

Mostraremos neste trabalho que as equações de onda para quaisquer campos twistoriais de um único índice, as quais ocorrem no contexto dos formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden para a Relatividade Geral, devem ser formalmente as mesmas. Este resultado decorre essencialmente do fato que a transcrição espinorial da tradicional equação conforme de Killing fornece equações twistoriais da mesma forma. Uma conseqüência deste resultado é que os dispositivos diferenciais covariantes do formalismo os quais usualmente servem para controlar valências de configurações indiciais, tornam-se inaplicáveis no que concerne a obtenção dos padrões formais das equações de onda sob consideração aqui.

Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso

Joinville, 2014

ANO
2014



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
CURSO DE MESTRADO EM FÍSICA

KARLA WEBER | AUSÊNCIA DE CORRELAÇÕES ENTRE AS EQUAÇÕES DE ONDA [...]

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**AUSÊNCIA DE CORRELAÇÕES
ENTRE AS EQUAÇÕES DE ONDA
PARA CAMPOS TWISTORIAIS
COVARIANTES E
CONTRAVARIANTES OCORRENTES
NOS FORMALISMOS ESPINORIAIS
DE INFELD E VAN DER WAERDEN**

KARLA WEBER

JOINVILLE, 2014

KARLA WEBER

**AUSÊNCIA DE CORRELAÇÕES ENTRE AS EQUAÇÕES
DE ONDA PARA CAMPOS TWISTORIAIS COVARIANTES
E CONTRAVARIANTES OCORRENTES NOS FORMALISMOS
ESPINORIAIS DE INFELD E VAN DER WAERDEN**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT.

Orientador: Prof. Jorge Gonçalves Cardoso,Doutor

**JOINVILLE
2014**

W374a

Weber, Karla

Ausência de Correlações entre as Equações de Onda para Campos Twistoriais Covariantes e Contravariantes ocorrentes nos Formalismos Espinoriais de Infeld e van der Waerden / Karla Weber. - 2014.

48p. :il. ; 21 cm

Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso

Bibliografia: p.47-48.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física . Joinville, 2014.

1. Espinores. 2. Equação de Onda. 3. Campos Twistoriais. I. Cardoso, Jorge Gonçalves. II.Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Física. III. Título

CDD 530.11

KARLA WEBER

AUSÊNCIA DE CORRELAÇÕES ENTRE AS EQUAÇÕES DE
ONDA PARA CAMPOS TWISTORIAIS COVARIANTES E
CONTRAVARIANTES OCORRENTES NOS FORMALISMOS
ESPINORIAIS DE INFELD E VAN DER WAERDEN

Dissertação apresentada ao Curso de Programa de Pós-Graduação em Física como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração "Física".

Banca Examinadora

Orientador:

Prof. Dr. Jorge Gonçalves Cardoso
CCT/UDESC

Membros

Prof. Dr. César Manchein
CCT/UDESC

Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior
UFABC

Joinville, SC, 18 de março de 2014.

Dedico este trabalho, à meu esposo Matheus,
à minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente a Deus, que em todas as suas formas de expressão, é uma inspiração e uma segurança no meu caminhar, por me proteger, me guiar e me iluminar em busca do meu próprio caminho.

À meu esposo, Matheus, por ser meu amor, meu marido, meu amigo, e acima de tudo, meu companheiro de vida e sonhos, pelo amor, carinho, compreensão e apoio, principalmente nos momentos mais difíceis.

À meus pais Menardino e Clarís e irmãs Karine e Kássia, pelo amor incondicional, por acreditarem em mim e me apoiarem.

À minha amiga de coração Lucinamar, por ser uma inspiração de confiança e sabedoria.

À todos os amigos, que de alguma forma fizeram parte desta conquista.

Ao meu orientador Prof. Jorge Gonçalves Cardoso, pela paciência, atenção e dedicação ao me ensinar e compartilhar comigo seus conhecimentos e sabedoria, ao longo destes dois anos.

À todos meus professores, da graduação e pós-graduação que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Aos meus colegas da pós-graduação, em especial à turma de 2012/1, por dividirem esta jornada comigo, com companheirismo e amizade.

Às amigas que passaram a fazer parte da minha vida, Ana Carolina e Amanda, pelo ombro amigo e por me lembrarem, que ainda é possível ter-se bons amigos.

À Universidade Estadual de Santa Catarina pela oportunidade de dar continuidade aos meus estudos e pelo desenvolvimento de trabalhos científicos de qualidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

*“Você é livre para fazer suas escolhas,
mas é prisioneiro das consequências.”*
(Pablo Neruda)

RESUMO

WEBER, Karla. Ausência de Correlações entre as Equações de Onda Para Campos Twistoriais Covariantes e Contravariantes Ocorrentes nos Formalismos Espinoriais de Infeld e van der Waerden. 2014. 48p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Física - Área: Relatividade Geral e Cosmologia) - Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-graduação em Física, Joinville, 2014.

Mostraremos neste trabalho que as equações de onda para quaisquer campos twistoriais de um único índice, as quais ocorrem no contexto dos formalismos espinoriais $\gamma\varepsilon$ de Infeld e van der Waerden para a Relatividade Geral, devem ser formalmente as mesmas. Este resultado decorre essencialmente do fato que a transcrição espinorial da tradicional equação conforme de Killing fornece equações twistoriais da mesma forma. Uma consequência deste resultado é que os dispositivos diferenciais covariantes do formalismo γ , os quais usualmente servem para controlar valências de configurações indiciais, tornam-se inaplicáveis no que concerne a obtenção dos padrões formais das equações de onda sob consideração aqui.

Palavras-chave: equações de onda; campos twistoriais; formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden.

ABSTRACT

WEBER, Karla. **Absence of Differential Correlations Between the Wave Equations for Covariant and Contravariant Twistor Fields Borne by the Infeld-Van der Waerden Spinor Formalisms for General Relativity.** In 2014. 48p. Dissertation (MSc in Physics - Academic Area: General Relativity and Cosmology) - University of the State of Santa Catarina. Graduate Program in Physics, Joinville, 2014.

In this work we will show that the wave equations for any twistor fields carrying a single index, which occur in the frameworks of the Infeld-van der Waerden $\gamma\varepsilon$ -formalisms for General Relativity, must be formally the same. This result stems mainly from the fact that the spinor transcription of the traditional conformal Killing equation provides twistor equations of the same form. A consequence of this result is that the usual γ -formalism covariant differential devices for controlling valences of spinor-index configurations turn out to be inapplicable as regards the specification of the formal patterns for the wave equations under consideration here.

Keywords: wave equations; twistor fields; Infeld-van der Waerden spinor formalisms.

Sumário

1	Introdução	17
2	Notação e Planejamento do Trabalho	21
3	Espinores Métricos e Conexões Afim Espinoriais	23
3.1	Espinores Métricos	23
3.2	Objetos Conectores	24
3.3	Tensores e Densidades de Espin	25
4	Curvaturas Espinoriais	27
4.1	Espinores de Curvatura Gravitacionais	30
4.2	Espinores de Curvatura Eletromagnéticos	31
4.3	Técnicas Calculacionais	32
5	Equação de Penrose	35
6	Equações de Onda	39
7	Conclusões	45

1 Introdução

Os espinores no âmbito da física, são encontrados no contexto das teorias de Pauli (J.SAKURAI, 1994) e Dirac (BJORKEN; S.D.DRELL, 1965) para o spin do elétron. Na teoria de Pauli, os espinores são descritos com base na existência de um homomorfismo entre o grupo de matrizes unitárias $SU(2)$ e o grupo $SO(3)$, no qual para cada rotação de $SO(3)$ correspondem duas matrizes de $SU(2)$. Na teoria de Dirac, os espinores surgem naturalmente na descrição da dinâmica de partículas com spin $\pm 1/2$, no espaço de Minkowski da Relatividade Restrita. O grupo de transformações que atua neste caso, é o grupo de Lorentz L . Existe um homomorfismo entre o grupo $SL(2, C)$ e a componente ortócrona própria $L^{\uparrow+}$ de L nesta teoria, o qual foi estabelecido por Van der Waerden (Van Der WAERDEN, 1929) em conexão com uma descrição em termos de espinores de duas componentes da equação de Dirac.

Naturalmente, surgiu o interesse em obter uma descrição em termos de espinores de duas componentes no contexto da Relatividade Geral. Em 1933, Infeld e van der Waerden (INFELD; Van Der WAERDEN, 1933) introduziram os chamados formalismos espinoriais $\gamma\varepsilon$, os quais propiciaram tal descrição em termos de espinores de duas componentes de uma parte considerável da estrutura geométrica da Relatividade Geral. Uma das motivações originais em conexão com o advento destes formalismos, está relacionada com a obtenção definitiva da versão de duas componentes da teoria de Dirac para o elétron em espaços-tempo curvos sem torção. A construção dos formalismos $\gamma\varepsilon$ constituiu uma extensão de trabalhos anteriores, propostos primeiramente por van der Waerden (Van Der WAERDEN, 1929) e, subsequentemente, por Infeld (INFELD, 1932).

Os formalismos $\gamma\varepsilon$ envolvem o assentamento, em cada ponto não-singular de um espaço-tempo curvo, de dois pares de espaços de spin conjugados complexos. Neste contexto, o papel desempenhado tradicionalmente pelo grupo linear $SL(2, C)$ da Relatividade Especial, é assumido pelo chamado grupo de calibre generalizado de Weyl (WEYL, 1929). O grupo de Weyl aparece como um conjunto de matrizes (2×2) não-singulares complexas cujas entradas dependem essencialmente de um parâmetro real definido adequadamente no espaço-tempo, eventualmente sob consideração. Os espaços de espinores elementares surgiram, então, como espaços vetoriais de duas dimensões complexas assentados localmente nos ambientes espaço-temporais, tais espaços espinoriais transportam um espinor métrico antissimétrico. Nos quais, cada

tensor mundo é associado a um espinor Hermitiano.

Na teoria de espinores utilizada neste trabalho, os chamados formalismos $\gamma\varepsilon$, possuem algumas diferenças no que diz respeito a natureza geométrica de determinados objetos, ou seja, em um formalismo o objeto em questão pode ser uma densidade de espin, enquanto que, em outro um tensor espin. O comportamento de tal objeto sob as transformações de calibre de Weyl, é que determina a natureza de tal objeto (WEYL, 1929). No formalismo γ , as componentes básicas dos objetos métricos e conectores são funções de x^a e qualquer espinor métrico aparece como sendo um tensor de espin com relação ao grupo de Weyl. Já no formalismo ε , os objetos métricos aparecem como densidades de espin, como será apresentado de maneira breve no capítulo 3.

Em tais formalismos, toda a descrição dos padrões afinidade espin reposa sobre propriedades geométricas das habituais conexões mundo-afim e a implementação de uma condição que consiste em tomar qualquer objeto de conexão hermitiano como entidades covariantemente constantes.

O estudo da teoria de espinores de duas componentes torna possível descrever-se aspectos da natureza que não são possíveis de serem descritos apenas com o uso de tensores mundo. Um destes aspectos advém de uma das principais propriedades dos formalismos $\gamma\varepsilon$, de acordo com a qual, tais formalismos exibem uma característica eletromagnética manifestamente geométrica de certos espaços-tempo a qual, falando a grosso modo, é exibida por conexões afim espinoriais e pela presença em curvaturas espinoriais de bivetores de Maxwell (INFELD; Van Der WAERDEN, 1933; BADE; JEHLE, 1953). Em adição, as funções de onda para fôtons geométricos e grávitons somente são exibidas quando usa-se os formalismos espinoriais.

Um desenvolvimento considerável dos formalismos $\gamma\varepsilon$ foi levado a cabo por Witten (WITTEN, 1959) e, independentemente, um tanto mais tarde, por Penrose (vide (PENROSE; Mac CALLUM, 1972; PENROSE; RINDLER, 1984)). Witten obteve pela primeira vez a decomposição espinorial de duas componentes de tensores de curvatura de Riemann, em adição a estabelecer o número de componentes independentes mundo-espin mais diretamente pertinente e a obter um conjunto de invariantes típicos da Relatividade Geral.

Penrose desenvolveu consideravelmente as técnicas calculacionais espinoriais e não somente obteve um conjunto de expansões algébricas formais e de regras de redução espinoriais, mas também a decomposição espinorial irredutível do tensor de Weyl. Tais trabalhos propiciaram uma transcrição espinorial natural das equações de Einstein bem como

a definição definitiva de funções de onda para grávitons (vide (CARDOSO, 2005)) as quais ocorrem, nos dois formalismos, como os espinores (totalmente simétricos) que entram em decomposições de tensores de Weyl.

O completamento da descrição espinorial da geometria mundo oriunda dos formalismos $\gamma\varepsilon$ foi realizado somente em 2004 (CARDOSO, 2005). Este trabalho, particularmente, sugeriu que a definição de funções de onda para fóttons geométricos, a saber, fóttons envolvidos em curvaturas eletromagnéticas de Infeld e van der Waerden tal como mencionadas acima, poderia descrever as propriedades físicas do fundo cósmico de microondas em conjunção com os modelos cosmológicos padrões (PENROSE; RINDLER, 1986, 1984; SCHOUTEN, 1954). Podemos enfatizar que um dos resultados mais significantes, o qual emergiu a partir do trabalho da Ref. (CARDOSO, 2005), é o fato que funções de onda para fóttons geométricos e grávitons ocorrem nos dois formalismos como partes apropriadamente definidas de espinores de curvaturas, como será visto no capítulo 4.

Mais recentemente (CARDOSO, 2010), os formalismos $\gamma\varepsilon$ foram utilizados para descrever em detalhes as condições de integrabilidade da equação twistorial de Penrose (ISHAM; PENROSE; SCIAMA, 1975; PENROSE; Mac CALLUM, 1972), no caso de campos twistoriais que portam um índice contravariante. De fato, as técnicas calculacionais utilizadas em conexão com estas condições envolvem certos dispositivos diferenciais covariantes de segunda ordem adequadamente contraídos, juntamente com certas regras computacionais algébricas. Estes métodos tinham sido usados anteriormente na Ref. (CARDOSO, 2005) para deduzir explicitamente o conjunto completo de equações de onda para grávitons e fóttons que ocorre em ambos os formalismos. Um dos resultados mais notáveis que emergiu deste trabalho twistorial é que campos espinoriais conformalmente invariantes não se acomplam com grávitons (CARDOSO, 2007, 2009) mas, estritamente, com fóttons de Infeld e van der Waerden, independentemente de se o espaço-tempo de fundo é conformalmente plano ou não. Este resultado pode ser observado, no capítulo, no qual é demonstrado nas manipulações algébricas para a obtenção da equação de onda, que a parte que carrega a informação gravitacional é identicamente igual a zero, devido a propriedades de simetrias.

O presente trabalho tem como objetivo central mostrar e enfatizar que as equações de onda para campos twistoriais covariantes e contravariantes com um índice cada, possuem a mesma forma dentro dos contextos dos formalismos $\gamma\varepsilon$. Para isso, usar-se-á as técnicas calcula-

cionais propiciadas pelo trabalho das Refs (CARDOSO, 2005, 2012a, 2012b, 2010), as quais são as mesmas que aquelas referidas previamente. O principal resultado obtido aqui está, com efeito, relacionado com a ausência de correlações diferenciais entre tais equações de onda, resultado este que repousa essencialmente no princípio de covariância generalizado dos objetos conectores Hermitianos de ambos os formalismos (vide (CARDOSO, 2005)).

2 Notação e Planejamento do Trabalho

As seguintes convenções serão usadas aqui. As componentes de qualquer quantidade mundo num espaço-tempo curvo \mathfrak{M} serão rotuladas por índices latinos minúsculos, os quais assumirão os valores 0, 1, 2, 3. O operador derivada parcial com relação as coordenadas x^a em \mathfrak{M} será denotado simplesmente por ∂_a . Sem risco de confusão, utilizaremos o mesmo símbolo indexado ∇_a para denotar um operador derivada covariante sem torção em cada um dos formalismos. Por conveniência, a assinatura métrica de um tensor métrico covariante g_{ab} em \mathfrak{M} será considerada como (+ − −). Adotaremos a convenção da Ref. (PENROSE; RINDLER, 1986) que utiliza letras Latinas maiúsculas linhadas e não-linhadas para denotar componentes espinoriais conjugadas complexas. Assim, todos os índices espinoriais assumirão os valores 0, 1. Para denotar as operações de simetria e antissimetria, usaremos a convenção de envolver os índices absorvidos pelas operações com parênteses e colchetes, respectivamente. Explicaremos outras convenções no devido tempo, caso seja necessário.

O planejamento do trabalho foi arranjado como segue. No capítulo 3, será feita uma breve apresentação dos objetos métricos e da caracterização geométrica de cada formalismo. No Capítulo 4, as técnicas calculacionais exibidas nas Refs. (CARDOSO, 2005, 2010), as quais mencionamos no Capítulo 1, serão revistas. Este procedimento propiciará um embasamento para o desenvolvimento dos Capítulos subsequentes. No Capítulo 5, considerar-se-á a equação de Killing conforme (PENROSE; RINDLER, 1984; ISHAM; PENROSE; SCIAMA, 1975; PENROSE; Mac CALLUM, 1972), visando a apresentação das equações de campo twistoriais para espinores com um único índice, as quais são evidentemente de nosso interesse imediato. Nossa resultado chave é estabelecido no Capítulo 6, onde deduzimos as equações de onda para os campos sob consideração, e efetivamente estabelecemos que estas possuem a mesma forma. No Capítulo 7, traçamos algumas observações finais sobre nosso trabalho.

3 Espinores Métricos e Conexões Afim Espinoriais

Neste capítulo, serão brevemente apresentados alguns aspectos concernentes à geometria métrica e afim dos formalismos $\gamma\varepsilon$, evidenciando algumas diferenças de natureza geométrica entre os dois formalismos. Como mencionado anteriormente, no formalismo γ , qualquer espinor métrico aparece como sendo um tensor de espin com relação ao grupo de Weyl, e todos os objetos conectores correspondentes portam um caráter combinado de tensor de espin e de vetor mundo, covariantes ou contravariantes. No formalismo ε , os objetos conectores são olhados como entidades que portam o mesmo caráter mundo daqueles do formalismo γ , porém, um caráter de densidade de espin é atribuído a cada um deles.

3.1 Espinores Métricos

No formalismo γ , os espinores métricos aparecem como sendo tensores de espin antissimétricos invariantes sob transformações de coordenadas mundo. Dentre estes, temos particularmente os de valências $\{0, 2, 0, 0\}$ e $\{2, 0, 0, 0\}$, a saber,

$$(\gamma_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = |\gamma| \exp(i\Phi) \quad (1)$$

e

$$(\gamma^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

com as entradas do par $(|\gamma|, \Phi)$ sendo funções reais deriváveis de x^a .

No formalismo ε , os espinores métricos também são espinores antisimétricos invariantes mundo, com suas expressões sendo dadas por

$$(\varepsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon^{AB}), \quad (3)$$

juntamente com os complexos conjugados das equações (2) e (3).

As relações entre os espinores métricos não-linhados dos formalismos são dadas por

$$\gamma^{AB} = \gamma^{-1} \varepsilon^{AB} , \quad \gamma_{AB} = \gamma \varepsilon_{AB} . \quad (4)$$

Denotando γ ou ε por M , temos as seguintes relações:

$$M^{CB} M_{CA} = M_A{}^B = -M_B{}^A \quad (5)$$

e

$$M_A{}^B \doteq \delta_A{}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Os espinores métricos e seus complexos conjugados são particularmente úteis para levantar e abaixar índices de espinores e de quantidades mistas espin-mundo em \mathfrak{M} . Considerando um espinor arbitrário ζ^A , tem-se os seguintes esquemas para mover índices:

$$\zeta^A = \gamma^{AB} \zeta_B, \quad \zeta_A = \zeta^B \gamma_{BA} \quad (7)$$

e

$$\zeta^A = \varepsilon^{AB} \zeta_B, \quad \zeta_A = \zeta^B \varepsilon_{BA}. \quad (8)$$

Devido à propriedade tensorial das configurações métricas (1) e (2) e de suas complexas conjugadas, o fato de mover índices no formalismo γ preserva o caráter espinorial dos objetos considerados, enquanto que no formalismo ε este processo geralmente produz objetos cujo caráter espinorial é diferente daquele do objeto inicial. Contudo, em vista da invariância das estruturas (1 - 3) sob transformações de coordenadas mundo, a ação dos espinores métricos de cada formalismo sempre preserva o caráter mundo dos objetos envolvidos.

3.2 Objetos Conectores

A correspondência entre tensores mundo e espinores é realizada por meio de objetos conectores hermitianos. Estes objetos são matrizes (2×2) cujas componentes dependem de x^a . Tais objetos são dados pelas entradas do seguinte conjunto:

$$S = \{S_{aAA'}, S_{AA'}^a, S_a^{AA'}, S^{aAA'}\}, \quad (9)$$

onde S denota σ ou Σ de acordo com o formalismo γ ou ε , respectivamente.

A hermiticidade de qualquer objeto do conjunto (9) é perdida quando os índices espinoriais ocupam "andares" diferentes. Os objetos conectores são relacionados com g_{ab} pela seguinte relação de definição:

$$2S_{AA'}{}_{(a}S_b^{A')} = g_{ab}M_{AB}. \quad (10)$$

Aqui, vale a pena mencionar que, manipulando adequadamente os índices da equação (10), obtém-se a seguinte propriedade:

$$S_{aA'}{}^A S_b^{B)A'} = S_{A'[a}{}^A S_b^{B)a']} = S_{A'[a}{}^A S_b^{B)A'}. \quad (11)$$

Tal manipulação envolve a utilização dos mecanismos de levantar e abaixar índices espinoriais bem como a simetrização dos índices A, B .

A relação entre objetos mundo e de espin é prescrita explicitamente em termos de produtos externos apropriados tais como, por exemplo,

$$K_a = S_a^{AA'} K_{AA'}, \quad (12)$$

$$g_{ab} = S_a^{AA'} S_b^{BB'} M_{AB} M_{A'B'}, \quad (13)$$

e

$$M_{AB} M_{A'B'} = S_{AA'}^a S_{BB'}^b g_{ab}. \quad (14)$$

3.3 Tensores e Densidades de Espin

Para caracterizar os objetos espinoriais em cada formalismo, verifica-se como estes se comportam sob transformações de calibre generalizadas. Estas transformações constituem o grupo de Weyl (WEYL, 1929), cujos elementos possuem componentes definidas por

$$\Lambda_A{}^B = \sqrt{\rho} \exp(i\lambda) \delta_A{}^B, \quad (15)$$

onde ρ é uma função real derivável de x^a positivo-definida, e θ é o parâmetro de calibre do grupo que é considerado como uma função real derivável arbitrária sobre \mathfrak{M} . Este grupo opera localmente sobre os espaços de espin de \mathfrak{M} e independe da ação do grupo pertinente de mapeamentos espaço-temporais. A definição do determinante de $(\Lambda_A{}^B)$ é

$$\Delta_\Lambda = \det(\Lambda_A{}^B) = \rho \exp(2i\lambda), \quad (16)$$

onde

$$\Lambda_A{}^B \Lambda_C{}^D = \Delta_\Lambda \delta_A{}^B \delta_C{}^D. \quad (17)$$

Um dos mais simples exemplos de tensores de espin é um vetor de espin covariante ζ_A , o qual se transforma segundo a lei

$$\zeta'_A = \Lambda_A{}^B \zeta_B. \quad (18)$$

Para um vetor de espin contravariante ζ^A , tem-se

$$\zeta'^A = \zeta^B \Lambda_B{}^{-1A}, \quad (19)$$

juntamente com as conjugadas complexas de (18) e (19). Uma quantidade numérica que é invariante sob transformações de calibre é denominada um escalar de espin.

Usualmente, a definição das leis de transformação para tensores de espin de valências arbitrárias são obtidas a partir de produtos externos adequados entre vetores de espin e as prescrições (18) e (19). O caráter de tensor de espin dos objetos métricos fundamentais do formalismo γ é exibido através das seguintes configurações:

$$\gamma'_{AB} = \Lambda_A{}^C \Lambda_B{}^D \gamma_{CD} \quad \text{e} \quad \gamma'^{AB} = \gamma^{CD} \Lambda_C{}^{-1A} \Lambda_D{}^{-1B}, \quad (20)$$

$$\sigma'^a_{AA'} = \Lambda_A{}^B \Lambda_{A'}{}^{B'} \sigma^a_{BB'} = |\Delta_\Lambda| \sigma^a_{AA'}, \quad (21)$$

e

$$\sigma'^a_{AA'} = \sigma^a_{BB'} \Lambda_B{}^{-1A} \Lambda_{B'}{}^{-1A'} = |\Delta_\Lambda^{-1}| \sigma^a_{AA'}, \quad (22)$$

juntamente com suas conjugadas complexas. Analogamente à situação mundo, as densidades tensoriais de espin são definidas como produtos externos entre tensores de espin e densidades de espin escalares. Uma descrição algébrico-geométrica completa dos formalismos pode ser encontrada na Ref. (CARDOSO, 2005).

4 Curvaturas Espinoriais

Neste Capítulo, como mencionado anteriormente, as técnicas calculacionais desenvolvidas na Ref. (CARDOSO, 2005, 2010) serão utilizadas para obter-se as equações de onda do nosso contexto.

Em qualquer um dos formalismos, um dos procedimentos calculacionais para obter-se as respectivas estruturas de curvatura de espin em \mathfrak{M} , consiste (CARDOSO, 2005) basicamente em atuar com o comutador derivada covariante mundo sobre quaisquer objetos conectores Hermitianos de Infeld e van der Waerden tal como, por exemplo,

$$[\nabla_a, \nabla_b] S^{cDD'} = 2\nabla_{[a}(\nabla_{b]} S^{cDD'}) = 0, \quad (23)$$

onde $S^{cDD'}$ é, com efeito, um dos objetos conectores Hermitianos para o formalismo considerado. Expandindo explicitamente (23), temos

$$S^{cAB'} W_{abA}{}^B + S^{cBA'} W_{abA'}{}^B + S^{hBB'} R_{abh}{}^c = 0. \quad (24)$$

Os objetos de curvatura mistos de Infeld e Van der Waerden (CARDOSO, 2005) que aparecem na equação (24), são definidos como¹

$$W_{abA}{}^B = 2\partial_{[a}\vartheta_{b]A}{}^B - (\vartheta_{aA}{}^C \vartheta_{bC}{}^B - \vartheta_{bA}{}^C \vartheta_{aC}{}^B) = W_{[ab]A}{}^B, \quad (25)$$

e satisfazem a seguinte relação:

$$2W_{abA}{}^B + \delta_A{}^B W_{abA'}{}^{A'} = S_{AB'}^c S^{dB B'} R_{abcd}. \quad (26)$$

Realizando uma contração dos índices A e B na equação (26), obtemos

$$2(W_{abA}{}^A + W_{abA'}{}^{A'}) = R_{ab}{}^h = 0. \quad (27)$$

A contração indicial na equação (27), em qualquer formalismo, implica na aniquilação de toda a informação carregada pelo tensor de Riemann $R_{abc}{}^d$.

Uma maneira alternativa para obter-se os objetos de curvatura espinoriais, consiste em deixar o comutador espinorial covariante atuar sobre um vetor de espin arbitrário ζ^C , tal como segue

¹A quantidade $\vartheta_{aA}{}^B$ denota uma conexão afim espinorial para qualquer um dos formalismos.

$$S_{AA'}^a S_{BB'}^b [\nabla_a, \nabla_b] \zeta^C = [\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] \zeta^C = W_{AA'BB'M}{}^C \zeta^M. \quad (28)$$

A equação (25) pode ser recuperada a partir da equação (28), em qualquer formalismo, substituindo o vetor de espin envolvido por uma quantidade de espin definida como o produto externo de um vetor mundo invariante de calibre com uma matriz S Hermitiana adequada (CARDOSO, 2005).

Tendo definido os objetos de curvatura mistos, realizamos agora o desdobramento de tais objetos em suas partes simétricas e antisimétricas nos índices espinoriais, a saber,

$$W_{abAB} = W_{ab(AB)} + W_{ab[AB]}. \quad (29)$$

Concordantemente, a contribuição gravitacional é fornecida pela parte simétrica

$$W_{ab(AB)} = \frac{1}{2} S_{AB'}^c S_B^{dB'} R_{abcd}. \quad (30)$$

A equação (30) é obtida, primeiramente, movendo-se adequadamente índices da configuração (26) e, então, realizando-se a operação de simetria nos índices A e B .

Para escrevermos as contribuições eletromagnéticas e gravitacionais explícitas, usamos a relação²

$$\chi_{AB} = \frac{1}{2} \chi M_{AB} = \chi_{[AB]}, \quad \chi = \chi_C{}^C, \quad (31)$$

a qual é definida para algum tensor de espin. Lembrando que, como todos os espaços de espin são bidimensionais, os únicos objetos de espin totalmente antissimétricos que possuem utilidade carregam dois índices do mesmo tipo (CARDOSO, 2005). A contribuição eletromagnética é obtida ao realizar-se uma contração nos índices A e B da equação (25), notando que a versão contraída do termo quadrático em $\vartheta_{aA}{}^B$ é aniquilada pela contração. Com efeito,

$$W_{abA}{}^A = 2\partial_{[a}\vartheta_{b]A}{}^A = (-4i)\partial_{[a}\Phi_{b]} = -2iF_{ab}, \quad (32)$$

onde F_{ab} é o tensor de Maxwell e Φ_b é um vetor mundo³. Sendo assim,

²Daqui em diante, a letra núcleo M denotará γ ou ε .

³Em cada formalismo, Φ_b constitui a parte imaginária de uma estrutura afim contraída e é identificado como um potencial eletromagnético afim que, geralmente,

obtém-se

$$W_{abAB} = \frac{1}{2} S_{AB'}^c S_B^{dB'} R_{abcd} - i F_{ab} M_{AB}. \quad (33)$$

A equação (33) claramente exibe o desdobramento que envolve as contribuições gravitacional e eletromagnética do objeto W . Assim, a parte simétrica em A e B carrega toda a informação gravitacional sobre a curvatura de \mathfrak{M} , enquanto que a parte antissimétrica carrega toda a informação eletromagnética.

Sob transformações de calibre, os objetos W_{abAB} e seus complexos conjugados, se comportam no formalismo ε como densidades de espin invariantes de peso +1 e anti-peso -1 e, no formalismo γ , como tensores de espin. Em qualquer formalismo, os espinores de curvatura do respectivo ϑ_{aA}^B surgem da decomposição bivetorial dada por

$$S_{AA'}^a S_{BB'}^b W_{abCD} = M_{A'B'} \omega_{ABCD} + M_{AB} \omega_{A'B'CD}, \quad (34)$$

onde ω_{ABCD} e $\omega_{A'B'CD}$ são os espinores de curvatura do respectivo formalismo. A partir do desdobramento espinorial dos índices mundo portados pelos objetos W , obtemos uma associação com o par de espinores de curvatura do tipo

$$W_{abCD} \leftrightarrow (\omega_{ABCD}, \omega_{A'B'CD}). \quad (35)$$

Mais explicitamente, os espinores de curvatura são definidos pelas seguintes equações:

$$\omega_{ABCD} = \omega_{(AB)CD} \doteqdot \frac{1}{2} S_{AA'}^a S_B^{bA'} W_{abCD} \quad (36)$$

e

$$\omega_{A'B'CD} = \omega_{(A'B')CD} \doteqdot \frac{1}{2} S_{AA'}^a S_{B'}^{bA} W_{abCD}. \quad (37)$$

Devido ao comportamento dos objetos W sob transformações de calibre, os espinores de curvatura aparecem no formalismo γ como tensores de espin e, no formalismo ε , como densidades tensoriais invariantes de peso -2 e peso absoluto -2 (CARDOSO, 2005).

é o mesmo para ambos os formalismos.

4.1 Espinores de Curvatura Gravitacionais

A estrutura gravitacional de \mathfrak{M} pode ser descrita completamente pelo seguinte par de objetos espinoriais:

$$G = (\omega_{AB(CD)}, \omega_{A'B'(CD)}), \quad (38)$$

os quais nos permite (PENROSE; RINDLER, 1986) escrever a expressão espinorial para o tensor de Riemann como⁴

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'}M_{C'D'}\omega_{AB(CD)} + M_{AB}M_{C'D'}\omega_{A'B'(CD)}) + c.c. \quad (39)$$

Conforme observado originalmente por (PENROSE; RINDLER, 1986), é de grande interesse implementar-se uma interpretação cosmológica dos espinores gravitacionais a partir da expansão

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD} + M_{AB}M_{C'D'}\Xi_{CA'DB'}) + c.c., \quad (40)$$

sendo os espinores X e Ξ definidos por

$$X_{ABCD} = \frac{1}{4}M^{A'B'}M^{C'D'}R_{AA'BB'CC'DD'} = \omega_{AB(CD)} \quad (41)$$

e

$$\Xi_{CA'DB'} = \frac{1}{4}M^{AB}M^{C'D'}R_{AA'BB'CC'DD'} = \omega_{A'B'(CD)}. \quad (42)$$

Deve ser notado que os índices dos espinores das equações (41) e (42) apresentam simetria nos pares e nos índices de cada par. Em particular, a simetria nos pares é estabelecida a partir das propriedades de simetria do tensor de Riemann (PENROSE; RINDLER, 1986).

É relevante mencionar também que, na expansão de Penrose para o espinor X (PENROSE; RINDLER, 1986; CARDOSO, 2005), as simetrias dos índices $ABCD$ portadas por este espinor simplificam consideravelmente os termos da expansão

⁴O símbolo *c.c.* denota aqui, e no que segue, uma contribuição conjugada complexa.

$$\begin{aligned}
X_{ABCD} = & X_{(ABCD)} - \frac{1}{4}(M_{AB}X^M{}_{(MCD)} + M_{AC}X^M{}_{(MBD)} \\
& + M_{AD}X^M{}_{(MBC)}) - \frac{1}{3}(M_{BC}X^M{}_A{}_{(MD)} + M_{BD}X^M{}_A{}_{(MC)}) \\
& - \frac{1}{2}M_{CD}X_{AB}{}^M{}_M,
\end{aligned} \tag{43}$$

e propiciam deste modo a seguinte relação:

$$X_{ABCD} = X_{(ABCD)} - 2\Lambda M_{A(C}M_{D)B}, \tag{44}$$

com

$$\Psi_{ABCD} = X_{(ABCD)} = X_{A(BCD)} = X_{(ABC)D}. \tag{45}$$

No v\'acuo, a quantidade Λ \'e proporcional \'a constante cosmol\'ogica. Além disso, o objeto Ψ que aparece na equa\c{c}\ao(45) define uma fun\c{c}\ao de onda para gr\'avitons (CARDOSO, 2007, 2009). Mais detalhes sobre a interpreta\c{c}\ao cosmol\'ogica referida acima pode ser vista em (CARDOSO, 2005).

4.2 Espinores de Curvatura Eletromagn\'eticos

Em ambos os formalismos, os espinores de curvatura eletromagn\'etica s\ao dados pelo par espinorial

$$E = (\omega_{ABC}{}^C, \omega_{A'B'C'}{}^C), \tag{46}$$

o qual surge diretamente da decomposi\c{c}\ao bivetorial

$$S^a{}_{AA'}S^b{}_{BB'}F_{ab} = \frac{i}{2}(M_{A'B'}\omega_{ABC}{}^C + M_{AB}\omega_{A'B'C'}{}^C), \tag{47}$$

com F_{ab} dado por (32). Vale a pena enfatizar que os espinores de curvatura eletromagn\'etica satisfazem (CARDOSO, 2005) as seguintes rela\c{c}\oes de conjugac\ao:

$$\omega_{ABC}{}^C = -\omega_{ABC'}{}^{C'} \tag{48}$$

e

$$\omega_{A'B'C'}{}^C = -\omega_{A'B'C'}{}^{C'}. \tag{49}$$

Consequentemente, temos os desdobramentos

$$\omega_{ABCD} = \omega_{(AB)(CD)} + \frac{1}{2}\omega_{(AB)L}{}^L M_{CD} \quad (50)$$

e

$$\omega_{A'B'CD} = \omega_{(A'B')(CD)} + \frac{1}{2}\omega_{(A'B')L}{}^L M_{CD}, \quad (51)$$

juntamente com os complexos conjugados de (50) e (51).

4.3 Técnicas Calculacionais

O comutador da equação (28) é escrito espinorialmente como a seguinte expansão bivetorial formal:

$$[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = M_{A'B'}\Delta_{AB} + M_{AB}\Delta_{A'B'}, \quad (52)$$

onde os Δ envolvidos no lado direito da equação (52) são operadores diferenciais de segunda ordem simétricos que satisfazem a regra de Leibniz e portam a propriedade de linearidade.

No formalismo γ , os operadores Δ_{AB} e $\Delta_{A'B'}$ se comportam formalmente como tensores de espin covariantes sob transformações de calibre, e são definidos por

$$\Delta_{AB} = \nabla_{C'(A}\nabla_{B)}{}^{C'} - i\beta_{C'(A}\nabla_{B)}{}^{C'} = \Delta_{(AB)} \quad (53)$$

e

$$\Delta_{A'B'} = \nabla_{C(A'}\nabla_{B')}{}^C + i\beta_{C(A'}\nabla_{B')}{}^C = \Delta_{(A'B')}, \quad (54)$$

onde β_a é um vetor mundo real e invariante de calibre (CARDOSO, 2005), o qual satisfaz as seguintes equações de autovalores:

$$\nabla_a\gamma_{BC} = i\beta_a\gamma_{BC} \doteqdot i(\partial_a\Phi + 2\Phi_a)\gamma_{BC} \quad (55)$$

e⁵

$$\nabla_a\gamma^{BC} = (-i)\beta_a\gamma^{BC}. \quad (56)$$

As expressões (53) e (54) podem ser reescritas de maneira mais simples, modificando-se as configurações indiciais tal que

$$\Delta_{AB} = -\nabla_{(A}^{C'}\nabla_{B)}{}^{C'} \quad (57)$$

⁵Em (55), a quantidade Φ é o argumento polar da (única) componente independente de γ_{AB} .

e

$$\Delta_{A'B'} = -\nabla_{(A'}^C \nabla_{B')C}^{}. \quad (58)$$

No formalismo ε , temos as seguintes configurações:

$$\Delta_{AB} = \nabla_{C'(A} \nabla_{B')}^{C'} = -\nabla_{(A}^{C'} \nabla_{B)C'}^{}, \quad (59)$$

com Δ_{AB} correspondentemente se comportando formalmente como densidades espinoriais invariantes de calibre de peso -1 e anti-peso -1 , respectivamente.

Às vezes, é de interesse escrever-se a forma contravariante dos operadores Δ em ambos os formalismos. Tem-se, com efeito,

$$\Delta^{AB} \doteq M^{AC} M^{BD} \Delta_{CD}, \quad (60)$$

juntamente com o respectivo conjugado complexo. As derivadas Δ de vetores de espin ζ^C e ξ_C , em qualquer formalismo, são formalmente dadas pelas configurações (CARDOSO, 2005)

$$\Delta_{AB} \zeta^C = \omega_{ABM}{}^C \zeta^M = X_{ABM}{}^C \zeta^M + \frac{1}{2} \omega_{ABM}{}^M \zeta^C, \quad (61)$$

$$\Delta_{A'B'} \zeta^C = \omega_{A'B'M}{}^C \zeta^M = \Xi_{A'B'M}{}^C \zeta^M + \frac{1}{2} \omega_{A'B'M}{}^M \zeta^C \quad (62)$$

e

$$\Delta_{AB} \xi_C = -\omega_{ABC}{}^M \xi_M = -(X_{ABC}{}^M \xi_M + \frac{1}{2} \omega_{ABM}{}^M \xi_C), \quad (63)$$

$$\Delta_{A'B'} \xi_C = -\omega_{A'B'C}{}^M \xi_M = -(\Xi_{A'B'C}{}^M \xi_M + \frac{1}{2} \omega_{A'B'M}{}^M \xi_C), \quad (64)$$

juntamente com as conjugadas complexas das equações (61)-(64) e as identificações gravitacionais (41) e (42).

Para uma densidade escalar η de peso α , temos

$$\Delta_{AB} \eta = -\alpha \eta \omega_{ABC}{}^C, \quad \Delta_{A'B'} \eta = -\alpha \eta \omega_{A'B'C}{}^C. \quad (65)$$

Para derivadas covariantes de densidades tensoriais de espin de valência arbitrária, correspondentemente temos

$$\Delta_{AB} (\eta T_{C\dots D}) = (\Delta_{AB} \eta) T_{C\dots D} + \eta \Delta_{AB} T_{C\dots D}, \quad (66)$$

onde $T_{C..D}$ é um tensor de espin, e tem-se considerado as expansões de Leibniz para os produtos externos entre densidades escalares de espin e tensores de espin. Além disso, em nossos cálculos serão utilizados os procedimentos baseados no uso das seguintes regras calculacionais (CARDOSO, 2005):

$$2\nabla_{[C}^{A'}\nabla_{A]}M_{AC} = M_{AC}\square = \nabla_D^{A'}(M_{CA}\nabla_{A'}^D) \quad (67)$$

⁶

$$2\nabla_{A'}^{[C}\nabla_{A]}M_{CA} = M_{CA}\square = \nabla_{A'}^D(M_{AC}\nabla_D^{A'}), \quad (68)$$

onde \square é o operador d'Alembertiano definido por

$$\square = S_{AA'}^aS^{bBB'}\nabla_a\nabla_b = \nabla_{DD'}\nabla^{DD'} = \nabla^{DD'}\nabla_{DD'}, \quad (69)$$

o qual é invariante de calibre. Aqui torna-se necessário utilizar as seguintes configurações que envolvem desdobramentos de operadores derivadas covariantes contraídas de segunda ordem (CARDOSO, 2005):

$$\nabla_{A'}^C\nabla^{AA'} = \Delta^{AC} - \frac{1}{2}M^{AC}\square \quad (70)$$

e

$$\nabla_C^{A'}\nabla_{AA'} = -\Delta_{AC} + \frac{1}{2}M_{AC}\square. \quad (71)$$

Ainda neste contexto, é relevante mencionar que o procedimento chave para a obtenção das equações de onda para fótons e para grávitons em ambos os formalismos, é levado a cabo a partir do uso das equações de campo para os espinores curvaturas eletromagnéticos e gravitacionais, respectivamente. De acordo com tal procedimento, utiliza-se as mesmas técnicas calculacionais que aquelas que temos utilizado anteriormente. No entanto, como este não é o objetivo crucial do nosso trabalho, omitiremos os desenvolvimentos pertinentes. Estas deduções podem ser vistas detalhadamente na Ref. (CARDOSO, 2005).

⁶Lembramos aqui que temos usado a letra núcleo M para denotar γ ou ε .

5 Equação de Penrose

Serão apresentadas, neste capítulo as equações twistoriais para campos conformalmente invariantes (covariantes e contravariantes) com um único índice. Para a obtenção de tais equações, primeiramente consideramos a equação conforme de Killing (PENROSE; RINDLER, 1984)

$$\nabla_{(a} K_{b)} - \frac{1}{4} g_{ab} \nabla_c K^c = 0, \quad (72)$$

a qual, obviamente, pode ser interpretada como a parte livre de traço do tensor mundo $\nabla_{(a} K_{b)}$ (PENROSE; RINDLER, 1986), com K_a sendo um vetor de Killing conforme nulo. A equação (72), transcrita na forma espinorial para índices contravariantes e covariantes, torna-se

$$\nabla^{(AA'} K^{BB')} = \frac{1}{4} (\nabla_{CC'} K^{CC'}) M^{AB} M^{A'B'} \quad (73)$$

e

$$\nabla_{(AA'} K^{BB')} = \frac{1}{4} (\nabla^{CC'} K_{CC'}) M_{AB} M_{A'B'}, \quad (74)$$

onde a simetrização envolvida é supostamente nos pares de índices. Para obtermos as equações (73) e (74), utilizamos a transcrição espinorial usual de índices mundo para índices espinoriais. Deste modo, os objetos K que aparecem nas equações (73) e (74), são as versões espinoriais Hermitianas de um vetor de Killing conforme nulo.

A nulidade de K_a é expressa como

$$g_{ab} K^a K^b = K^a K_a = 0 = M_{AB} M_{A'B'} K^{AA'} K^{BB'} = K^{AA'} K_{AA'}. \quad (75)$$

Agora, levando em conta o fato de que os vetores de Killing sob consideração são nulos, podemos realizar (PENROSE; RINDLER, 1986) a seguinte decomposição:

$$K^{AA'} = \xi^A \xi^{A'}. \quad (76)$$

Para índices covariantes, similarmente, temos a seguinte prescrição:

$$K_{AA'} = \xi_A \xi_{A'}. \quad (77)$$

Enfatizamos que a decomposição exibida pelas equações (76) e (77) é realizada de acordo com a prescrição bem conhecida que quaisquer vetores nulos podem ser transcritos em termos de produtos entre espinores

elementares conjugados complexos.

Com as decomposições de $K^{AA'}$ e $K_{AA'}$ consideradas acima, é possível reescrever-se as equações (73) e (74) da seguinte maneira:

$$\nabla^{(A'A}(\xi^B\xi^{B')}) = \frac{1}{4}[\nabla_{CC'}(\xi^C\xi^{C'})]M^{AB}M^{A'B'} \quad (78)$$

e

$$\nabla_{(A'A}(\xi_B\xi_{B')}) = \frac{1}{4}[\nabla^{CC'}(\xi_C\xi_{C'})]M_{AB}M_{A'B'}, \quad (79)$$

onde, como antes, a operação de simetria deve ser aplicada nos pares de índices. Expandindo a equação (79), temos

$$\frac{1}{2}[\nabla_{A'A}(\xi_B\xi_{B'}) + \nabla_{B'B}(\xi_A\xi_{A'})] = \frac{1}{4}[\nabla^{CC'}(\xi_C\xi_{C'})]M_{AB}M_{A'B'}, \quad (80)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\xi_B\nabla_{A'A}\xi_{B'} + \xi_{B'}\nabla_{A'A}\xi_B + \xi_A\nabla_{B'B}\xi_{A'} + \xi_{A'}\nabla_{B'B}\xi_A) &= \quad (81) \\ \frac{1}{4}[\nabla^{CC'}(\xi_C\xi_{C'})]M_{AB}M_{A'B'}. \end{aligned}$$

Assim, reescrevendo-se cada um dos termos do lado esquerdo da igualdade (??) como suas contribuições simétrica e antissimétrica e, posteriormente, efetuando-se uma operação de simetria nos índices AB e $A'B'$, obtemos

$$\xi_{(A'}\nabla_{B')}(A\xi_B) + c.c. \equiv 0, \quad (82)$$

desde que os objetos métricos M_{AB} e $M_{A'B'}$ sejam antissimétricos. Com isto, é suficiente pegar-se

$$\nabla_{A'(A}\xi_{B)} = 0 \quad (83)$$

e

$$\nabla^{A'(A}\xi_{B)} = 0. \quad (84)$$

As equações (83) e (84) são chamadas equações twistoriais de Penrose (ISHAM; PENROSE; SCIAMA, 1975; PENROSE; Mac CALLUM, 1972). Observamos que estas equações são conformalmente invariantes (PENROSE; RINDLER, 1984), independentemente de se \mathfrak{M} é conformalmente plano ou não. As equações envolvendo os campos conjugados

complexos são⁷

$$\nabla^{A(A'} \xi^{B')} = 0 \quad (85)$$

e

$$\nabla_{A(A'} \xi_{B')} = 0. \quad (86)$$

Naturalmente, os campos twistoriais estão intimamente relacionados com soluções da equação de Killing conforme. Devemos enfatizar que a legitimidade das equações twistoriais como um sistema de equações de campo equivalentes, está por trás de uma propriedade geral de constância covariante dos objetos conectores Hermitianos para ambos os formalismos (INFELD; Van Der WAERDEN, 1933; BADE; JEHLE, 1953). Assim sendo, em ambos os formalismos, é possível obter-se as equações de campo do nosso contexto levando-se em conta as condições de compatibilidade métrica

$$\nabla_a (M^{AB} M^{A'B'}) = 0 \Leftrightarrow \nabla_a (M_{AB} M_{A'B'}) = 0. \quad (87)$$

Portanto, usando-se as prescrições do produto externo elementar dadas pelas equações (76) e (77), juntamente com suas versões conjugadas complexas, depois de algumas manipulações pode-se obter as equações (83)e (84) as quais, quando combinadas com suas conjugadas complexas, apresentam de fato a forma típica das equações twistoriais.

É importante mencionar que as soluções das equações twistoriais são geralmente sujeitas a uma forte condição de consistência (para maiores detalhes, vide (CARDOSO, 2010)). Em adição, enfatizamos que a invariância conforme de qualquer solução das equações de campo twistoriais *não* depende de se o espaço-tempo de fundo é conformalmente plano ou não. No formalismo γ , as entradas do par (ξ^A, ξ_A) , e seus conjugados complexos, se comportam como vetores de espin sob transformações do grupo de Weyl, enquanto que suas contrapartes no formalismo ε aparecem como densidades vetoriais de espin de pesos $\pm 1/2$ e anti-pesos $\pm 1/2$, respectivamente.

⁷ As equações twistoriais são suficientes para garantir a aplicabilidade da equação de Killing conforme mas, no entanto, não são necessárias para isto. Uma condição necessária é dada pela equação (82).

6 Equações de Onda

Como mencionado no Capítulo 1, nós agora deduziremos as equações de onda para campos twistoriais em espaços-tempo curvos sem torção, que portam um índice covariante e que supostamente ocorrem nos formalismos de Infeld e van der Waerden. Para levar a cabo a dedução de interesse, usaremos as equações (83) e (84), e será suficiente trabalharmos no formalismo γ . No trabalho da Ref. (CARDOSO, 2010), obteve-se a equação de onda para campos twistoriais contravariantes com um único índice. Concordantemente, no formalismo γ , um tal campo ξ^A é solução de uma equação de onda da seguinte forma:

$$(\square - \frac{R}{12})\xi^A = \frac{2i}{3}\phi^A_B\xi^B, \quad (88)$$

com R sendo o escalar de Ricci de qualquer ∇_a , e ϕ^A_B denotando uma função de onda para fótons de Infeld e van der Waerden (KUERTEN; CARDOSO, 2011; CARDOSO, 2012a, 2012b).

Nossos procedimentos começam reescrevendo a equação (83) com base na seguinte relação:

$$\nabla_{A'(A}\xi_{B)} = \nabla_{A'A}\xi_B - \nabla_{A'[A}\xi_{B]} = 0. \quad (89)$$

Na equação (89), a parte antisimétrica é reexpressa usando-se a regra calculacional dada pela equação (67)

$$\nabla_{A'[A}\xi_{B]} = \frac{1}{2}\gamma_{BA}\nabla_{A'}^L\xi_L = -\frac{1}{2}\gamma_{AB}\nabla_{A'}^L\xi_L. \quad (90)$$

Neste estágio, fazemos algumas manipulações indiciais utilizando o mecanismo de levantar e abaixar índices espinoriais, para obter

$$\nabla_{A'[A}\xi_{B]} = -\frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_{A'M}\xi_L = \frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_{A'L}\xi_M. \quad (91)$$

Assim, voltando à equação (89), obtemos

$$\nabla_{A'(A}\xi_{B)} = \nabla_{A'A}\xi_B - \frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_{A'L}\xi_M = 0, \quad (92)$$

tal que, passando o segundo termo da subtração para o lado direito, vem

$$\nabla_{A'A}\xi_B = \frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_{A'L}\xi_M, \quad (93)$$

ou ainda,

$$2\nabla_{A'A}\xi_B = \gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_{A'L}\xi_M. \quad (94)$$

A fim de completar-se a obtenção da equação de onda pertinente no formalismo γ , atua-se com $\nabla_C^{A'}$ sobre (94), tal que

$$2\nabla_C^{A'}\nabla_{A'A}\xi_B = \nabla_C^{A'}(\gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_{A'L}\xi_M). \quad (95)$$

Ainda mais, usando-se a propriedade

$$\nabla_C^{A'}(\gamma_{AB}\gamma^{LM}) = 0, \quad (96)$$

obtem-se

$$2\nabla_C^{A'}\nabla_{A'A}\xi_B = \gamma_{AB}\gamma^{LM}\nabla_C^{A'}\nabla_{A'L}\xi_M. \quad (97)$$

Agora, na equação (97), utilizamos o desdobramento espinorial dado pela (71) juntamente com a definição (57), para escrever

$$2\left(\frac{1}{2}\gamma_{AC}\square - \Delta_{AC}\right)\xi_B = \gamma_{AB}\gamma^{LM}\left(\frac{1}{2}\gamma_{LC}\square\xi_M - \Delta_{LC}\xi_M\right). \quad (98)$$

Portanto, realizando-se uma transvecção na equação (98) com γ^{CB} , isto é, efetuando-se o produto externo com uma contração, vem

$$\begin{aligned} \gamma^{CB}\gamma_{AC}\square\xi_B - 2\gamma^{CB}\Delta_{AC}\xi_B &= \frac{1}{2}\gamma^{CB}\gamma_{AB}\gamma^{LM}\gamma_{LC}\square\xi_M - \\ &\quad \gamma^{CB}\gamma_{AB}\gamma^{LM}\Delta_{LC}\xi_M. \end{aligned} \quad (99)$$

No desenvolvimento calculacional que temos implementado, vale a pena observar que o procedimento que leva à (??) é adequado, isto é, a escolha dos índices dos γ

envolvidos tem sido apropriada tal como, por exemplo, os índices de γ^{CB} . Para configurações indiciais oriundas de outras transvecções, tais como com γ^{AB} e γ^{AC} , a (98) se torna trivial. Então, manipulando adequadamente os índices da eq. (??) e realizando uma substituição indicial, obtemos

$$-\delta^B{}_A\square\xi_B + 2\Delta^B{}_A\xi_B = \frac{1}{2}\square\xi_A + \Delta^B{}_A\xi_B, \quad (100)$$

ou ainda,

$$-\square\xi_A + 2\Delta_A{}^B\xi_B = \frac{1}{2}\square\xi_A + \Delta_A{}^B\xi_B, \quad (101)$$

tal que⁸

$$\square \xi_A - \frac{2}{3} \Delta_A{}^B \xi_B = 0. \quad (102)$$

A equação de onda de interesse é escrita explicitamente quando calcula-se a derivada delta da equação (102). Para isto, usa-se a expansão de Penrose (PENROSE; RINDLER, 1986) dada por (44), além das prescrições das derivadas delta tal como em (63). Assim, manipulando a simetria do bloco que carrega os objetos M em (44), vem

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} \xi_C &= -\omega_{ABC}{}^M \xi_M = -\Psi_{ABC}{}^M \xi_M + \Lambda(M_{AC} M^M{}_B + \\ &\quad M_A{}^M M_{CB}) \xi_M + i\phi_{AB} \xi_C, \end{aligned} \quad (103)$$

ou ainda,

$$\Delta_{AB} \xi_C = -\Psi_{ABC}{}^M \xi_M + \Lambda(-M_{AC} \xi_B + M_{CB} \xi_A) + i\phi_{AB} \xi_C. \quad (104)$$

Portanto, transvectando a equação (104) com M^{CB} , resulta

$$\begin{aligned} M^{CB} \Delta_{AB} \xi_C &= -M^{CB} \Psi_{ABC}{}^M \xi_M + \Lambda(-M^{CB} M_{AC} \xi_B + \\ &\quad M^{CB} M_{CB} \xi_A) + iM^{CB} \phi_{AB} \xi_C, \end{aligned} \quad (105)$$

tal que, após algumas manipulações, levando em conta que $M^{CB} M_{CB} = 2$, obtemos

$$\Delta_A{}^B \xi_B = \Lambda(\xi_A + 2\xi_A) + i\phi_A{}^B \xi_B. \quad (106)$$

Agora, sabendo que $\Lambda = R/24$, temos

$$\Delta_A{}^B \xi_B = \frac{R}{8} \xi_A + i\phi_A{}^B \xi_B. \quad (107)$$

A equação de onda pertinente emerge ao substituir-se (107) em (102)

$$\square \xi_A - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{8} \xi_A + i\phi_A{}^B \xi_B \right) = 0, \quad (108)$$

tal que, evidenciando ξ_A em (108), obtem-se

$$\left(\square - \frac{R}{12} \right) \xi_A = \frac{2}{3} i\phi_A{}^B \xi_B. \quad (109)$$

No formalismo ε , como ξ_A é uma densidade vetorial de espin com

⁸Notamos que os operadores Δ são simétricos tal que o “staggering” de seus índices é imaterial.

peso $-1/2$, conclui-se que a contraparte ε da derivada (107) deve ser expressa como uma contribuição puramente gravitacional, a saber,

$$\Delta_A{}^B \xi_B = \frac{R}{8} \xi_A. \quad (110)$$

Sendo assim, para o formalismo ε , a versão da equação de onda (109) é explicitamente dada por⁹

$$(\square - \frac{R}{12}) \xi_A = 0. \quad (111)$$

Vale a pena observar que o sinal comum no lado direito das equações (88) e (109) ocorre devido à relação métrica do formalismo γ que envolve a configuração diferencial (107) e a expansão

$$\Delta_A{}^B \xi^B = -(\frac{R}{8} \xi^A + i\phi_A{}^B) \xi^B, \quad (112)$$

com a relação contravariante (112) pegando lugar quando usamos as seguintes derivadas (CARDOSO, 2005):

$$\Delta_{AB} \gamma_{CD} = 2i\phi_{AB} \gamma_{CD} \quad (113)$$

e

$$\Delta_{AB} \gamma^{CD} = -2i\phi_{AB} \gamma^{CD}. \quad (114)$$

No que diz respeito a esta situação, o que ocorre é que as partes das derivadas contraídas $\Delta\xi$ sob consideração se compensam mutuamente de uma forma ou de outra, produzindo assim a adequação formal dos acoplamentos pertinentes através da relação

$$\Delta_A{}^B \xi_B + \Delta_{AB} \xi^B = 2i\phi_A{}^B \xi_B. \quad (115)$$

A princípio, poder-se-ia pensar que um conjunto de correlações diferenciais entre as equações de onda no formalismo γ para ξ^A e ξ_A poderia pegar lugar ao utilizar-se os dispositivos covariantes (CARDOSO, 2005, 2007)

$$\square \xi^A = \gamma^{AB} \square \xi_B + (\square \gamma^{AB}) \xi_B + 2(\nabla^h \gamma^{AB}) \nabla_h \xi_B \quad (116)$$

e

$$\square \xi_A = \gamma_{BA} \square \xi^B + (\square \gamma_{BA}) \xi^B + 2(\nabla^h \gamma_{BA}) \nabla_h \xi^B, \quad (117)$$

⁹Deve ser dito que a igualdade (102) também permanece válida no formalismo ε .

juntamente com as equações de autovalores (55) e

$$\square\gamma^{AB} = -\Theta\gamma^{AB}, \quad \square\gamma_{AB} = -\bar{\Theta}\gamma_{AB}, \quad (118)$$

onde

$$\Theta \doteqdot \beta^h \beta_h + i\nabla_h \beta^h. \quad (119)$$

De fato, a equação (119) é obtida a partir das equações de autovalores dadas pelas eqs. (55) e (56) juntamente com a definição de \square . Se quaisquer dispositivos para levantar e abaixar índices fossem implementados de uma maneira direta, então uma quantidade considerável de informação “estranha” seria, com efeito, introduzida no formulário resultante, enquanto que algumas contribuições envolvidas nos passos intermediários dos cálculos que dão origem às equações

$$\nabla^{(A(A'K^{B'})B)} = 0, \quad \nabla_{(A(A'K^{B'})B)} = 0, \quad (120)$$

poderiam ser eventualmente descartadas. Podemos concluir que, qualquer tentativa de fazer uso das prescrições métricas para recuperar as equações (88) e (109) uma a partir da outra, deveria visivelmente carregar uma série inadequação em que as equações twistoriais do Capítulo 4 não poderiam ser implementadas simultaneamente. É evidente que a propriedade deduzida acima essencialmente reflete a ausência de contrações indiciais das equações twistoriais.

7 Conclusões

Neste trabalho, foi estabelecida a ausência de correlações diferenciais entre as equações de onda para campos twistoriais covariantes e contravariantes que portam um único índice, as quais ocorrem nos formalismos de Infeld e van der Waerden. Para isto, foi necessário deduzir-se as equações de onda explicitamente, utilizando-se as técnicas calculacionais exibidas no Capítulo 4.

A dedução da equação de onda para campos covariantes, quando combinada com aquela para campos contravariantes, tornou possível obter-se um conjunto completo de configurações diferenciais, as quais permitiram prescrever todos os correspondentes acoplamentos no formalismo γ entre curvaturas espinoriais e campos twistoriais com um índice. Adicionalmente, nosso trabalho permitiu realçar de maneira clara os procedimentos calculacionais utilizados para descrever as equações twistoriais tradicionais num espaço-tempo curvo. Ainda mais, na dedução das equações de onda pertinentes, ficou evidente que a transcrição espinorial da equação clássica de Killing produz equações twistoriais que são formalmente as mesmas.

Uma das características notáveis das equações de onda obtidas é, de fato, que elas não envolvem acoplamentos entre os campos twistoriais envolvidos e funções de onda para grávitons. Este característica pode ser observada claramente nos desenvolvimentos calculacionais da obtenção da equação de onda, em que a parte que carrega a informação gravitacional é aniquilada devido a propriedades de simetria.

Com efeito, mostrou-se que as únicas configurações de acoplamento produzidas pelas técnicas calculacionais que utilizamos, exibem somente produtos externos que carregam os próprios campos twistoriais juntamente com curvaturas eletromagnéticas para o formalismo γ . No caso do formalismo ε , foi mencionado que estes acoplamentos não ocorrem devido a propriedades geométricas dos respectivos espinores de curvatura relacionadas com valências e pesos. Assim, como vimos, os dispositivos covariantes convencionais do formalismo usados para controlar valências de configurações diferenciais espinoriais, tornam-se supérfluos no que se refere a especificação completa da forma das equações de campo e de onda consideradas.

Finalmente, enfatizamos que qualquer tentativa de fazer uso das prescrições métricas dos formalismos para recuperar tanto a equação (66) como (87), uma a partir da outra, deveria visivelmente carregar uma série inadequação em que as equações twistoriais não poderiam ser trazidas a tona simultaneamente. Com base no que vimos no Capítulo

6, pode-se concluir que a propriedade relacionada com a ausência de correlações diferenciais entre as equações de onda que consideramos efetivamente, remete a ausência de contrações indiciais nas equações de campo twistoriais.

Uma proposta para trabalhos futuros é obter as equações de onda para campos twistoriais de valências arbitrárias, ou seja, com mais de um índice.

Referências

- BADE, W. L.; JEHLE, H. An introduction to spinors. *Rev. Mod. Phys.*, v. 25, n. 3, p. 714–727, 1953.
- BJORKEN, J.; S.D.DRELL. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- CARDOSO, J. G. The infeld - van der waerden formalisms for general relativity. *Czech Jour.Phys.*, v. 55, n. 4, p. 401, 2005.
- CARDOSO, J. G. *Acta Physica Polonica B*, v. 38, n. 8, p. 330, 2007.
- CARDOSO, J. G. Wave equations for gravitons with sources within the frameworks of the infeld-van der waerden spinor formalisms. *Il Nuovo Cimento B*, v. 124, n. 6, p. 631, 2009.
- CARDOSO, J. G. A full description of the integrability condition for the twistor equation in curved space-times and new wave equations for conformally invariant spinor fields. *Jour.Math.Phys.* 2, v. 51, 2010.
- CARDOSO, J. G. The classical two-component spinor formalisms for general relativity I. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, v. 22, p. 955–983, 2012.
- CARDOSO, J. G. The classical two-component spinor formalisms for general relativity II. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, v. 22, p. 955–1008, 2012.
- INFELD, L. *Physik ZS (N.Y.)*, v. 33, p. 475, 1932.
- INFELD, L.; Van Der WAERDEN, B. L. *Sitzber. preuss.Akad. Wiss., Physik-math*, n. 9, p. 380, 1933.
- ISHAM, C. J.; PENROSE, R.; SCIAMA, D. W. *Quantum Gravity*. [S.l.]: Oxford University Press, Oxford, 1975.
- J.SAKURAI. *Modern Quantum Mechanics*. Manoa: Addison -Wesley, 1994.
- KUERTEN, A. M.; CARDOSO, J. G. Null infeld-van der waerden electromagnetic fields from geometric sources. *Int. Jour. Theor. Phys.*, v. 50, n. 10, p. 3007, 2011.
- PENROSE, R.; Mac CALLUM, M. A. H. Twistor theory: An approach to the quantisation of fields and space-time. *Physics Reports*, v. 6, n. 4, p. 241, 1972.

PENROSE, R.; RINDLER, W. *Spinors and Space-Time Vol.1.* New York: Cambrigde University Press, Cambrigde, 1984.

PENROSE, R.; RINDLER, W. *Spinors and Space-Time Vol.2.* New York: Cambrigde University Press, Cambrigde, 1986.

SCHOUTEN, J. A. *Ricci Calculus Springer-Verlang, Berlin, Gottingen, Heidelberg*, 1954.

Van Der WAERDEN, B. L. Spinoranalyse. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Physik.*, n. 1, p. 100, 1929.

WEYL, H. Elektron und gravitation I. *Z.Physik*, v. 56, p. 330, 1929.

WITTEN, L. Invariants of general relativity and the classification of spaces. *Phys. Rev.*, v. 113, n. 1, p. 357, 1959.