

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF**

**GABRIELA ALINE CASAS**

**EFEITOS CAUSADOS PELA MODULAÇÃO DE PARÂMETROS NO MAPA DE  
HÉNON**

Joinville, SC

2011

**GABRIELA ALINE CASAS**

**EFEITOS CAUSADOS PELA MODULAÇÃO DE PARÂMETROS NO MAPA DE  
HÉNON**

Dissertação apresentada para obtenção do título  
de mestre em Física da Universidade do Estado  
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnoló-  
gicas - CCT.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, SC

2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

C334e

Casas, Gabriela Aline.

Efeitos Causados Pela Modulação de Parâmetros no  
Mapa de Hénon / Gabriela Aline Casas; Orientador:  
Paulo Cesar Rech - Joinville-SC

62 f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestra-  
do em Física, Joinville, 2011.

1. Mapa de Hénon. 2. Modulação de Parâmetros.  
3. Multiestabilidade. I. Rech, Paulo C..

CDD 531.1

*Aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

Durante o desenvolvimento desta dissertação contei com colaboração e incentivo de várias pessoas, sendo todas fundamentais na realização deste trabalho tanto no sentido de me prestarem informações quanto no incentivo pessoal.

Agradeço aos meus pais Geraldo e Rosane e aos meus irmãos Fabian e Lucas, pelo apoio incondicional, pelo exemplo de vida, por serem o suporte da minha vida e a quem devo tudo o que sou. A vocês, minha imensa gratidão e amor.

Ao Felipe, por todo amor e carinho dedicado, pelo incentivo imensurável e por acreditar mais em mim do que eu mesma. Obrigada por ter iluminado minha vida ao longo deste último ano.

Ao meu orientador, professor Paulo Cesar Rech, pelos valiosos ensinamentos, pelo incentivo e pela paciência, orientando-me não somente durante este trabalho de mestrado, mas também durante minha iniciação científica. Minha especial admiração e gratidão.

A todos os professores que de forma direta ou indireta participaram da minha formação, de modo especial ao professor Holokx Abreu Alburquerque e aos integrantes do Grupo de Dinâmica Não Linear.

A todos os meus amigos e colegas de mestrado, em especial ao Marcos, Julio, José Carlos e Amilson, pelos conselhos, ajuda e bom humor, principalmente nos momentos mais difíceis.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

CASAS, Gabriela Aline. **Efeitos Causados pela Modulação de Parâmetros no Mapa de Hénon**. 2011. 62f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2011.

O mapa de Hénon é um sistema dinâmico bidimensional a tempo discreto, originalmente proposto como um modelo para a seção de Poincaré do sistema de Lorenz a tempo contínuo, e tem sido extensivamente investigado nos últimos anos. Além da sua grande importância teórica, algumas aplicações práticas são possíveis. Como por exemplo, pode ser usado para modelar lasers de  $\text{CO}_2$  no limite de forte dissipação. O mapa de Hénon é caracterizado por dois parâmetros, o de não linearidade e o de dissipação. Neste trabalho nós consideramos a situação onde estes dois parâmetros do mapa de Hénon são linearmente modulados pela solução de outro mapa de Hénon, cujos parâmetros são constantes no tempo, mas que podem ser ajustados. Investigamos modulações periódicas e caóticas do primeiro mapa de Hénon devido ao segundo, e mostramos que este método pode destruir ou criar atratores no espaço de fases, bem como produzir mudanças na localização dos pontos onde ocorrem as bifurcações. Mais especificamente, a modulação permite controlar a multiestabilidade (biestabilidade, nos casos considerados) presente no mapa de Hénon, conduzindo o sistema a monoestabilidade. Por fim, investigamos a dinâmica do mapa de Hénon quando seus parâmetros são modulados por um outro mapa de Hénon em um regime próximo ao limite conservativo e em um regime de alta dissipação. Expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação, bacias de atração, diagramas do espaço de parâmetros e do espaço de fases são utilizados para caracterizar a dinâmica do sistema modulado.

**Palavras-chave:** Mapa de Hénon. Modulação de Parâmetros. Multiestabilidade.

## ABSTRACT

CASAS, Gabriela Aline. **Effects Caused by the Parameters Modulation in the Hénon Map.** 2011. 62f. Dissertation (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2011.

The Hénon map is a paradigmatic two-dimensional discrete-time dynamical system, which was originally proposed as a model to the Poincaré section of the continuous-time Lorenz system, and has been extensively investigated in the last years. Apart from its theoretical importance, some practical applications are possible. As an example, it can be used to model CO<sub>2</sub> lasers in the limit of strong dissipation. The Hénon map is characterized by two parameters, namely the nonlinearity and the dissipativity. In this work we consider a situation where these two parameters of one Hénon map are linearly modulated by the solution of another Hénon map whose parameters are constants in time, but which can be adjusted. We investigate periodic and chaotic modulations of the first Hénon map, due to the second, and show that method is able to destroy or create attractors in the phase-space. More specifically, the modulation is able to control the multistability (bistability in the considered case) present in the Hénon map, leading the system to monostability. Finally, we investigate the dynamics of the Hénon map when its parameters are modulated by another Hénon map in a regime close to the conservative limit and in a regime close to the dissipative limit. Lyapunov exponents, bifurcation diagrams, basins of attraction, parameter space and phase-space diagrams are used to characterize the dynamics of the modulated system.

**Key words:** Hénon Map. Parameters Modulation. Multistability.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	O Mapa de Hénon . . . . .	9
1.2	O Mapa de Hénon Modulado . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Estudo Geral</b>	<b>17</b>
2.1	Resultados Analíticos . . . . .	17
2.2	Diagramas de Bifurcação e Espaço de Parâmetros . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Multiestabilidade</b>	<b>31</b>
3.1	Região de Períodos 1 e 3 . . . . .	33
3.2	Região de Períodos 2 e 6 . . . . .	35
3.3	Região de Período 3 e Caos . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Modulação usando um mapa de Hénon altamente dissipativo</b>	<b>39</b>
4.1	Parâmetro $f$ fixo em $0, 2$ . . . . .	40
4.2	Parâmetro $f$ fixo em $-0, 2$ . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Modulação usando um mapa de Hénon perto do limite conservativo</b>	<b>49</b>
5.1	Parâmetro $f$ fixo em $0, 2$ . . . . .	50
5.2	Parâmetro $f$ fixo em $-0, 2$ . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>58</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O mapa de Hénon [1] é um sistema discreto bidimensional que foi originalmente proposto como um modelo para descrever a seção de Poincaré do sistema a tempo contínuo de Lorenz [2], e tem sido extensivamente investigado nos últimos anos. Neste capítulo faremos uma breve discussão a respeito da importância do estudo do mapa de Hénon e suas possíveis aplicações. Apresentaremos também o sistema que será nosso objeto de estudo neste trabalho, onde ambos os parâmetros do mapa de Hénon são linearmente modulados pela solução de outro mapa de Hénon, cujos parâmetros são constantes no tempo mas podem ser ajustados.

### 1.1 O Mapa de Hénon

O estudo da dinâmica não-linear [3] teve início com os trabalhos do matemático francês Henri Poincaré, por volta de 1880, motivado pelo estudo de órbitas de três corpos celestes (por exemplo, dois planetas e uma estrela) experimentando atrações gravitacionais mútuas. O problema de dois corpos é relativamente simples e foi resolvido completamente por Newton, sendo que cada corpo descreve uma trajetória elíptica em torno do centro de massa do sistema. No entanto, simplesmente adicionando mais um corpo ao sistema, o problema torna-se extremamente complicado. Analisando este problema, Poincaré mostrou que o comportamento dessas órbitas (agora ditas caóticas) era irregular e essencialmente imprevisível, pois quaisquer duas órbitas com condições iniciais arbitrariamente próximas resultavam, no futuro, em órbitas muito diferentes.

Embora a existência da dinâmica caótica seja conhecida há algum tempo, sua impor-

tância para uma variedade de aplicações começou a ser amplamente apreciada somente nas últimas décadas. Um dos principais fatores que contribuíram para este crescimento foi o grande desenvolvimento tecnológico, possibilitando obter soluções numéricas destes sistemas muito mais rapidamente. Deste modo, o caráter caótico de diversos sistemas de interesse prático ficou claro, sendo atualmente observado nas mais diversas áreas, como por exemplo: ecologia [4], economia [5], química [6], engenharias [7], etc.

Entende-se por sistema dinâmico um conjunto de estados possíveis, juntamente com uma regra que determina o estado atual em termos dos estados passados [8]. O tempo em um sistema dinâmico pode ter uma variação contínua, ou então assumir somente valores discretos inteiros. Frequentemente é útil reduzir um sistema de tempo contínuo (também chamado de fluxo) a um mapa, a tempo discreto, através de uma seção de Poincaré. Usando uma seção de Poincaré podemos reduzir significativamente a quantidade de trabalho numérico exigido na investigação de um sistema contínuo de dimensão  $N$ , investigando o respectivo mapa discreto de dimensão  $N - 1$ . Uma seção de Poincaré de um fluxo tridimensional  $(x_1, x_2, x_3)$ , por exemplo, pode ser construída plotando o par  $(x_1, x_2)$  toda vez que o fluxo “fura” a superfície  $S$  de cima para baixo, como mostrado na Fig. 1.1, extraída da Ref.[8].

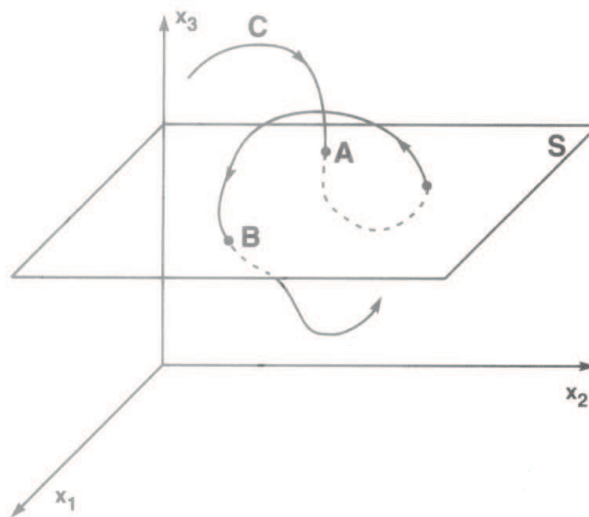


Figura 1.1: Seção de Poincaré. Figura extraída da Ref. [8].

Mapas são em geral mais simples para se analisar que os sistemas de equações diferen-

ciais que lhes deram origem, e um exemplo disto é o mapa de Hénon [1]. O mapa de Hénon, foi proposto em 1976 pelo astrônomo francês Michel Hénon como um modelo para a seção de Poincaré do sistema de Lorenz [2], que é governado por três equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem.

O mapa de Hénon é definido pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + by_t, \\y_{t+1} &= x_t,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde  $a$  é o parâmetro de não-linearidade,  $b$  o parâmetro de dissipação do sistema,  $x_t$  e  $y_t$  são as variáveis dinâmicas, e  $t = 0, 1, 2, \dots$  é o tempo discreto. É um dos exemplos mais estudados de sistemas dinâmicos pois, apesar de ser descrito por um conjunto de equações bastante simples, o mapa de Hénon apresenta uma dinâmica extremamente rica. Por exemplo, para os valores dos parâmetros  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ , que são os valores utilizados por M. Hénon em seu trabalho, o mapa apresenta um comportamento caótico. No entanto, para outros conjuntos de valores de parâmetros, o mapa de Hénon pode convergir para uma órbita periódica, caótica ou mesmo divergir. Um exemplo de atrator caótico do mapa de Hénon é mostrado na Fig. 1.2. Este atrator foi construído para um mapa de Hénon com parâmetros  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ , que são os parâmetros que foram utilizados originalmente por M. Hénon, sendo plotados mil pontos após ser descartado um transiente de quinhentos mil pontos. Dizemos que o mapa de Hénon é caótico no sentido que as sequências de pontos obtidos para ele serão diferentes dependendo das condições iniciais. Esta dependência sensível nas condições iniciais é a principal característica de um sistema caótico. Podemos dizer que é a “assinatura do caos”. Assim, em um sistema caótico duas trajetórias inicialmente vizinhas no espaço de fase separam-se a medida que o sistema evolui no tempo, como esquematizado na Fig. 1.3, retirada da Ref. [3]. Essa dependência resulta das não-linearidades presentes no sistema, as quais amplificam exponencialmente pequenas diferenças presentes nas condições iniciais. Um modo de medir a sensibilidade do sistema às condições iniciais é através do denominado expoente de Lyapunov. O expoente de Lyapunov é um coeficiente de tempo que reflete a razão de afastamento de duas órbitas dinâmicas, sendo portanto um indicador de caos. Para sistemas  $N$ -dimensionais, temos  $N$  expoentes de Lyapunov, cada um associado a cada uma das  $N$  direções linearmente independentes. De

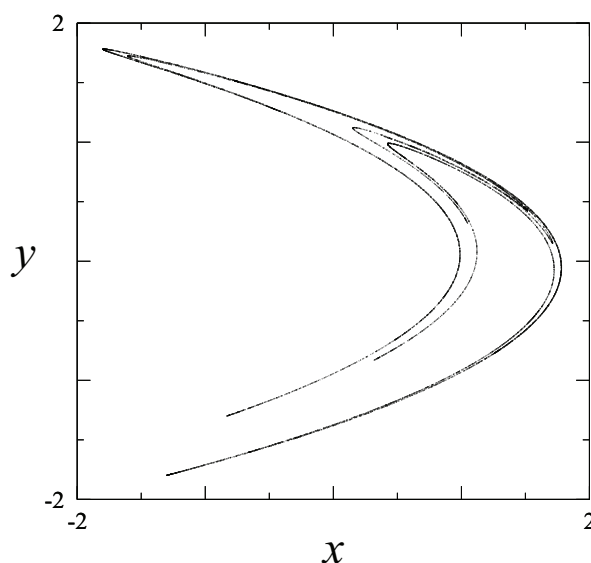


Figura 1.2: Atrator caótico para o mapa de Hénon com  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ .

interesse para caracterizar os tipos de movimentos presentes é o maior expoente. O movimento é dito periódico se o expoente é negativo, quase-periódico em consequência de uma bifurcação de Naimark-Sacker quando o expoente permanece no zero, e o movimento caótico ocorre se o expoente é positivo. O expoente de Lyapunov vai a zero nos pontos em que acontecem as bifurcações.

Nos interessa aqui o estudo do mapa de Hénon na região em que ele é dissipativo, ou seja, região na qual um volume no espaço de fases não é preservado. Como é bem sabido, um sistema dissipativo satisfaz a relação  $|\det J| < 1$ , onde  $J$  é a matriz Jacobiana do sistema [9]. Estabelecemos esta restrição uma vez que, o sistema ser dissipativo é a condição necessária para a existência de atratores. Atratores são um conjunto invariante de pontos para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo.

Para o mapa de Hénon, a matriz Jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -2x_t & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ou seja, possui uma determinante que independe das variáveis dinâmicas  $x_t$  e  $y_t$ , sendo igual a  $-b$ . Assim, o mapa de Hénon é dissipativo no intervalo  $-1 < b < 1$ .

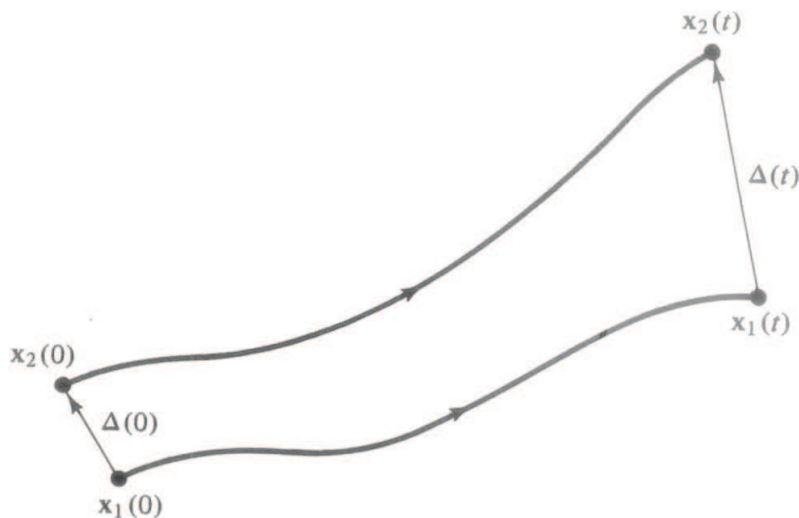


Figura 1.3: Separação das órbitas geradas por diferentes condições iniciais. Figura retirada da Ref. [3].

O estudo do mapa de Hénon também é de grande importância por ele ser um dos sistemas mais simples a permitir a coexistência de atratores, deste modo, os resultados obtidos para o mapa de Hénon podem ser generalizados para outros sistemas mais complexos. A esta coexistência de vários estados de equilíbrio dinâmico para um mesmo conjunto de parâmetros damos o nome de multiestabilidade. Sistemas multiestáveis são extremamente sensíveis a qualquer perturbação, e o estado final alcançado depende crucialmente das condições iniciais [10]. Muitos sistemas dinâmicos dissipativos apresentam multiestabilidade, sendo o fenômeno observado em diversos campos, como por exemplo, na ótica [11], na biologia [12] e em reações químicas [13].

Além da importância teórica do mapa de Hénon, que tem sido amplamente investigado nos últimos anos, algumas aplicações práticas são possíveis. Um exemplo da aplicação direta do mapa de Hénon a algum sistema físico particular é o fato de ser útil na modelagem de lasers de  $\text{CO}_2$  no limite de forte dissipação [14]. Outro exemplo envolve segurança na comunicação digital caótica [15], onde mapas de Hénon são usados para demonstrar a validade do método.

## 1.2 O Mapa de Hénon Modulado

Sistemas caóticos são usualmente caracterizados por um ou mais parâmetros que controlam o comportamento do sistema e que dão origem a bifurcações e outras mudanças na

dinâmica. Em muitos desses estudos, estes parâmetros são mantidos constantes, ou podem assumir somente um conjunto de valores imutáveis. No entanto, em sistemas físicos reais, os parâmetros que governam a dinâmica do sistema frequentemente variam no tempo. Tais casos têm sido pouco estudados.

Na Ref. [16], o efeito da utilização da saída de um mapa logístico para modular o parâmetro de um outro mapa logístico é investigado. A equação logística é um mapa unidimensional dado por

$$y_{t+1} = dy_t(1 - y_t), \quad (1.3)$$

tendo sido originalmente proposto para modelar o crescimento de populações. Nela a variável  $y_t$  representa uma fração da máxima população que o ambiente pode acomodar,  $d$  é um parâmetro, e  $t = 0, 1, 2, \dots$  é o tempo discreto. Na Ref. [16] o parâmetro  $d$  é considerado como sendo dado por

$$d = b + cx_t, \quad (1.4)$$

onde  $b$  e  $c$  são parâmetros constantes,  $x_t$  é a solução de outro mapa logístico, dado por

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t), \quad (1.5)$$

onde  $0 \leq a \leq 4$ . O resultado da utilização da perturbação (1.4) na Eq. (1.3) é o sistema bidimensional

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= ax_t(1 - x_t), \\ y_{t+1} &= (b + cx_t)y_t(1 - y_t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

cuja dinâmica é investigada na Ref. [16].

Para o mapa de Hénon, são poucos os estudos [17, 18, 19] nos quais os parâmetros  $a$  e  $b$  (ou pelo menos um deles) são modulados de alguma forma especial. Por exemplo, nas Refs. [17, 18] estuda-se a influência de uma modulação paramétrica senoidal no parâmetro  $a$ , nas posições de algumas bifurcações, em um mapa de Hénon trabalhando em um regime de baixa dissipação, com  $b = 0,9$ . É mostrado que, dependendo da modulação, a região de período 3 pode ser expandida, retraída, ou até mesmo suprimida. Na Ref. [19] os autores mostram que modulação paramétrica em sistemas dinâmicos não lineares pode fazer aparecer atratores cuja

dinâmica é não periódica e não caótica, ou seja, o maior expoente de Lyapunov associado é negativo apesar da órbita ser não periódica. Um mapa de Hénon trabalhando em um regime de alta dissipação,  $b = 0,3$ , com modulação aleatória, é usado para exemplificar o método. Em nosso estudo, utilizamos soluções de um mapa de Hénon para perturbar os parâmetros de outro mapa de Hénon. O resultado é um mapa discreto quadridimensional, como veremos na sequência.

Consideramos um mapa de Hénon dado por

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= c - z_t^2 + d w_t, \\ w_{t+1} &= z_t, \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $z$  e  $w$  são as variáveis dinâmicas,  $c$  e  $d$  são os parâmetros e  $t = 0, 1, 2, \dots$  é o tempo discreto. Modulamos ambos parâmetros  $c$  e  $d$  da seguinte forma

$$c = e + f x_t, \quad d = e + f y_t, \quad (1.8)$$

onde  $e, f$  são parâmetros constantes, e  $x_t, y_t$  são a solução de outro mapa de Hénon dado por

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= a - x_t^2 + b y_t, \\ y_{t+1} &= x_t, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $-1 < b < 1$ . O resultado da utilização da modulação (1.8) na Eq. (1.7) é o seguinte sistema quadridimensional

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= a - x_t^2 + b y_t, \\ y_{t+1} &= x_t, \\ z_{t+1} &= (e + f x_t) - z_t^2 + (e + f y_t) w_t, \\ w_{t+1} &= z_t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Observe que o sistema (1.10) pode ser pensando como sendo uma combinação de dois mapas bidimensionais. Podemos ver ainda que o mapa de Hénon não perturbado, definido pelas duas primeiras equações de (1.10), não depende do mapa de Hénon perturbado, definido pelas duas últimas equações de (1.10). Em outras palavras, temos em (1.10) um acoplamento unidirecional de dois mapas de Hénon, ou seja, um sistema mestre-escravo. Sistemas tais como este

mostrado na Eq. (1.10) aparentemente não tem aplicação direta a um sistema físico particular, mas podem servir para exemplificar tipos de comportamentos dinâmicos, tais como rotas para o caos por exemplo, que são comuns em sistemas físicos caóticos. Vale a pena, portanto, investigar comportamentos dinâmicos no sistema (1.10). Para este fim, esta dissertação encontra-se organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentamos uma visão geral do que acontece com as órbitas do mapa de Hénon por conta da modulação dos parâmetros. Para isto, fazemos uso de alguns resultados analíticos obtidos, além de diagramas de bifurcações, expoentes de Lyapunov e gráficos de espaço de parâmetros. O estudo a respeito da multiestabilidade no mapa de Hénon modulado é feito no Capítulo 3. Neste capítulo investigamos numericamente as modificações nas bacias de atração de estados coexistentes no mapa de Hénon, em virtude da modulação de parâmetros por outro mapa de Hénon. Nos Capítulos 4 e 5 analisamos o comportamento do mapa de Hénon quando ambos os parâmetros são perturbados por um outro mapa de Hénon trabalhando em um regime próximo aos limites dissipativo e conservativo, respectivamente. Por fim, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões gerais do nosso trabalho.



# Capítulo 2

## Estudo Geral

Neste capítulo apresentaremos uma visão geral do que acontece com as órbitas do mapa de Hénon quando perturbamos este por um outro mapa de Hénon trabalhando em regimes de pontos fixos, de pontos periódicos, ou mesmos caóticos. Para isso, primeiramente apresentamos alguns resultados analíticos, e algumas conclusões interessantes que obtemos por meio deles. Por fim, temos uma visão geral do que acontece com o mapa de Hénon modulado através da análise de diagramas de bifurcações, de expoentes de Lyapunov e de espaço de parâmetros.

### 2.1 Resultados Analíticos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados analíticos obtidos para o mapa de Hénon com parâmetros modulados (1.10). No entanto, primeiramente faremos um breve estudo a respeito das órbitas de período 1 e de período 2 para o mapa de Hénon dado por

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + b y_t, \\ y_{t+1} &= x_t.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Para obtermos os pontos fixos, pontos de período 1, para o sistema (2.1) fazemos  $x_{t+1} = x_t = x$  e  $y_{t+1} = y_t = y$ , ou seja, resolvemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}a - x^2 + by - x &= 0, \\ x - y &= 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Assim, obtemos os seguintes pontos fixos para o mapa de Hénon:

$$P_1 = \left( \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2}, \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2} \right), \quad (2.3)$$

e

$$P_2 = \left( \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2}, \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2} \right). \quad (2.4)$$

Como os pontos  $P_1$  e  $P_2$  devem ser reais, só existem pontos fixos para o mapa de Hénon se  $4a \geq -(1-b)^2$ . Da mesma forma, podemos obter os pontos da órbita de período 2 fazendo  $x_{t+2} = x_t = x$  e  $y_{t+2} = y_t = y$ . Temos assim, o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} x &= a - (a - x^2 + by)^2 + bx, \\ y &= a - x^2 + by, \end{aligned} \quad (2.5)$$

cujas soluções são os dois pontos fixos  $P_1$  e  $P_2$ , e os dois pontos da órbita de período 2:

$$P_3 = \left( \frac{-(1-b) + \sqrt{-3(1-b)^2 + 4a}}{2}, \frac{-(1-b) - \sqrt{-3(1-b)^2 + 4a}}{2} \right), \quad (2.6)$$

e

$$P_4 = \left( \frac{-(1-b) - \sqrt{-3(1-b)^2 + 4a}}{2}, \frac{-(1-b) + \sqrt{-3(1-b)^2 + 4a}}{2} \right). \quad (2.7)$$

Novamente, como os pontos da órbita do mapa de Hénon devem ser reais, a órbita  $(\dots P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_3 \dots)$  de período 2 existe somente se  $4a \geq 3(1-b)^2$ .

Iremos analisar agora os efeitos da modulação dos parâmetros no mapa de Hénon sobre essas órbitas. Para isso, consideramos o acoplamento de dois mapas de Hénon

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= a - x_t^2 + b y_t, \\ y_{t+1} &= x_t, \\ z_{t+1} &= (e + f x_t) - z_t^2 + (e + f y_t) w_t, \\ w_{t+1} &= z_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Uma vez que o mapa de Hénon definido pelas duas primeiras equações de (2.8) independe do mapa de Hénon modulado definido pelas duas últimas equações de (2.8), iremos analisar agora o caso em que o primeiro encontra-se em um dos dois pontos fixos anteriormente calculados,  $P_1$  e

$P_2$ . Em outras palavras, consideraremos o caso em que os parâmetros de um mapa de Hénon são perturbados por um outro mapa de Hénon em um ponto fixo. Temos portanto uma modulação por período 1. Calculamos os pontos fixos para o mapa de Hénon modulado definido pelas duas últimas equações de (2.8) da mesma forma que para o mapa de Hénon, ou seja, fazendo  $z_{t+1} = z_t = z$  e  $w_{t+1} = w_t = w$ :

$$\begin{aligned} z &= (e + fx_t) - z^2 + (e + fy_t)w, \\ w &= z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como solução para este sistema, obtemos as seguintes equações para os pontos fixos do mapa de Hénon modulado

$$\begin{aligned} z &= \frac{e + fy_t - 1 \pm \sqrt{e^2 + 2efy_t + 2e + f^2y_t^2 - 2fy_t + 1 + 4fx_t}}{2} \\ w &= z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como podemos observar, as órbitas de período 1 para o mapa modulado dependem dos parâmetros  $e$ , e  $f$ , das variáveis  $x_t$  e  $y_t$ , e implicitamente dos parâmetros  $a$  e  $b$ , uma vez que as variáveis  $x_t$  e  $y_t$  dependem destes parâmetros. Agora, usando a condição de que o mapa de Hénon encontra-se em um dos pontos fixos, primeiramente no ponto  $P_1$ , e substituindo os valores de  $x_t$  e  $y_t$  na equação (2.10), obtemos como pontos fixos para o mapa de Hénon modulado

$$P_1^{M1} = (-1, -1), \quad (2.11)$$

$$P_2^{M1} = \left( e + \frac{f(b-1 + \sqrt{-(1-b)^2 + 4a})}{2}, e + \frac{f(b-1 + \sqrt{-(1-b)^2 + 4a})}{2} \right) \quad (2.12)$$

Quando o mapa de Hénon encontra-se no ponto fixo  $P_2$ , obtemos para o mapa de Hénon modulado os seguintes pontos fixos

$$P_1^{M2} = (-1, -1) \quad (2.13)$$

$$P_2^{M2} = \left( e + \frac{f(b-1 - \sqrt{-(1-b)^2 + 4a})}{2}, e + \frac{f(b-1 - \sqrt{-(1-b)^2 + 4a})}{2} \right) \quad (2.14)$$

Vemos que o ponto  $(z, w) = (-1, -1)$  é um ponto fixo para ambos os casos, e que a condição de existência destes pontos fixos é a mesma condição de existência dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , ou seja,

$$4a \geq -(1 - b)^2.$$

Vamos agora calcular os pontos da órbita de período 2 para o mapa modulado, para isso fazemos  $z_{t+2} = z_t = z$  e  $w_{t+2} = w_t = w$ , e obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} e + fx_t - (e + fx_t - z^2 + (e + fy_t)w)^2 + (e + fy_t)z - z &= 0, \\ e + fx_t - z^2 + (e + fy_t)w - w &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Resolvendo a segunda equação para  $w$ , e substituindo o resultado na primeira equação obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{e^2 - 3e + 2efy_t - fx_t + f^2y_t^2 - 2fy_t - z + ze + zfy_t + z^2 + 1}{(e + fy_t - 1)^2} \right) \\ \times (fx_t + e - z + ze + zfy_t - z^2) = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde o segundo termo refere-se aos pontos fixos anteriormente obtidos e o primeiro termo aos pontos da órbita de período 2. Assim, igualando o segundo termo da equação (2.16) a zero e resolvendo para  $z$ , encontramos como pontos da órbita de período 2 para o mapa de Hénon modulado

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-e - fy_t + 1 \pm \sqrt{-3e^2 - 6efy_t + 10e - 3f^2y_t^2 + 6fy_t - 3 + 4fx_t}}{2}, \\ w_{1,2} &= \frac{-e - fy_t + 1 \mp \sqrt{-3e^2 - 6efy_t + 10e - 3f^2y_t^2 + 6fy_t - 3 + 4fx_t}}{2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim como acontece com os pontos fixos, os pontos da órbita de período 2 para o mapa modulado também dependem dos parâmetros  $e$ , e  $f$ , das variáveis  $x_t$  e  $y_t$ , e implicitamente dos parâmetros  $a$  e  $b$ . Poderíamos da mesma forma usar a condição de que o mapa de Hénon encontra-se em um dos pontos fixos,  $P_1$  ou  $P_2$ , e substituir os valores de  $x_t$  e  $y_t$  na equação (2.17), no entanto, as expressões obtidas para os pontos da órbita de período 2 neste caso são expressões grandes que envolvem todos os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$ , tornando difícil obter conclusões a respeito desta órbita. No entanto, o que é realmente interessante observar aqui é a existência de órbitas de período 2, e até mesmo de períodos maiores para o mapa de Hénon modulado, mesmo quando modulamos este com um mapa de Hénon trabalhando em um regime de ponto fixo. Para isto, basta uma adequada escolha dos valores para os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$ . Na seção seguinte apresentaremos alguns resultados numéricos envolvendo o estudo dessas órbitas através de diagramas de espaço de parâmetros, diagramas de bifurcação e do maior expoente de Lyapunov.

## 2.2 Diagramas de Bifurcação e Espaço de Parâmetros

Alguns diagramas interessantes para a análise do sistema são os diagramas de bifurcação e de espaço de parâmetros. O termo “bifurcação” refere-se a uma mudança significativa no conjunto de pontos fixos ou periódicos ou outro conjunto de interesse dinâmico [8]. Em um diagrama de bifurcação de um sistema dinâmico, por exemplo  $x_{t+1} = f_\lambda(x_t)$  onde  $\lambda$  representa um ou vários parâmetros, é plotada uma componente,  $x_t$ , como função de um dos parâmetros,  $\lambda$ . Nele são apresentados os pontos para os quais o sistema converge após um tempo suficientemente longo, podendo ser pontos fixos, órbitas periódicas ou algum outro conjunto atrativo. Portanto, diagramas de bifurcação mostram o nascimento, evolução e morte desses conjuntos de pontos para o qual o sistema é atraído como função de um dos parâmetros do sistema.

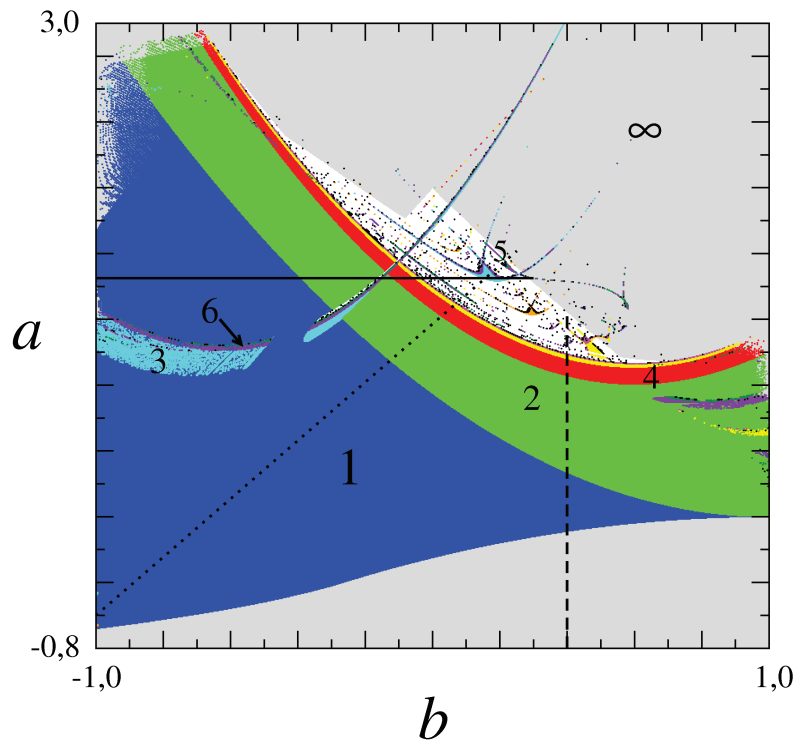


Figura 2.1: Espaço de parâmetros do mapa de Hénon (1.1). Os domínios dos diferentes atratores estão identificados por diferentes cores. Os números indicam os períodos.

Embora diagramas de bifurcação sejam plotagens de uma das variáveis, a informação realmente interessante neles é o número de diferentes ramos que aparecem como uma função de  $\lambda$  ou, em outras palavras, as diferentes periodicidades do sistema. Usando diferentes símbolos, como diferentes cores e sombreamentos, para representar os diferentes períodos, a informação

contida no eixo  $x_t$  pode ser compactada em uma única linha. Ou seja, podemos compactar toda informação contida em um diagrama de bifurcação em 2D em uma única linha policromática. Fazendo isto, podemos estudar o comportamento de um sistema variando não apenas um, mas dois ou mais parâmetros. Temos assim, um espaço de parâmetros.

A Fig. 2.1 mostra um diagrama de espaço de parâmetros bidimensional construído para o mapa de Hénon (1.1). Para a construção deste e dos demais diagramas de espaço de parâmetros que serão apresentados na sequência, discretizamos o intervalo de parâmetros  $-0,8 \leq a \leq 3,0$  e  $-1 \leq b \leq 1$  em uma malha de  $750 \times 750$  pontos igualmente espaçados. O comportamento dinâmico de cada um dos 562500 pontos da malha foi determinado sempre a partir do mesmo conjunto de condições iniciais, no caso  $(x_0, y_0) = (0,001, 0,05)$ , após um transiente de  $5 \times 10^4$  iteradas. A divergência foi diagnosticada após tentarmos quinhentas novas inicializações, sempre que o sistema convergisse para o atrator do infinito ( $x_t$  maior do que  $10^3$ ) com a inicialização  $(x_0, y_0)$  acima. Todos os períodos até 50 foram determinados e estão representados na Fig. 2.1 por diferentes cores. Períodos maiores do que 50 foram considerados “caos”, região branca na Fig. 2.1. Os atratores do infinito estão representados pela cor cinza na Fig. 2.1, e algumas regiões de diferentes periodicidades estão identificadas por números inteiros que denotam o período da região. Todas as outras regiões periódicas não identificadas por números, de período menor do que 50, foram consideradas e pintadas de preto.

Na Fig. 2.1 a região branca indica que os parâmetros conduzem o sistema exclusivamente para um movimento caótico, e podemos ver claramente uma cascata de bifurcações por duplicação de período do tipo  $1 \times 2^n$ . Este processo continua até o caos ser encontrado. Assim podemos concluir que o mapa de Hénon apresenta uma rota para o caos via duplicação de período. Também na região branca, podemos ver algumas regiões periódicas mergulhadas, como a região de período 5 claramente visível na Fig. 2.1, além de outras não tão visíveis na escala utilizada. Estas estruturas periódicas mergulhadas na região de caos são conhecidas na literatura como “camarões” [20].

O espaço de parâmetros para o mapa de Hénon na Fig. 2.1 apresenta também uma cascata de bifurcações do tipo  $3 \times 2^n$ . Nesta região o mapa de Hénon é multiestável, ou seja, dependendo da condição inicial utilizada podemos obter uma órbita periódica decorrente da cascata de bifurcações do tipo  $1 \times 2^n$  ou decorrente da cascata do tipo  $3 \times 2^n$ , para o mesmo par de valores  $a$  e  $b$ . Obtivemos esta cascata de bifurcações no diagrama de espaço de parâmetros

da Fig. 2.1 estabelecendo que sempre que  $a \geq (7 + 10b + 7b^2)/4$ , o sistema seria inicializado em  $(x_0, y_0) = (-0,0982, -0,9261)$ , que é um ponto da órbita de período 3 para  $a = 1,2$  e  $b = -0,3$ . A curva  $a = (7 + 10b + 7b^2)/4$  é a curva de nascimento das órbitas de período 3.

Alguns diagramas de espaço de parâmetros para o mapa de Hénon modulado (1.10) estão representados na Fig. 2.2. Para as Figs. 2.2(a), 2.2(b) e 2.2(c) o parâmetro  $f$  é fixo em  $f = 0,2$  e os valores do parâmetro  $e$  crescem a partir de zero na Fig. 2.2(a), valendo 0,25 para a Fig. 2.2(b), e 0,5 para a Fig. 2.2(c). Já as Figs. 2.2(d), 2.2(e) e 2.2(f) foram construídas para  $f = -0,3$ , sendo  $e = 0,25$  na Fig. 2.2(d),  $e = 0,5$  na Fig. 2.2(e), e  $e = 0,75$  na Fig. 2.2(f). Da mesma forma que a Fig. 2.1, todos os diagramas da Fig. 2.2 foram obtidos discretizando os intervalos de parâmetros em uma malha de  $750 \times 750$  pontos e determinando o comportamento do sistema sempre a partir da mesma condição inicial  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0,001, 0,05, 0,1, 0,03)$ . Observando os diagramas da Fig. 2.2 vemos que, para  $f = 0,2$ , conforme o valor do parâmetro  $e$  cresce a partir do zero a região de período 1 vai diminuindo, enquanto a região de período 2 vai aumentando. Para  $e = 0,5$  e  $f = 0,2$ , que corresponde a Fig. 2.2(c), a região de período 1 desapareceu completamente em favor de outra, de período 2. O mesmo acontece também quando fixamos  $f = -0,3$ , onde a região de período 1 diminui, com o consequente crescimento da região de período 2, a medida que aumentamos o valor do parâmetro  $e$ , desaparecendo completamente para  $e = 0,75$ , na Fig. 2.2(f). Comportamento semelhante acontece com a região caótica, que aparece na cor branca nos diagramas da Fig. 2.2. Podemos ver que para ambos os casos,  $f = 0,2$  e  $f = -0,3$ , a região de caos é diminuída conforme aumentamos o valor do parâmetro  $e$ . Concluimos assim, que esta modulação de parâmetros atua no sentido de suprimir alguns comportamentos dinâmicos do sistema, em favor de outros.

As Figs. 2.3, 2.4 e 2.5 mostram diagramas de bifurcações e do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon e para o mapa de Hénon modulado. O expoente de Lyapunov é um coeficiente de tempo que reflete a razão de afastamento de duas órbitas dinâmicas, sendo uma medida de sensibilidade às condições iniciais, portanto, um indicador de caos. Como dito anteriormente, o movimento é considerado periódico se o maior expoente é negativo, quase-periódico, em consequência de uma bifurcação de Naimark-Sacker quando o expoente permanece no zero, e o movimento caótico ocorre se o maior expoente é positivo, indo a zero nos pontos em que ocorrem as bifurcações.

A Fig. 2.3(a) mostra o diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1),

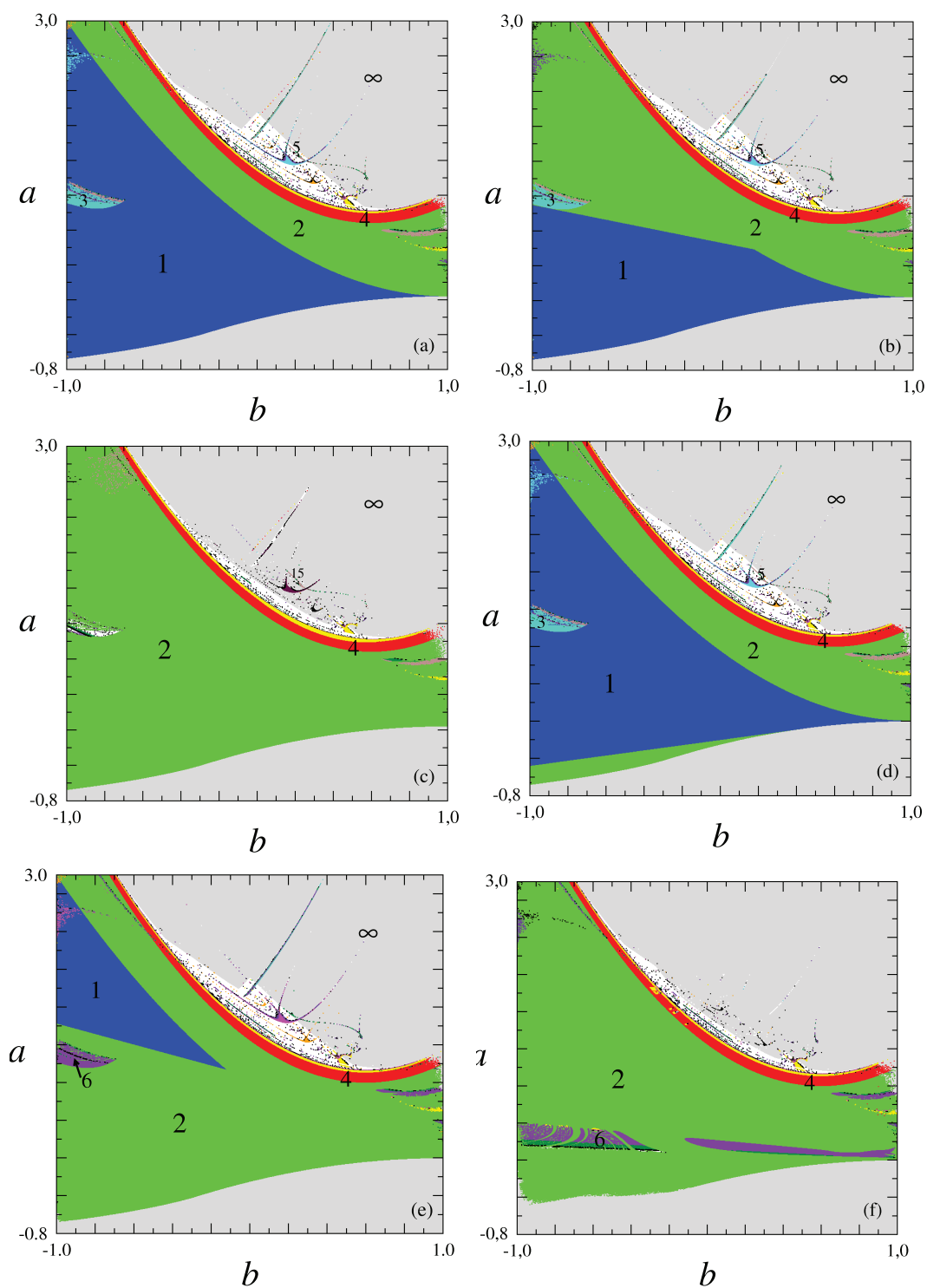


Figura 2.2: Domínios de estabilidade no espaço de parâmetros do sistema (1.10). (a)  $f = 0.2, e = 0$ ; (b)  $f = 0, 2, e = 0, 25$ ; (c)  $f = 0, 2, e = 0, 5$ ; (d)  $f = -0, 3, e = 0, 25$ ; (e)  $f = -0, 3, e = 0, 5$  e (f)  $f = -0, 3, e = 0, 75$ .



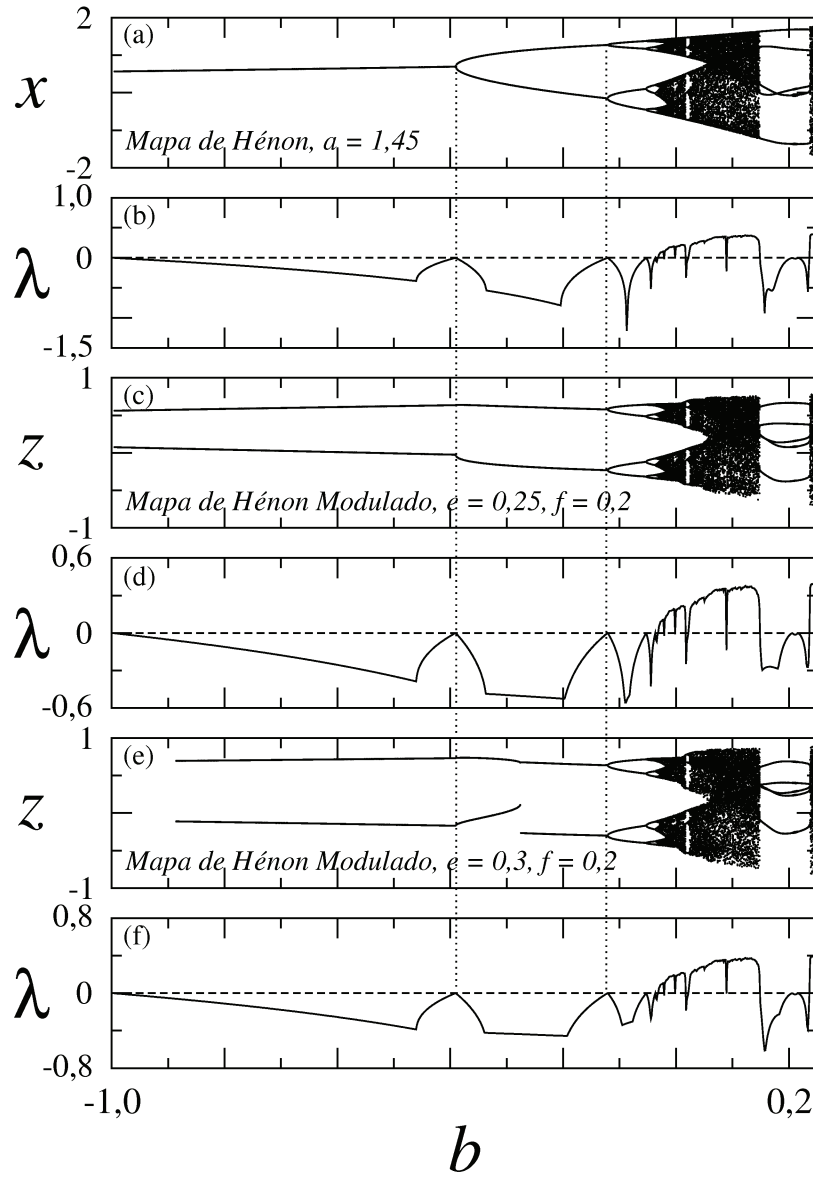


Figura 2.3: (a), (b) - Diagrama de bifurcação da variável  $x$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon (1.1), respectivamente, para  $a = 1,45$  e  $-1,0 \leq b \leq 0,3$ . (c), (d) - Diagrama de bifurcação da variável  $z$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10), respectivamente, para  $e = 0,25$  e  $f = 0,2$ . (e), (f) - Diagrama de bifurcação da variável  $z$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10), respectivamente, para  $e = 0,45$  e  $f = 0,2$ .

para  $a = 1,45$  e  $-1,0 \leq b \leq 0,3$ , esta que é a linha contínua na Fig. 2.1. A Fig. 2.3(b) mostra o correspondente diagrama do maior expoente de Lyapunov. As Figs. 2.3(c), 2.3(d), 2.3(e) e 2.3(f) apresentam os diagramas de bifurcação da variável  $z$  e do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10) para os mesmos valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , mas com  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$  nas Figs. 2.3(c) e 2.3(d), e  $e = 0,45$ ,  $f = 0,2$  nas Figs. 2.3(e) e 2.3(f), respectivamente. Se  $a = 1,45$  e  $-1,0 \leq b \leq -0,4$ , então as órbitas do mapa de Hénon são finalmente atraídas para um ponto fixo, após um rápido transiente, como pode ser visto nas Figs. 2.3(a) e 2.3(b). Por outro lado, se  $a = 1,45$ ,  $-1,0 \leq b \leq -0,4$ ,  $e = 0,25$  ou  $e = 0,45$ , e  $f = 0,2$ , então as órbitas do mapa de Hénon modulado convergem para um atrator de período 2, como é mostrado nas Figs. 2.3(c) e 2.3(e). Portanto, quando o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo, converge para uma órbita de período 2. O ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$  em  $b = -0,4$  no mapa de Hénon é suprimido no mapa de Hénon modulado e, conseqüentemente, a órbita do ponto fixo desaparece no intervalo  $-1,0 \leq b \leq -0,4$ . Em outras palavras, neste caso o processo de modulação destrói a órbita de período 1, com a conseqüente ampliação do ramo de período 2 no diagrama de bifurcação.

Agora mantemos  $b = 0,4$  fixo e variamos o parâmetro  $a$  no intervalo  $0 \leq a \leq 1,25$ , ou seja, ao caminhamos ao longo da linha tracejada na Fig. 2.1. O diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1) e o correspondente diagrama do maior expoente de Lyapunov são mostrados nas Figs. 2.4(a) e 2.4(b), respectivamente. Já para o mapa de Hénon modulado (1.10), os diagramas de bifurcação da variável  $z$  e os correspondentes diagramas do maior expoente de Lyapunov são mostrados respectivamente nas Figs. 2.4(c) e 2.4(d) para  $e = 0,3$ ,  $f = 0,2$ , e nas Figs. 2.4(e) e 2.4(f), para  $e = 0,5$ ,  $f = 0,2$ . Quando  $b = 0,4$ , o ponto em que ocorre a bifurcação  $1 \rightarrow 2$  para o mapa de Hénon está localizado próximo a  $a = 0,25$ , como pode ser visto nas Figs. 2.4(a) e 2.4(b). Se  $b = 0,4$ ,  $e = 0,3$ ,  $f = 0,2$ , então a bifurcação  $1 \rightarrow 2$  ocorre próximo ao ponto  $a = 0,125$  para o mapa de Hénon modulado, fenômeno que pode ser observado nas Figs. 2.4(c) e 2.4(d). Portanto, dependendo da modulação, o ramo de período 2 pode ser ampliado e o ramo de período 1 retraído. Em outras palavras, a modulação pode produzir uma mudança na localização do ponto em que ocorre a bifurcação  $1 \rightarrow 2$ . As Figs. 2.4(e) e 2.4(f) mostram novamente que quando o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo, ele converge para uma órbita de período 2. A bifurcação de uma órbita de período 1 para uma órbita de período 2, que para o mapa de Hénon

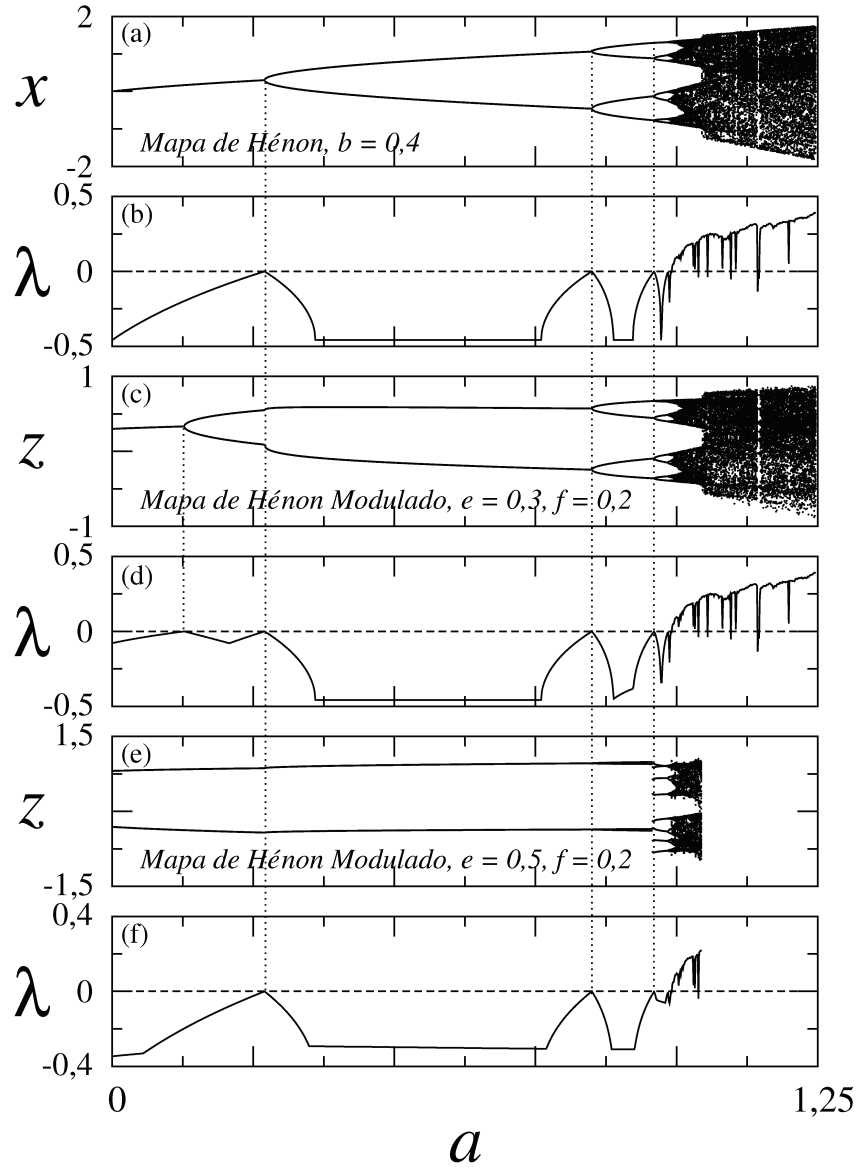


Figura 2.4: (a), (b) - Diagrama de bifurcação da variável  $x$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon (1.1), respectivamente, para  $b = 0,4$  e  $0 \leq a \leq 1,25$ . (c), (d) - Diagrama de bifurcação da variável  $z$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10), respectivamente, para  $e = 0,3$  e  $f = 0,2$ . (e), (f) - Diagrama de bifurcação da variável  $z$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10), respectivamente, para  $e = 0,5$  e  $f = 0,2$ .

acontecia próximo a  $a = 0,25$  na Fig. 2.4(a), deixa de existir, juntamente com a órbita de período 1 durante o intervalo  $0 \leq a \leq 0,25$ . Assim, desta vez uma mudança na localização do ponto da bifurcação  $1 \rightarrow 2$ , ou mesmo a supressão da órbita de período 1 pode ser obtida mediante a modulação.

Por fim, variamos simultaneamente ambos os parâmetros  $a$  e  $b$  ao longo da linha  $a = 1,78b + 1,17$ , linha pontilhada na Fig. 2.1. Na Fig. 2.5(a) temos o diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1) ao longo da linha  $a = 1,78b + 1,17$  com  $-1,0 \leq b \leq 0,2$ , e na Fig. 2.5(b) o correspondente diagrama do maior expoente de Lyapunov. Enquanto que as Figs. 2.5(c), 2.5(d), 2.5(e) e 2.5(f) apresentam os diagramas de bifurcação da variável  $z$  e do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10) para os os mesmos valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  com  $e = 0,25$ ,  $f = -0,3$  nas Figs. 2.5(c) e 2.5(d), e  $e = 0,75$ ,  $f = -0,3$  nas Figs. 2.5(e) e 2.5(f), respectivamente. Ao caminharmos ao longo da linha  $a = 1,78b + 1,17$ , no intervalo  $-1,0 \leq b \leq -0,125$ , o mapa de Hénon é atraído para um ponto fixo, como pode ser visto nas Figs. 2.5(a) e 2.5(b). Por outro lado, se  $a = 1,78b + 1,17$  e  $-1,0 \leq b \leq -0,125$ ,  $e = 0,25$ ,  $f = -0,3$ , o mapa de Hénon modulado converge para um atrator de período 2 no intervalo  $-1,0 \leq b \leq -0,91$ , e para um ponto fixo no intervalo  $-0,91 \leq b \leq -0,125$ , como pode ser visto nas Figs. 2.5(c) e 2.5(d). Neste caso não houve uma mudança na localização do ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$ , que continua a ocorrer próximo a  $b = -0,125$ . No entanto, surge uma nova bifurcação, agora de uma órbita de período 2 para um ponto fixo, que ocorre nas proximidades do ponto  $a = -0,91$ . Já nas Figs. 2.5(e) e 2.5(f) podemos observar que, para  $a = 1,78b + 1,17$ ,  $-1,0 \leq b \leq -0,125$ ,  $e = 0,75$ ,  $f = -0,3$ , o mapa de Hénon modulado é finalmente atraído para uma órbita de período 2. Portanto, temos novamente o caso em que o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo e passa a oscilar em uma órbita de período 2. O ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$  em  $b = -0,125$  no mapa de Hénon é suprimido no mapa de Hénon modulado e, conseqüentemente, o ponto fixo desaparece no intervalo  $-1,0 \leq b \leq -0,125$ . Em outras palavras, neste caso o processo de modulação de parâmetros no mapa de Hénon destrói a órbita de período 1, com uma conseqüente ampliação do ramo de período 2 no diagrama de bifurcação da Fig. 2.5(e).

Em todos os diagramas das Figs. 2.3, 2.4 e 2.5, os intervalos de parâmetros foram discretizados em  $10^3$  pontos igualmente espaçados. Para cada valor do parâmetro foi descartado um transiente de  $5 \times 10^4$  pontos. A condição inicial utilizada para os diagramas da Fig. 2.3 foi

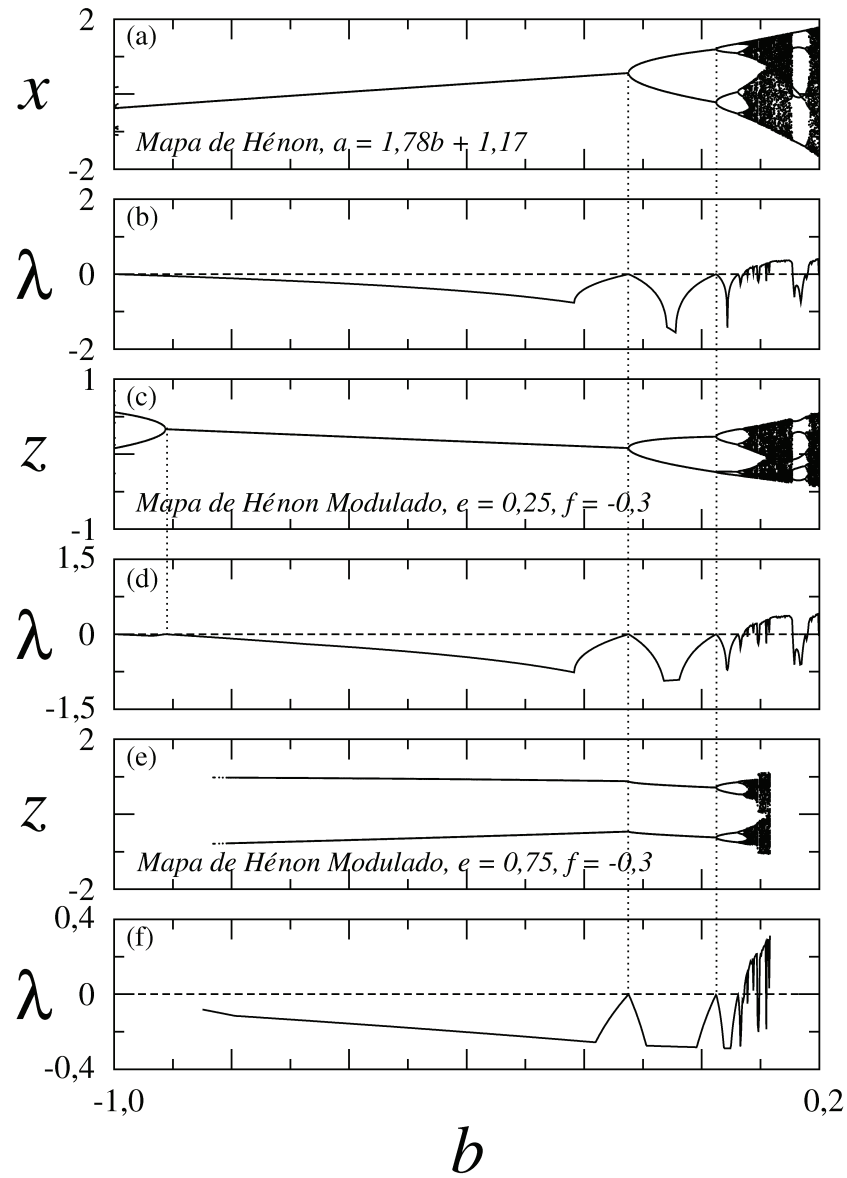


Figura 2.5: (a), (b) - Diagrama de bifurcação da variável  $x$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon (1.1), respectivamente, ao longo da linha  $a = 1.78b + 1.17$  com  $-1.0 \leq b \leq 0.2$  (c), (d) - Diagrama de bifurcação da variável  $z$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10), respectivamente, para  $e = 0.25$  e  $f = -0.3$ . (e), (f) - Diagrama de bifurcação da variável  $z$ , e diagrama do maior expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon modulado (1.10), respectivamente, para  $e = 0.75$  e  $f = -0.3$ .

$(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 48, 0, 53, 0, 48, 0, 53)$ , enquanto que para os diagramas das Figs. 2.4 e 2.5 utilizamos como condição inicial o ponto  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 001, 0, 05, 0, 001, 0, 05)$ . Em todos os diagramas de bifurcações 80 pontos foram considerados no gráfico, para cada valor do parâmetro, e a média envolvida no cálculo computacional do maior expoente de Lyapunov foi feita com  $10^6$  iteradas.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que os efeitos anteriormente relatados, e retratados nas Figs. 2.2 a 2.5, obtidos via uma adequada modulação dos parâmetros de um mapa de Hénon por um segundo mapa de Hénon, podem ser obtidos não somente para as órbitas de período 1 e de período 2, dependendo dos valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $e$ , e  $f$  escolhidos.

## Capítulo 3

# Multiestabilidade

Multiestabilidade é o nome dado para a coexistência de vários estados de equilíbrio dinâmico para um mesmo conjunto de parâmetros. Tais estados podem tanto ser caóticos, quanto regulares (periódicos). Sistemas que apresentam multiestabilidade em geral são extremamente sensíveis a qualquer perturbação, e o estado final do sistema depende crucialmente das condições iniciais [10]. Cada atrator possui sua própria bacia de atração, isto é, um certo conjunto de condições iniciais que conduzem o sistema para o atrator após um tempo suficientemente longo [8]. O fenômeno da multiestabilidade tem sido observado experimentalmente em diversos campos, como por exemplo, na ótica [11], na biologia [12] e em reações químicas [13]. Para algumas aplicações, multiestabilidade pode ser considerada como um comportamento indesejável do sistema. Por exemplo, se precisamos de um sistema que permaneça em um determinado equilíbrio dinâmico, um salto para algum outro estado coexistente podem alterar o desempenho do sistema, diminuindo assim a confiabilidade dos resultados obtidos. Devido a este fato, muitos estudos tem sido dedicados ao desenvolvimento de técnicas para o controle da multiestabilidade de sistemas.

No que diz respeito a multiestabilidade, o mapa de Hénon vem sendo amplamente estudado por ser um dos sistemas mais simples a permitir a coexistência de atratores. Na Fig. 3.1 é apresentada uma ampliação do espaço de parâmetros para o mapa de Hénon (1.1) mostrado na Fig. 2.1, no intervalo  $0,8 \leq a \leq 1,8$  e  $-0,35 \leq b \leq 0,151$ . Como podemos observar na Fig 3.1, o mapa de Hénon apresenta duas cascatas de bifurcações, uma do tipo  $1 \times 2^n$  e outra do tipo  $3 \times 2^n$ . Na região em que ocorre a cascata de bifurcações do tipo  $3 \times 2^n$  o mapa de Hénon é multiestável, ou seja, dependendo da condição inicial escolhida podemos obter uma órbita pertencente à cascata de bifurcações do tipo  $1 \times 2^n$  ou pertencente à cascata de bifurcações do

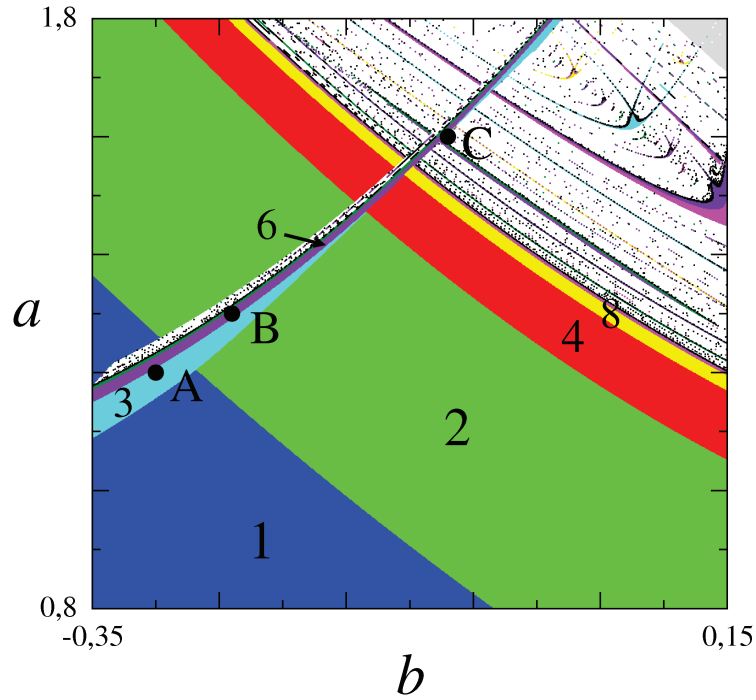


Figura 3.1: Ampliação do espaço de parâmetros do mapa de Hénon (1.1) apresentado na Fig. 2.1, no intervalo  $0,8 \leq a \leq 1,8$  e  $-0,35 \leq b \leq 0,15$ . Os domínios dos diferentes atratores estão identificados por diferentes cores. Os números indicam os períodos.

tipo  $3 \times 2^n$ , para o mesmo par de parâmetros  $a$  e  $b$ .

Neste capítulo investigamos numericamente as modificações nas bacias de atração de estados coexistentes no mapa de Hénon, em virtude da modulação dos parâmetros por outro mapa de Hénon. Para isto escolhemos três pontos:

- $a = 1,2$  e  $b = -0,3$ , ponto A na Fig. 3.1, onde há multiestabilidade período 1 e período 3,
- $a = 1,3$  e  $b = -0,24$ , ponto B na Fig. 3.1, na região de multiestabilidade período 2 e período 6 e,
- $a = 1,6$  e  $b = -0,07$ , ponto C na Fig. 3.1, onde o mapa de Hénon apresenta multiestabilidade período 3 e caos.

Todos os diagramas de bacias de atração que serão apresentados a seguir foram obtidos discretizando o intervalo  $-3 \leq x \leq 3$  e  $-10 \leq y \leq 10$  em uma malha de  $750 \times 750$  pontos igualmente espaçados. Para cada ponto condição inicial  $(x_0, y_0)$ , o comportamento dinâmico do sistema foi determinado após um transiente de  $5 \times 10^4$  iterações.



### 3.1 Região de Períodos 1 e 3

A Fig. 3.2 mostra a bacia de atração do mapa de Hénon (1.1) para  $a = 1, 2$  e  $b = -0, 3$ . Para este conjunto de parâmetros determinamos as periodicidades existentes no espaço de fases. Como pode ser observado na Fig. 3.2, para estes valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  dois estados de equilíbrio dinâmico estáveis são possíveis: período 1, cuja bacia de atração é apresentada na cor azul na Fig. 3.2, e período 3, cuja bacia de atração é apresentada na cor vermelha Fig. 3.2. A região branca representa o conjunto de pontos para o qual o sistema diverge.

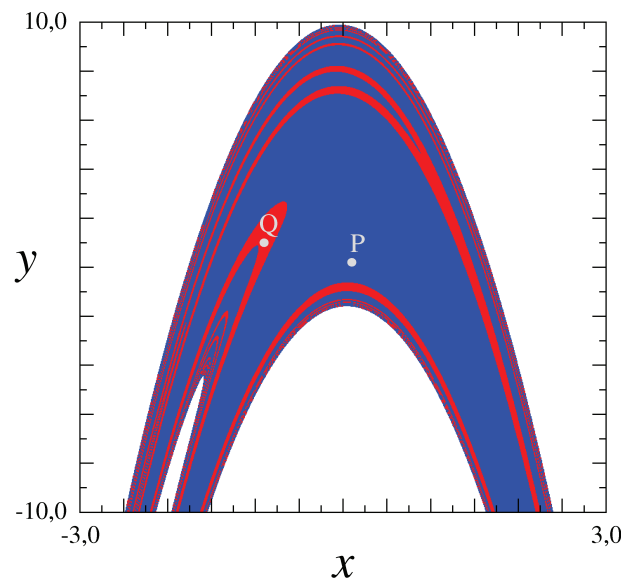


Figura 3.2: Bacia de atração do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0, 3$  e  $a = 1, 2$ . As cores azul e vermelho indicam as bacias de período 1 e período 3, respectivamente. Branco representa a bacia do infinito.

O objetivo agora é investigar supressão de multiestabilidade no mapa de Hénon, como um efeito da modulação dos parâmetros. Na Fig. 3.3 podemos ver dois painéis que se referem às bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.10). O primeiro painel, na Fig. 3.3(a), apresenta o resultado obtido quando o mapa de Hénon modulado com  $e = 0, 25$ ,  $f = 0, 2$  é perturbado por um mapa de Hénon com  $b = -0, 3$  e  $a = 1, 2$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0, 1, 0, 2)$ , ponto P na Fig. 3.2, para o qual o mapa de Hénon encontra-se em uma órbita de período 1. Podemos observar que este tipo de modulação, ou seja, modulação por ponto fixo, aniquila os estados coexistentes de período 1 e período 3 e as suas respectivas bacias de atração, e constrói um novo atrator, agora de período 2, cuja bacia é mostrada na cor verde na Fig. 3.3(a).

No segundo painel, na Fig. 3.3(b), é mostrado o resultado obtido quando o mapa de Hé-

non modulado com os mesmos parâmetros  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$  é perturbado por um mapa de Hénon, novamente com  $b = -0,3$  e  $a = 1,2$ , mas agora inicializado em  $(x_0, y_0) = (-0,9, 1, 0)$ , ponto Q na Fig. 3.2, portanto um mapa de Hénon em uma órbita de período 3. Note que esta modulação, ou seja, uma modulação por período 3, novamente aniquila os atratores coexistentes de período 1 e período 3 e suas respectivas bacias, e constrói um novo atrator de período 3 com uma nova bacia de atração, mostrada em vermelho na Fig. 3.3(b).

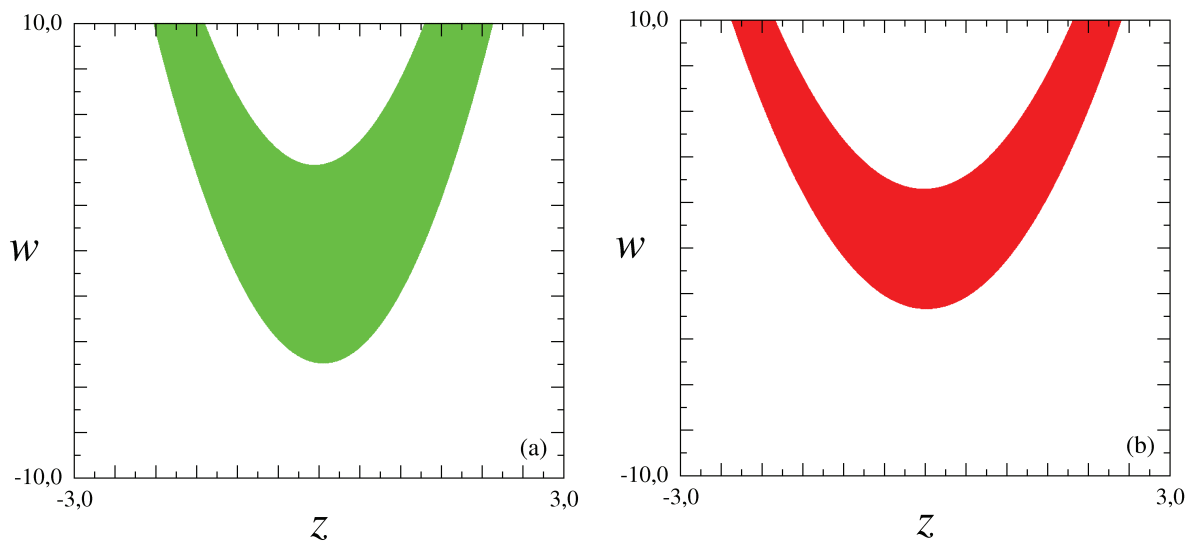


Figura 3.3: Bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $e = 0,25$  e  $f = 0,2$ . (a) Condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 1, 0, 2)$ , ponto P na Fig. 3.2. O mapa de Hénon em uma órbita de período 1 conduz o mapa de Hénon modulado a uma órbita de período 2, em verde. (b) Condição inicial  $(x_0, y_0) = (-0,9, 1, 0)$ , ponto Q na Fig. 3.2. O mapa de Hénon em uma órbita de período 3 conduz o mapa de Hénon modulado a uma órbita de período 3. Como anteriormente, branco representa a bacia do infinito.

Portanto, nos diagramas da Fig. 3.3 observamos o seguinte fenômeno:

- quando escolhemos uma condição inicial de tal forma que a órbita do mapa de Hénon é uma órbita de período 1, o mapa de Hénon modulado passa a oscilar em uma órbita de período 2 e,
- quando a condição inicial conduz o mapa de Hénon para uma órbita de período 3, o mapa de Hénon modulado oscila também em uma órbita de período 3.

## 3.2 Região de Períodos 2 e 6

Resultados similares também podem ser obtidos para o mapa de Hénon usando outros conjuntos de parâmetros. Por exemplo, se considerarmos  $a = 1,3$  e  $b = -0,24$ , o resultado é a coexistência de outros dois atratores no espaço de fases do mapa de Hénon, conforme é mostrado na Fig. 3.4: um de período 2, cuja bacia de atração está representada pela cor verde na Fig. 3.4, e outro de período 6, cuja bacia de atração está representada pela cor violeta na Fig. 3.4. O branco representa a bacia de atração do infinito.

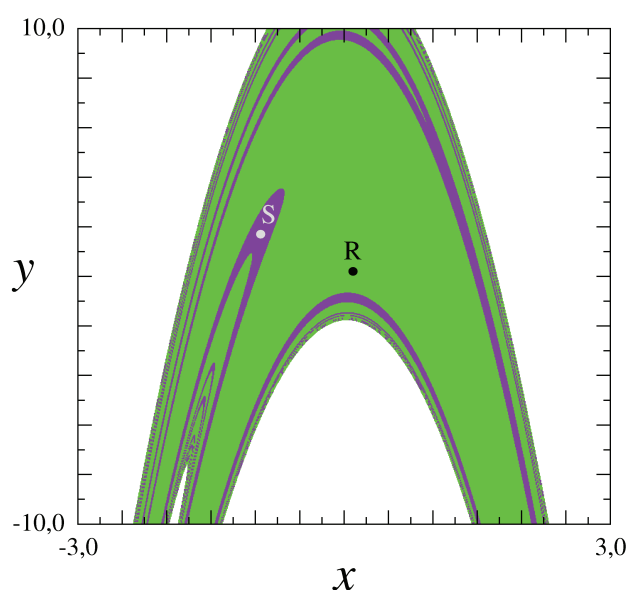


Figura 3.4: Bacia de atração do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,24$  e  $a = 1,3$ . As cores verde e violeta indicam as bacias de período 2 e período 6, respectivamente, e branco representa a bacia do infinito.

A Fig. 3.5 apresenta as bacias de atração para o mapa modulado, agora considerando  $a = 1,3$  e  $b = -0,24$ . Se o mapa de Hénon modulado com  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$  é perturbado por um mapa de Hénon inicializado em  $(x_0, y_0) = (0, 1, 0, 2)$ , ponto R na Fig. 3.4, o qual oscila em uma órbita de período 2, os atratores coexistentes de períodos 2 e 6 e suas respectivas bacias são destruídos, e um novo atrator de período 2 é construído com uma nova bacia de atração, que está representada na cor verde na Fig. 3.5(a).

Por outro lado, quando o mapa de Hénon modulado com os mesmos parâmetros  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$  é novamente perturbado pelo mesmo mapa de Hénon, agora inicializado em  $(x_0, y_0) = (-0,94, 1, 7)$ , ponto S na Fig. 3.4, o qual oscila em uma órbita de período 6, o

resultado é a destruição dos atratores de períodos 2 e 6, e a construção de um novo atrator também de período 6, cuja bacia de atração é apresentada na cor violeta na Fig. 3.5(b).

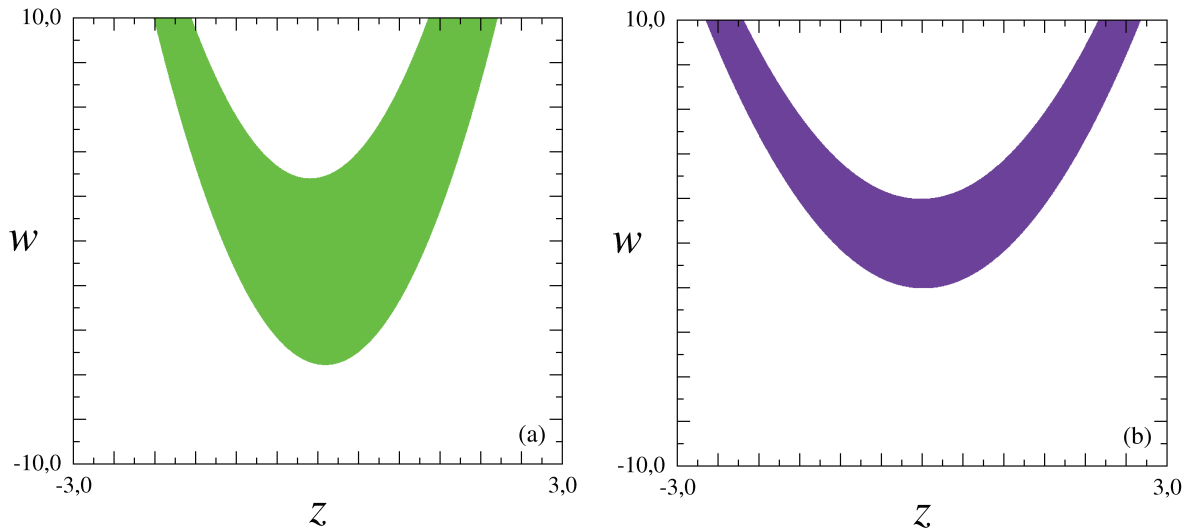


Figura 3.5: Bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $e = 0,25$  e  $f = 0,2$ , com  $a = 1,3$  e  $b = -0,24$ . (a) Condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 1, 0, 2)$ , ponto R na Fig. 3.4. O mapa de Hénon em uma órbita de período 2 conduz o mapa de Hénon modulado a uma órbita de período 2, em verde. (b) Condição inicial  $(x_0, y_0) = (-0,94, 1, 7)$ , ponto S na Fig. 3.4. O mapa de Hénon em uma órbita de período 6 conduz o mapa de Hénon modulado a uma órbita de período 6. Como anteriormente, branco representa a bacia do infinito.

Da Fig. 3.5 podemos concluir que:

- quando escolhemos uma condição inicial em que o mapa de Hénon oscila em órbita de período 2, o mapa de Hénon modulado passa a oscilar também em uma órbita de período 2 e,
- quando a condição inicial conduz o mapa de Hénon para uma órbita de período 6, o mapa de Hénon modulado oscila também em uma órbita de período 6.

### 3.3 Região de Período 3 e Caos

Por fim, investigamos a supressão da multiestabilidade para um conjunto de valores no qual a bacia de atração do mapa de Hénon apresenta dois estados dinâmicos estáveis possíveis: período 3 e caos. A Fig. 3.6 mostra a bacia de atração para o mapa de Hénon com  $a = 1,6$  e  $b = -0,07$ , a região em cinza representa o conjunto de condições iniciais que conduzem o

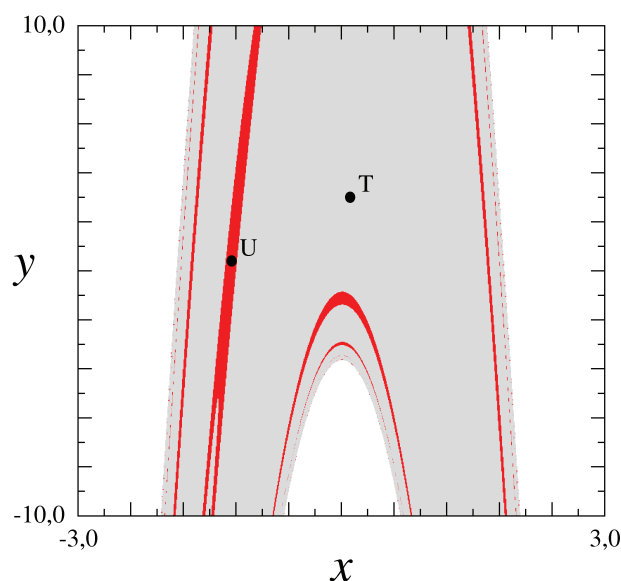


Figura 3.6: Bacia de atração do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,24$  e  $a = 1,6$ . As cores vermelho e cinza indicam as bacias de período 3 e caos, respectivamente, e branco representa a bacia do infinito.

mapa de Hénon a um atrator caótico, já a região vermelha representa as condições iniciais para as quais o mapa de Hénon é atraído para uma órbita de período 3. Novamente, a região em branco é a bacia de atração do infinito.

Nestas condições, perturbamos o mapa de Hénon modulado com  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$  por um mapa de Hénon inicializado em  $(x_0, y_0) = (0, 1, 3, 0)$ , ponto T na Fig. 3.6. Para estes valores de condições iniciais  $(x_0, y_0)$  o mapa de Hénon oscila em uma órbita caótica. O resultado, como pode ser visto na Fig. 3.7(a), é a destruição dos atrator caótico e do atrator de período 3, e o mapa de Hénon modulado passa a oscilar numa outra órbita caótica. Por outro lado, inicializando agora o mapa de Hénon em  $(x_0, y_0) = (-1, 25, 0, 4)$ , ponto U na Fig. 3.6, valores para o qual o mapa de Hénon é conduzido para uma órbita de período 3, este tipo de modulação aniquila os estados coexistente de período 3 e caos e suas respectivas bacias, e constrói um novo atrator de período 3 com outra bacia de atração, mostrada em vermelho na Fig. 3.7(b). Desta forma, podemos concluir que:

- quando perturbado por um mapa de Hénon em uma órbita caótica, o mapa de Hénon modulado passa a oscilar somente em uma órbita de caótica e,
- quando inicializamos o mapa de Hénon de tal forma que ele seja conduzido a oscilar em uma órbita de período 3, o mapa de Hénon modulado oscila também em uma órbita de

período 3.

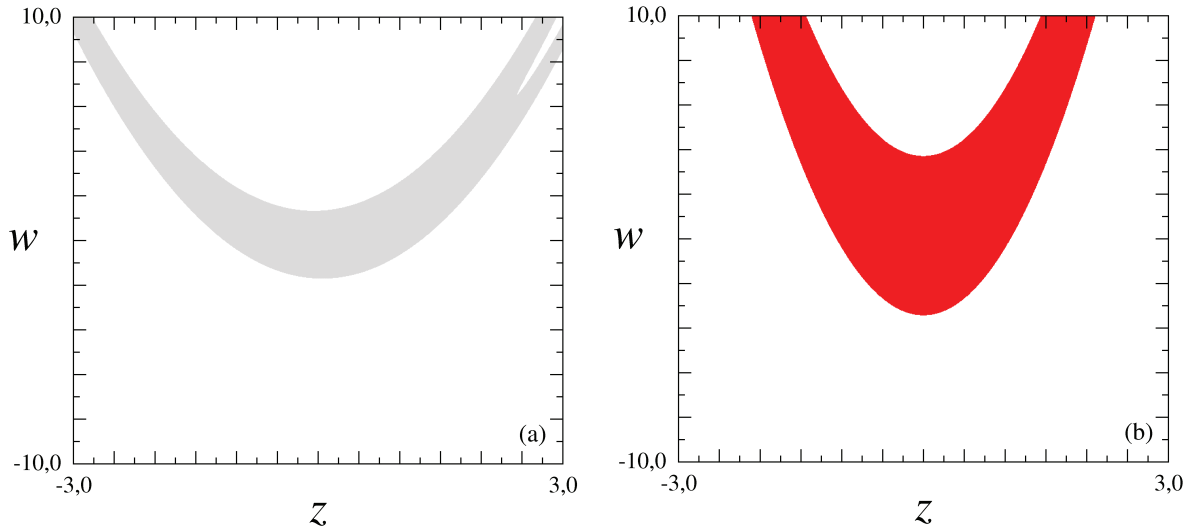


Figura 3.7: Bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.1) para  $e = 0,25$  e  $f = 0,2$ , com  $a = 1,6$  e  $b = -0,07$ . (a) Condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 1, 3, 0)$ , ponto T na Fig. 3.6. O mapa de Hénon em uma órbita caótica conduz o mapa de Hénon modulado a uma outra órbita caótica, em cinza. (b) Condição inicial  $(x_0, y_0) = (-1,25, 0, 4)$ , ponto U na Fig. 3.6. O mapa de Hénon em uma órbita de período 3 conduz o mapa de Hénon modulado a uma outra órbita de período 3. O branco representa a bacia do infinito.

Deste modo, um processo de modulação de parâmetros de um mapa de Hénon, por outro mapa de Hénon, é capaz de atuar controlando, suprimindo e/ou gerando atratores no espaço de fases. Em todos os casos anteriormente apresentados, dois atratores coexistentes foram completamente destruídos, enquanto somente um foi gerado, isto é, um mapa de Hénon biestável tornou-se monoestável por conta da modulação.

## Capítulo 4

# Modulação usando um mapa de Hénon altamente dissipativo

Como visto no primeiro capítulo, o mapa de Hénon possui o determinante da matriz Jacobiana constante e igual a  $-b$ . Deste modo, o mapa de Hénon é dissipativo, ou seja, não preserva o volume no espaço de fases, no intervalo  $-1 < b < 1$ . Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos quando usamos um mapa de Hénon trabalhando em um regime de alta dissipação, ou seja, com o parâmetro  $b$  em módulo próximo a zero, para modular um outro mapa de Hénon.

A Fig. 4.1 mostra a bacia de atração para o mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,1$  e  $a = 1,52$ . Este e todos os diagramas de bacias de atração apresentados a seguir foram obtidos discretizando o intervalo  $-3 \leq x \leq 3$  e  $-10 \leq y \leq 10$  em uma malha de  $750 \times 750$  pontos igualmente espaçados. Para cada ponto condição inicial o comportamento dinâmico do sistema foi determinado, após um transiente de  $5 \times 10^4$  iteradas. Como pode ser observado na Fig. 4.1, para estes valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , o mapa de Hénon apresenta dois estados de equilíbrio dinâmico estáveis, um de período 3 (na cor vermelha) e outro de período 4 (na cor amarela). A região branca representa o conjunto de pontos para os quais o sistema diverge.

Aqui o objetivo é investigar o que ocorre com o mapa modulado, quando o perturbamos com um mapa de Hénon em um regime de alta dissipação, com  $b = -0,1$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto E na Fig. 4.1, ou seja, na região de período 4, e inicializado em  $(x_0, y_0) = (-1, 3, -1, 6)$ , ponto F na Fig. 4.1, na região de período 3. Para isso, construímos bacias de atração para diferentes valores de parâmetros  $e$  e  $f$ . Nas seções seguintes fixamos o parâmetro  $f$  em  $f = 0,2$  e em  $f = -0,2$ , para cada um deles consideramos alguns valores do parâmetro  $e$  e investigamos o que acontece com o mapa de Hénon modulado.

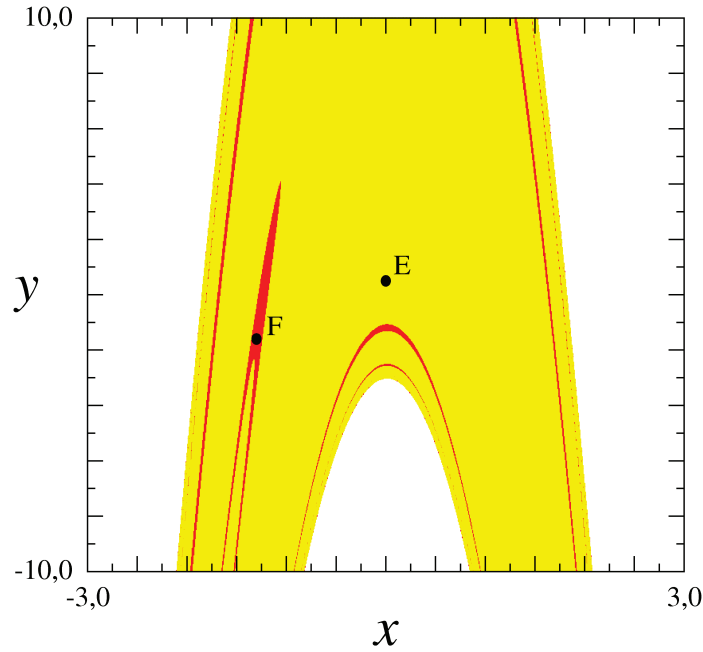


Figura 4.1: Bacia de atração do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,1$  e  $a = 1,52$ . As cores vermelho e amarelo indicam as bacias de período 3 e período 4, respectivamente. Branco representa a bacia do infinito.

## 4.1 Parâmetro $f$ fixo em 0,2

A Fig. 4.2 mostra as bacias de atração para o mapa de Hénon modulado para  $f = 0,2$  e três valores de  $e$ :  $e = 0$ ,  $e = 0,25$  e  $e = 0,5$ . Os diagramas na coluna à esquerda na Fig. 4.2 foram obtidos para o ponto E na Fig. 4.1, ou seja, por uma modulação por período 4, enquanto os diagramas da coluna à direita na Fig. 4.2 foram obtidos através de uma modulação por período 3, ponto F na Fig. 4.1.

Nas Figs. 4.2(a), 4.2(c) e 4.2(e) o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon com  $b = -0,1$  e  $a = 1,52$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0,3, 0,5)$ , ponto E na Fig. 4.1, para o qual o mapa de Hénon encontra-se em uma órbita de período 4. Como podemos observar, este tipo de modulação aniquila os estados coexistentes de período 3 e período 4 e as suas respectivas bacias de atração, e constrói um novo atrator, agora de período 4, cuja bacia é mostrada na cor amarela nas Figs. 4.2(a), 4.2(c) e 4.2(e). Isto acontece para todos os valores de  $e$  (0, 0,25 e 0,50),  $f = 0,2$ . Deste modo, quando escolhemos uma condição inicial de tal modo que a órbita do mapa de Hénon é uma órbita de período 4, o mapa de Hénon modulado passa a oscilar somente em uma órbita de período 4.



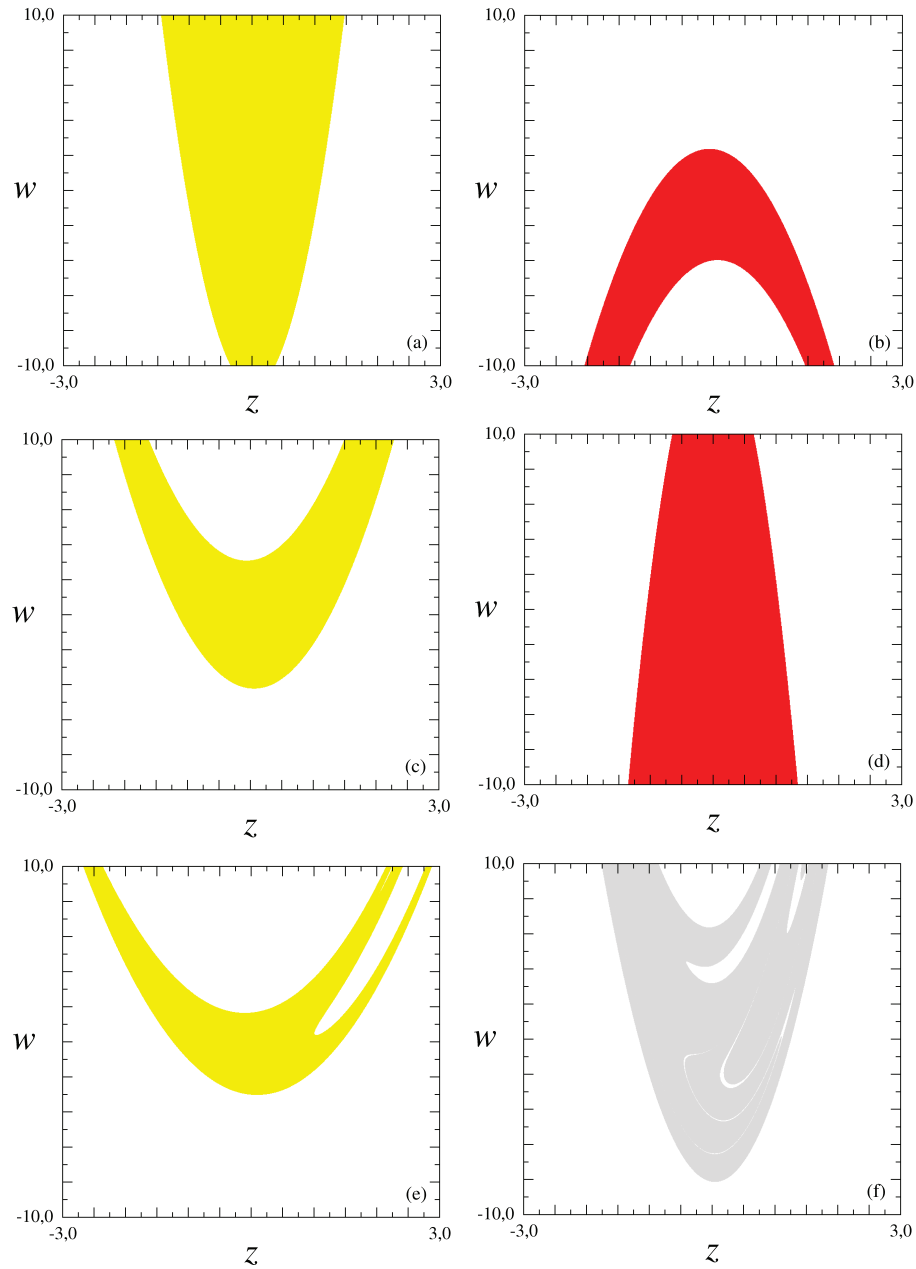


Figura 4.2: Bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $f = 0,2$  e três valores de  $e$ : (a) e (b),  $e = 0,0$ ; (c) e (d),  $e = 0,25$ ; (e) e (f)  $e = 0,5$ . Diagramas à esquerda: condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto E na Fig. 4.1. Diagramas à direita: condição inicial  $(x_0, y_0) = (-1, 3, -1, 6)$ , ponto F na Fig. 4.1.

O resultado de perturbarmos o mapa de Hénon, com os mesmos valores de parâmetros  $e$  e  $f$ , novamente por um mapa de Hénon com  $b = -0,1$  e  $a = 1,52$ , agora inicializado em  $(x_0, y_0) = (-1, 3, -1, 6)$ , ponto F na Fig. 4.1, é mostrado nas Figs. 4.2(b), 4.2(d) e 4.2(f). Para estes valores de  $a$  e  $b$ , e esta condição inicial, o mapa de Hénon é conduzido para uma órbita de período 3, ou seja, neste caso temos uma modulação por período 3. Podemos observar, para  $e = 0$ ,  $f = 0,2$  na Fig. 4.2(b), e para  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$  na Fig. 4.2(d), que a modulação leva a destruição dos atratores de períodos 3 e 4 e suas respectivas bacias, e a construção de um novo atrator também de período 3 com uma nova bacia de atração, região em vermelho nas Figs. 4.2(b) e 4.2(d). Por outro lado, para  $e = 0,50$ ,  $f = 0,2$ , a modulação novamente aniquila os estados coexistentes de período 3 e 4, no entanto, não constrói nem um atrator de período 3, nem um atrator de período 4, mas sim um atrator caótico, como pode ser visto em cinza na Fig. 4.2(f). Concluimos assim, que esta modulação por uma órbita de período 3 pode levar a construção de um novo atrator de período 3 ou mesmo a construção de um atrator caótico.

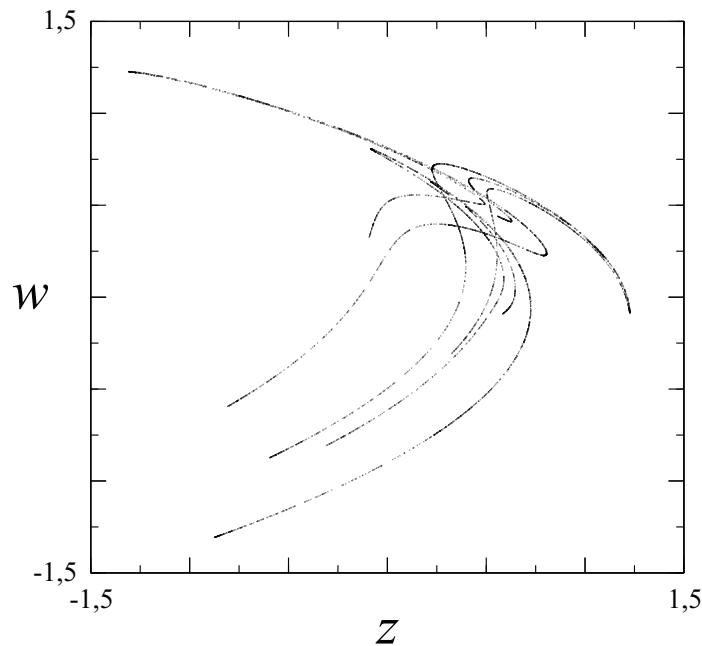


Figura 4.3: Atrator caótico bidimensional do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $e = 0,5$  e  $f = 0,2$ . Cinco mil pontos foram plotados.

Para fins de ilustração, um atrator caótico bidimensional obtido através da modulação de parâmetros é apresentado na Fig. 4.3. Este atrator foi construído para o mapa de Hénon

modulado com parâmetros  $e = 0,5$  e  $f = 0,2$ , inicializado em  $(z_0, w_0) = (0,001, 0,05)$ , perturbado por um mapa de Hénon com  $a = 1,52$  e  $b = -0,1$  inicializado em  $(x_0, y_0) = (-1, 3, -1, 6)$ , descartando um transiente de  $5 \times 10^4$  e plotando os próximos cinco mil pontos.

Outros diagramas interessantes para a análise de um sistema são os diagramas de bifurcação, uma vez que estes mostram o nascimento, evolução e morte dos conjuntos de pontos para o qual o sistema é atraído como função de um dos parâmetros do sistema. A Fig. 4.4(a) mostra o diagrama de bifurcação da variável  $x$  do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,1$  e  $-0,2 \leq a \leq 1,8$ , enquanto as Figs. 4.4(b) e 4.4(c) mostram os diagramas de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10) para os mesmo parâmetros  $a$  e  $b$ , com  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$ , e  $e = 0,75$ ,  $f = 0,2$ , respectivamente. Quando mantemos  $b$  fixo em  $-0,1$ , o ponto em que ocorre a bifurcação  $1 \rightarrow 2$  no mapa de Hénon está localizado próximo a  $a = 0,9$ , como é mostrado na Fig. 4.4(a). Se  $b = -0,1$ ,  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$ , então a bifurcação  $1 \rightarrow 2$  acontece nas proximidades do ponto  $a = 0,63$  para o mapa de Hénon modulado, fenômeno que pode ser verificado na Fig. 4.4(b). Portanto, dependendo da modulação, o ramo de período 2 pode ser ampliado com uma consequente retração do ramo de período 1. Em outras palavras, a modulação pode produzir uma mudança na localização dos pontos de bifurcação do mapa de Hénon.

A Fig. 4.4(c) mostra que, quando o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo, ele converge para uma órbita de período 2. O ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$  próximo a  $a = 0,9$  na Fig. 4.4(a) desaparece, juntamente com a órbita de período 1 no intervalo  $-0,2 \leq a \leq 0,9$ . Para valores de  $a$  maiores do que  $0,9$ , o mapa de Hénon modulado passa a divergir. Deste modo, uma mudança no ponto em que ocorre a bifurcação  $1 \rightarrow 2$ , ou mesmo a supressão da órbita de período 1 pode ser obtida por meio da modulação de parâmetros.

## 4.2 Parâmetro $f$ fixo em $-0,2$

Resultados semelhantes podem ser obtidos quando fixamos  $f = -0,2$  no mapa de Hénon modulado (1.10). A Fig. 4.5 mostra as bacias de atração para o mapa de Hénon modulado com  $f = -0,2$ , novamente com os mesmos três valores de  $e$ :  $e = 0$ ,  $e = 0,25$  e  $e = 0,5$ . Da mesma forma que a Fig. 4.2, os diagramas na coluna à esquerda na Fig. 4.5 foram obtidos para o ponto E na Fig. 4.1, ou seja, por uma modulação por período 4, enquanto os diagramas da

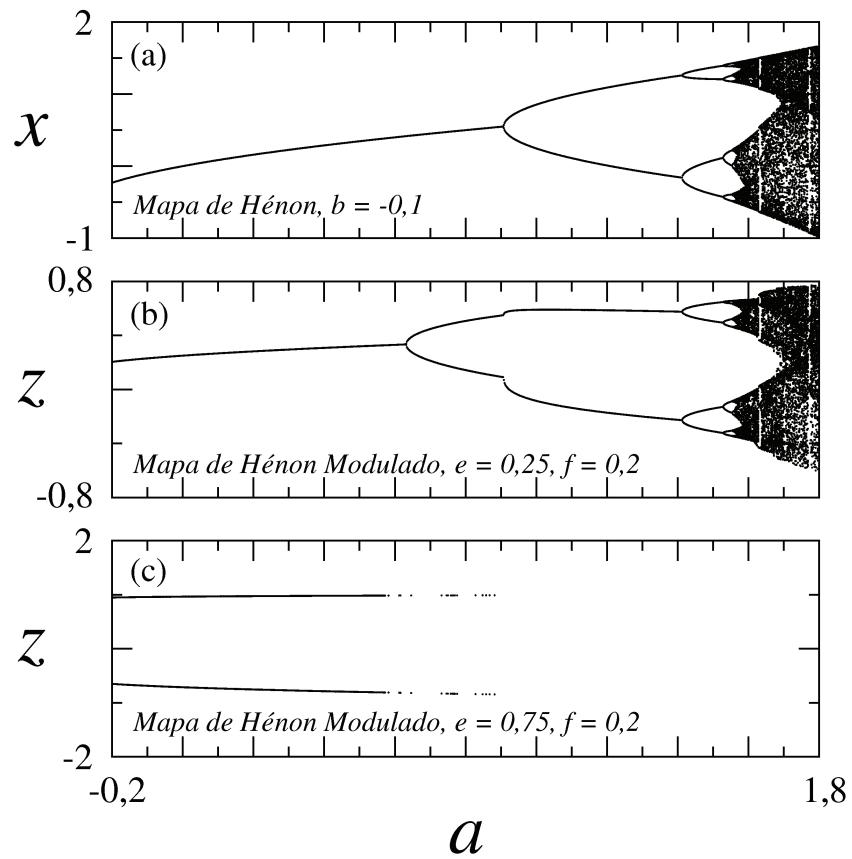


Figura 4.4: (a) Diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1), para  $b = -0,1$  e  $-0,2 \leq a \leq 1,8$ . (b) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,25, f = 0,2$ . (c) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,75, f = 0,2$ .

coluna à direita na Fig. 4.5 foram obtidos através de uma modulação por período 3, ponto F na Fig. 4.1.

Nas Figs. 4.5(a), 4.5(c) e 4.5(e) o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon com  $b = -0,1$  e  $a = 1,52$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0,3, 0,5)$ , ponto E na Fig. 4.1, para o qual o mapa de Hénon encontra-se em uma órbita de período 4. Da mesma forma que aconteceu com  $f = 0,2$ , este tipo de modulação aniquilou os estados coexistentes de período 3 e período 4 e as suas respectivas bacias de atração, construindo um novo atrator, agora de período 4, cuja bacia é mostrada na cor amarela nas Figs. 4.5(a), 4.5(c) e 4.5(e). Isto acontece para todos os valores de  $e$  ( $0, 0,25$  e  $0,50$ ) com  $f = -0,2$ . Quando perturbamos o mapa de Hénon modulado, com os mesmos valores de parâmetros  $e$  e  $f$ , agora com um mapa de Hénon inicializado em  $(x_0, y_0) = (-1,3, -1,6)$ , ponto F na Fig. 4.1, ou seja, oscilando em uma órbita de período 3, o resultado obtido é o apresentado nas Figs. 4.5(b), 4.5(d) e 4.5(f). Para  $e = 0$ ,  $f = -0,2$ , na Fig. 4.5(b), e para  $e = 0,25$ ,  $f = -0,2$  na Fig. 4.5(d), a modulação leva novamente a destruição dos atratores de períodos 3 e 4 e suas respectivas bacias, e a construção de um novo atrator também de período 3 com uma nova bacia de atração, região em vermelho nas Figs. 4.5(b) e 4.5(d). Por outro lado, para  $e = 0,50$  e  $f = -0,2$  a modulação aniquila novamente os estados coexistentes de período 3 e 4, mas constrói um novo atrator agora de período 6 com uma nova bacia de atração, região violeta na Fig. 4.5(f). Concluimos que, quando  $f = -0,2$ , esta modulação por uma órbita de período 3 pode levar a construção de um novo atrator de período 3, ou então a construção de um atrator de período 6.

Construímos novamente diagramas de bifurcação ao longo da linha  $b = -0,1$ , mas agora para  $f = -0,2$ , representados na Fig. 4.6. Na Fig. 4.6(a) temos o diagrama de bifurcação da variável  $x$  do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,1$  e  $-0,2 \leq a \leq 1,8$ , enquanto as Figs. 4.4(b) e 4.4(c) mostram os diagramas de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10) para os mesmos parâmetros  $a$  e  $b$ , com  $e = 0,3$ ,  $f = -0,2$ , e  $e = 0,5$ ,  $f = -0,2$ , respectivamente. Se  $b = -0,1$  e  $-0,2 \leq a \leq 0,9$ , então o mapa de Hénon é atraído para um ponto fixo após um rápido transiente, como pode ser visto na Fig. 4.6(a). Por outro lado, se  $b = -0,1$ ,  $-0,2 \leq a \leq 0,9$ ,  $e = 0,3$ ,  $f = -0,2$ , o mapa de Hénon modulado converge para um atrator de período 2 no intervalo  $-0,2 \leq a \leq 0,48$ , e para um ponto fixo em  $0,48 \leq a \leq 0,9$ , como pode ser visto na Fig. 4.6(b). Neste caso não houve uma mudança na localização do ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$ , que continua a ocorrer próximo a  $a = 0,9$ .

No entanto, surge uma nova bifurcação, agora de uma órbita de período 2 para um ponto fixo, que ocorre nas proximidades do ponto  $a = 0,48$ . Na Fig. 4.6(c) podemos observar que, para  $b = -0,1$ ,  $-0,2 \leq a \leq 0,9$ ,  $e = 0,5$ ,  $f = -0,2$ , o mapa de Hénon modulado é finalmente atraído para uma órbita de período 2. Portanto, quando o mapa de Hénon modulado, para estes valores de  $e$  e  $f$ , é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo, ele passa a oscilar em uma órbita de período 2. O ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$  em  $a = 0,9$  no mapa de Hénon é suprimido no mapa de Hénon modulado e, conseqüentemente, o ponto fixo desaparece no intervalo  $-0,2 \leq a \leq 0,9$ . Em outras palavras, neste caso o processo de modulação de parâmetros no mapa de Hénon destrói a órbita de período 1, com uma conseqüente ampliação do ramo de período 2 no diagrama de bifurcação da Fig. 4.6(c).

Resultados semelhantes são obtidos também para outros valores de parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$ , com  $b$  perto do limite dissipativo. Para os mesmos valores de  $a$  e  $b$ , mas com  $f = 0,9$ , por exemplo, o mapa de Hénon modulado diverge para a maioria dos valores do parâmetro  $e$  considerados. Por fim, podemos concluir que quando usamos um mapa de Hénon trabalhando em um regime de alta dissipação, para todos os valores dos parâmetros  $e$  e  $f$  considerados, a coexistência de atratores no espaço de fases foi destruída, e somente um único atrator foi criado. Desta forma, novos atratores, até mesmo atratores caóticos, podem ser obtidos mediante a modulação.

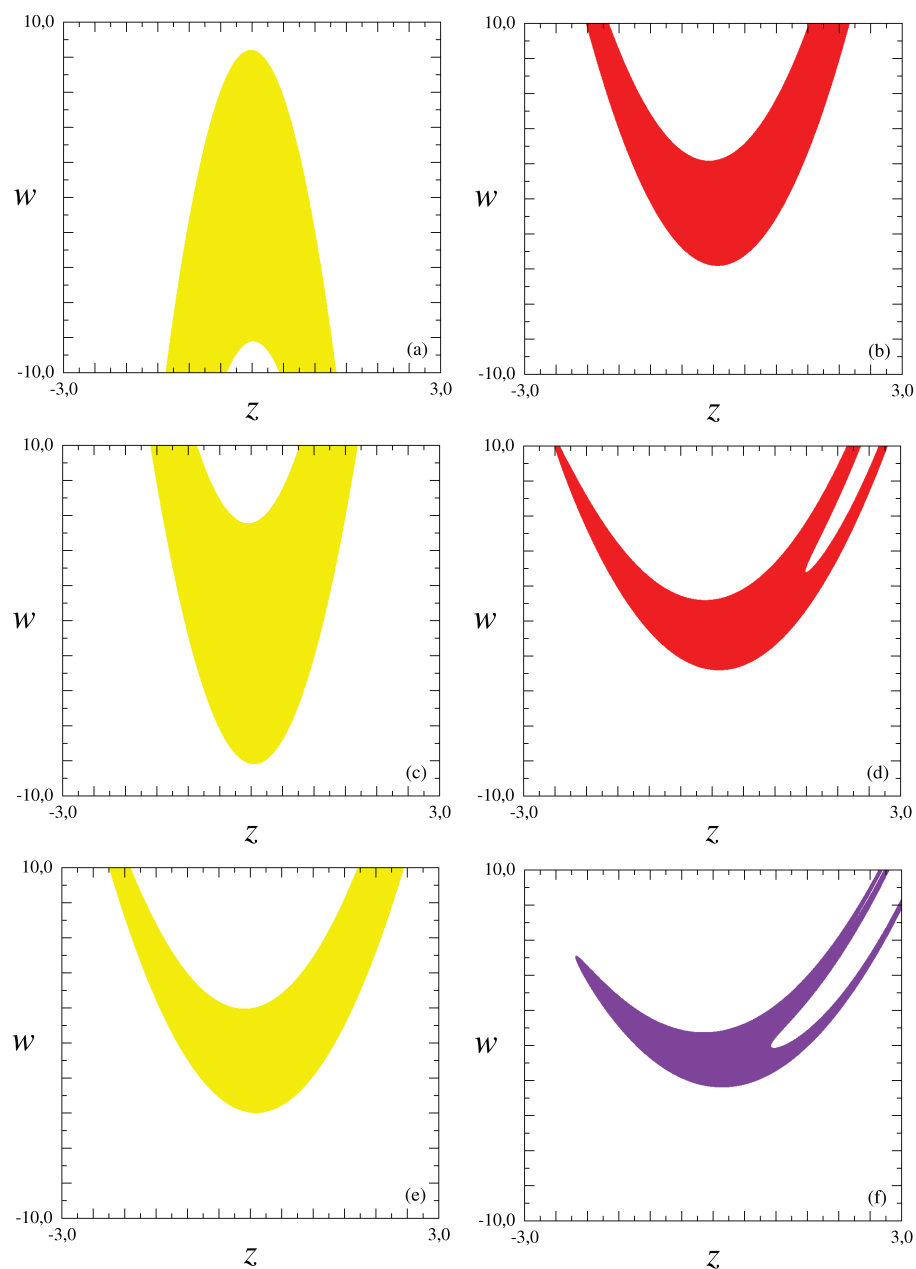


Figura 4.5: Bacia de atração do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $f = -0,2$  e três valores de  $e$ : (a) e (b),  $e = 0,0$ ; (c) e (d),  $e = 0,25$ ; (e) e (f)  $e = 0,5$ . Diagramas à esquerda: condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto E na Fig. 4.1. Diagramas à direita: condição inicial  $(x_0, y_0) = (-1, 3, -1, 6)$ , ponto F na Fig. 4.1.

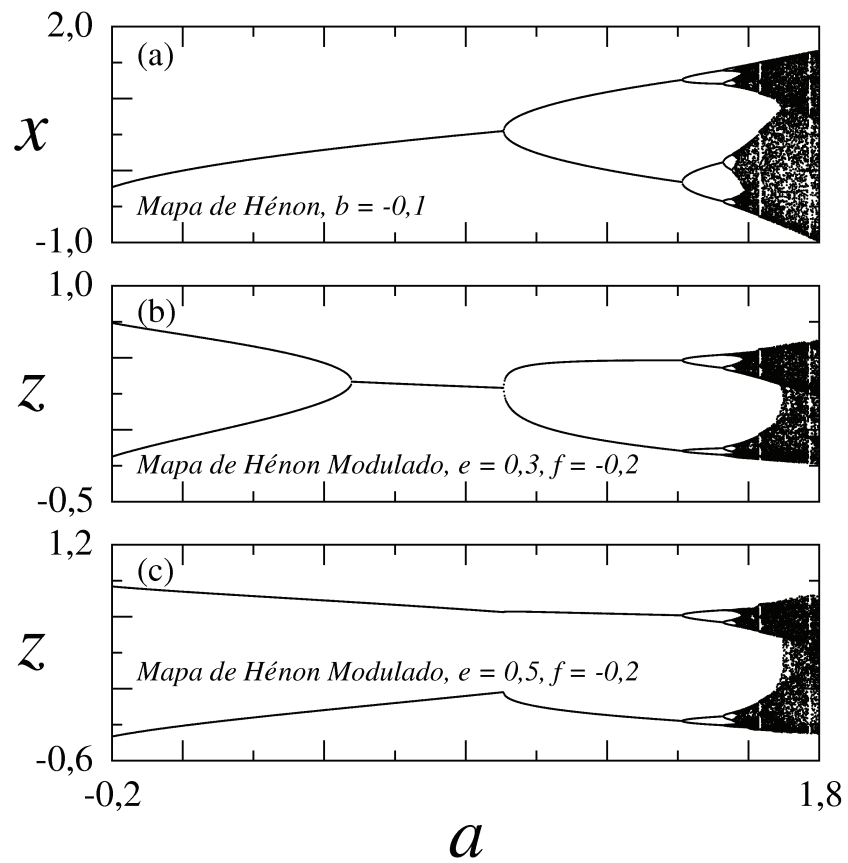


Figura 4.6: (a) Diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1), para  $b = -0,1$  e  $-0,2 \leq a \leq 1,8$ . (b) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,25$ ,  $f = -0,2$ . (c) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,75$ ,  $f = -0,2$ .



## Capítulo 5

# Modulação usando um mapa de Hénon perto do limite conservativo

Um estudo similar ao realizado no capítulo anterior, onde usamos um mapa de Hénon trabalhando em um regime de alta dissipação para modular um outro mapa de Hénon, pode ser feito para o caso oposto, ou seja, quando modulamos com um mapa de Hénon próximo do limite conservativo. Nesse capítulo abordaremos o caso em que o parâmetro  $b$  do mapa de Hénon (1.1) está em módulo próximo a 1, no entanto ainda dentro do limite dissipativo.

A Fig. 5.1 mostra a bacia de atração para o mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,9$  e  $a = 1,0$ . Este e todos os diagramas de bacias de atração apresentados a seguir foram obtidos discretizando o intervalo  $-3 \leq x \leq 3$  e  $-10 \leq y \leq 10$  em uma malha de  $750 \times 750$  pontos igualmente espaçados. Para cada ponto condição inicial, o comportamento dinâmico do sistema foi determinado após um transiente de  $5 \times 10^4$  iteradas. Como pode ser observado na Fig. 5.1, para estes valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , o mapa de Hénon apresenta dois estados de equilíbrio dinâmico estáveis, um de período 1, região em azul na Fig. 5.1, e outro de período 3, região em vermelho na Fig. 5.1. A região branca representa o conjunto de pontos que levam o sistema à divergência.

Agora interessa investigar o que ocorre com o mapa modulado quando o perturbamos com um mapa de Hénon em um regime próximo ao limite conservativo, no caso com  $b = -0,9$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto G na Fig. 5.1, ou seja, na região de período 1, e inicializado em  $(x_0, y_0) = (1, 24, -0, 14)$ , ponto H na Fig. 5.1, na região de período 3. Para isso, construímos bacias de atração para diferentes valores de parâmetros  $e$  e  $f$ . Nas seções seguintes fixamos o parâmetro  $f$  em  $f = 0,2$  e  $f = -0,2$ , para cada um deles consideramos alguns valores de  $e$ , e investigamos o que acontece com o mapa de Hénon modulado.

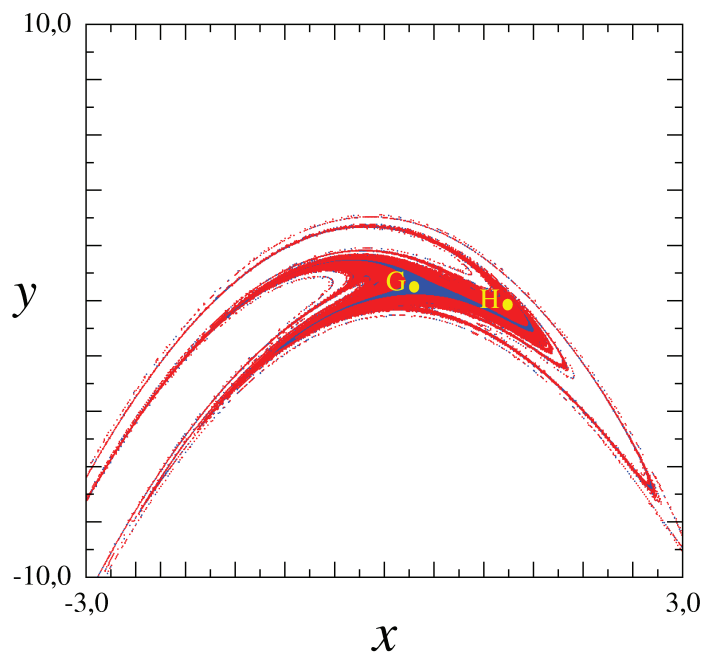


Figura 5.1: Bacia de atração do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,9$  e  $a = 1,0$ . As cores azul e vermelho indicam as bacias de período 1 e período 3, respectivamente, e branco representa a bacia do infinito.

## 5.1 Parâmetro $f$ fixo em 0,2

A Fig. 5.2 mostra as bacias de atração para o mapa de Hénon modulado para  $f = 0,2$  e três valores de  $e$ :  $e = 0$ ,  $e = 0,25$  e  $e = 0,5$ . Os diagramas na coluna à esquerda na Fig. 5.2 foram obtidos para o ponto G na Fig. 5.1, ou seja, quando modulamos os parâmetros do mapa de Hénon com um outro mapa de Hénon em um ponto fixo. Enquanto que os diagramas da coluna à direita na Fig. 5.2 foram obtidos através de uma modulação por uma órbita de período 3, ponto H na Fig. 5.1.

Nas Figs. 5.2(a), 5.2(c) e 5.2(e) o mapa de Hénon modulado é controlado por um mapa de Hénon com  $b = -0,9$  e  $a = 1,0$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0,3, 0,5)$ , ponto G na Fig. 5.1, para o qual o mapa de Hénon encontra-se em uma órbita de período 1. Podemos observar que esta modulação por uma órbita de período 1 leva a destruição dos estados coexistentes de períodos 1 e 3 e suas respectivas bacias de atração. Para  $e = 0$ ,  $f = 0,2$  é criado uma nova órbita de período 1, cuja bacia de atração encontra-se representada na Fig. 5.2(a), enquanto que para  $e = 0,25$ , e  $f = 0,2$ , Fig. 5.2(c), e  $e = 0,5$ ,  $f = 0,2$ , Fig. 5.2(e), a modulação atua de forma a construir uma órbita que não é nem de período 1, nem de período 3, mas sim de período 2. Portanto, esta modulação por uma órbita de período 1 pode levar a construção de um novo

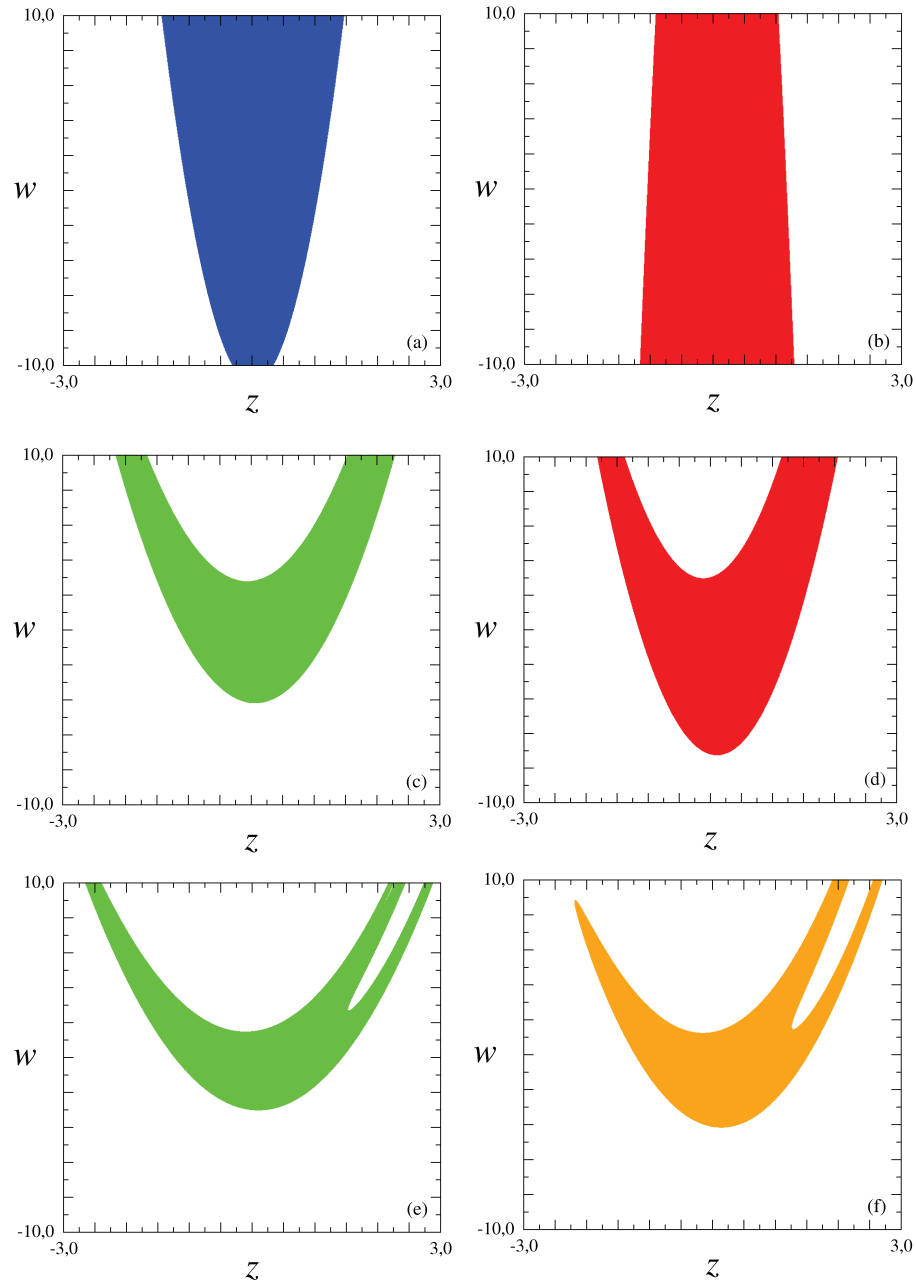


Figura 5.2: Bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $f = 0,2$  e três valores de  $e$ : (a) e (b),  $e = 0,0$ ; (c) e (d),  $e = 0,25$ ; (e) e (f)  $e = 0,5$ . Diagramas à esquerda: condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto G na Fig. 5.1. Diagramas à direita: condição inicial  $(x_0, y_0) = (1, 24, -0, 14)$ , ponto H na Fig. 5.1.

atrator de período 1 ou de um atrator de período 2, dependendo dos valores dos parâmetros  $e$  e  $f$  escolhidos.

O resultado de perturbamos o mapa de Hénon, com os mesmos valores de parâmetros  $e$  e  $f$ , novamente por mapa de Hénon com  $b = 0,9$  e  $a = 1,0$ , agora inicializado em  $(x_0, y_0) = (1, 24, -0, 14)$ , ponto H na Fig. 5.1, é mostrado nas Figs. 5.2(b), 5.2(d) e 5.2(f). Para estes valores de  $a$  e  $b$ , e esta condição inicial, o mapa de Hénon é conduzido para uma órbita de período 3, ou seja, neste caso temos uma modulação por período 3. Podemos observar, para  $e = 0$ ,  $f = 0,2$ , Fig. 5.2(b), e para  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$ , Fig. 5.2(d), que a modulação leva a destruição dos atratores de períodos 1 e 3 e suas respectivas bacias, e a construção de um novo atrator, também de período 3, com uma nova bacia de atração, região em vermelho nas Figs. 5.2(b) e 5.2(d). Por outro lado, para  $e = 0,50$ ,  $f = 0,2$  a modulação novamente aniquila os estados coexistentes de período 1 e 3. No entanto, não constrói nem um atrator de período 1, nem um atrator de período 2, mas sim um atrator de período 12, como pode ser visto na região na cor laranja na Fig. 5.2(f). Concluímos assim, que esta modulação por uma órbita de período 3 pode levar a construção de um novo atrator de período 3, ou mesmo a construção de um atrator de período mais elevado, como um atrator de período 12.

A Fig. 5.3(a) mostra o diagrama de bifurcação da variável  $x$  do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,9$  e  $1,6 \leq a \leq 3,0$ , enquanto nas Figs. 5.3(b) e 5.3(c) mostram os diagramas de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10) para os mesmos parâmetros  $a$  e  $b$ , com  $e = 0,15$ ,  $f = 0,2$ , e  $e = 0,3$ ,  $f = 0,2$ , respectivamente. Quando mantemos  $b$  fixo em  $-0,9$ , o ponto em que ocorre a bifurcação  $1 \rightarrow 2$  no mapa de Hénon está localizado próximo a  $a = 2,7$ , como é mostrado na Fig. 5.3(a). Se  $b = -0,9$ ,  $e = 0,15$ ,  $f = 0,2$ , então a bifurcação  $1 \rightarrow 2$  acontece nas proximidades do ponto  $a = 2,59$  para o mapa de Hénon modulado, fenômeno que pode ser verificado na Fig. 5.3(b). Portanto, dependendo da modulação, pode ocorrer uma mudança na localização dos pontos de bifurcação do mapa de Hénon. A Fig. 5.3(c) mostra que, quando o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo, ele converge para uma órbita de período 2. O ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$  próximo a  $a = 2,7$  na Fig. 5.3(a) desaparece, juntamente com a órbita de período 1 no intervalo  $1,6 \leq a \leq 3,0$ . Deste modo, uma mudança no ponto em que ocorre a bifurcação  $1 \rightarrow 2$ , ou mesmo a supressão da órbita de período 1 pode ser obtida por meio da modulação de parâmetros.

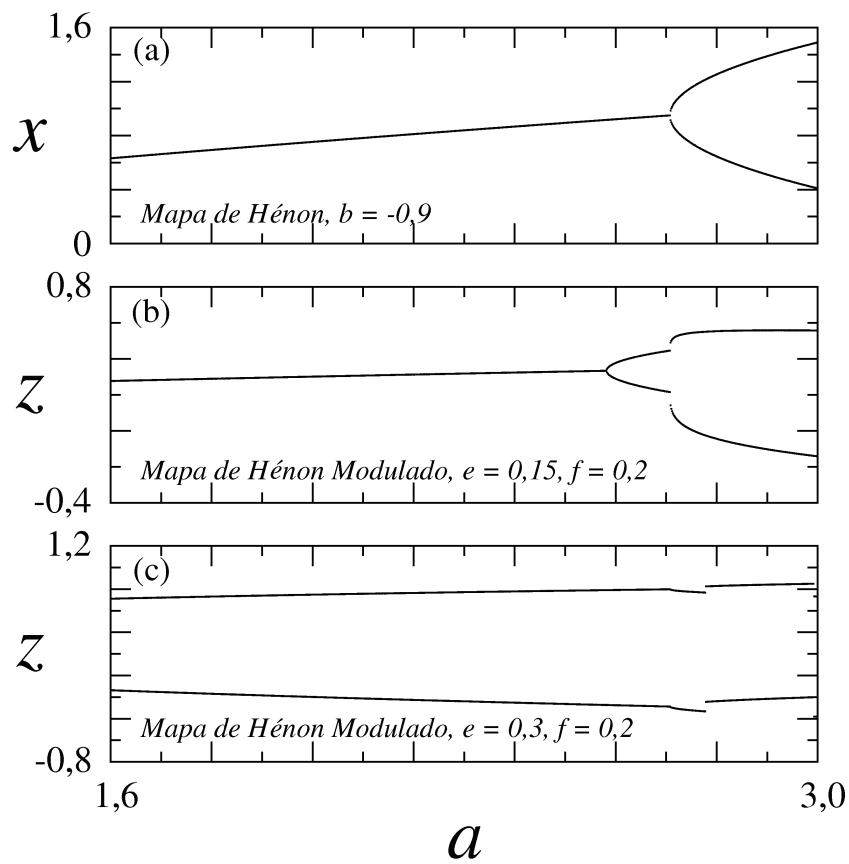


Figura 5.3: (a) Diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1), para  $b = -0,9$  e  $1,6 \leq a \leq 3,0$ . (b) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,15$  e  $f = 0,2$ . (c) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,3$  e  $f = 0,2$ .

## 5.2 Parâmetro $f$ fixo em $-0,2$

Resultados semelhantes aos da seção anterior podem ser obtidos quando fixamos  $f = -0,2$  no mapa de Hénon modulado (1.10). A Fig. 5.4 mostra as bacias de atração para o mapa de Hénon modulado com  $f = -0,2$ , novamente com os mesmos três valores de  $e$ :  $e = 0$ ,  $e = 0,25$  e  $e = 0,5$ . Da mesma forma que a Fig. 5.2, os diagramas na coluna à esquerda na Fig. 5.4 foram obtidos para o ponto G na Fig. 5.1, ou seja, por uma modulação por período 1, enquanto os diagramas da coluna à direita na Fig. 5.4 foram obtidos através de uma modulação por período 3, ponto H na Fig. 5.1.

Nas Figs. 5.4(a), 5.4(c) e 5.4(e) o mapa de Hénon modulado é perturbado por um mapa de Hénon com  $b = -0,9$  e  $a = 1,0$ , inicializado em  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto G na Fig. 5.1, para o qual o mapa de Hénon encontra-se em uma órbita de período 1. De mesma forma que aconteceu para  $f = 0,2$ , este tipo de modulação aniquilou os estados coexistentes de período 1 e período 3 e as suas respectivas bacias de atração. Quando  $e = 0$  e  $e = 0,25$ , com  $f = -0,2$ , um novo atrator de período 1 é construído, cuja bacia é mostrada na cor azul nas Figs. 5.4(a) e 5.4(c), respectivamente. Quando  $e = 0,50$  e  $f = -0,2$ , temos novamente a aniquilação dos estados coexistentes de períodos 1 e 3. Desta vez um atrator de período 2 é construído, cuja bacia de atração encontra-se representada na cor verde na Fig. 5.4(e). Deste modo, quando escolhermos uma condição inicial de tal forma que a órbita do mapa de Hénon é uma órbita de período 1, o mapa de Hénon modulado passa a oscilar em uma órbita de período 1 ou em uma órbita de período 2, dependendo do parâmetro  $e$  escolhido.

Quando perturbamos o mapa de Hénon modulado, com os mesmos valores de parâmetros  $e$  e  $f$ , mas com um mapa de Hénon inicializado em  $(x_0, y_0) = (1, 24, -0, 14)$ , ponto H na Fig. 5.1, ou seja, oscilando em uma órbita de período 3, o resultado obtido é o apresentado nas Figs. 5.4(b), 5.4(d) e 5.4(f). Na Fig. 5.4(b), com  $e = 0$ ,  $f = 0,2$ , e na Fig. 5.4(d), com  $e = 0,25$ ,  $f = 0,2$ , a modulação leva novamente a destruição dos atratores de períodos 1 e 3 e suas respectivas bacias, e a construção de um novo atrator também de período 3 com uma nova bacia de atração, região em vermelho nas Figs. 5.4(b) e 5.4(d). Por outro lado, para  $e = 0,50$ ,  $f = 0,2$  a modulação novamente aniquila os estados coexistentes de período 1 e 3, e constrói um novo atrator agora de período 6 com uma nova bacia de atração, região violeta na Fig. 5.4(f). Vemos portanto que, quando  $f = -0,2$ , esta modulação por uma órbita de período 3 pode levar a construção de um novo atrator de período 3, ou então a construção de um atrator de período

6.

Construímos novamente diagramas de bifurcação, agora ao longo da linha  $b = -0,9$ , para  $f = -0,2$ . A Fig. 5.5(a) mostra novamente o diagrama de bifurcação da variável  $x$  do mapa de Hénon (1.1) para  $b = -0,9$  e  $1,6 \leq a \leq 3,0$ , enquanto as Figs. 5.5(b) e 5.5(c) mostram os diagramas de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10) para os mesmos parâmetros  $a$  e  $b$ , com  $e = 0,5$ ,  $f = -0,2$ , e  $e = 0,75$ ,  $f = -0,2$ , respectivamente. Se  $b = -0,9$  e  $1,6 \leq a \leq 2,7$ , então o mapa de Hénon é atraído para um ponto fixo após um rápido transiente, como pode ser visto na Fig. 5.5(a). Por outro lado, se  $b = -0,9$ ,  $1,6 \leq a \leq 2,7$ ,  $e = 0,5$ ,  $f = -0,2$ , o mapa de Hénon modulado converge para um atrator de período 2 no intervalo  $1,6 \leq a \leq 2,28$ , e para um ponto fixo em  $2,28 \leq a \leq 2,7$ , como pode ser visto na Fig. 5.5(b). Neste caso não houve uma mudança na localização do ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$ , que continua a ocorrer próximo a  $a = 2,7$ . No entanto, surge uma nova bifurcação, agora de uma órbita de período 2 para um ponto fixo, que ocorre nas proximidades do ponto  $a = 2,28$ . Na Fig. 5.5(c) podemos observar que, para  $b = -0,9$ ,  $1,6 \leq a \leq 3,0$ ,  $e = 0,5$ ,  $f = -0,2$ , o mapa de Hénon modulado é finalmente atraído para uma órbita de período 2. Portanto, quando o mapa de Hénon modulado, para estes valores de  $e$  e  $f$ , é perturbado por um mapa de Hénon em um ponto fixo, ele passa a oscilar em uma órbita de período 2. O ponto de bifurcação  $1 \rightarrow 2$  em  $a = 2,7$  no mapa de Hénon é suprimido no mapa de Hénon modulado e, conseqüentemente, o ponto fixo desaparece no intervalo  $1,6 \leq a \leq 2,7$ . Em outras palavras, neste caso o processo de modulação de parâmetros no mapa de Hénon destrói a órbita de período 1, com uma conseqüente ampliação do ramo de período 2 no diagrama de bifurcação da Fig. 5.5(c).

Da mesma forma que no caso abordado no capítulo anterior, resultados semelhantes podem também ser obtidos para outros valores de parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$ , com  $b$  perto do limite conservativo. Para todos os valores dos parâmetros  $e$  e  $f$  considerados a multiestabilidade no mapa de Hénon, ou seja a coexistência de atratores no espaço de fases, foi destruída, e somente um único atrator é criado quando perturbamos com um mapa de Hénon próximo ao limite conservativo. Além disso, vimos que novos atratores e mudanças nos pontos em que ocorrem as bifurcações podem ser obtidos utilizando a modulação de parâmetros.

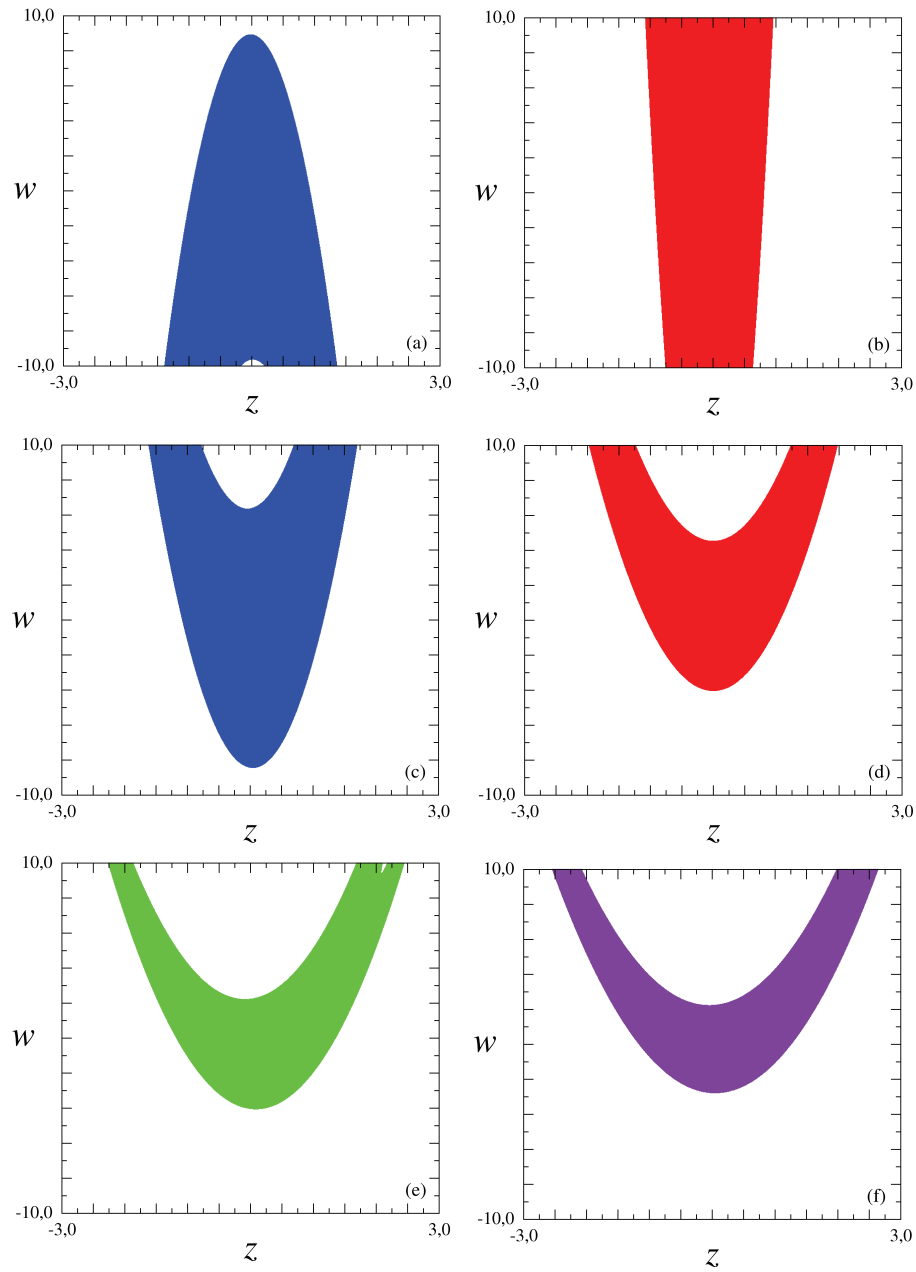


Figura 5.4: Bacias de atração do mapa de Hénon modulado (1.10) para  $f = -0,2$  e três valores de  $e$ : (a) e (b),  $e = 0,0$ ; (c) e (d),  $e = 0,25$ ; (e) e (f)  $e = 0,5$ . Diagramas à esquerda: condição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 3, 0, 5)$ , ponto G na Fig. 5.1. Diagramas à direita: condição inicial  $(x_0, y_0) = (1, 24, -0, 14)$ , ponto H na Fig. 5.1.



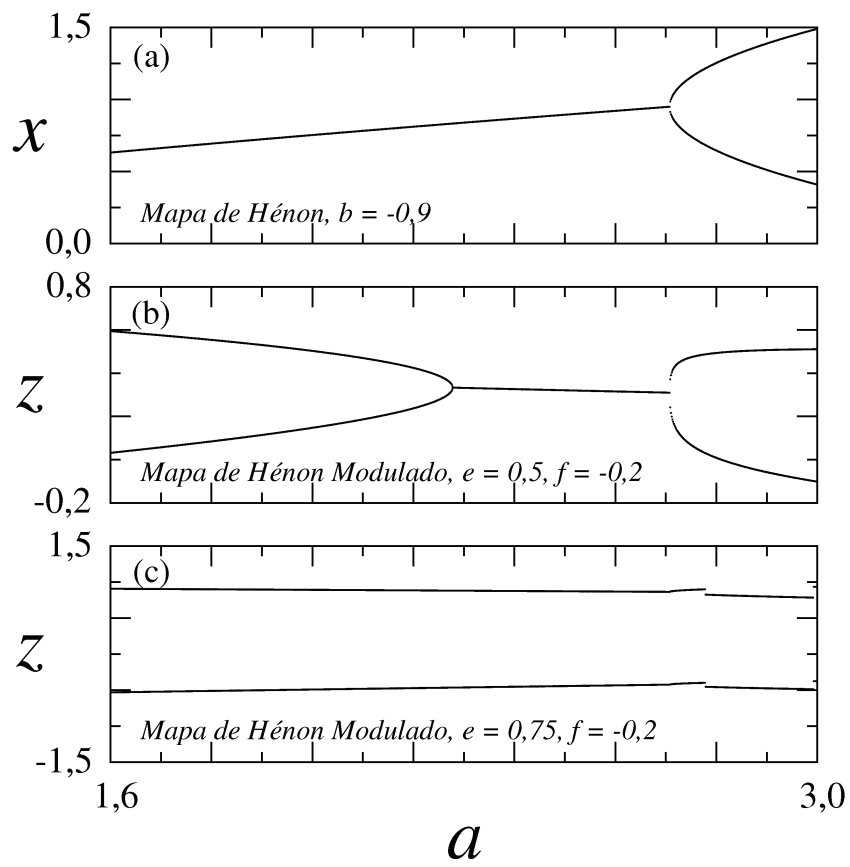


Figura 5.5: (a) Diagrama de bifurcação da variável  $x$  para o mapa de Hénon (1.1), para  $b = -0,9$  e  $1,6 \leq a \leq 3,0$ . (b) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,5, f = -0,2$ . (c) Diagrama de bifurcação da variável  $z$  para o mapa de Hénon modulado (1.10), para  $e = 0,75, f = -0,2$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Sistemas dinâmicos são usualmente caracterizados por um conjunto de parâmetros que controlam o seu comportamento e, conseqüentemente, dão origem a mudanças na dinâmica. A maioria dos estudos consideram estes parâmetros constantes, ou permitem variar em um intervalo de valores imutáveis. No entanto, na natureza os parâmetros que governam a dinâmica do sistema frequentemente variam no tempo. Tais casos têm sido pouco estudados.

Nas Refs. [17, 18], estuda-se o efeito da aplicação de uma modulação senoidal paramétrica no parâmetro  $c$ , na posição de bifurcações, em um mapa Hénon trabalhando em regime de baixa dissipação, com  $d = 0,9$ . É mostrado que, dependendo da modulação, o ramo período de 3 pode ser expandido, retraído, ou mesmo suprimido. Um mapa Hénon funcionando em regime de alta dissipação com  $d = 0.3$  é estudado na Ref. [19], mostrando que a modulação paramétrica aleatória pode dar origem a atratores mapa Hénon cuja dinâmica é aperiódica, e não de forma caótica, ou seja, o maior expoente de Lyapunov associado é negativo apesar da órbita não ser periódica. O efeito da aplicação da modulação do parâmetro do mapa logístico por um segundo mapa logístico pode ser vista na Ref. [16].

Neste trabalho consideramos a situação na qual ambos os parâmetros de um mapa de Hénon são linearmente modulados pelo resultado de um outro mapa de Hénon, cujos parâmetros são constantes no tempo mas podem ser ajustados.

Os resultados analíticos e numéricos obtidos mostraram que é possível a existência de órbitas de período 2, e até mesmo de períodos maiores para o mapa de Hénon modulado, mesmo quando modulamos este com um mapa de Hénon trabalhando em um regime de ponto fixo, através da adequada escolha de valores para os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$ . Por meio de diagramas de espaço de parâmetros vimos que regiões periódicas e caóticas podem ser aumentadas ou

diminuídas conforme variamos os valores dos parâmetros  $e$  e  $f$ . Desta forma, esta modulação pode produzir uma mudança na localização dos pontos em que ocorrem as bifurcações, levando inclusive a supressão de órbitas periódicas e a criação de novos pontos de bifurcação, o que pode ser observado com o auxílio de diagramas de bifurcação e de diagramas do maior expoente de Lyapunov.

Em uma investigação a respeito da multiestabilidade neste sistema, mostramos que o processo de modulação de um mapa de Hénon por um outro mapa de Hénon é capaz de atuar controlando, suprimindo e/ou gerando atratores no espaço de fases. Em todos os casos investigados, dois atratores coexistentes foram completamente destruídos, enquanto somente um foi gerado, isto é, um mapa de Hénon biestável tornou-se monoestável por conta da modulação. Resultados semelhantes foram obtidos quando usamos na modulação um mapa de Hénon trabalhando em um regime próximo ao limite conservativo ou em um regime próximo ao limite dissipativo, onde até mesmo atratores caóticos foram obtidos. Este é um resultado bastante interessante uma vez que, para algumas aplicações, multiestabilidade pode ser considerada como um comportamento indesejável do sistema. Recentemente foram relatados experimentos bem-sucedidos envolvendo a destruição de atratores em sistemas multiestáveis. Por exemplo, na Ref. [21] é apresentado um experimento envolvendo o controle da multiestabilidade em um laser de fibra dopado a érbio modulado por um laser de diodo, onde uma modulação harmônica da corrente do diodo aniquila um ou dois ciclos limites estáveis no laser, selecionando um estado desejado.

# Referências

- [1] M. Hénon, “A two-dimensional mapping with a strange attractor,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, no. 1, pp. 69–77, 1976.
- [2] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [3] E. Ott, in *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Nova York, 2000.
- [4] S. N. Wood, “Statistical inference for noisy nonlinear ecological dynamic system,” *Nature*, vol. 466, pp. 1102–1104, Ago 2010.
- [5] C. Kyrtou and W. C. Labys, “Evidence for chaotic dependence between us inflation and commodity prices,” *Journal of Macroeconomics*, vol. 28, no. 1, pp. 256–266, 2006.
- [6] H. Killory, O. E. Röessler, and J. L. Hudson, “Higher chaos in a four-variable chemical reaction model,” *Physics Letters A*, vol. 122, no. 6-7, pp. 341 – 345, 1987.
- [7] K. Aihara, “Chaos engineering and its application to paralleldistributed processing with chaotic neural networks,” in *Proceedings of the IEEE 90*, pp. 919–930, 2002.
- [8] K. Alligood, T. Sauer, and J. A. Yorke, in *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Nova York, 1996.
- [9] S. Wiggins, in *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag: Nova York, 1990.
- [10] A. Pisarchik and R. Jaimes-Reategui, “Control of basins of attraction in a multistable fiber laser,” *Physics Letters A*, vol. 374, no. 2, pp. 228 – 234, 2009.
- [11] Q. Xu and M. Lipson, “Carrier-induced optical bistability in silicon ring resonators,” *Optics Letters*, vol. 31, no. 3, pp. 341–343, 2006.

- [12] V. A. Selivanov, T. V. Votyakova, J. A. Zeak, M. Trucco, J. Roca, and M. Cascante, “Bistability of mitochondrial respiration underlies paradoxical reactive oxygen species generation induced by anoxia,” *PLoS Computational Biology*, vol. 5, p. e1000619, 12 2009.
- [13] T. Wilhelm, “The smallest chemical reaction system with bistability,” *BMC Systems Biology*, vol. 3, no. 1, p. 90, 2009.
- [14] C. L. Pando, G. A. L. Acosta, R. Meucci, and M. Ciofini, “Highly dissipative hénon map behavior in the four-level model of the co2 laser with modulated losses,” *Physics Letters A*, vol. 199, no. 3-4, pp. 191 – 198, 1995.
- [15] C. S. Zhou and T. L. Chen, “Robust communication via chaotic synchronization based on contraction maps,” *Physics Letters A*, vol. 225, no. 1-3, pp. 60 – 66, 1997.
- [16] Z. Elhadj and J. C. Sprott, “The effect of modulating a parameter in the logistic map,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 18, no. 2, p. 023119, 2008.
- [17] J. M. S. Solorio, A. N. Pisarchik, and V. Aboites, “Shift of saddle-node bifurcation points in modulated hénon map,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 48, no. 4, pp. 290–294, 2002.
- [18] J. M. S. Solorio, A. N. Pisarchik, and V. Aboites, “Shift of critical points in the parametrically modulated hénon map with coexisting attractors,” *Physics Letters A*, vol. 304, no. 1-2, pp. 21 – 29, 2002.
- [19] A. Nandi, S. K. Bhowmick, S. K. Dana, and R. Ramaswamy, “Design strategies for the creation of aperiodic nonchaotic attractors,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 19, no. 3, p. 033116, 2009.
- [20] J. A. C. Gallas, “Structure of the parameter space of the hénon map,” *Physical Review Letters*, vol. 70, pp. 2714–2717, Maio 1993.
- [21] A. N. Pisarchik, Y. O. Barmenkov, and A. V. Kir’yanov, “Experimental demonstration of attractor annihilation in a multistable fiber laser,” *Physical Review E*, vol. 68, p. 066211, Dez 2003.