correspondem a soluções periódicas; b)
 há um ponto focal característico onde todas as espirais se originam ou finalizam.

Albuquerque *et al.* [26] mostraram que, no espaço de parâmetros do circuito de Chua, há estruturas periódicas auto-similares imersas na região de caos, formando uma estrutura espiral que circunda em torno de um ponto focal, conforme figura 2.9. Gaspard [17] já

tinha observado essas estruturas espirais para um domínio de atratores periódico no espaço de parâmetros.

A existência de estruturas complexas periódicas, formando um emaranhado de redes periódicas, em regiões caóticas no espaço de parâmetros de um modelo caótico do circuito, foi observada por Cardoso *et al.* [10]. A proposta deste trabalho foi fazer um estudo teórico em um circuito de Chua modificado, onde se preserva o circuito tanque *RLC* do circuito original e substituiu-se o diodo de Chua por um dispositivo semi-isolante de Arseneto de Gálio (GaAs). A curva $i(V)$ da amostra apresenta uma região de condutividade diferencial negativa (NDC) para certos valores de voltagens aplicados à amostra. A presença de fenômenos de NDC pode ser visto como a assinatura para instabilidades intrínsecas em dispositivos semicondutores. Nota-se que, com a simples troca do diodo pelo dispositivo de (GaAs), no circuito tanque *RLC*, a dinâmica encontrada para esse modelo é extremamente rica em detalhes, com a abundância de complexas estruturas periódicas, em muitas formas e periodicidade, imersas em regiões caóticas no espaço de parâmetros do sistema.

Uma visão geral do espaço de parâmetros pode ser vista na figura 2.10. As regiões periódicas estão representadas pela cor preta e as regiões caóticas pelas cores amarelada e avermelhada. A figura 2.11 é a ampliação da caixa B, da figura 2.10. Observa-se que, nessa ampliação, há uma característica muito peculiar, uma estrutura formada por dois camarões gêmeos com o mesmo período, indicada pelos números dentro das estruturas. Abaixo dessa estrutura, no canto direito, pode-se observar uma outra semelhante. É possível ver que há uma infinidade de estruturas periódicas complexas imersas no mar de caos formando um emaranhado.

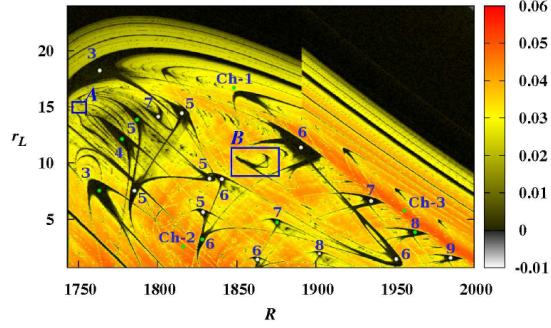


Figura 2.10: Visão global do espaço de parâmetros associando intensidades diferentes de cores para diferentes valores dos expoentes de Lyapunov na escala ao lado direito. Os números indicam a periodicidade principal de cada estrutura. Figuras extraídas da Ref. [10].

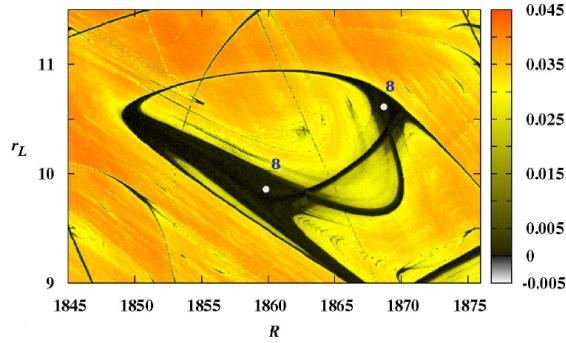


Figura 2.11: Ampliação da caixa B da Fig. 2.10. As intensidades diferentes de cores referem-se aos diferentes valores dos expoentes de Lyapunov na escala ao lado direito. Figura extraídas da Ref. [10].

Os sistemas até aqui discutidos, são sistemas dinâmicos não-lineares a tempo contínuo num espaço tridimensional, ou seja, modelados matematicamente por um sistema de EDOs em \mathbb{R}^3 . O fato de eles serem modelados matematicamente num espaço tridimensional é essencial para que haja comportamento caótico, porém não suficiente. De fato, há uma infinidade de trabalhos publicados sobre sistemas governados por equações

diferenciais a tempo contínuo nas mais diversas áreas, como na física, biologia, química, economia, etc, que relatam a existência de estruturas periódicas auto-similares imersas em regiões caóticas.

Nos últimos anos, vem aumentando o interesse em estudar sistemas dinâmicos de quatro ou mais dimensões, denominados de alta dimensionalidade. Um dos motivos para estudar sistemas de alta dimensão, mais especificamente sistemas que possam apresentar dinâmica hipercaótica, deve-se à sua grande aplicabilidade no cenário científico e tecnológico e, também, ao aperfeiçoamento dos computadores. Sistemas de alta dimensionalidade podem ser utilizados para descrever a dinâmica de modelos de diversas áreas do conhecimento.

O termo *hipercaos* foi primeiramente introduzido por Rössler, em 1979, usando, para tal, um sistema contínuo de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Esse é um comportamento caótico com, no mínimo, dois expoentes de Lyapunov positivos. Por esse motivo, o sistema tem sua dinâmica expandida em diferentes direções simultaneamente, aumentando, assim, a complexibilidade do atrator e a caoticidade do sistema, deixando-o mais imprevisível, quando comparado com um sistema caótico que apresenta apenas um expoente de Lyapunov positivo. Para o aparecimento de uma dinâmica hipercaótica, é necessário, mas não suficiente, que o sistema seja, no mínimo, modelado matematicamente por um sistema de EDOs em R^4 , pois como é sabido, para sistemas dissipativos o somatório de todos os expoentes de Lyapunov tem que ser negativo. Sendo assim, um deles, obrigatoriamente, tem que ser negativo e, pelo menos, um dos demais tem que ser nulo, sobrando apenas dois maiores expoentes para serem positivos. Portanto, para um sistema no espaço quadridimensional, dois expoentes de Lyapunov positivos caracterizam uma dinâmica hipercaótica. Serão relatados, a seguir, trabalhos onde a dinâmica hipercaótica pode ser observada no espaço de parâmetros. Serão discutidos, brevemente, os resultados obtidos pelos autores.

Um outro trabalho, apresentado por Correia *et al.* [31], consiste em um sistema autônomo de quatro dimensões, construído a partir de um sistema de Lorenz, através da introdução de um controlador *feedback* adequado para a terceira equação. Correia usou o método numérico que considera o valor do segundo maior expoente de Lyapunov para

caracterizar a dinâmica do sistema, através da construção do espaço de parâmetros bidimensional. Nesse trabalho, os autores usaram a magnitude do segundo maior expoente de Lyapunov para caracterizar, numericamente, os pontos onde o comportamento hipercaótico ocorre no espaço de parâmetros. O sistema dinâmico é modelado por um conjunto de quatro equações diferenciais autônomas não-lineares de primeira ordem. A figura 2.12 traz dois espaços de parâmetros, mostrando diferentes comportamentos dinâmicos para o sistema proposto.

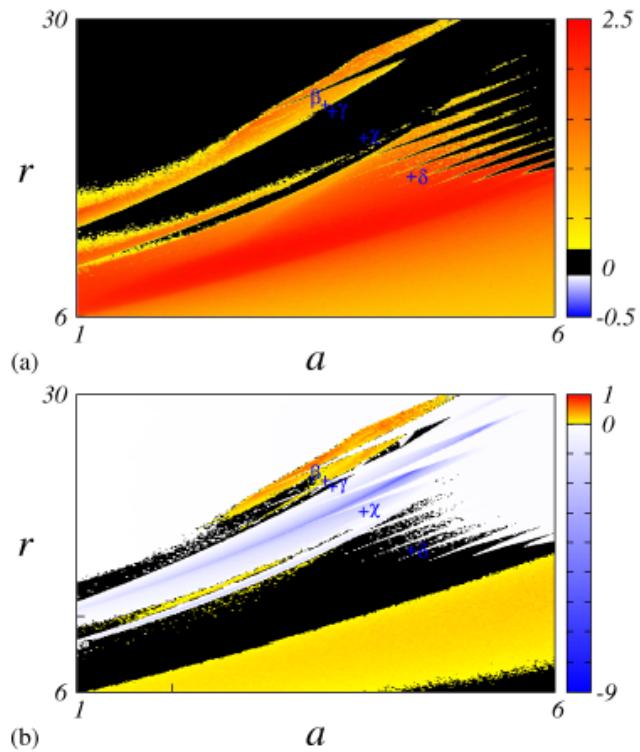


Figura 2.12: Regiões de diferentes comportamentos dinâmicos no espaço de parâmetros (a, r) do sistema proposto. (a) O maior expoente de Lyapunov. (b) Segundo maior expoente de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [31].

As cores estão associadas ao valor do expoente de Lyapunov. Azul - branco para expoentes negativos, preto para zero e vermelho para expoente positivo. O expoente positivo é indicado por uma constante mudança de escala entre o amarelo - vermelho, enquanto o expoente negativo é indicado por uma constante mudança de escala entre o azul - branco. Sabe-se que, quando o maior expoente de Lyapunov é negativo, tem-se um

ponto de equilíbrio estável e que, quando o maior expoente de Lyapunov for zero, indica um atrator estável periódico (ou um atrator quase-periódico, quando o segundo maior expoente de Lyapunov também for igual a zero) e um atrator caótico ocorre quando o maior expoente de Lyapunov for positivo e o comportamento hipercaótico ocorre quando o primeiro e o segundo maiores expoentes de Lyapunov forem positivos. Logo, pode-se concluir que as regiões em amarelo - vermelho, no espaço de parâmetros 2.12 (b), são regiões de comportamento dinâmico hipercaótico. O espectro completo para os expoentes de Lyapunov para os pontos χ , γ , δ e β é dado na tabela 2.1.1, conforme pode ser visto nas figuras 2.12.

Ponto	Atrator	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
χ	Periódico	0,017	-1,403	-1,562	-22,414
γ	Quase-periódico	0,014	0,005	-0,446	-24,598
δ	Caótico	1,848	0,012	-0,880	-27,185
β	Hipercaótico	0,729	0,310	-0,014	-25,961

Tabela 2.1.1: Espectro dos expoentes de Lyapunov para os pontos χ , γ , δ e β .

Os valores que indicam zero, na tabela 2.1.1, como por exemplo para o ponto γ , são ajustados computacionalmente, por isso há essa discrepância nos valores computados na tabela 2.1.1.

A existência de estruturas periódicas em regiões caóticas e hipercaóticas foi observada num espaço de parâmetros para um circuito de Chua quadridimensional por Stegemann *et al.* [32]. O modelo foi obtido a partir de um outro modelo de Chua tridimensional, com a introdução de um controlador *feedback*. Os espaços de parâmetros foram construídos considerando, tanto o primeiro quanto o segundo maior expoente de Lyapunov permitindo assim, diferenciar regiões periódicas, caóticas e hipercaóticas. O sistema proposto por Stegemann apresenta seis parâmetros de controle: α , β , γ , s , a e c . Devido ao grande número de parâmetros que podem variar, tem-se uma grande possibilidades para a construção de espaços de parâmetros para tal sistema. Aqui, serão reportados somente alguns resultados, pois, o objetivo é fazer uma breve discussão, principalmente do método usado para analisar a dinâmica do sistema via espaço de parâmetros. A figura 2.13, por

exemplo, é construída usando-se o primeiro e o segundo maior expoentes de Lyapunov. A figura 2.13 (a) usa o maior expoente e a figura 2.13 (b), o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço de parâmetros (α, β) com $\gamma = 0,32$ e $s = 0,1$.

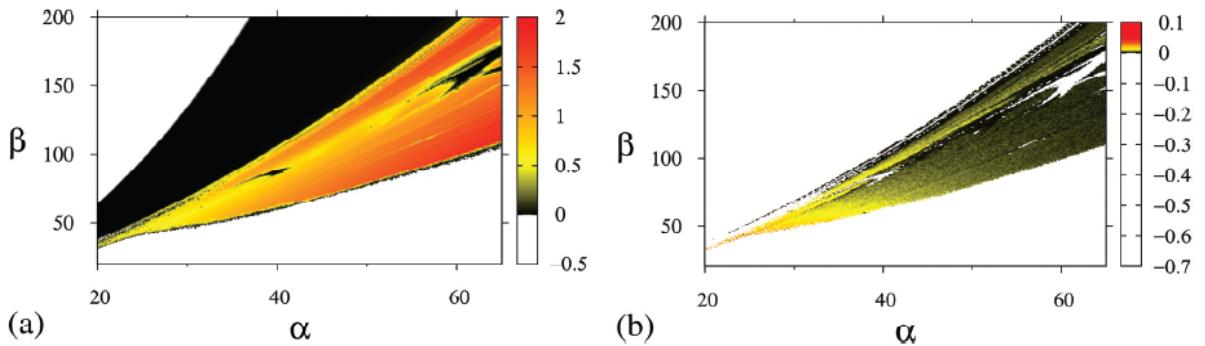


Figura 2.13: Espaço de parâmetros (α, β) para o modelo de Chua quadridimensional, com $s = 0,1$ e $\gamma = 0,32$. (a) Para o maior expoente de Lyapunov e (b) o segundo maior expoente de Lyapunov. Figura extraída da Ref. [32].

Regiões periódicas estão representadas em preto na figura 2.13 (a) e, em branco, em 2.13 (b). Caos aparece em regiões amareladas e avermelhadas em 2.13 (a) e em regiões pretas em (b). Hipercaos aparece em regiões amareladas e avermelhadas em (b). A figura 2.14 representa o espaço de parâmetros, para o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov, para os espaços (α, s) com $\beta = 50$ e $\gamma = 0,32$ figura 2.14 (a) e (b) e 2.14 (c) e (d) para (β, s) com $\alpha = 30$ e $\gamma = 0,32$, 2.14 (e) e (f) para (γ, s) com $\alpha = 30$ e $\beta = 50$. Em todos os espaços de parâmetros, é possível observar uma infinidade de estruturas periódicas espalhadas em regiões caóticas e hipercaóticas. Essas regiões periódicas aparecem, com mais evidência, nos espaços de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov, com estruturas brancas imersas em regiões pretas e amarelo - avermelhada, como nas figuras 2.14 (b), 2.14 (d) e 2.14 (f). A tabela 2.1.2 representa alguns valores para o espectro de Lyapunov em três diferentes pontos dos espaços de parâmetros, marcados com A, B e C. A rotina utilizada para calcular o espectro de Lyapunov nesse sistema de Chua quadridimensional é baseada no algorítimo proposto por Wolf *et al.* [33]. Pode-se perceber que, considerando o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov, obtém-

se uma boa ferramenta para distinguir os mais diversos comportamentos dinâmicos do circuito de Chua quadridimensional.

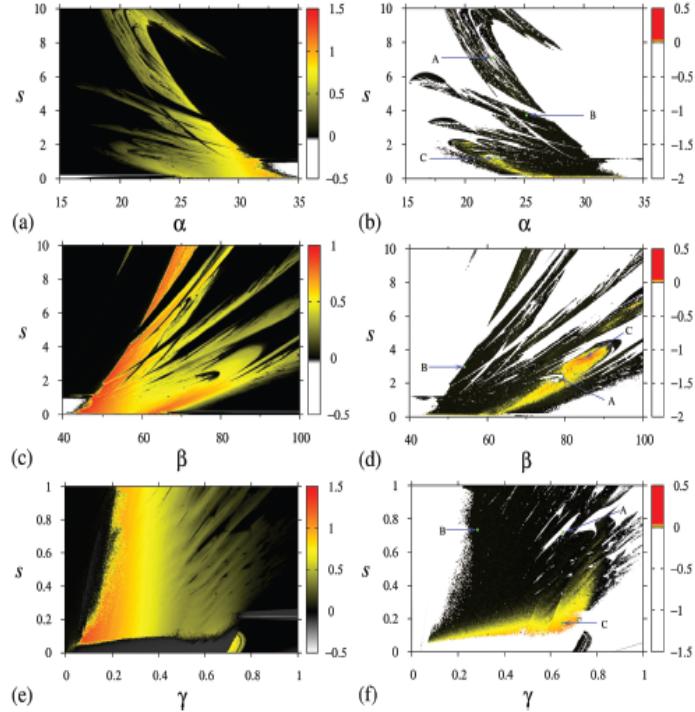


Figura 2.14: Espaços de parâmetros para o circuito de Chua quadridimensional. (a) e (b) mostra, respectivamente, o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço de parâmetros (α, s) com $\beta = 50$ e $\gamma = 0,32$. (c) e (d) mostram, respectivamente, o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço de parâmetros (β, s) com $\alpha = 30$ e $\gamma = 0,32$. (e) e (f) mostram, respectivamente, o primeiro e o segundo maior expoente de Lyapunov para o espaço de parâmetros (γ, s) com $\alpha = 30$ e $\beta = 50$. Figura extraída da Ref. [32].

Posição da Figura		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Comportamento
7 (b)	A	0,0008	-0,0467	-0,3165	-9,9236	Periódico
7 (b)	B	0,50912	0,00007	-0,16368	12,94264	Caótico
7 (b)	C	0,3445	0,0192	-0,0004	-12,2525	Hipercaótico
7 (d)	A	0,0004	-0,0253	-0,1462	-16,002	Periódico
7 (d)	B	0,840704	0,000001	-0,168124	-15,229648	Caótico
7 (d)	C	0,3540	0,0424	-0,0002	-15,3116	Hipercaótico
7 (f)	A	0,0008	-0,1110	-0,1132	-18,3605	Periódico
7 (f)	B	0,86622	0,00004	-0,04027	-16,51381	Caótico
7 (f)	C	0,38185	0,01675	0,00003	-18,52889	Hipercaótico

Tabela 2.1.2: Exponentes de Lyapunov para alguns pares de parâmetros na figura 2.14.

Regiões periódicas estão representadas pela cor preta, em 2.14 (a) e pela cor branca em 2.14 (b). Regiões caóticas aparecem em regiões amarelas e avermelhadas em (a) e como regiões pretas em (b). Hipercaos aparece em regiões amarelas e avermelhadas em (b).

A proxima seção será destinada a explicar brevemente os métodos já comentados acima, e mostrar como serão usados para caracterizar a dinâmica dos sistemas propostos nesta dissertação.

2.2 Caracterização da Dinâmica no Espaço de Parâmetros Baseado no Espectro de Lyapunov

Conforme foi exposto, obter soluções analíticas explícitas para um conjunto de equações diferenciais não-lineares não é uma tarefa trivial e, em muitos casos, é impossível. Então, faz-se necessário recorrer a algum tipo de método numérico. O método utilizado para analisar o espaço de parâmetros dos modelos físicos estudados nesta dissertação é o da integração direta dos sistemas de equações diferenciais não-lineares no qual estimamos, numericamente, os expoentes de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov serve como uma medida da sensibilidade nas condições iniciais e o sinal do expoente serve para classificar a dinâmica do sistema, desde uma dinâmica

de ponto de equilíbrio, com todos os expoentes negativos, até uma dinâmica hipercaótica, com pelo menos dois expoentes de Lyapunov positivos.

Para construir o espaço de parâmetros, todos os parâmetros são mantidos fixos, exceto os dois que são escolhidos para variar. Esses dois parâmetros serão, então, utilizados para construir o espaço de parâmetros. Como eles podem variar, tem-se que determinar um intervalo de variação desses parâmetros. Após escolher esse intervalo de variação, divide-se em ambos os espaços por um número M a escolher. Esse número escolhido é diretamente responsável pela resolução da figura gerada e, o tempo de computação. Com a escolha dos dois parâmetros, seus intervalos de variação e a divisão do espaço, constrói-se uma malha bidimensional $M \times M$. Para cada ponto dessa malha, formada pela intersecção das linhas verticais e horizontais, têm-se um ponto no espaço de parâmetros. A quantidade de pontos formados é dada pelo número que divide o espaço, elevado ao quadrado, (M^2). Para cada um desses pontos, calcula-se o maior expoente de Lyapunov usando o método proposto por Wolf *et al.* [33]. Os resultados vão sendo armazenados num arquivo, onde, na primeira e na segunda colunas, são registrados cada um dos valores dos parâmetros de controle do sistemas e, na última coluna, é colocado o valor do maior expoente de Lyapunov. Feito isso, pode-se construir um diagrama a partir do arquivo de dados gerado, que tem os valores dos parâmetros variados colocados em seus dois eixos. O valor do maior expoente de Lyapunov é definido por uma determinada cor, geralmente usa-se um gradiente de cores, como nas Refs. [9, 10, 16]. O gradiente de cores serve para definir o valor do expoente, sendo uma cor para o expoente negativo, outra para o expoente positivo e uma terceira cor para o expoente nulo, porém o valor do maior expoente de Lyapunov é usado para caracterizar a dinâmica do sistemas.

O método brevemente discutido acima serve, portanto, para associar a cada par de parâmetros um valor do maior expoente de Lyapunov. Logo, por esse método, pode-se apenas identificar três tipos de dinâmica no espaço de parâmetros: caótica, periódica e ponto fixo. O método não permite identificar hipercaos e quase-periodicidade (torus-2 e torus-3) onde, hipercaos e torus-3 aparecem apenas em sistemas de alta dimensionalidade e torus-2 pode aparecer tanto em sistemas tridimensionais como em sistemas com mais de três dimensões.

O método que calcula o espectro de Lyapunov, que tem como base o método discutido acima, permite identificar regiões de quase-periodicidade e hipercaos, mas, no entanto, são feitas algumas modificações que trazem variações significativas na análise do sistema. A primeira modificação e a mais importante diz respeito ao cálculo do expoente de Lyapunov. No método anterior, apenas o maior expoente é calculado. No método em que, o espectro de Lyapunov é calculado, todos os expoentes, que o método fornece, são utilizados para a análise da dinâmica. Sabe-se que, para cada direção do fluxo, tem-se um valor do expoente de Lyapunov associado, então, um sistema tridimensional terá três expoentes de Lyapunov, um para cada direção, assim como para um sistema quadridimensional existem quatro expoentes de Lyapunov e assim, sucessivamente. Armazenam-se, também, os resultados em colunas, porém, o arquivo contém mais colunas devido aos outros expoentes de Lyapunov. Esse método permite associar para cada par de parâmetros, todos os expoentes de Lyapunov. As colunas são organizadas com o intuito de facilitar a construção do espaço de parâmetros onde, nas duas primeiras colunas, estão os valores dos parâmetros e, nas últimas colunas, encontram-se os valores dos expoentes de Lyapunov, ordenados do maior para o menor. Pode-se, então, para cada par de parâmetros, construir vários espaços de parâmetros utilizando, por exemplo, um para o maior expoente e um segundo para o segundo maior expoente. Com isso e com um ajuste nas cores do gradiente, é possível identificar os mais diversos comportamentos dinâmicos que um sistema pode apresentar.

Para compreender melhor a dinâmica do sistema, constrói-se a tabela abaixo, que relaciona os valores dos expoentes de Lyapunov ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$), sendo $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$, com o comportamento dinâmico do sistema.

Dinâmica do sistema	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
ponto de equilíbrio	–	–	–	–
caótico	+	0	–	–
periódico	0	–	–	–
torus 2	0	0	–	–
torus 3	0	0	0	–
hipercaos	+	+	0	–

Tabela 2.2.1: Sinal + representa o expoente de Lyapunov positivo, o sinal – representa o expoente negativo e o 0 representa o expoente nulo.

Essa tabela pode ser usada tanto para um sistema num espaço quadridimensional como para um sistema num espaço tridimensional, porém, para analisar a dinâmica de um sistema num espaço tridimensional, é necessário desconsiderar o quarto expoente de Lyapunov λ_4 e as duas últimas dinâmicas, torus-3 e hipercaos, sendo essas possíveis somente para sistemas modelados num espaço com mais de três dimensões.

Para que a dinâmica apresente comportamento periódico, o sistema deve ter o maior expoente de Lyapunov igual a zero e o segundo maior expoente, negativo. Para apresentar quase-periodicidade, é necessário que, no mínimo, o primeiro e o segundo maiores expoentes de Lyapunov sejam iguais a zero, caso em que o atrator é denominado torus-2. Se o sistema tiver n - dimensões, é necessário, para um sistema dissipativo, que pelo menos um expoente de Lyapunov seja zero e que esse seja, em módulo, maior que todos os outros expoentes. Sendo assim, todos os outros podem ser nulos, e então o sistema pode apresentar torus - ($n - 1$). Logo, é importante que se calcule todos os n expoentes de Lyapunov para as n - dimensões.

A caracterização de hipercaos é feita com a análise do segundo maior expoente de Lyapunov, pois é ele que evidencia se o sistema apresenta ou não o comportamento hipercaótico. A definição de hipercaos diz que, para um sistema apresentar um comportamento hipercaótico, são necessários, no mínimo, dois expoentes de Lyapunov positivos. Se o primeiro expoente for positivo, o sistema pode ser caótico ou hipercaótico mas, no entanto, em regiões onde o segundo maior expoente de Lyapunov for positivo, garante-se que a região apresente dinâmica hipercaótica. Logo, pode-se afirmar que os pontos hipercaóticos formam um subconjunto que pertence ao conjunto dos pontos caóticos.

Nesta dissertação, foram estudados quatro sistemas distintos, onde ambos os métodos citados acima, o do maior expoente de Lyapunov, para caracterizar a dinâmica do sistema e o método do espectro de Lyapunov para que, com esse, poder dar mais detalhes sobre a dinâmica do sistema. Desses quatro sistemas, dois usam o método do maior expoente e os outros dois utilizam o método do espectro de Lyapunov para estudar a dinâmica.

Nas proximas seções, serão discutidos e analisados os sistemas propostos para essa dissertação, onde três sistemas fazem parte de um conjunto de osciladores complexos

forçados e o quarto e último sistema estudado é composto por um circuito de Chua
forçado devido a uma força externa.

Capítulo 3

Osciladores Complexos Forçados

Neste capítulo, serão discutidos os resultados obtidos a partir dos estudos de três osciladores complexos forçados. Para melhor entendimento, haverá uma seção, subdividida em outras três subseções. Nessas subseções, serão discutidos os resultados obtidos para os três osciladores complexos forçados.

3.1 Osciladores Complexos Forçados

Sistemas caóticos modelados por equações de variáveis reais têm sido estudados intensivamente. Vários osciladores modelados por equações de variáveis reais já foram estudados [26, 27, 29, 30, 32]. Porém, o estudo de sistemas caóticos descritos por variáveis complexas é muito recente.

Motivados pelos recentes trabalhos de Marshall *et al.* [34, 35], propomos um estudo numérico realizado em três osciladores forçados descritos por uma variável complexa da forma $\dot{z} + f(z, \bar{z}) = Ae^{i\Omega t}$, onde $f(z, \bar{z})$ é um polinômio com coeficientes reais. Sete osciladores forçados, da forma $\dot{z} + f(z, \bar{z}) = Ae^{i\Omega t}$ foram estudados na Ref. [34]. Os osciladores foram divididos conforme a função polinomial $f(z, \bar{z})$, onde três sistemas foram classificados como quadráticos e quatro sistemas, como cúbicos. Um dos estudos propostos nesta dissertação consiste em estudar três sistemas da Ref. [34], dois quadráticos e um cúbico, com a construção do espaço de parâmetros bidimensional ($A \times \Omega$). Com a construção do espaço de parâmetros, pode-se caracterizar o comportamento da dinâmica

desses sistemas com a variação dos dois parâmetros de controle.

3.1.1 Sistema (A)

O sistema (A) é um oscilador complexo forçado do tipo $\dot{z} + f(z, \bar{z}) = Ae^{i\Omega t}$, onde a função polinomial $f(z, \bar{z})$ é do tipo quadrática. O sistema (A) pode, então, ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{z} + z^2 - \bar{z} + 1 = Ae^{i\Omega t}, \quad (3.1)$$

onde $f(z, \bar{z}) = z^2 - \bar{z} + 1$. Na Eq. (3.1), a variável complexa z pode ser escrita como $z = x + yi$, com x e y sendo variáveis reais. Sendo \bar{z} o conjugado complexo de z . Da Eq. (3.1) pode-se derivar uma forma equivalente do sistema forçado bidimensional,

$$\dot{x} + x^2 - y^2 - x + 1 = A \cos(\Omega t), \quad (3.2a)$$

$$\dot{y} + 2xy + y = A \sin(\Omega t). \quad (3.2b)$$

As Eqs. (3.2) modelam um sistema não-autônomo bidimensional que pode ser transformado em um sistema autônomo tridimensional, fazendo a seguinte mudança de variáveis $w = \Omega t$.

$$\dot{x} = -x^2 + y^2 + x - 1 + A \cos(w), \quad (3.3a)$$

$$\dot{y} = -2xy - y + A \sin(w), \quad (3.3b)$$

$$\dot{w} = \Omega. \quad (3.3c)$$

No estudo desse sistema, calculamos, numericamente, o maior expoente de Lyapunov e, com isso, construímos um espaço de parâmetros usando um gradiente de cores para diferenciar regiões caóticas e periódicas, para o par de parâmetros (A, Ω) como função do maior expoente de Lyapunov.

O estudo numérico realizado consiste em calcular o maior expoente de Lyapunov, resolvendo numericamente as Eqs. (3.3) utilizando o método Runge-Kutta de quarta

ordem, com passo de integração igual a 1×10^{-3} , e com condições iniciais iguais a $(x, y, w) = (0; -0,5; 0)$, conforme referência [30]. Para a construção do espaço de parâmetros da figura 3.1, o sistema de equações (3.3) foi integrado 5×10^6 vezes para cada um dos $2,5 \times 10^5$ diferentes pontos do espaço de parâmetros (A, Ω) , gerado pela divisão de cada parâmetro por 500, logo, pode-se dizer que essa figura tem uma malha de 500×500 .

A figura 3.1 mostra o espaço de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov, para cada par de parâmetros (A, Ω) das Eqs. (3.3). A escala de cores, à direita do espaço de parâmetros, é usada para codificar os valores dos maiores expoentes de Lyapunov em um gradiente de cores.

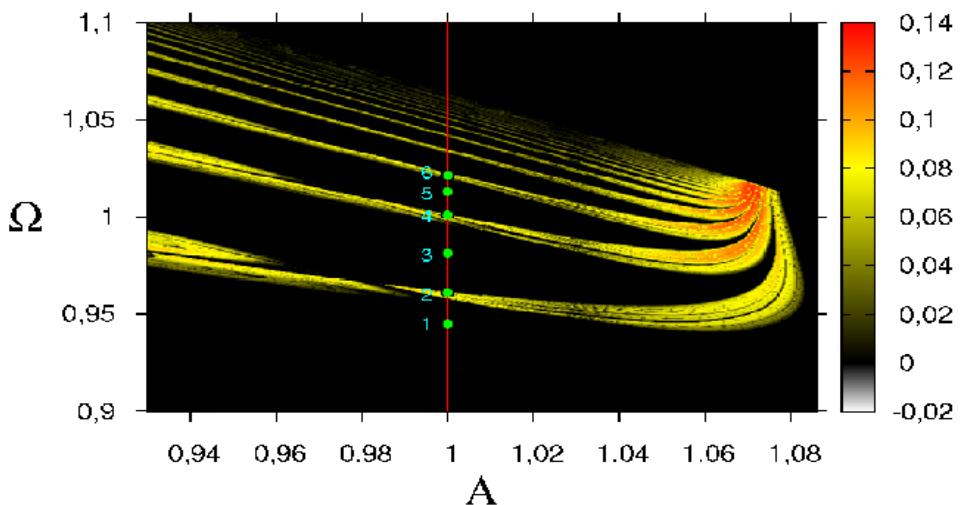


Figura 3.1: Visão global do espaço de parâmetros para o sistema (A) para o maior expoente de Lyapunov. A escala à direita identifica, em cores, o maior expoente. A linha vermelha em $A = 1$, identifica o estudo feito na Ref. [30] das Eqs. (3.3) e, também, a direção do diagrama de bifurcação da figura 3.2. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores mostrados na figura 3.3.

As regiões pretas representam comportamentos dinâmicos periódicos e as regiões amarelas e avermelhadas representam comportamentos caóticos. No interior das regiões caóticas observa-se a existência de estruturas periódicas, identificadas por regiões pretas imersas em regiões amareladas e avermelhadas. A linha vermelha da figura 3.1, representa os

pontos estudados na Ref. [34] e, também o diagrama de bifurcação representado na figura 3.2.

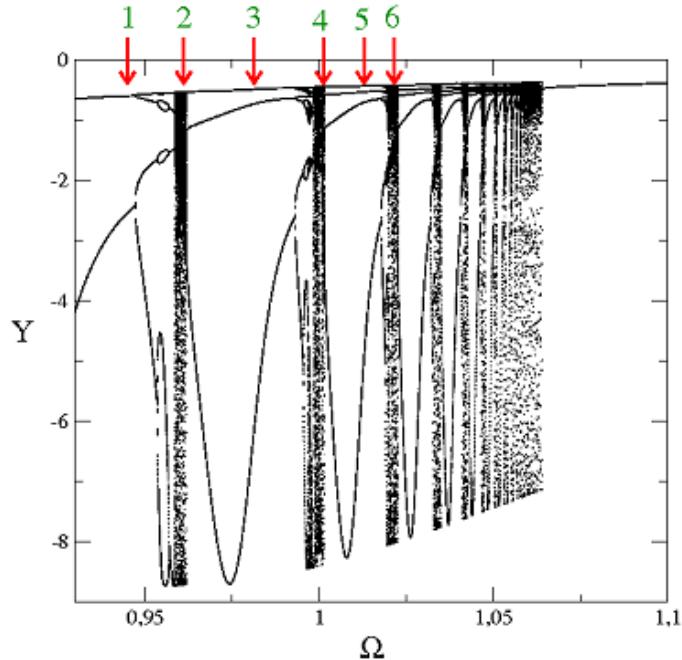


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação ao longo da linha vermelha da figura 3.1, com Ω variando entre $0,93 < \Omega < 1,1$ e com $A = 1$. As setas vermelhas e os números verdes, indicam as posições dos atratores da figura 3.3.

O diagrama de bifurcação mostrado na figura 3.2, foi obtido considerando pontos ao longo da linha vermelha, onde o valor do parâmetro Ω foi variado no intervalo de $0,93 < \Omega < 1,1$ com $A = 1$. É possível observar na figura 3.2, uma rota de bifurcação para o caos por duplicação de período e observa-se, ainda, que há regiões caóticas em meio a regiões periódicas. O diagrama de bifurcação foi construído seguindo os máximos sucessivos da variável y como função do parâmetro Ω . As setas em vermelho com os números em verde no diagrama de bifurcação representam as posições dos atratores da figura 3.3.

A figura 3.3 mostra os atratores para os parâmetros representados na figura 3.1 por símbolos verdes. Os atratores que se encontram em regiões de cor preta, da figura 3.1,

são periódicos. Já os atratores, que apresentam comportamento caótico, estão representados em regiões amareladas e avermelhadas. Na figura 3.3, observa-se atratores com comportamentos periódicos (ciclo limite), por exemplo, atratores 1, 3 e 5, e atratores com comportamentos caóticos, por exemplo, atratores 2, 4 e 8. Todos os atratores da figura 3.3, foram construídos para um valor fixo de $A = 1$. Nota-se que os resultados obtidos condizem com o esperado, conforme figura 3.2.

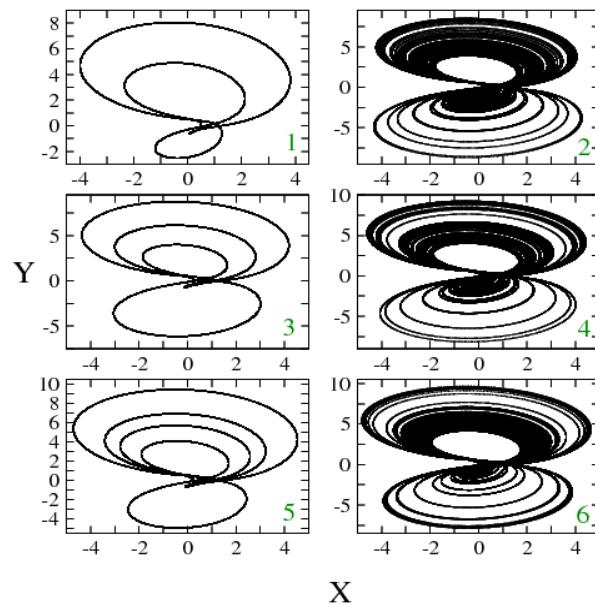


Figura 3.3: Retratos de fase para os parâmetros representados pelos símbolos numerados em verde da figura 3.1. Os números dentro referem-se à posição dos atratores na figura 3.1.

O método utilizado para a construção do espaço de parâmetros do sistema (A) é o do cálculo do maior expoente de Lyapunov. Sabe-se que, com a utilização desse método, os comportamentos possíveis de serem caracterizados, via espaço de parâmetros, são os de ponto fixo, periódico e caos. Logo, comportamentos de quase-periodicidade e hipercaos, não são possíveis de serem observados com apenas o cálculo do maior expoente de Lyapunov.

A proposta aqui apresentada, que consiste em construir um espaço de parâmetros para

o sistema (A), estende as regiões de estudo feitos na Ref. [34], e aqui foi possível fazer uma análise mais detalhada sobre o comportamento do sistema dado pelas Eqs. (3.3).

3.1.2 Sistema (B)

O sistema (B), também é um oscilador complexo forçado do tipo $\dot{z} + f(z, \bar{z}) = Ae^{i\Omega t}$, com $f(z, \bar{z})$ sendo uma função polinomial quadrática. Podemos escrever o sistema (B) da seguinte maneira:

$$\dot{z} + (z - \bar{z})z + 1 = Ae^{i\Omega t}. \quad (3.4)$$

Onde $f(z, \bar{z}) = (z - \bar{z})z + 1$. Da mesma forma como foi feito para o sistema (A), podemos da Eq. (3.4), derivar uma forma equivalente para o oscilador forçado bidimensional,

$$\dot{x} - 2y + 1 = A \cos(\Omega t), \quad (3.5a)$$

$$\dot{y} + 2xy = A \sin(\Omega t). \quad (3.5b)$$

Com a mesma mudança de variáveis feita no sistema (A), transformamos as Eqs. (3.5) que modelam um sistema não-autônomo bidimensional em um sistema autônomo tridimensional,

$$\dot{x} = +2y - 1 + A \cos(w), \quad (3.6a)$$

$$\dot{y} = -2xy + A \sin(w), \quad (3.6b)$$

$$\dot{w} = \Omega. \quad (3.6c)$$

Para caracterizar a dinâmica desse sistema, através da construção do espaço de parâmetros (A, Ω) , usamos o método que calcula o espectro de Lyapunov. Como o sistema é modelado matematicamente num espaço tridimensional, têm-se três expoentes de Lyapunov, um para cada direção do fluxo.

Com a finalidade de caracterizar o comportamento dinâmico desse sistema, construímos dois espaços de parâmetros idênticos, onde um usa o maior expoente de Lyapunov e o segundo utiliza o segundo maior expoente de Lyapunov. Com isso, é possível caracterizar diferentes comportamentos dinâmicos onde, para esse sistema, foi possível observar dinâmica caótica, periódica e quase-periódica (torus-2).

O estudo numérico realizado consiste em calcular o espectro de Lyapunov, resolvendo numericamente as Eqs. (3.6), através do método Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração igual a 1×10^{-3} e com condições iniciais iguais a $(x, y, w) = (0; -0,5; 0)$. Os espaços de parâmetros das figuras 3.4 e 3.5 foram construídos numa malha de 600×600 pontos igualmente espaçados, usando o maior e o segundo maior expoente de Lyapunov, respectivamente.

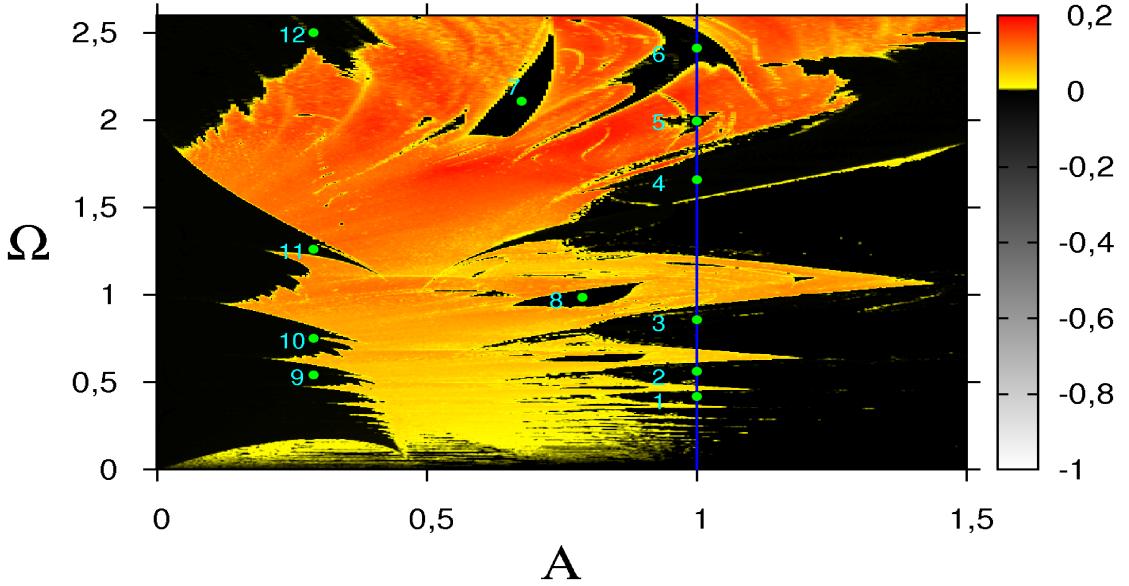


Figura 3.4: Espaço de parâmetros (A, Ω) para o maior expoente de Lyapunov. A escala ao lado direito identifica, em cores, a magnitude dos expoentes. A linha em azul em $A = 1$, indica a região onde foi feito o estudo na Ref. [30]. Os símbolos numerados identificam os valores de parâmetros usados para os atratores mostrados na figura 3.6.

A figura 3.4 usa o maior expoente de Lyapunov para a geração do espaço de parâmetros (A, Ω) . A linha azul em $A = 1$ representa os pontos estudados por Marshall *et al.* [34] para o conjunto de Eqs. (3.6). Já a figura 3.5, toma por base o segundo maior expoente de Lyapunov para a construção do mesmo espaço de parâmetros (A, Ω) mostrado na figura 3.4.

Podemos caracterizar a dinâmica do sistema, observando-se os dois espaços de parâmetros, da seguinte maneira. Regiões periódicas estão representadas em preto na figura 3.4 e, em branco, na figura 3.5. Quase-periodicidade aparece em regiões pretas na figura 3.4 e em regiões também pretas em 3.5. Caos aparece em regiões amareladas e avermelhadas em 3.4 e em regiões pretas em 3.5.

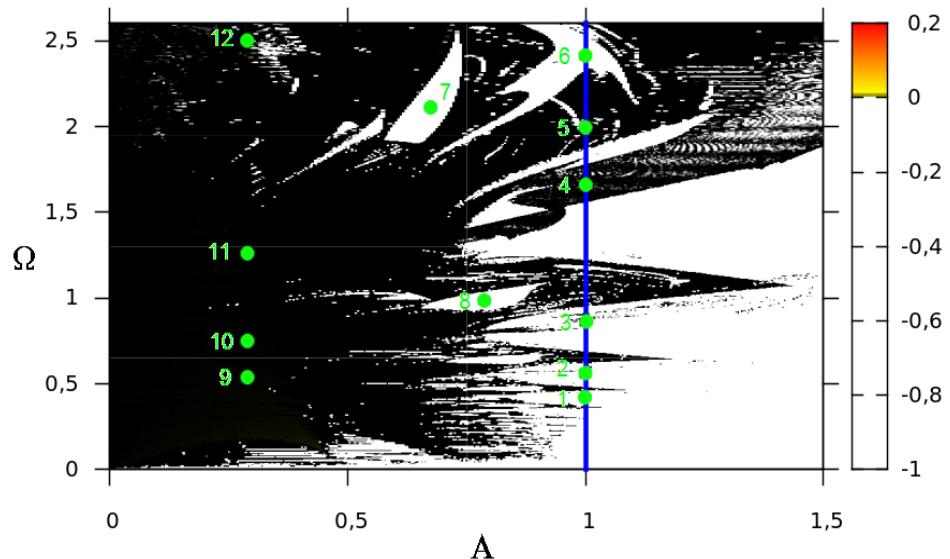


Figura 3.5: Espaço de parâmetros (A, Ω) para o segundo maior expoente de Lyapunov.

A figura 3.6 mostra os atratores que estão representados nas figuras 3.4 e 3.5 por símbolos verdes. Todos esses atratores encontram-se em regiões periódicas e quase-periódicas, regiões pretas das figuras 3.4 e 3.5. Na figura 3.6, observamos atratores com comportamentos periódicos (ciclo limite) como, por exemplo, os atratores 1, 2, 6, 7 e 8, e atratores com comportamentos quase-periódicos (torus-2) como, por exemplo, atratores 3, 4, 5, 9, 10, 11 e 12.

O par de parâmetros identificado pelo símbolo 5, mostra uma região de quase-períodicidade imersa no mar de caos. Essa estrutura pode ser melhor observada para o espaço de parâmetros do segundo maior expoente de Lyapunov, figura 3.5.

Estruturas periódicas auto-similares imersas em regiões caóticas já foram relatadas, recentemente, em muitos sistemas dinâmicos modelados por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Nesses modelos, observa-se, também, estruturas periódicas organizadas em cascatas de bifurcações. De fato, esses comportamentos parecem ser comuns de sistema de codimensão maior do que 1. Entretanto, o estudo do sistema (B), modelado pelas Eqs. (3.6), não apresentou esses tipos de comportamentos característicos.

Notamos que, quando se utiliza o método que calcula o espectro de Lyapunov, podemos retirar maiores informações a respeito da dinâmica do sistema estudado. Esse método mostrou-se uma ferramenta importante para a caracterização do comportamento dinâmico via espaço de parâmetros.

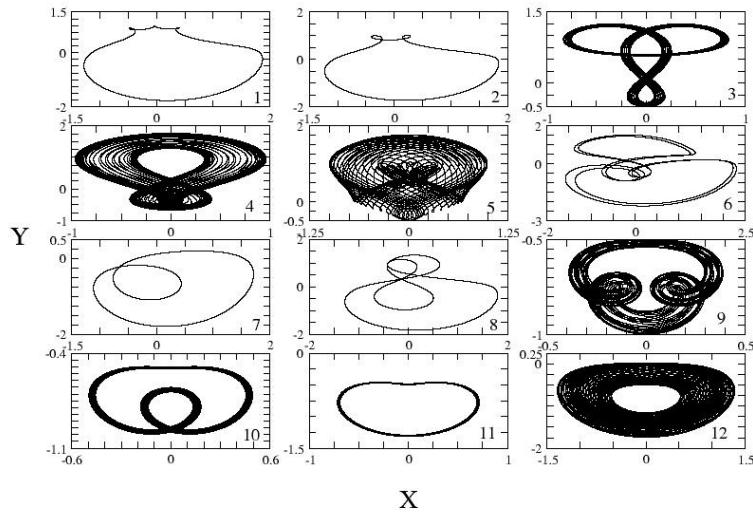


Figura 3.6: Retratos de fase para os pares de parâmetros identificados pelos símbolos numerados em verde da figura 3.4. Os números dentro, referem-se às posições dos atratores na figura 3.4.

3.1.3 Sistema (C)

O sistema (C) faz parte do conjunto de sistemas estudados na Ref. [34], onde, para esse, a função polinomial $f(z, \bar{z})$ é cúbica. Pode-se, então, escrever o sistema (C) da seguinte maneira,

$$\dot{z} + (z^2 - \bar{z}^2) z + \bar{z} = A e^{i\Omega t}. \quad (3.7)$$

Onde $f(z, \bar{z}) = (z^2 - \bar{z}^2) z + \bar{z}$. De forma análoga, é possível reescrever a Eq. (3.7) da seguinte maneira.

$$\dot{x} = 4xy^2 - x + A \cos(w), \quad (3.8a)$$

$$\dot{y} = -4x^2y + y + A \sin(w), \quad (3.8b)$$

$$\dot{w} = \Omega. \quad (3.8c)$$

O conjunto de Eqs. (3.8) modelam um sistema autônomo tridimensional. A investigação numérica realizada no sistema (C) foi a construção de um espaço de parâmetros bidimensional, considerando apenas o maior expoente de Lyapunov. Sabemos que, com a utilização desse método, não é possível observar, no espaço de parâmetros, comportamentos de quase-periodicidade.

O espaço de parâmetros da figura 3.7 foi construído usando o método Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração igual a 1×10^{-3} e com condições iniciais iguais a $(x, y, w) = (0; -0,7; 0)$. A malha utilizada na construção da figura 3.7 é de 500×500 .

A figura 3.7 mostra o espaço de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov, para o par de parâmetros (A, Ω) , das Eqs. (3.8). A escala de cores à direita do espaço de parâmetros é usada para codificar a magnitude dos valores do maior expoente de Lyapunov em um gradiente de cores. As regiões pretas representam comportamentos periódicos ou quase-periódicos e as regiões amareladas e avermelhadas representam comportamentos caóticos. É possível observar que, em meio a regiões caóticas, há regiões onde ocorrem oscilações periódicas ou quase-periódicas. A linha pontilhada azul em $A = 1$ indica a região onde Marshall *et al.* [34] realizaram seus estudos. Já, a linha azul contínua, indica a posição do diagrama de bifurcação, mostrado na figura 3.8.

O diagrama de bifurcação da figura 3.8, foi construído ao longo da linha azul contínua, onde o valor do parâmetro Ω foi variado no intervalo de $0,6 < \Omega < 1,8$ com $A = 1$.

A figura 3.9 mostra os atratores representados na figura 3.7 por símbolos verdes. Os atratores da figura 3.9 indicam três comportamentos dinâmicos diferentes. O atrator sinalizado pelo número 1, por exemplo, apresenta comportamento periódico; o atrator indicado pelo número 2 apresenta comportamento caótico; já o atrator indicado pelo número 3 tem comportamento de quase-periodicidade. Os atratores que se encontram em regiões de cor preta, da figura 3.7, são periódicos ou quase-periódicos. Os atratores que apresentam topologia caótica estão representados nas regiões amareladas e avermelhadas da figura 3.7.

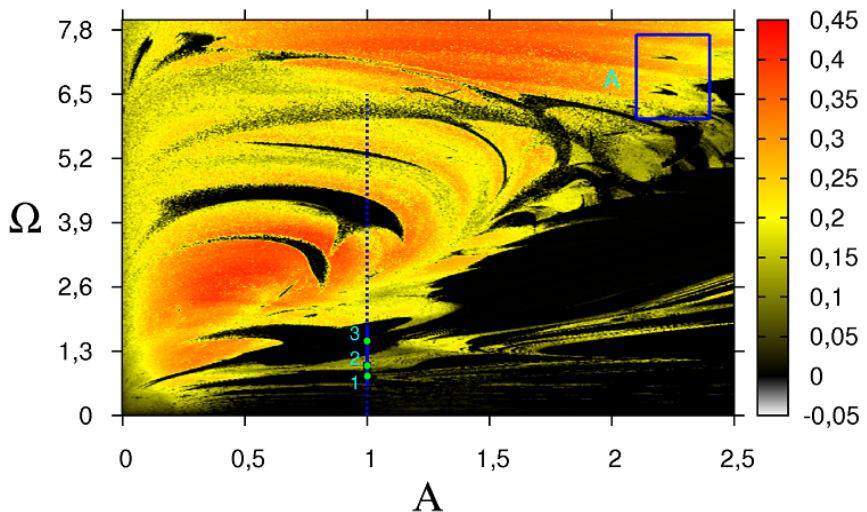


Figura 3.7: Visão global do espaço de parâmetros do sistema (C) para o maior expoente de Lyapunov. A escala à direita identifica, em cores, a magnitude do maior expoente. A linha azul, pontilhada em $A = 1$ indica o estudo feito na Ref. [30]. Já a linha contínua, também em $A = 1$, mostra o caminho seguido pelo diagrama de bifurcação da figura 3.8. A região interna à caixa A é mostrada ampliada na figura 3.10. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores, na figura 3.9.

Observamos na figura 3.8, que ocorre uma cascata de bifurcação por adição de período. Em regiões onde o comportamento do sistema é quase-periódico como, por exemplo, o atrator indicado pelo número 3, os pontos plotados no diagrama de bifurcação ficam mais

concentrados, isso é o que difere regiões de quase-periodicidade de regiões caóticas pois, em regiões de caos, no diagrama de bifurcação, os pontos ficam mais espalhados, conforme mostra a figura 3.8. O diagrama de bifurcação 3.8 foi construído seguindo os máximos sucessivos da variável x como função do parâmetro Ω .

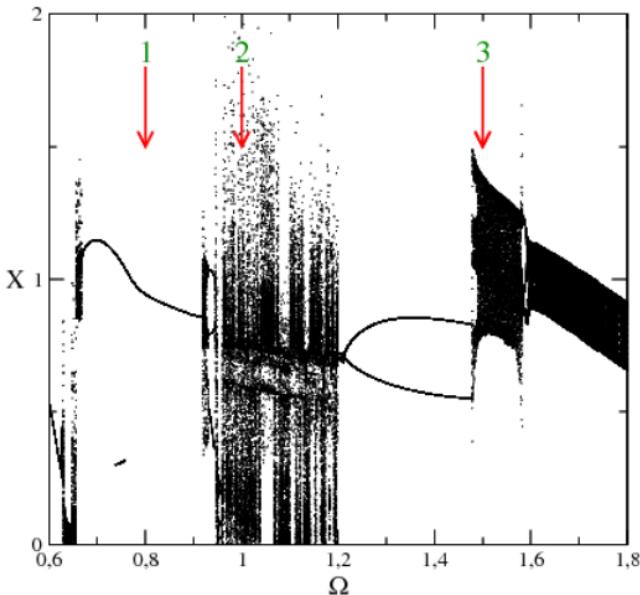


Figura 3.8: Diagrama de bifurcação ao longo da linha azul contínua da figura 3.7, com Ω variando entre $0,6 < \Omega < 1,8$ e $A = 1$. As setas e os números verdes indicam as posições dos atratores na figura 3.9.

A figura 3.10 é uma ampliação da caixa em azul da figura 3.7 e apresenta estruturas periódicas auto-similares mergulhadas no mar de caos.

A linha azul em $A = 2,24$ e com Ω variando entre $6,4 < \Omega < 7,3$, foi onde construímos o diagrama de bifurcação da figura 3.11. Esse diagrama de bifurcação foi construído seguindo os máximos sucessivos da variável x como função do parâmetro Ω . Observamos no diagrama de bifurcação que há janelas de periodicidade em meio a regiões caóticas. Essas janelas, conforme indicam os atratores 4, 5 e 7 da figura 3.12, são de alta periodicidade. Os atratores numerados na figura 3.10, são todos construídos para $A = 2,24$, seguindo o diagrama de bifurcação.

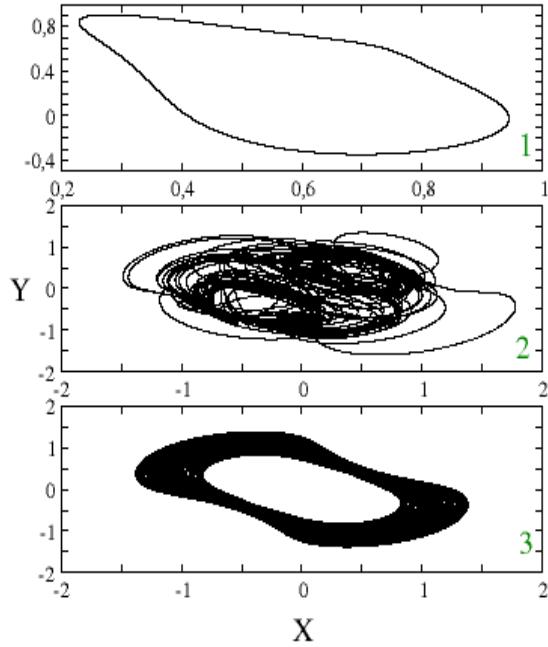


Figura 3.9: Retratos de fase para os símbolos numerados na figura 3.7. Os números, dentro, referem-se às posições dos atratores na figura 3.7.

A figura 3.12 mostra os atratores da região representados pelos números na figura 3.10. Os atratores 4, 5 e 7 apresentam comportamento de alta periodicidade; já o atrator 6 é caótico. Olhando para os atratores 4, 5 e 7 notamos que ocorre uma adição de período do atrator 4 para o 5 e, depois o período do atrator 7 volta a ter, pelo que parece, o mesmo período do atrator 4. Os atratores 4 e 7 parecem ter a mesma topologia, ou seja, a mesma periodicidade.

Com o método utilizado para a construção do espaço de parâmetros do sistema (C), que consiste em calcular somente o maior expoente de Lyapunov, não é possível caracterizar o comportamento dinâmico de quase-periodicidade olhando apenas para o espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov. Porém, pela topologia do atrator 3 da figura 3.9 e, pelo diagrama de bifurcação da figura 3.8 é possível pensar que esse comportamento faz parte da dinâmica do sistema (C).

Com a construção dos espaços de parâmetros dos sistemas (A), (B) e (C), foi possível obter uma visão mais geral sobre o comportamento dinâmico desses sistemas. Para os

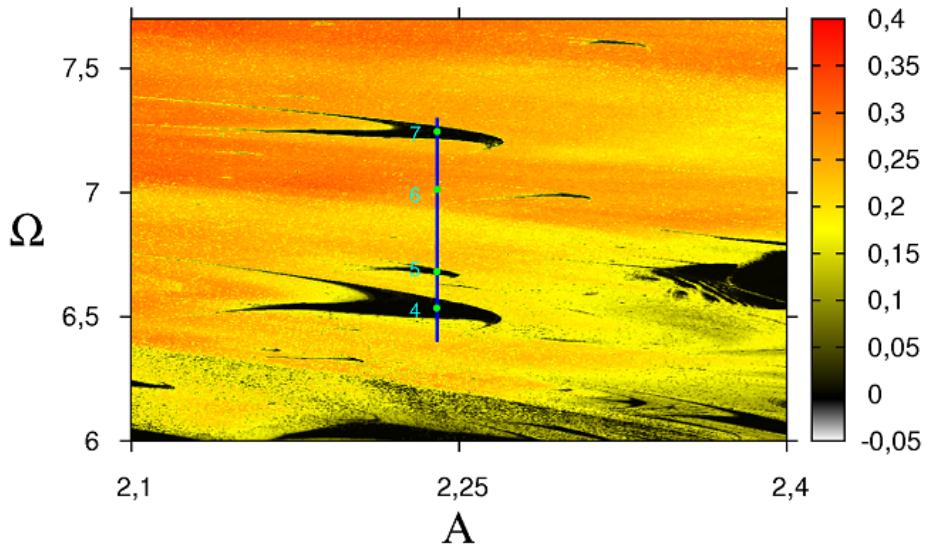


Figura 3.10: Ampliação da região dentro da caixa A da figura 3.7. A linha azul indica a região onde o diagrama de bifurcação 3.11 foi construído e os símbolos verdes, as posições dos atratores.

sistemas (B) e (C), observou-se comportamento dinâmico de quase-periodicidade sendo que, para o sistema (B), o espaço de parâmetros foi construído utilizando-se o método que calcula o espectro de Lyapunov enquanto e, para o sistema (C) apenas o maior expoente de Lyapunov foi calculado.

Marshal *et al.* [34] estudaram apenas a topologia dos atratores. O estudo deles consistiu apenas em variar o parâmetro Ω , adotando, para todos os sistemas, o valor da amplitude $A = 1$.

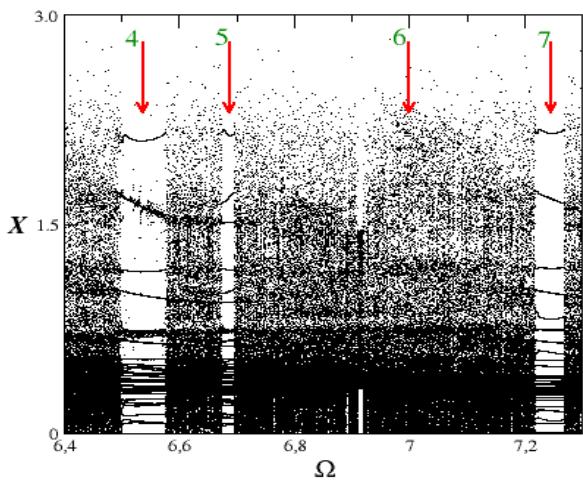


Figura 3.11: Diagrama de bifurcação ao longo da linha azul da figura 3.10, com Ω variando entre $6,4 < \Omega < 7,3$ e, com $A = 2,24$. As setas vermelhas e os números verdes indicam as posições dos atratores da figura 3.12.

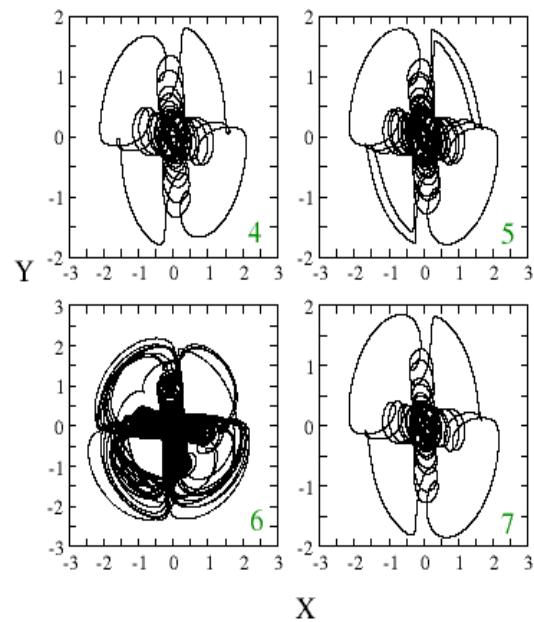


Figura 3.12: Retratos de fase para os símbolos numerados na figura 3.10. Os números dentro referem-se às posições dos atratores na figura 3.10.

Capítulo 4

Círcuito de Chua Forçado

Neste capítulo, serão discutidos os resultados obtidos na investigação numérica para um círcuito de Chua forçado. O círcuito de Chua forçado é modelado por um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Serão, ainda, reportados os resultados numéricos sobre a existência de estruturas periódicas e quase-periódicas em regiões de caos e hipercaos.

4.1 Resultados Numéricos

Estudos teóricos e experimentais sobre circuitos eletrônicos caóticos, com aplicações em controle de caos e comunicação segura, têm crescido substancialmente nos últimos anos. O círcuito de Chua é um exemplo de círcuito caótico.

Hipercaos é caracterizado pela presença de mais de um expoente de Lyapunov positivo. É possível construir um modelo de sistema hipercaótico fazendo a introdução de uma quarta variável, em um sistema caótico tridimensional, através de um controlador *feedback* [32]. A adição de uma nova variável geralmente está associada com a adição de um novo parâmetro, que pode ser usada como um controle para a transição de caos-hipercaos.

Muitos sistemas, na literatura são analisados através da construção do espaço de parâmetros usando apenas o maior expoente de Lyapunov. No entanto, como foi discutido anteriormente, esse método não é eficiente para caracterizar comportamentos quase-periódicos e hipercaóticos, através da construção do espaço de parâmetros. Entretanto,

o método que permite fazer a distinção desses comportamentos, calcula o espectro de Lyapunov. Com o cálculo do espectro de Lyapunov, pode-se construir espaços de parâmetros com o maior e o segundo maior expoente de Lyapunov, para diferenciar os possíveis comportamentos dinâmicos que um sistema pode apresentar.

Neste trabalho, calculamos o espectro de Lyapunov para o circuito de Chua forçado e, construímos espaços de parâmetros, com o maior e o segundo expoente, para três pares de parâmetros distintos.

Motivados pelo trabalho de Suresh *et al.* [36], propomos um circuito de Chua sob o efeito de uma força externa do tipo $f(t) = A\sin(\Omega t)$. A ideia é implementar essa força externa em uma das equações do sistema. O conjunto de equações diferenciais autonômas de primeira ordem que descrevem o comportamento dinâmico do sistema é dado por:

$$\dot{x} = \alpha(x - y) + i_d, \quad (4.9a)$$

$$\dot{y} = \delta(\alpha(y - x) - z), \quad (4.9b)$$

$$\dot{z} = \gamma y + \beta z + A\sin(w), \quad (4.9c)$$

$$\dot{w} = \Omega. \quad (4.9d)$$

Onde $\alpha = 1/(m_0.R)$, $\delta = C_1/C_2$, $\gamma = C_1/m_0^2.L$ e $\beta = (C_1.r_L)/(m_0.L)$. Sendo R , C_1 e L elementos lineares passivos, r_L é a resistência intrínseca do indutor, $i_d = m_0x + 1/2(m_1 - m_0)(|x + B_p| - |x - B_p|)$ é a curva linear por parte do diodo de Chua e m_0 é um parâmetro da curva. O sistema, modelado pelas Eqs 4.9, é obtido com a introdução de uma força na terceira equação do Chua padrão tridimensional.

Para estudar a ação da força externa acoplada ao circuito de Chua padrão, foram construídos espaços de parâmetros baseados no espetro de Lyapunov para os seguintes pares de parâmetros: (A, Ω) com r_L e R mantidos fixos, (R, A) com Ω e r_L fixos e (R, r_L) com A e Ω mantidos fixos.

Para estudar a dinâmica desse sistema, foram construídos, para cada par de parâmetros, dois espaços de parâmetros. Um dos espaços é gerado para o maior expoente e, o segundo é construído para o segundo maior. Os espaços de parâmetros são acoplados a um gradiente de cores à direita que permite visualizar a magnitude do expoente.

As Eqs. 4.9 foram resolvidas, numericamente, para obtenção dos quatro expoentes de Lyapunov. O método utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração 1×10^{-1} e com condições iniciais iguais a $(x, y, z, w) = (0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1)$. A malha utilizada foi de 500×500 e o tempo de integração de 5×10^5 . Todos os espaços de parâmetros discutidos nesta seção foram construídos com essas configurações.

A figura 4.1 mostra o espaço de parâmetros (A, Ω) , para o maior expoente de Lyapunov. O gradiente de cores à direita é usada para codificar os valores dos expoentes de Lyapunov.

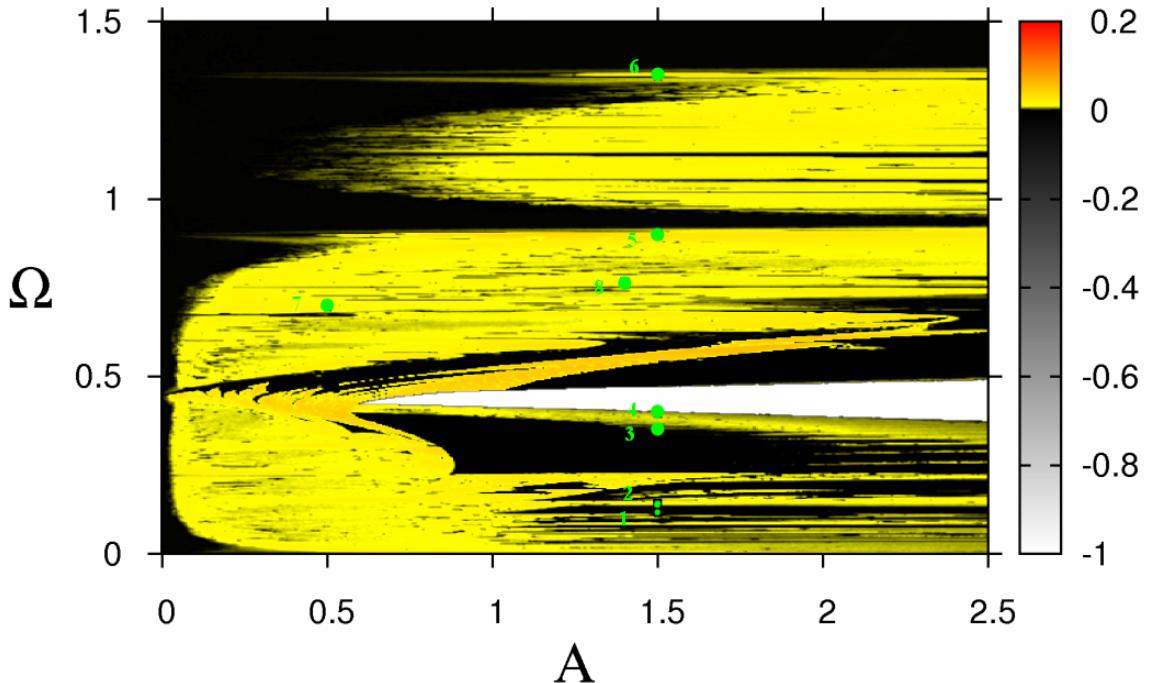


Figura 4.1: Espaço de parâmetros (A, Ω) para o primeiro maior expoente. Com $r_L = 15$ e $R = 1850$. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores mostrados na figura 4.3.

O espaço de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov é mostrado na figura 4.2.

Para caracterizar a dinâmica do sistema, é necessário observar, ao mesmo tempo, os

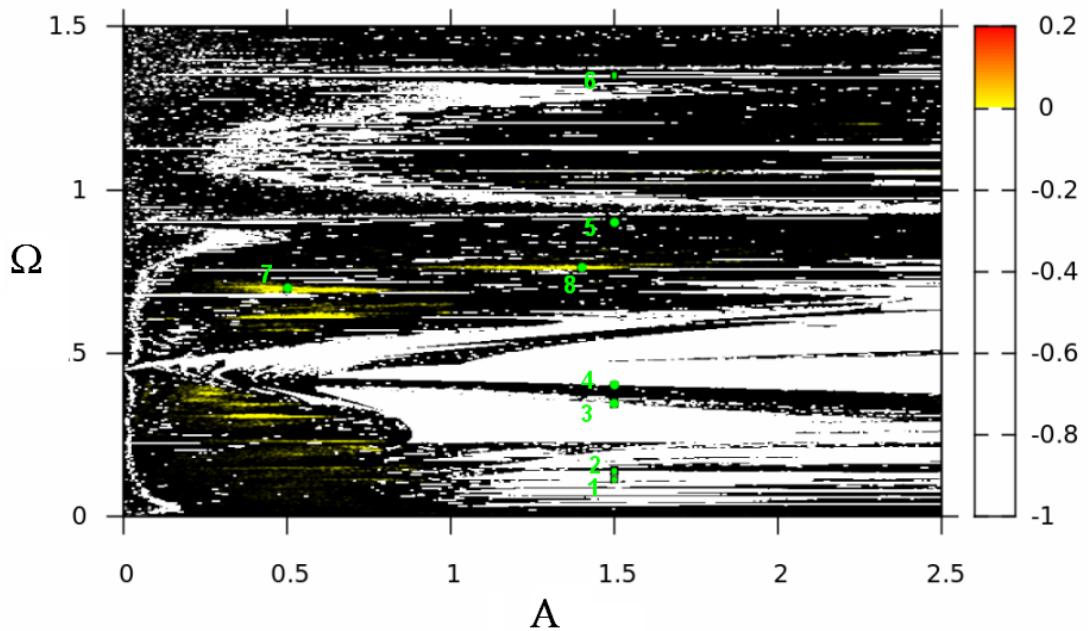


Figura 4.2: Espaço de parâmetros (A, Ω) para o segundo maior expoente de Lyapunov. Com $r_L = 15$ e $R = 1850$. Os símbolos numerados em verde indicam os atratores mostrados na figura 4.3.

dois espaços de parâmetros. Sabe-se que oscilações hipercaóticas só ocorrem em sistemas de alta dimensionalidade e, que são necessários, no mínimo, dois expoentes de Lyapunov positivos. Com a figura 4.1, que é construída para o maior expoente de Lyapunov, é possível observar regiões de divergência, de oscilações periódicas e comportamentos caóticos. Por isso, o método que calcula o espectro de Lyapunov é, de fato, muito importante para caracterizar o comportamento dinâmico, principalmente para sistemas de alta dimensionalidade.

Regiões periódicas estão representadas em preto na figura 4.1 e, em branco, na figura 4.2. Quase-periodicidade aparece em regiões pretas em ambas as figuras 4.1 e 4.2. Caos aparece em regiões amareladas e avermelhadas em 4.1 e em regiões pretas na figura 4.2. Hipercaos aparece em regiões amareladas e avermelhadas na figura 4.2. É possível notar, no espaço de parâmetros, uma infinidade de estruturas com oscilações de quase-

periodicidade, principalmente quando olhadas no espaço de parâmetros do segundo maior expoente de Lyapunov. Em contrapartida, regiões com oscilações hipercaóticas não são tão abundantes assim e só podem ser observadas quando olhadas para a figura 4.2.

A figura 4.3 mostra os atratores que estão representados nas figuras 4.1 e 4.2 por símbolos verdes. Os números referem-se às posições dos atratores nos espaços de parâmetros e podem ser melhor visualizados na figura 4.2.

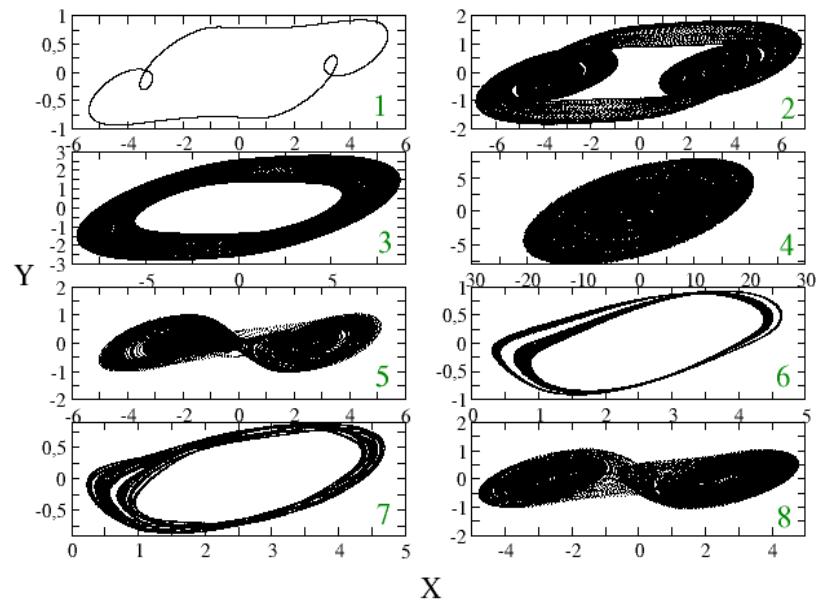


Figura 4.3: Retratos de fase para os símbolos numerados em verde das figuras 4.1 e 4.2. Os números dentro referem-se às posições dos atratores nas figuras 4.1 e 4.2.

A tabela 4.1 representa os valores do espectro de Lyapunov para os oito pontos numerados de 1 a 8. Para calcular o espectro de Lyapunov, a rotina usada foi baseada no algorítimo proposto por Wolf *et al.* [33].

Ponto	Atrator	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	Periódico	0	-0,015	-0,0165	-0,374
2	Torus – 2	0	-0,000135	-0,00206	-0,417
3	Torus – 3	0,0000866	0	-0,000654	-0,398
4	Caótico	0,00712	0	-0,00298	-0,425
5	Caótico	0,0284	0	-0,0165	-0,384
6	Caótico	0,00987	0	-0,00606	-0,292
7	Hipercaótico	0,0146	0,00141	0	-0,412
8	Hipercaótico	0,0136	0,00176	0	-0,434

Tabela 4.1: Espectro dos expoentes de Lyapunov para os símbolos em verde nas figuras 4.1 e 4.2.

Com o cálculo do espectro de Lyapunov, nota-se a existência de vários comportamentos dinâmicos para o circuito de Chua forçado. O comportamento de quase-periodicidade, pode ser observado nos pontos 2 e 3, com atratores tipo torus-2 e torus-3 respectivamente. Como é sabido, para que haja comportamento quase-periódico, tipo torus-3, é necessário que o sistema tenha mais de 3 dimensões. O espectro que caracteriza o comportamento dinâmico de torus-3, apresenta os três primeiros maiores expoentes de Lyapunov igual a zero e, necessariamente um negativo pois, o sistema é dissipativo. Pode-se, também, observar comportamento hipercaótico onde esse é caracterizado por, no mínimo, dois expoentes de Lyapunov positivos. Sabe-se que os pontos hipercaóticos formam um subconjunto que pertence ao conjunto dos pontos caóticos.

A figura 4.4 mostra o espaço de parâmetros (R, A) para o maior exponte de Lyapunov, com $\Omega = 0,14$ e $r_L = 15$ mantidos fixos. O espaço de parâmetros (R, A) para o segundo maior expoente de Lyapunov é mostrado na figura 4.5. As caixas A, B e C são ampliações da figura 4.4 e 4.5, onde ocorrem oscilações hipercaóticas, quase-periódicas e caóticas. Regiões periódicas estão representadas em preto na figura 4.4 e, em branco, na figura 4.5. Quase-periodicidade aparece em regiões pretas em ambas as figura 4.4 e 4.5. Caos aparece em regiões amareladas e avermelhadas em 4.4 e em regiões pretas, na figura 4.5. Hipercaos aparece em regiões amareladas e avermelhadas na figura 4.5. Na figura 4.5, no canto direiro superior, é possível perceber uma infinidade de estruturas quase-periódicas.

Essas estruturas podem ser melhores visualizadas na figura 4.9.

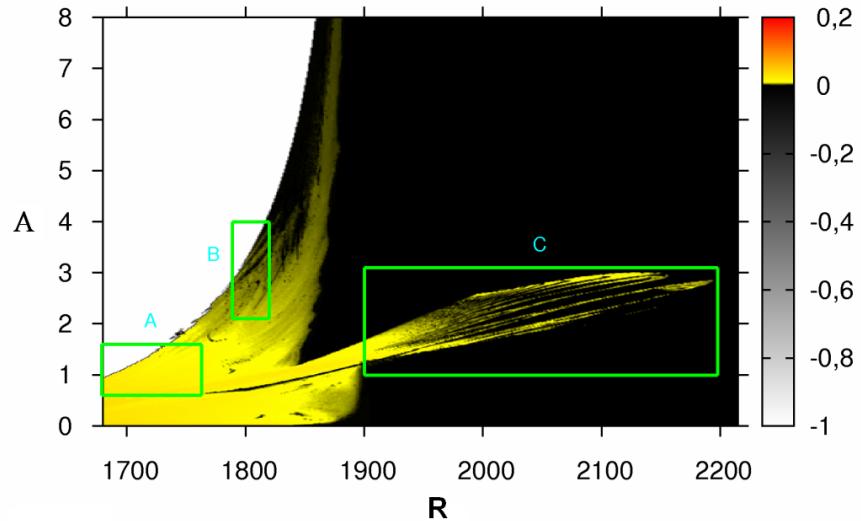


Figura 4.4: Visão global do espaço de parâmetros (R, A) para o primeiro maior expoente de Lyapunov.

A figura 4.6, caixa A, é uma ampliação da figura 4.4 e 4.5, onde ocorre oscilações hipercaóticas. O espaço de parâmetros da caixa A, para o segundo maior expoente de Lyapunov, é mostrado na figura 4.7.

Para o ponto α , nas figuras 4.6 e 4.7, calculamos o espectro de Lyapunov e, pode-se concluir que, de fato, esse ponto faz parte do subconjunto de pontos hipercaóticos, como mostra a tabela 4.2. Podemos observar que há estruturas periódicas em meio a regiões hipercaóticas. Essas estruturas serão mais bem observadas no espaço de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov, figura 4.7. As estruturas periódicas aparecem em preto na figura 4.6 e em branco, em 4.7.

Estruturas quase-periódicas são mostradas no espaço de parâmetros para ampliação da caixa B, figuras 4.8 e 4.9. A figura 4.9 mostra o espaço de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov da caixa B.

As estruturas quase-periódicas são caracterizadas por regiões pretas nas figuras 4.8 e

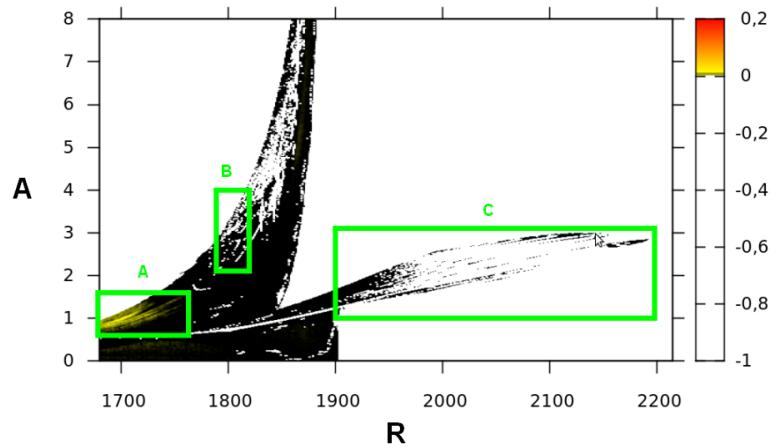


Figura 4.5: Visão global do espaço de parâmetros (R, A) para o segundo maior expoente de Lyapunov.

4.9. O valor do espectro de Lyapunov para o ponto β , figuras 4.8 e 4.9, é mostrado na tabela 4.2. Pode-se concluir que o comportamento, nesse ponto, é de quase-periodicidade e o atrator é do tipo torus-2.

A figura 4.10, caixa C, apresenta estruturas em forma de ganchos. Observamos que os ganchos são formados por estruturas caóticas e, dentro deles, há regiões de periodicidade. O espaço de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov da figura 4.10, não foi gerado, pois não observamos comportamentos de quase-periodicidade e hipercaos. Para o ponto γ da figura 4.10, calculamos o espectro de Lyapunov, conforme a tabela 4.2.

Ponto	Atrator	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
α	Hipercaótico	0,0230	0,00403	0,0	-0,479
β	Torus – 2	0,000519	0,0	-0,00416	-0,396
γ	Caótico	0,0186	0,0	-0,0359	-0,303

Tabela 4.2: Espectro de Lyapunov completo para os pontos destacados nos espaços de parâmetros (A, R).

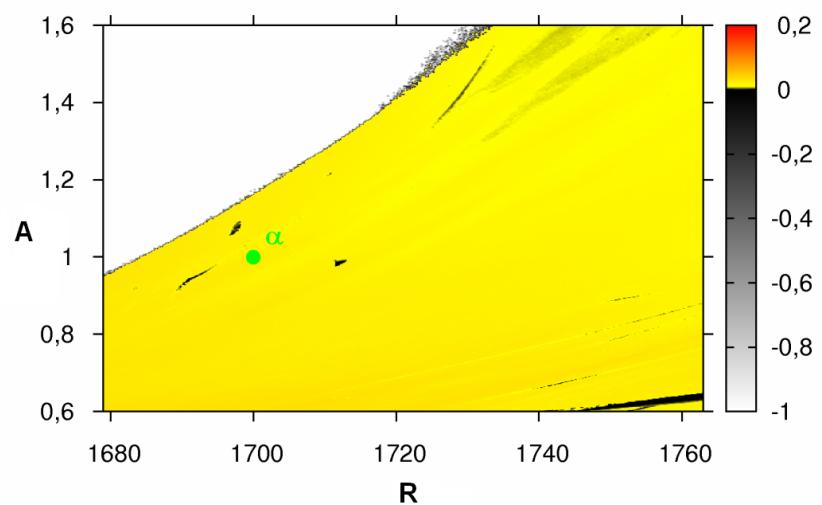


Figura 4.6: Ampliação da caixa A nas figuras 4.4 e 4.5 para o primeiro maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações hipercaóticas.

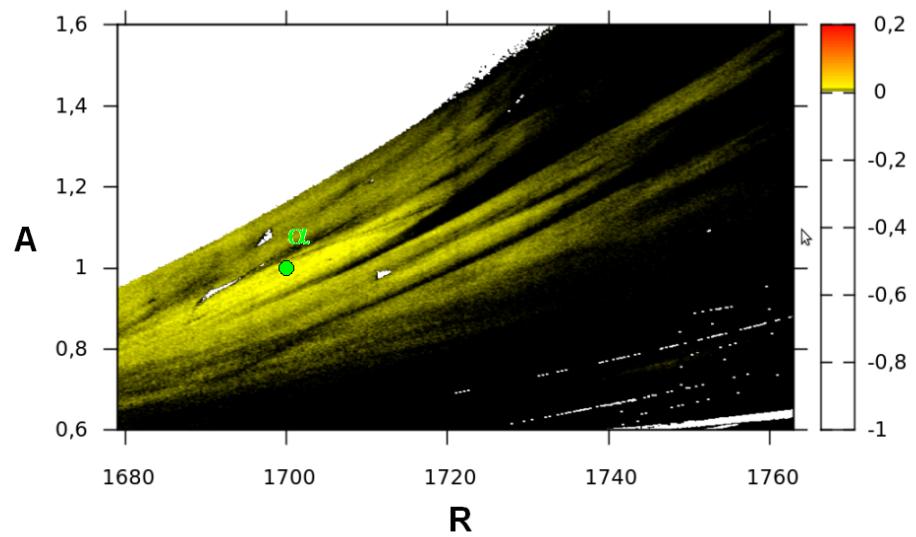


Figura 4.7: Ampliação da caixa A nas figuras 4.4 e 4.5 para o segundo maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações hipercaóticas.

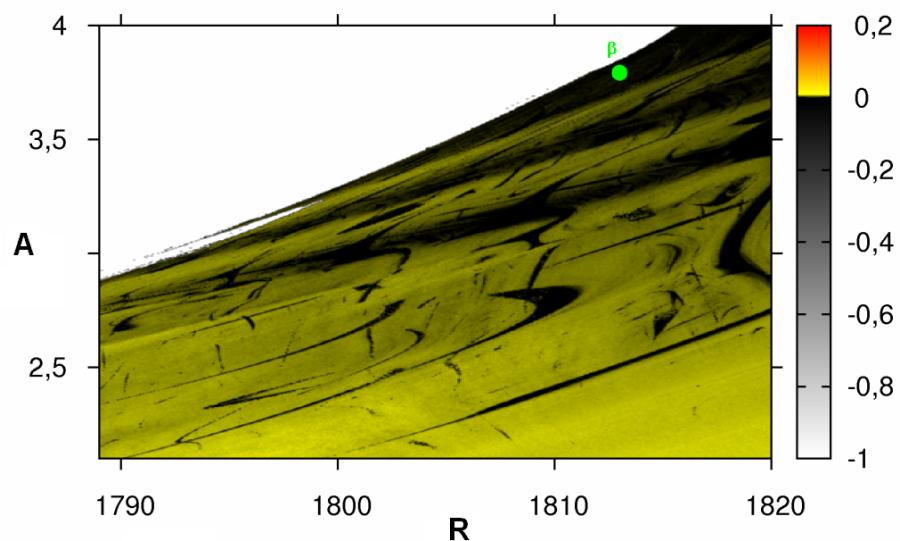


Figura 4.8: Ampliação da caixa B nas figuras 4.4 e 4.5 para o primeiro maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações quase-periódicas.

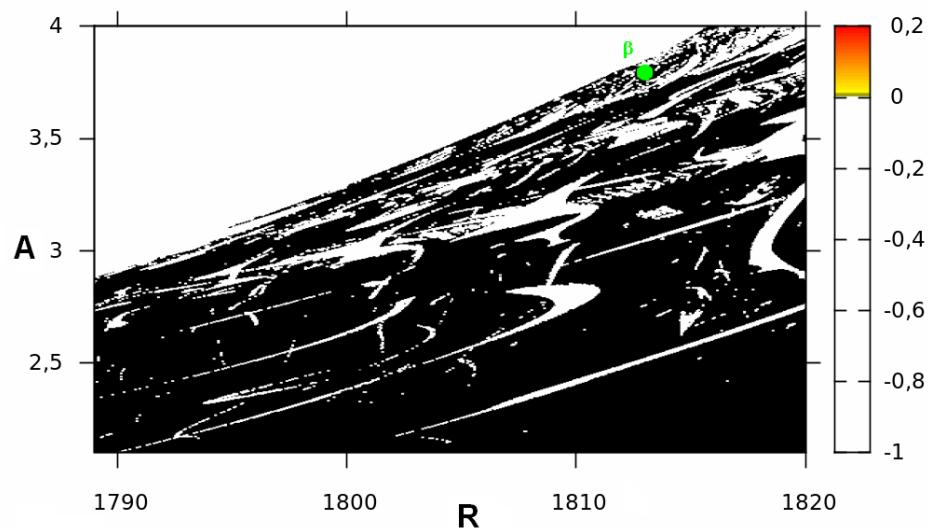


Figura 4.9: Ampliação da caixa B nas figuras 4.4 e 4.5 para o segundo maior expoente de Lyapunov. Presença de oscilações quase-periódicas.

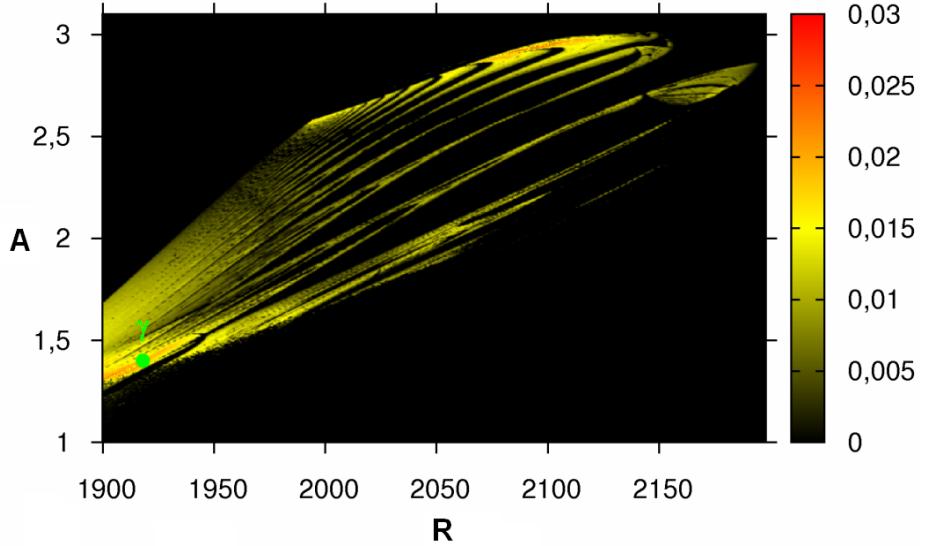


Figura 4.10: Ampliação da caixa C nas figuras 4.4 e 4.5 para o maior exponte de Lyapunov. Estrutura em forma de ganchos, similares as relatadas na Ref. [21].

Com a construção do espaço de parâmetros (R, A) , observamos uma infinidade de estruturas periódicas auto-similares e quase-periódicas imersas em regiões amareladas e avermelhadas que formam o conjunto de pontos caóticos. Esse comportamento é muito comum em sistemas de codimensão maior que 1.

A figura 4.11 mostra o espaço de parâmetros (R, r_L) , com $A = 1,5$ e $\Omega = 0,14$ mantidos fixos. O espaço de parâmetros para o segundo expoente de Lyapunov é visualizado na figura 4.12. A ampliação, caixa D, em 4.11 e 4.12, mostra regiões onde ocorrem comportamentos hipercaóticos, caracterizadas em regiões amareladas da figura 4.12. Quase-periodicidade também pode ser observado, porém em menor quantidade. É possível ver, ainda, uma estrutura periódica imersa no mar de caos, representada pela cor branca, na figura 4.12.

Se o valor da amplitude for zero $A = 0$, as Eqs. 4.9 passam a modelar um sistema tridimensional, ou seja, o circuito de Chua padrão. Logo, o espaço de parâmetros (R, r_L) , para $A = 0$, será igual ao da figura 2.6.

Com a implementação da força externa $f(t) = \text{Asen}(\Omega t)$ no circuito de Chua padrão,

tornou possível observar uma mudança significativa no comportamento dinâmico do sistema. Essa mudança de comportamento deve-se ao fato de que, quando implementamos essa força externa, aumenta-se a dimensão do sistema, de tridimensional para quadridimensional. O circuito de Chua forçado apresentou, através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, uma dinâmica muito rica, com a coexistência de vários tipos de atratores.

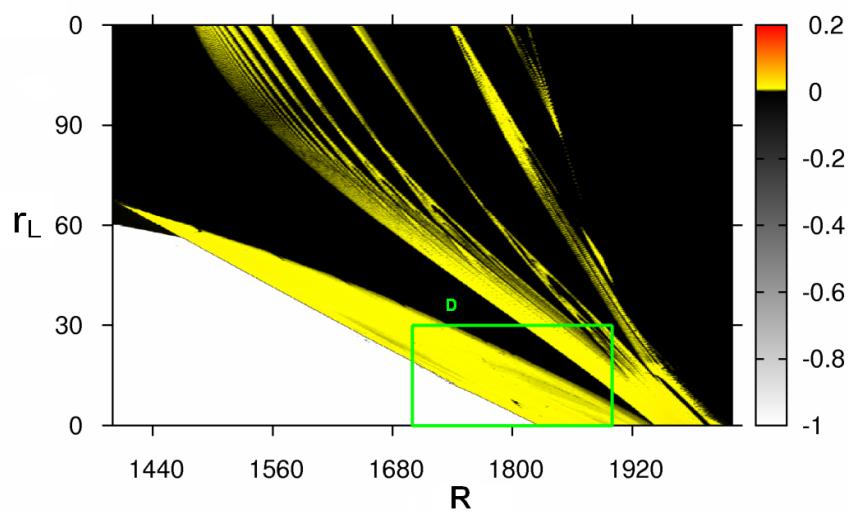


Figura 4.11: Visão global do espaço de parâmetros (R, r_L) para o primeiro maior expoente de Lyapunov.

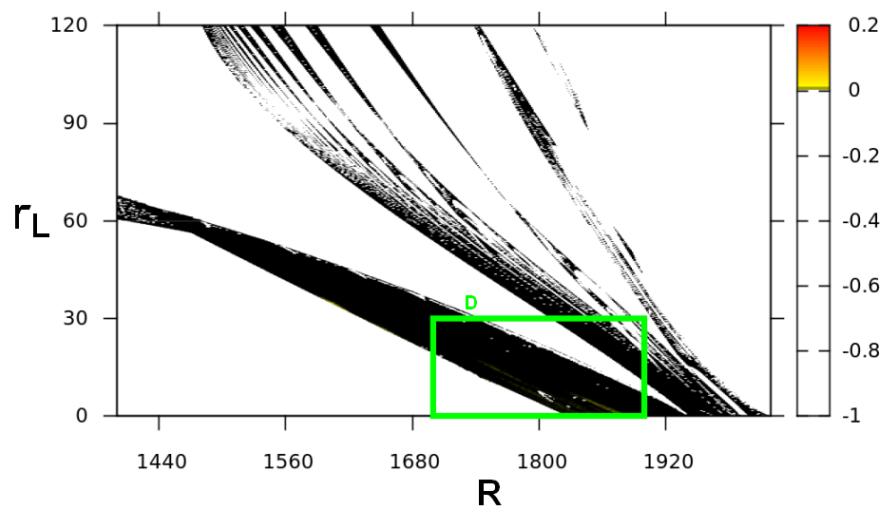


Figura 4.12: Visão global do espaço de parâmetros (R, r_L) para o segundo maior expoente de Lyapunov.

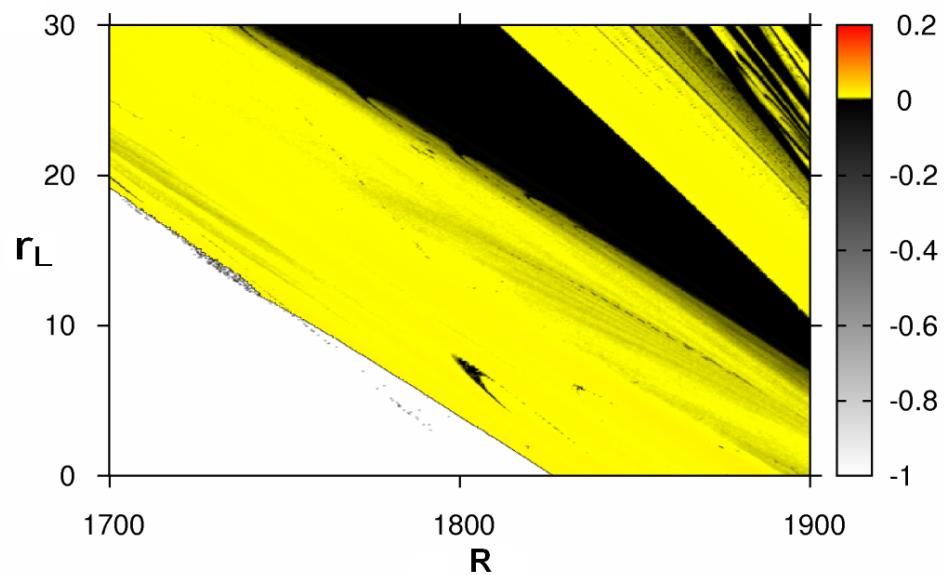


Figura 4.13: Ampliação da caixa D, da figura 4.1, para o primeiro maior expoente de Lyapunov.

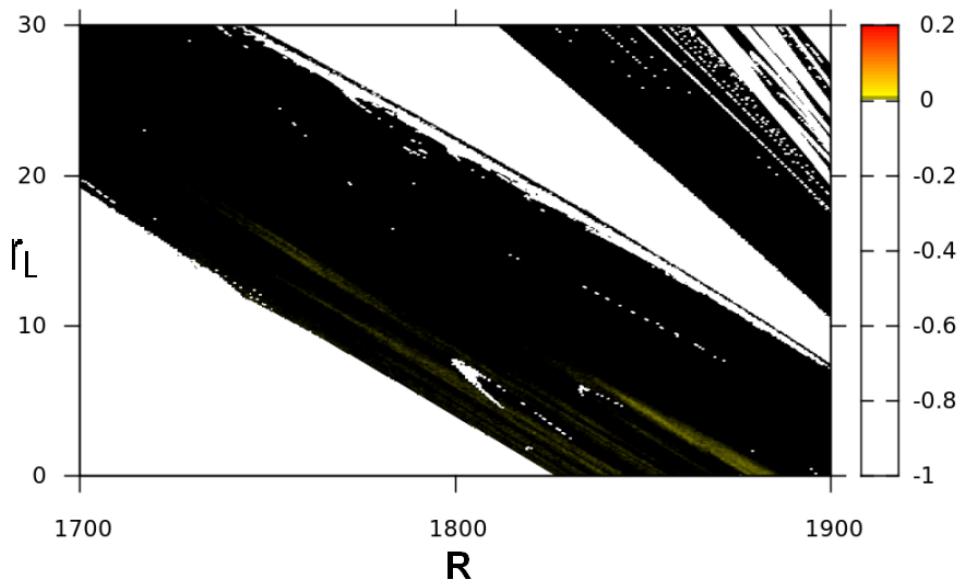


Figura 4.14: Ampliação da caixa D, na figura 4.11, para o segundo maior expoente de Lyapunov.

Capítulo 5

Conclusões

Com a construção de espaços bidimensionais de parâmetros, observamos e caracterizamos, a dinâmica dos sistemas estudados usando o método que, calcula apenas o maior expoente de Lyapunov e o método que cálcula o espectro de Lyapunov. Quando é utilizado o método que faz o cálculo do espectro de Lyapunov, tem-se uma ferramenta que permite caracterizar toda a dinâmica do sistema. Esse método fica ainda mais interessante quando aplicado a sistemas de alta dimensionalidade pois, esses sistemas podem apresentar hipercaos e também quase-periodicidade. O método do cálculo do espectro de Lyapunov foi usado, por exemplo, para caracterizar a dinâmica de osciladores complexos e o circuito de Chua forçado, onde o método mostrou-se de grande importância para a caracterização da sua dinâmica.

Com a construção dos espaços de parâmetros para os osciladores complexos forçados, estendemos as regiões de estudo feitos na Ref. [34], e aqui foi possível fazer uma análise mais detalhada sobre o comportamento dinâmico desses sistemas. Foi possível, através da construção do espaço de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov, observar uma infinidade de estruturas periódica e quase-periódicas em meio a regiões caóticas.

Com a implementação de uma força externa no circuito de Chua padrão, foi possível observar uma grande mudança no comportamento dinâmico. Pois, de fato, quando foi feita a implementação, aumentamos o espaço de fase do sistema. Devido ao aumento do espaço de fase, o sistema apresentou comportamentos dinâmicos que não são observados

no circuito de Chua padrão.

O método de caracterizar a dinâmica de sistemas dinâmicos, através da construção do espaço de parâmetros para o espectro de Lyapunov, mostrou-se muito eficiente, pois só assim é possível caracterizar toda a dinâmica do sistema.

Referências Bibliográficas

- [1] C. R. Hilborn. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers.* New York: Oxford University Press **2nd** ed, (2006) 650 p.
- [2] H. G. Schuster. *Reviews of nonlinear dynamics and complexity.* Germany: Wiley-VCH, c2008 2 v.
- [3] Ott, Edward. *Chaos in dynamical systems.* New York: Cambridge University Press **2nd** ed. c2002. 478 p.
- [4] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics.* **2nd** ed. New York: Springer-Verlag, c2010. 692 p.
- [5] E. N. Lorenz. *Deterministic nonperiodic flow.* Journal of the Atmospheric Sciences **20**, (1963) 130-141.
- [6] O. E. Rössler. *An equation for hyperchaos.* Physics Letters A **71**, (1979) 155-157.
- [7] H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, P. C. Rech. *Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit.* Physics Letters A **372**, (2008) 4793-4798.
- [8] H. A. Albuquerque, P. C. Rech. *A parameter-space of a Chua system with a smooth nonlinearity.* International Journal of Bifurcation and Chaos **19**, (2009) 1351-1355.
- [9] C. Bonatto, J. A. C. Gallas. *Periodicity Hub and Nested Spirals in the Phase Diagram of a Simple Resistive Circuit.* Physical Review Letters **101**, (2008) 2396-2399.

- [10] J. C. D. Cardoso, H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger. *Complex periodic structures in bi-dimensional bifurcation diagrams of a RLC circuit model with a nonlinear NDC device*. Physics Letters A **373**, (2009) 2050-2053.
- [11] C. Bonatto, J. A. C. Gallas, Y. Ueda. *Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator*. Physical Review E **77**, (2008) 02617 (5).
- [12] J. A. C. Gallas. *Structure of the parameter space of the Hénon map*. Physical Review Letters **70**, (1993) 2714-2717.
- [13] J. A. C. Gallas. *Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models*. Physica A **202**, (1994) 196-223.
- [14] B. R. Hunt, J. A. C. Gallas, C. Grebogi, J. A. Yorke, H. Kiçak. *Bifurcation rigidity*. Physica D **129**, (1999) 35-56.
- [15] M. Komuro, R. Tokunaga, T. Matsumoto, L. O. Chua, A. Hotta. *Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit*. International Journal of Bifurcation and Chaos **1**, (1991) 139–182.
- [16] C. Bonatto, J. C. Garreau, J. A. C. Gallas. *Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ Laser*. Physical Review Letters **95**, (2005) 143905.
- [17] P. Gaspard, R. Kapral, G. Nicolis. *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis*. Journal of Statistical Physics **35**, (1984) 697 - 727.
- [18] M. R. Gonzalo, J. A. C. Gallas. *How similar is the performance of the cubic and the piecewise-linear circuits of Chua?* Physics Letters A **375**, (2010) 143 - 148.
- [19] Melke A. Nascimento, J. A. C. Gallas, Hamilton Varela. *Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator*. Physical Chemistry Chemical Physics **13**, (2011) 441 - 446.
- [20] G. E. Testoni, P. C. Rech. *Dynamics of a particular Lorenz type system*. International Journal of Modern Physics C **21**, (2010) 973 - 982.

- [21] V. Kovanis, A. Gavrielides, J. A. C. Gallas. *Labyrinth bifurcations in optically injected diode laser*. European Physical Journal D **58**, (2010) 181 - 186.
- [22] P. C. Rech. *Dynamics of a neuron in different two-dimensional parameter-spaces*. Physics Letters A **375**, (2011) 1461 - 1464.
- [23] J. G. Freire, C. Bonatto, C. C. Dacamara, J. A. C. Gallas. *Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the Lorenz-84 low-order atmospheric circulation model*. Chaos **18**, (2008) 033121.
- [24] C. Stegemann, H. A. Albuquerque, P. C. Rech. *Some two-dimensional parameter spaces of a Chua system with cubic nonlinearity*. Chaos **20**, (2010) 023103.
- [25] E. R. Viana Jr., R. M. Rubinger, H. A. Albuquerque, A. G. de Oliveira, G. M. Ribeiro. *High-resolution parameter space of an experimental chaotic circuit*. Chaos **20**, (2010) 023110.
- [26] H. A. Albuquerque, P. C. Rech. *Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a Chua circuit*. International Journal of Circuit Theory and Applications, online, v. XX, issue XX, p.XXXX, 2011.
- [27] F. Prebianca, H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger. *On the effect of a parallel resistor in the Chua's circuit*. Journal of Physics: Conference Series **285**, (2011) 012005.
- [28] D. M. Maranhão, J. C. Sartorelli, M. S. Baptista. *Experimental identification of chaotic fibers*. Chaos Solitons Fractals **39**, (2007) 9 - 16.
- [29] D. M. Maranhao, M. S. Baptista, J. C. Sartorelli, I. L. Caldas. *Experimental observation of a complex periodic window*. Phys. Rev. E **77**, (2008) 37202.
- [30] Y. Nishio, N. Inaba, S. Mori, T. Saito. *Rigorous analyses of windows in a symmetric circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems **37**, (1990) 473 - 487.
- [31] M. J. Correia, P. C. Rech. *Characterization of hyperchaotic states in the parameter-space of a modified lorenz system*. Journal of Physics: Conference Series **285**, (2011) 012017.

- [32] C. Stegemann, H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, P. C. Rech. *Lyapunov exponent diagrams of a 4-dimensional Chua system*. Chaos **21**, (2011) 033105.
- [33] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from a time-series*. Physica D **16**, (1985) 285 - 317.
- [34] D. Marshall, J. C. Sprott. *Simple driven chaotic oscillators with complex variables*. Chaos **19**, (2009) 013124.
- [35] D. Marshall, J. C. Sprott. *Simple conservative, autonomous, second-order chaotic complex variable systems*. Int. J. Bifurcation and Chaos **20**, (2010) 697 - 702.
- [36] K. Suresh, K. Thamilmaran. *Bubble doubling route to strange nonchaotic attractor in a quasiperiodically forced Chua's circuit*. arXiv:1104.5010v1 [nlin.CD] 26 Apr 2011.