

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

MARCOS JOÃO CORREIA

CARACTERIZAÇÃO DE ESTADOS NO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE
SISTEMAS CONTÍNUOS

Joinville
2010

Resumo

Nesta dissertação propomos um método numérico capaz de caracterizar estados no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos contínuos, modelados por um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem. O método baseia-se na investigação do espaço de parâmetros construído utilizando todos os expoentes de Lyapunov do sistema. Propomos ainda nesta dissertação dois novos sistemas dinâmicos contínuos de quatro dimensões, um deles construído a partir do conhecido sistema de Lorenz. Nos dois sistemas, foram realizados estudos analítico e numérico. O estudo analítico não somente calculou a divergência e os pontos de equilíbrio dos sistemas, mas também analisou a estabilidade dos pontos encontrados. Por meio desta análise foi possível concluir que ambos os sistemas podem ser dissipativos, e podem apresentar caos, para valores adequados dos parâmetros. No estudo numérico dos dois sistemas aplicamos o método por nós proposto e algumas técnicas conhecidas, como a construção de diagramas de bifurcação e diagramas no espaço de fase. A partir disso, observamos que dependendo dos valores dos parâmetros, os sistemas podem apresentar caos, hipercaos, quaseperiodicidade e periodicidade.

Abstract

In this work we propose a numerical method to characterize different states in parameter-spaces of continuous dynamical systems, modeled by a set of autonomous first order ordinary differential equations. The method is based on the investigation of parameter-spaces constructed using all the Lyapunov exponents of the system. We also propose two new continuous four-dimensional systems, one of them constructed from the known Lorenz system. In both system, we realize analytical and numerical studies. The analytical study was used not only to calculate the divergence and the equilibrium points of the systems, but also to analyse the stability of the equilibrium points found. Through this analysis we can conclude that both systems may be dissipative and chaotic, depending on the parameter values. In the numerical study of both systems we apply the method proposed by us, and techniques known as the construction of bifurcation and phase-space diagrams. From this we observe that, depending on the parameter values, both systems can exhibit chaos, hiperchaos, quasiperiodicity and periodicity.

..... pag. 4.

..... pag. 5.

..... pag. 6.

..... pag. 7.

..... pag. 8.

..... pag. 9.

Conteúdo

1	Introdução	11
2	Breve Revisão Teórica	13
2.1	Sistemas Dinâmicos	13
2.2	Espaço de Fase	15
2.3	Atratores	16
2.4	Pontos de Equilíbrio e Estabilidade	18
2.5	Dependência Sensível nas Condições Iniciais	18
2.6	Diagramas de Bifurcação	21
3	O Método Proposto	22
3.1	Sistemas Hipercaóticos	22
3.2	O Espaço de Parâmetros	23
3.3	O Método de Caracterização da Dinâmica do Sistema	24
3.4	Aplicação do Método Proposto	26
4	Um Novo Sistema Construído a partir do Sistema de Lorenz	30
4.1	O Novo Sistema	30
4.2	Resultados Analíticos	30
4.3	Resultados Numéricos	31
5	Um Outro Sistema de Quatro Dimensões	44
5.1	O Novo Sistema	44
5.2	Resultados Analíticos	44
5.3	Resultados Numéricos	46
6	Conclusão	55
	Bibliografia	56

Capítulo 1

Introdução

O procedimento de modelar sistemas utilizando um conjunto de equações diferenciais, tem aplicações nos mais variados campos, como física, química, biologia, economia, e nas engenharias de um modo geral.

Em 1886, J. H. Poincaré (1854-1912), ao estudar um sistema de equações diferenciais que descrevia as órbitas de três corpos que interagiam entre si gravitacionalmente, percebeu que propriedades qualitativas das soluções deste sistema dinâmico podiam ser investigadas sem a necessidade da resolução do sistema de equações diferenciais analiticamente.

No Capítulo 2 apresentamos algumas técnicas do estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos, assim como alguns conceitos e definições utilizados no estudo da dinâmica dos sistemas apresentados neste trabalho.

Com o contínuo estudo em sistemas dinâmicos, em 1979 Rössler [1] introduziu o termo sistemas hipercaóticos, para nomear a órbita caótica com dois ou mais expoentes de Lyapunov positivos. Esta órbita hipercaótica aparece apenas para sistemas formados por quatro ou mais equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, que podem descrever sistemas nos mais diversos campos do conhecimento, como descrito no Capítulo 3. Além disso, no mesmo capítulo descrevemos o método nomeado espaço de parâmetros e as modificações necessárias para fazer o estudo mais detalhado em sistemas formado por quatro ou mais equações diferenciais. A principal modificação consiste em construir para cada conjunto de valores do expoente de Lyapunov, um espaço de parâmetros correspondente. O método por nós proposto, é aplicado no sistema apresentado na Ref. [2], para o qual também construímos os atratores para quatro pontos mostrados no espaço de parâmetros, e comparamos ambos os resultados. Tal procedimento é mostrado no Capítulo 3.

No Capítulo 4, apresentamos e estudamos um novo sistema de quatro dimensões, autônomo e contínuo, criado a partir do conhecido sistema de Lorenz [3]. Determinamos

analiticamente o único ponto fixo do sistema, e mostramos que ele é instável para o parâmetro $r > 1$. Construímos numericamente o espaço de parâmetros como é sugerido pelo método proposto, assim como os diagramas de bifurcação e as projeções bidimensionais dos atratores.

Um outro sistema de quatro dimensões, autônomo e contínuo é descrito no Capítulo 5, este construído a partir do sistema da Ref. [4]. Da mesma forma, determinamos analiticamente os pontos fixos que neste caso são três, e encontramos que para valores do parâmetro a positivo o ponto fixo trivial é instável. Construímos numericamente os quatro espaços de parâmetros, os diagramas de bifurcação, o espectro do expoente de Lyapunov e as projeções bidimensionais dos atratores.

No Capítulo 6, apresentamos uma conclusão geral do trabalho.

Capítulo 2

Breve Revisão Teórica

Neste capítulo transcreveremos as principais definições e conceitos utilizados no estudo e análise dos resultados deste trabalho. Tais definições e conceitos, bem como as figuras, foram na sua grande maioria extraídos das Refs. [5, 6, 7].

2.1 Sistemas Dinâmicos

Um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto, são denominados sistemas. Os sistemas são aplicados em diversas áreas do conhecimento como na biologia, química, engenharia ou física. Quando algumas grandezas que caracterizam os objetos constituintes do sistema variam no tempo, o sistema é denominado sistema dinâmico.

Um sistema dinâmico pode ser representado por um conjunto de equações, que descreve a evolução temporal do sistema. O tempo pode tanto ser uma variável contínua, quanto uma variável discreta. Abordaremos nesta revisão teórica o caso que o tempo é uma variável contínua, pois todos os modelos aqui estudados têm o tempo como uma variável contínua. Um exemplo de sistema dinâmico no qual o tempo é uma variável contínua, é um sistema de n equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, t), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, t), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(n)}}{dt} &= F_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

que pode ser escrito de forma compacta, utilizando notação vetorial, como

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t), t], \quad (2.2)$$

onde \vec{x} é um vetor n -dimensional e \vec{F} uma função da variável \vec{x} .

Um sistema é dito autônomo, uma vez que as funções F_1, F_2, \dots, F_n não dependem explicitamente do tempo. Caso contrário, se uma das F_1, F_2, \dots, F_n depender explicitamente do tempo o sistema é dito não autônomo. Um sistema não autônomo na sua grande maioria, pode ser reduzido a um sistema autônomo. Para tal, insere-se no sistema uma nova dimensão, ou seja, considera-se o tempo como uma nova variável do sistema. Da mesma maneira, se o sistema tiver uma equação (ou mais equações) de ordem superior pode ser transformada em duas (ou mais equações) de primeira ordem. Em geral basta considerar uma nova variável $x^{(n+1)} = \dot{x}^{(3)}$, neste caso $x^{(3)}$ é uma variável de ordem dois, e n é o numero de variáveis do sistema.

Um exemplo usando os dois tipos de transformação, tanto de um sistema autônomo para um não autônomo, quanto de um sistema de ordem superior para um de primeira ordem, pode ser dado pela equação que descreve o movimento de um oscilador harmônico amortecido e forçado unidimensional, que é dado por

$$\ddot{x} + \psi\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad (2.3)$$

onde ψ é uma constante de amortecimento, ω_0 é a frequência natural do movimento e F_0 e ω são, respectivamente, amplitude e a frequência relacionados à força externa. Para realizar a transformação neste caso, basta considerar $z = t$, $\dot{z} = 1$ e $y = \dot{x}$. Teremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega z) - \psi y - \omega_0^2x, \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

O novo sistema é formado por três equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, com três variáveis, x , y e z . Com a possibilidade de tais transformações, observa-se que a análise posteriormente descrita, não serve apenas para uma pequena gama de sistemas restritos, mas sim, para diversos sistemas que possam ser transformados para um sistema de equações diferenciais ordinárias, autônomas e de primeira ordem.

Em geral não é possível obter soluções analíticas para tais sistemas de equações como o sistema (2.2). Muitas vezes, quando uma solução analítica é encontrada, ela é tão complicada que fica difícil interpretá-la e compreender as principais propriedades de sua dinâmica. Portanto, na maioria dos casos não se resolve o sistema de equações diferenciais, fazendo-se apenas uma análise qualitativa.

O primeiro a observar que as propriedades qualitativas das soluções podiam ser investigadas, sem que tais soluções precisassem ser determinadas explicitamente, foi J. H. Poincaré (1854-1912), ao ganhar um prêmio oferecido pelo rei Oscar II, da Suécia e da Noruega, em 1886. O prêmio seria dado a quem desse uma prova matemática a respeito da estabilidade do sistema solar. Poincaré revitalizou o modo de se lidar com equações diferenciais não lineares, e provavelmente foi o primeiro a vislumbrar a existência do caos.

O estudo qualitativo trata de analisar e extrair informações sobre a dinâmica de um sistema sem ter que resolvê-lo explicitamente. Tal procedimento aplica-se tanto às equações diferenciais lineares como as não-lineares. Contudo, o estudo qualitativo revela seu potencial no estudo das equações não-lineares, pela complexibilidade da sua solução.

Na sequência apresentamos algumas das ferramentas utilizadas, nesta dissertação, para o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos não-lineares.

2.2 Espaço de Fase

O conjunto de Eqs. (2.2) representa um sistema dinâmico, o qual pode ser resolvido numericamente para um certo estado inicial \vec{x}_0 , obtendo assim o estado \vec{x}_t , para qualquer $t > 0$. A Fig. 2.1 mostra a evolução temporal do sistema. Neste caso, $n = 3$, e o espaço de fase é formado pelas três variáveis do sistema $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$. O espaço de fase também

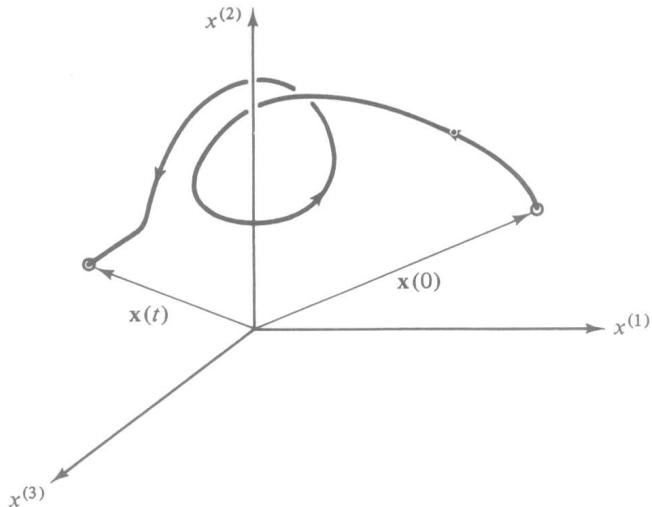


Fig. 2.1: Órbita em um espaço de fase tridimensional. Figura extraída da página 9 da Ref. [7].

pode ser denominado espaço das variáveis. O caminho seguido pelo sistema no espaço de fase, quando ele evolui no tempo, é chamado órbita ou trajetória. Para os sistemas dinâmicos aqui estudados, de tempo contínuo, é comum referir-se ao conjunto de várias órbitas como fluxo.

Observa-se em muitas trajetórias, que depois de um tempo suficientemente longo, elas convergem para uma certa região limitada do espaço de fase, denominado atrator, que melhor será discutido a seguir.

2.3 Atratores

Em sistemas Hamiltonianos, tais como aqueles obtidos a partir das equações de Hamilton para o movimento de partículas na ausência de forças dissipativas, o volume no espaço de fase é conservado quando o sistema evolui no tempo. Tais sistemas são chamados *conservativos*. Se o fluxo não preservar o volume do espaço de fase, o sistema é dito *dissipativo*. Pode-se verificar se o sistema é dissipativo, calculando e analisando o divergente do sistema, pois se ele for menor que zero o sistema é dissipativo. O divergente do sistema é dado por

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial \dot{x}^{(1)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial \dot{x}^{(2)}}{\partial x^{(2)}} + \dots + \frac{\partial \dot{x}^{(N)}}{\partial x^{(N)}}. \quad (2.5)$$

Um conceito importante na dinâmica de sistemas dissipativos, é o conceito de atrator. Um atrator é um conjunto invariante no espaço de fase, para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. Para exemplificar atratores, consideramos o oscilador harmônico amortecido modelado pela equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \nu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (2.6)$$

Uma trajetória típica no espaço de fase ($x^{(1)} = y$, $x^{(2)} = dy/dt$) é mostrada na Fig. 2.2(a). Nela vemos que, quando o sistema evolui no tempo, a órbita espirala para a origem. Neste caso o ponto na origem, $x^{(1)} = x^{(2)} = 0$, é o atrator do sistema dinâmico.

Outra trajetória típica aparece ilustrada na Fig. 2.2(b), que mostra o caso em que o atrator é um ciclo limite (linha tracejada). A condição inicial α , fora do ciclo limite, gera uma órbita que com o tempo espirala para a linha tracejada, sobre a qual o sistema circula em movimento periódico no limite em que $t \rightarrow \infty$. Similarmente, a condição inicial β dentro do ciclo limite gera uma órbita que espirala para o ciclo limite de dentro para fora, assintoticamente, aproximando-se da linha tracejada. Neste caso a curva fechada tracejada é o atrator. Um exemplo de sistema que apresenta um ciclo limite como atrator, da forma ilustrada na Fig. 2.2(b), é aquele modelado pela equação de van der Pol [5]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - \eta) \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0, \quad (2.7)$$

proposta em 1920 como um modelo para um circuito oscilante em um tubo de vácuo.

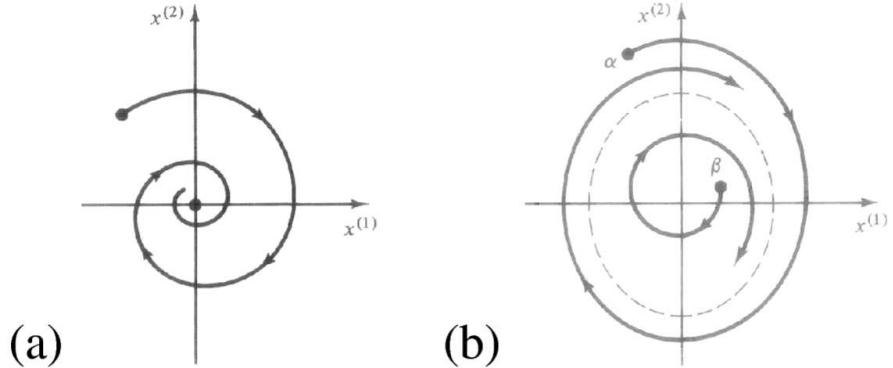


Fig. 2.2: Dois exemplos de atratores. (a) O atrator é a origem. (b) O atrator é a curva fechada tracejada. Figura extraída da página 11 da Ref. [7]

Na Fig. 2.2, pode-se observar dois exemplos de atratores; o primeiro, mostrado na Fig. 2.2(a), no qual o atrator é um conjunto de dimensão zero (um ponto), e o segundo, mostrado na Fig. 2.2(b), no qual o conjunto de atração tem dimensão um (uma curva fechada). Uma das principais características da dinâmica caótica é o fato dos atratores possuírem uma dimensão não inteira, conforme o da Fig. 2.3. Na terminologia de Mandel-

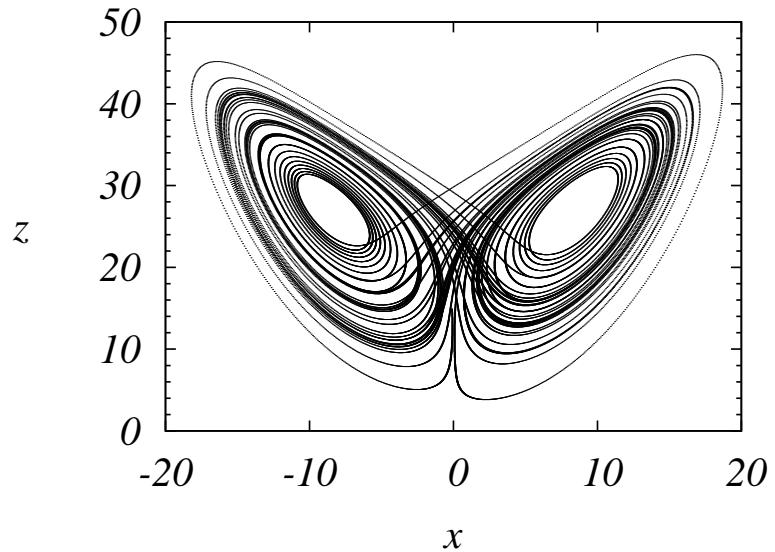


Fig. 2.3: Atrator do sistema de Lorenz [2].

brot [8], tais atratores têm dimensões fractais, e são denominados de atratores estranhos. Este nome atrator estranho foi introduzido por D. Ruelle e F. Takens, em 1971, num trabalho sobre o processo de transição de um fluxo laminar para um fluxo turbulento, observado em fluidos [9].

2.4 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

Na seção 2.3, dissemos que algumas trajetórias no espaço de fase podem, depois de um tempo suficientemente longo, espiralarem para um ponto ou para um ciclo limite, ou mesmo constituírem um atrator estranho. Nesta seção discutiremos as hipóteses possíveis para tais situações acontecerem no espaço de fase, as quais estão diretamente relacionadas às definições de ponto de equilíbrio e estabilidade.

Uma solução do sistema (2.2) igual a uma constante, exige que a primeira derivada de cada uma das variáveis seja nula. Denomina-se esta solução como ponto de equilíbrio ou ponto fixo. Se $P_f = P(x_f^{(1)}, x_f^{(2)}, \dots, x_f^{(N)})$ for um ponto de equilíbrio do sistema (2.2), teremos

$$\begin{aligned} dx^{(1)}/dt &= \dot{x}^{(1)} = F_1(P_f) = 0, \\ dx^{(2)}/dt &= \dot{x}^{(2)} = F_2(P_f) = 0, \\ &\vdots \\ dx^{(N)}/dt &= \dot{x}^{(N)} = F_N(P_f) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou seja, para obtermos os pontos de equilíbrio basta resolver o sistema $\dot{x}^{(1)} = \dot{x}^{(2)} = \dots = \dot{x}^{(n)} = 0$.

O ponto de equilíbrio P_f pode ser classificado quanto a estabilidade, utilizando os autovalores da matriz Jacobiana J do sistema, calculada no ponto de equilíbrio P_f , dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F_1}{\partial x^{(2)}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x^{(N)}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F_2}{\partial x^{(2)}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial F_N}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F_N}{\partial x^{(2)}} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x^{(N)}} \end{pmatrix}_{P_f}. \quad (2.9)$$

Se todos autovalores da matriz Jacobiana (2.9) tiverem a parte real negativa, o ponto de equilíbrio é estável, e as trajetórias no espaço de fase são atraídas para o ponto de equilíbrio. Se pelo menos um dos autovalores tiver a parte real positiva, o ponto de equilíbrio é instável e o sistema pode apresentar caos, podendo gerar atratores estranhos, como aquele mostrado na Fig. 2.3. Quando os autovalores complexo-conjugados apresentam parte real nula, o sistema experimenta uma bifurcação de Hopf [10], e um ciclo limite surge em torno do ponto de equilíbrio, conforme a Fig. 2.2(b).

2.5 Dependência Sensível nas Condições Iniciais

A principal assinatura do caos é a sensível dependência nas condições iniciais. Uma medida dessa sensibilidade é dada pelos expoentes de Lyapunov do sistema, que definire-

mos a seguir. Sejam duas condições iniciais próximas, $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \vec{\Delta}(0)$, e imaginemos que elas são evoluídas no tempo por um sistema de tempo contínuo, gerando órbitas $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$, como mostra a Fig. 2.4. Consideremos ainda que, no tempo t , a separação entre as duas órbitas é $\vec{\Delta}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$. Se a diferença entre as órbitas, $|\vec{\Delta}(t)|$, cresce exponencialmente com o tempo, ou seja, se $|\vec{\Delta}(t)| = |\vec{\Delta}(0)|e^{\lambda t}$, com $\lambda > 0$, sendo λ o expoente de Lyapunov, dizemos que o sistema apresenta dependência sensível nas condições iniciais, e é caótico. Esta sensibilidade exponencial de soluções caóticas

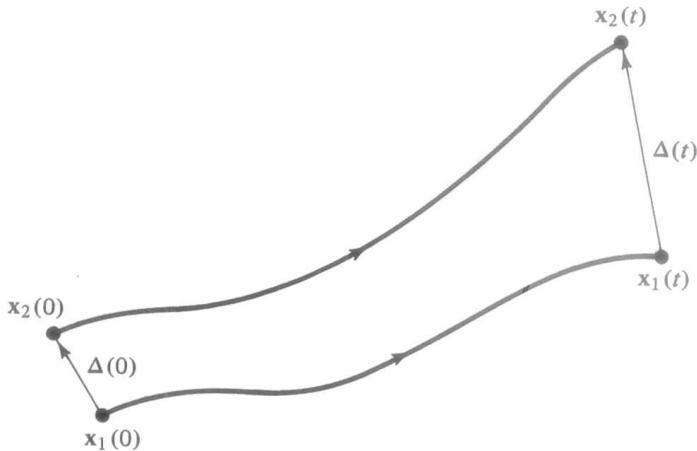


Fig. 2.4: Evolução de duas órbitas próximas no espaço de fase. Figura extraída da página 16 da Ref. [7].

quer dizer que, quando o tempo evolui, pequenos erros nas soluções crescem rapidamente, exponencialmente, com o tempo. Assim, depois de algum tempo, efeitos tais como ruídos podem mudar totalmente a solução, mudando assim completamente a trajetória do sistema no espaço de fase. Para medir a taxa de divergência de trajetórias e quantificar a dependência sensível nas condições iniciais, utilizam-se os expoentes de Lyapunov.

Para sistemas contínuos do tipo (2.2), têm-se um espaço de variáveis n -dimensional, formado pelas n variáveis do sistema considerado. Imaginemos um pequeno hipervolume esférico de estados iniciais, de raio $\varepsilon_0(\vec{x}_0)$ em torno do ponto inicial \vec{x}_0 . Com o passar do tempo o fluxo deforma a hiperesfera num objeto hiperelipsoidal com eixos principais $\varepsilon_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, dados por

$$\varepsilon_j(t) = \varepsilon_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.10)$$

Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_j(t)$, e são definidos por

$$\lambda_j(t) = \frac{\ln(\varepsilon_j(t)/\varepsilon_j(t_0))}{t - t_0}. \quad (2.11)$$

Em geral os λ_j dependem do estado inicial x_0 , mas em muitos casos eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fase. Pode-se então concluir da Eq. (2.10) que: (i) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas; (ii) para uma *solução caótica*, associada a um atrator estranho, a dependência nas condições iniciais implica na existência de *pelo menos um* expoente de Lyapunov positivo; (iii) para uma *solução periódica* ou *quaseperiódica* pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial. Segue portanto de (2.10) que no caso de solução periódica ou quaseperiódica o expoente de Lyapunov é menor que zero nas direções perpendiculares ao movimento e igual a zero ao longo da trajetória. Num instante $t > t_0$, o volume $V(t)$ da hiperesfera deve ser proporcional ao produto das distâncias $\varepsilon_j(t)$ que o caracteriza, ou seja,

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n \varepsilon_j(t) \implies V(t) \propto \prod_{j=1}^n \varepsilon_j(t_0) e^{\lambda_j(t-t_0)}. \quad (2.12)$$

Sendo $\prod_{j=1}^n \varepsilon_j(t_0) = V(t_0)$, onde $V(t_0)$ é o volume inicial, tem-se

$$V(t) \propto V(t_0) e^{(t-t_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j}. \quad (2.13)$$

Existem, portanto, duas situações para as quais o hipervolume no espaço de fase não diverge: (i) quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, situação em que $V(t) = V(0)$ e o sistema é conservativo; (ii) quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$, que resulta em $V(t) < V(0)$ (diminuição do hipervolume no espaço de fase) e o sistema é dissipativo.

É possível identificar o comportamento de um atrator pelos sinais dos expoentes de Lyapunov. No caso de sistemas contínuos, se representarmos um expoente de Lyapunov positivo por um sinal $+$, e um expoente de Lyapunov negativo por um sinal $-$, podemos caracterizar os estados de um sistema quadridimensional, por exemplo, baseados no espectro de Lyapunov. Quando o espectro de Lyapunov é do tipo $(+, 0, -, -)$ ou $(+, 0, 0, -)$, ou seja, com apenas um dos expoentes sendo maior do que zero, o atrator é caótico. No caso de atratores periódicos, o espectro de Lyapunov é representado por $(0, -, -, -)$, e para os atratores quaseperiódicos temos dois casos, o primeiro é representado por $(0, 0, -, -)$ conhecido como torus-2 e o segundo é dado por $(0, 0, 0, -)$ denominado torus-3. Quando a situação $(-, -, -, -)$ se faz presente, ou seja, quando os quatro expoentes de Lyapunov são menores do que zero, o sistema é atraído para um ponto de equilíbrio. Um dos nossos

interesses nesta dissertação é por um espectro de Lyapunov do tipo $(+, +, 0, -)$, que caracteriza o comportamento hipercaótico. No próximo capítulo explanaremos melhor sobre a dinâmica hipercaótica.

2.6 Diagramas de Bifurcação

Qualquer sistema dinâmico que descreva um sistema físico real, geralmente depende de um ou mais parâmetros. São os chamados parâmetros de controle do sistema. Um sistema dinâmico pode então ser pensado como uma função desses parâmetros de controle. Com efeito, o comportamento dinâmico do sistema pode ser modificado se o valor desses parâmetros for alterado. Os diagramas de bifurcação ilustram como a dinâmica de um sistema muda quando um parâmetro de controle varia, e mostram o nascimento, a evolução e a morte dos atratores [7]. Para os sistemas de tempo contínuo, diagramas de bifurcação são geralmente construídos plotando os máximos locais de uma variável x^i a cada período. Neste último caso, para cada valor do parâmetro, um único valor de x^i representa um ciclo-1, dois valores de x^i um ciclo-2, e assim sucessivamente. A Fig. 2.6 é um exemplo de diagrama de bifurcação.

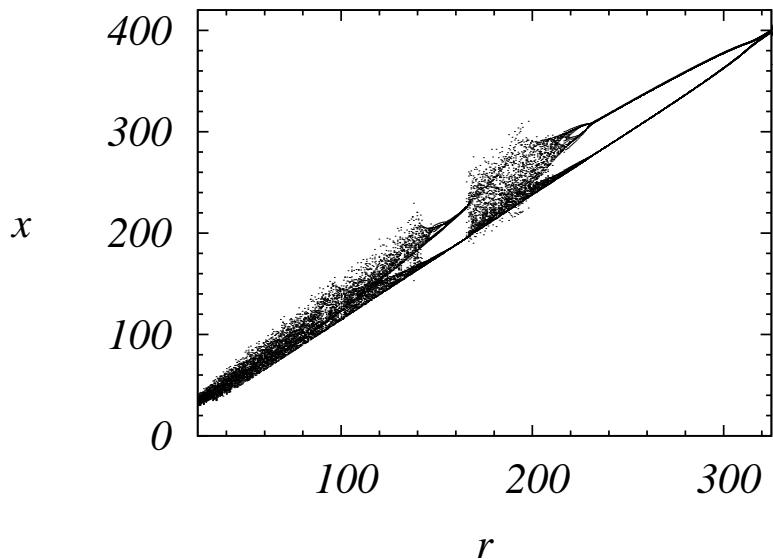


Fig. 2.5: Diagrama de bifurcação para o sistema de Lorenz [5]. Condição inicial $x_0 = 0, 1$; o intervalo de r foi dividido em 500 valores, transiente de 5×10^2 passos de integração, plotados 40 pontos.

Capítulo 3

O Método Proposto

3.1 Sistemas Hipercaóticos

O termo *hipercaos* foi primeiramente introduzido por Rössler em 1979 [1], nomeando assim a órbita caótica que tem dois ou mais expoentes de Lyapunov positivos. Por este motivo o sistema tem sua dinâmica expandida em diferentes direções simultaneamente, aumentando assim a complexibilidade do atrator e a caoticidade do sistema deixando-o mais imprevisível. Para o aparecimento de uma dinâmica hipercaótica é necessário, mas não suficiente, que o sistema tenha no mínimo quatro dimensões, pois como é sabido, para sistemas dissipativos o somatório de todos os expoentes de Lyapunov tem que ser negativo. Sendo assim, um deles obrigatoriamente tem que ser negativo, e pelo menos um dos demais tem que ser nulo, sobrando apenas os dois maiores expoentes para serem positivos. Portanto, para um sistema quadridimensional, dois expoentes de Lyapunov positivos caracterizam uma dinâmica hipercaótica.

Nas últimas décadas veem aumentando o interesse neste tipo de sistemas de quatro ou mais dimensões, denominados sistemas de alta dimensionalidade. Um dos motivos desse grande interesse nos sistemas de alta dimensão, mais especificamente nos sistemas hipercaóticos, deve-se a sua grande aplicabilidade no cenário científico e tecnológico, e também ao aperfeiçoamento dos computadores nesta última década, que possibilitam e agilizam os estudos numéricos nos sistemas de alta dimensão. Os sistemas hipercaóticos podem ser utilizados para descrever diversas dinâmicas, tanto na área de biologia, para descrever a dinâmica de forma simplificada de uma rede neural formada por 4 neurônios [12], e também para simular um sinal elétrico denominado de potencial de ação que passa através do axônio de um neurônio, permitindo a comunicação entre eles [13]. Na química são utilizados para descrever modelos de reações químicas, no qual cada variável corresponde a concentração de uma substância [14]. Na engenharia descrevem circuitos eletrônicos não-lineares, como na Ref. [15], que descreve dois sistemas

de Chua acoplados. Na física descrevem sistemas meteorológicos como na Ref. [16], que considera o efeito de rotação do sistema de Lorenz [3], ou para descreverem um sistema de Lasers [17]. Na literatura também são encontrados outros sistemas hipercaóticos, que são construídos a partir do sistema de Lorenz [18, 19, 20], do sistema de Chen [21, 22, 23], do sistema de Lü [24, 25, 26], e do sistema de Chua [27]. Tais sistemas são geralmente construídos através da inserção de uma nova variável para controlar o caos, que pode gerar hipercaos.

Visto esta grande quantidade de trabalhos sobre sistemas hipercaóticos, observou-se uma necessidade iminente de melhor compreender tais sistemas. E para desenvolver um estudo nesta área, o primeiro passo é encontrar, para quais intervalos de valores dos parâmetros o sistema apresenta uma dinâmica hipercaótica. Sabe-se que para encontrar o intervalo de valores de parâmetros no qual o sistema é caótico, usa-se um tipo de gráfico denominado espaço de parâmetros, o qual enfatizaremos logo abaixo. Também explicaremos as modificações necessárias no espaço de parâmetros tradicional, a qual possibilitará a verificação dos intervalos de parâmetros no qual os sistemas apresentam hipercaos, como também a região que os sistemas podem apresentar uma estrutura quaseperiódica denominada torus. Ambas as dinâmicas não podem ser identificadas com o método do espaço de parâmetros tradicional.

3.2 O Espaço de Parâmetros

Na seção 2.5, vimos que o expoente de Lyapunov serve como uma medida da sensibilidade das condições iniciais, e o sinal do expoente serve para classificar a dinâmica do sistema, desde uma dinâmica de ponto de equilíbrio, com todos os expoentes negativos, até uma dinâmica hipercaótica, com pelo menos dois expoentes de Lyapunov positivos. Para visualizar a relação dos parâmetros de um sistema com a sua dinâmica, utiliza-se um espaço de parâmetros bidimensional, como nas Refs. [28, 29, 30, 31, 32].

Para construir o espaço de parâmetros, é necessário primeiramente fixar alguns parâmetros, permitindo que apenas dois variem. Estes dois parâmetros serão então utilizados para construir o espaço de parâmetros. Como eles podem variar, tem-se que determinar um intervalo de variação dos parâmetros. Após escolher este intervalo de variação dos parâmetros, divide-se em ambos os espaços por um número a escolher. Este número escolhido, é diretamente responsável pela resolução da figura formada, e o tempo de computação. Nesta dissertação foi escolhido o número 500, por este apresentar uma figura de boa qualidade e um tempo de computação razoável, em torno de 4 dias para construção de cada figura. Com a escolha dos dois parâmetros, seus intervalos de variação e a divisão do espaço, constroe-se uma malha bidimensional. Para cada ponto dessa malha,

formada pela intersecção das linhas verticais e horizontais, tem-se um ponto no espaço de parâmetros. A quantidade desses pontos formados é dado pelo número que divide o espaço, elevado ao quadrado. Portanto, aqui temos 500^2 pontos. Para cada um destes pontos, calcula-se o maior expoente de Lyapunov usando o método de Wolf [33]. Os resultados vão sendo armazenados em colunas num arquivo. Na primeira e na segunda coluna são colocados os valores de cada um dos parâmetros, e na última coluna é colocado o valor do maior expoente de Lyapunov. A partir desse arquivo de dados, constrói-se o gráfico, que tem nos dois eixos os valores dos dois parâmetros variados. O valor do maior expoente de Lyapunov é definido por uma determinada cor, geralmente por um degradê de cores, como nas Refs. [30, 31]. Alguns trabalhos [28, 32] definem uma cor para o expoente positivo, outra cor para o expoente negativo, e uma terceira cor para o expoente nulo, mas sempre usando o maior expoente de Lyapunov para caracterizar a dinâmica do sistema.

O método acima resumido serve, portanto, para associar a cada par de parâmetros um valor do maior expoente de Lyapunov. Assim, definimos a dinâmica de cada ponto no espaço de parâmetros como caótica, periódica ou de ponto fixo. O método não permite identificar hipercaos e quaseperiodicidade (torus-2 e torus-3), que aparecem apenas em sistemas de alta dimensionalidade.

3.3 O Método de Caracterização da Dinâmica do Sistema

O método por nós proposto para caracterizar a dinâmica de um sistema usando espaços de parâmetros, baseia-se no método apresentado na seção anterior. No entanto, são feitas algumas modificações simples, mas que acarretam variações significativas na análise do sistema. A primeira, e a mais importante delas, diz respeito ao cálculo do expoente de Lyapunov. No caso anterior, utiliza-se apenas o maior deles. No nosso método calculamos e utilizamos todos os valores dos expoentes de Lyapunov que o sistema estudado fornece. Como é sabido se o sistema for quadridimensional existem quatro expoentes de Lyapunov, se ele tiver cinco dimensões têm cinco expoentes de Lyapunov e, assim sucessivamente. Também armazenamos os resultados em colunas, como no outro método, todavia o arquivo contém mais colunas, por causa dos outros expoentes de Lyapunov. Através desse método relacionamos cada par de parâmetros com todos os valores de expoentes de Lyapunov do sistema. O fato de expressar várias colunas de resultados em um gráfico pode causar certo problema, pois cada coluna deve ser representada por uma dimensão. Este problema é resolvido plotando diferentes gráficos para cada coluna de valores do expoente de Lyapunov, da mesma forma que era construído o gráfico no

método anterior.

A outra modificação necessária ocorre na escala das cores, que refere-se ao valor do expoente de Lyapunov, a qual consiste, em escolher um intervalo de valores do expoente de Lyapunov próximos do zero, e considerá-los igual a zero. Esse intervalo pode ser observado no degradê de cores, sendo uma faixa preta, localizada onde o expoente de Lyapunov é zero. A largura dessa faixa é variável conforme a faixa dos valores do maior expoente de Lyapunov, dependendo do sistema estudado. Essa modificação é necessária, pois permitirá diferenciar as áreas periódicas das quaseperiódicas. Para ser periódico o sistema tem que ter o maior expoente de Lyapunov igual a zero, e o segundo negativo. Para apresentar quaseperiodicidade, é necessário que no mínimo o primeiro e o segundo expoentes de Lyapunov sejam iguais a zero, caso em que o atrator é denominado torus-2. Se o sistema tiver n -dimensões, é necessário como vimos antes, para sistemas dissipativos, que eles apresentem pelo menos um dos expoentes negativo. Em consequência, todos os outros podem ser nulos, e então o sistema pode apresentar torus- $(n - 1)$. Assim fica explícita a importância de plotar todos os n expoentes de Lyapunov do sistema n -dimensional.

O mais importante expoente de Lyapunov para ser analisado na caracterização de hipercaos é o segundo maior expoente, pois é ele que evidencia se o sistema apresenta ou não hipercaos, além de informar em quais regiões do espaço de parâmetros isso ocorre. Logo esse fato é facilmente compreendido baseando-se na própria definição de hipercaos. Basta no mínimo dois expoentes de Lyapunov positivos para caracterizar hipercaos. Sendo o primeiro positivo, o sistema pode ser caótico ou hipercaótico. No entanto na região, em que o segundo expoente é positivo, garante-se que a região apresenta hipercaos. Por este fato, podemos afirmar que os pontos hipercaóticos formam um subconjunto que pertence ao conjunto dos pontos caóticos.

Para compreender melhor a dinâmica do sistema, construimos a tabela abaixo, a qual relaciona os valores do expoente de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, sendo $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$, com o comportamento dinâmico do sistema.

Dinâmica do sistema	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
hipercaos	+	+	0	-
caos	+	0	-	-
torus 2	0	0	-	-
torus 3	0	0	0	-
periódico	0	-	-	-
ponto de equilíbrio	-	-	-	-

Tab. 3.1: Considera-se que o sinal + representa o expoente de Lyapunov positivo, o sinal - representa o expoente negativo, e o 0 representa o expoente nulo. A tabela é referente a um sistema quadridimensional.

3.4 Aplicação do Método Proposto

O método proposto na seção anterior foi aplicado no sistema apresentado na Ref. [2], que é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais não lineares,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) + eyz - kw, \\ \dot{y} &= cx - dy - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= ry + fyz,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde x, y, z e w , são as variáveis, e a, b, c, d, e, f, k e r , são os parâmetros.

O sistema (3.1), foi escolhido pelo possível aparecimento em sua dinâmica de periodicidade, quaseperiodicidade, caos e hipercaos, conforme a Ref. [2]. Faremos aqui um estudo numérico do sistema, usando o método por nós proposto, e faremos uma comparação com o método antigo que plotava apenas o maior expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros. Para comprovar a eficiência do método proposto serão construídos os atratores para alguns pontos marcados no espaço de parâmetros do sistema (3.1). Desse modo, é possível comparar os resultados obtidos para a dinâmica do sistema, pelos dois métodos.

A Fig. 3.1 mostra os quatro plots dos espaços de parâmetros do sistema (3.1), todos construídos considerando os expoentes de Lyapunov numa malha de 500×500 . Para integrar o sistema (3.1), usou-se o método Runge-Kutta de quarta ordem com 5×10^5 passos com o tamanho fixo igual a 10^{-3} . Para analisar os espaços de parâmetros da Fig. 3.1, escolhemos os quatro pontos marcados com o sinal de + e diferenciados com as letras α, β, χ , e δ . Para investigar a dinâmica de cada ponto, utilizamos alguns sinais para preencher a tabela 3.2: (i) se o expoente de Lyapunov for positivo levará um sinal +, (ii) se for negativo levará um sinal -, (iii) se ele for zero o sinal será 0.

Para começar a análise escolhemos o ponto α . Observando o espaço de parâmetros da Fig. 3.1(a), construído com o maior expoente de Lyapunov, ele está localizado numa região de cor preta. Observando a escala de cores, nota-se que tal região corresponde ao valor do expoente de Lyapunov igual a zero. Tal informação marcamos na tabela 3.2, e passamos agora a analisar o ponto α no espaço de parâmetro da Fig. 3.1(b), construído com o segundo maior expoente de Lyapunov. Agora o ponto se encontra numa região de cor branca, que corresponde ao expoente negativo, e novamente marcamos na tabela 3.2. Podemos parar a análise do ponto α por aqui, porque é sabido que o terceiro e o quarto maior expoente de Lyapunov, são evidentemente menores que o segundo maior. Então o ponto α terá tanto para a Fig. 3.1(c), quanto para a Fig. 3.1(d), um expoente de Lyapunov negativo. E assim terminamos de preencher a tabela 3.2 para o ponto α .

Agora faremos a análise do ponto β . Na Fig. 3.1(a), o ponto encontra-se numa

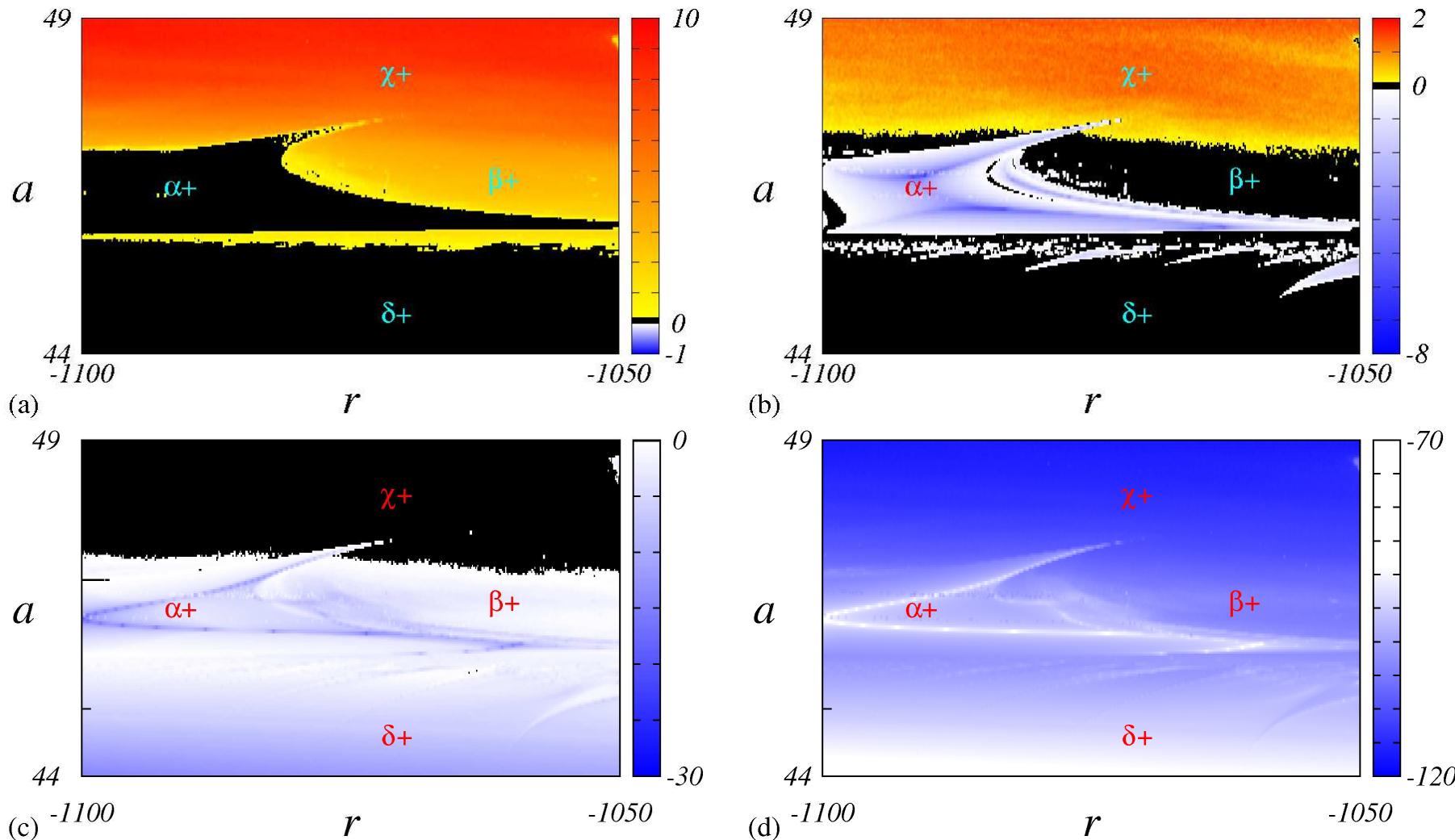


Fig. 3.1: O espaço de parâmetros do sistema (3.1). Os valores dos parâmetros utilizados são $b = 16$, $c = 49$, $d = 9$, $k = 8$, $e = 30$, $f = 40$ com a e r variando. O conjunto de condições iniciais é $(x, y, z, w) = (210, 5, 50, -910)$. O método usado para calcular os expoentes de Lyapunov é o método de Wolf. (a) O espaço de parâmetro com λ_1 , (b) com λ_2 , (c) com λ_3 , e (d) com λ_4 .

região de transição de amarelo para vermelho. Sendo assim, conforme a escala de cores, o expoente de Lyapunov neste ponto é positivo. Ao analisar o ponto β na Fig. 3.1(b), ele está numa região de cor preta, significando um expoente nulo. Na Fig. 3.1(c) o ponto β aparece numa região de cor branca, sendo o expoente negativo. Consequentemente, na Fig. 3.1(d) o ponto β também ocupa uma região de expoente negativo. A análise do ponto β , também está descrita na tabela 3.2. Para os pontos χ e δ , também realizou-se a mesma análise, e os resultados podem ser observados na tabela 3.2. Pode-se observar que

ponto	3.1(a)	3.1(b)	3.1(c)	3.1(d)	dinâmica EP	atratores	dinâmica A
α	0	-	-	-	periódico	Fig. 3.2(a)	periódico
β	+	0	-	-	caos	Fig. 3.2(b)	caos
χ	+	+	0	-	hipercaos	Fig. 3.2(c)	hipercaos
δ	0	0	-	-	torus 2	Fig. 3.2(d)	torus-2

Tab. 3.2: O sinal + representa o expoente de Lyapunov positivo. O sinal – representa expoente negativo, o 0 representa expoente nulo. Na coluna intitulada dinâmica EP é descrita a dinâmica do sistemas conforme os espaços de parâmetros, e na coluna dinâmica A, está descrito a dinâmica do sistemas conforme os atratores.

cada ponto apresenta um tipo de dinâmica diferente. O ponto α é periódico, o ponto β é caótico, o ponto χ é hipercaótico, e o ponto δ é quaseperiódico, neste caso torus-2. Para comprovar esses fatos, são construídos os atratores em cada um dos ponto α , β , χ , e δ , os quais tem suas projeções tridimensionais mostradas na Fig. 3.2. O atrator da Fig. 3.2(a) é periódico, o atrator da Fig. 3.2(b) é caótico, o atrator da Fig. 3.2(c) é hipercaótico, e o atrator da Fig. 3.2(d) é quaseperiódico, mais especificamente torus-2. Essas observações também estão colocadas na tabela 3.2 na coluna dinâmica A.

Para deixar claro a vantagem dessa técnica sobre a antiga, a qual plotava apenas o maior expoente de Lyapunov, basta observar os pontos escolhidos, α , β , χ , e δ , apenas no espaço de parâmetro construído com o maior expoente de Lyapunov que aparece na Fig. 3.1(a). Nota-se que ambos os pontos α e δ , estão localizados na região de cor preta, sendo impossível diferenciar suas dinâmicas, que agora sabemos serem, respectivamente, periódica e quaseperiódica. Da mesma forma é impossível diferenciar as dinâmicas caótica e hipercaótica, respectivamente, dos pontos β e χ , pois ambos têm expoentes de Lyapunov positivos. Desse modo se torna evidente a importância de analisar todas as n -figuras construídas sobre o espaço de parâmetros, para estudar a dinâmica de um sistema n -dimensional.

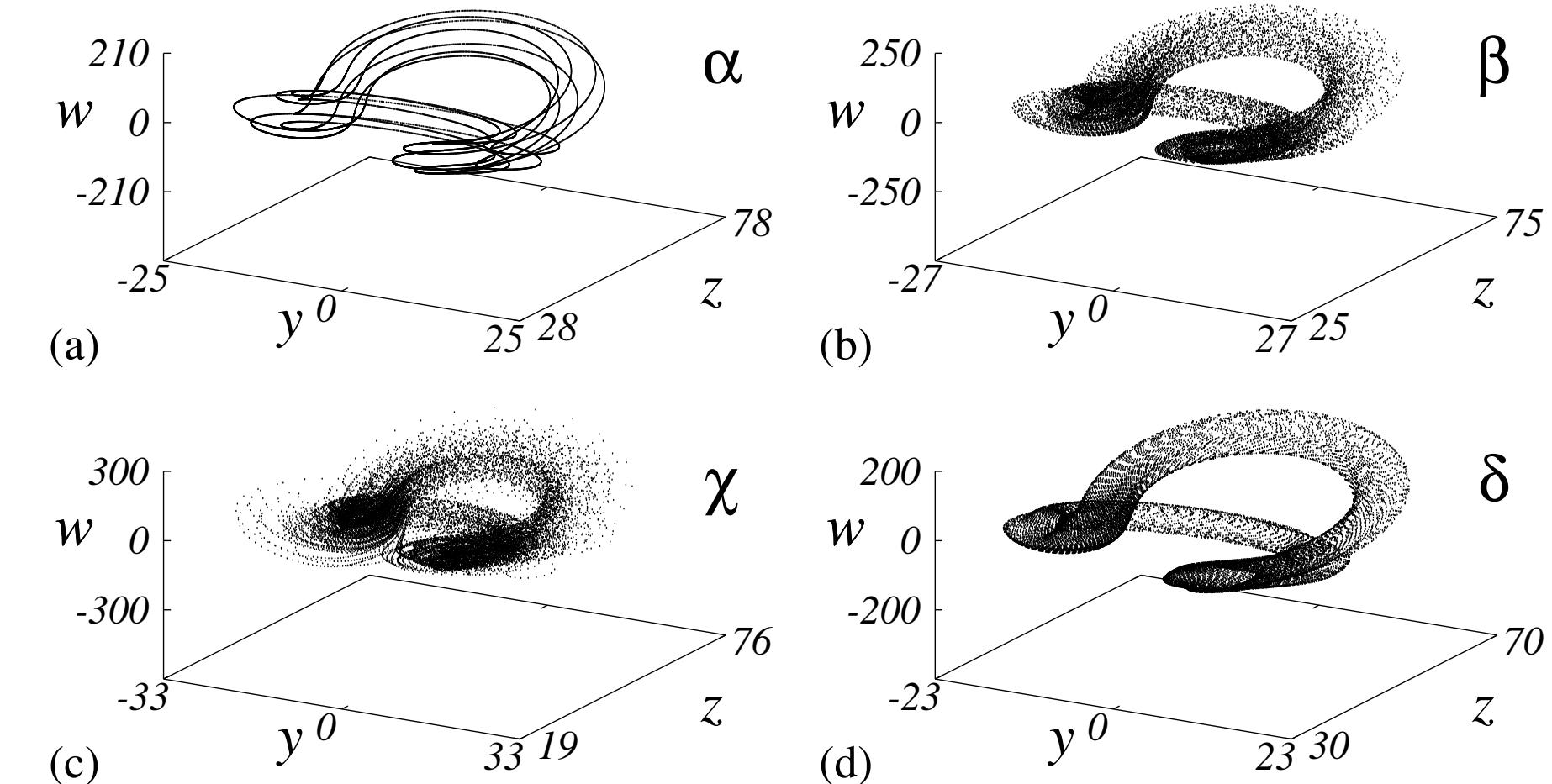


Fig. 3.2: Todas as projeções tridimensionais yzw dos atratores aqui apresentados, têm o passo de integração igual a 1×10^{-3} , sendo integrado $5,2 \times 10^5$, e sendo plotado apenas os 2×10^4 últimos pontos. Os valores dos parâmetros utilizados são $b = 16$, $c = 49$, $d = 9$, $k = 8$, $e = 30$, $f = 40$. O conjunto de condições iniciais é dado por $(x, y, z, w) = (210, 5, 50, -910)$. O que difere um atrator do outro é o valor do parâmetro a e r . (a) mostra o atrator construído com $a = 46,5$ e $r = -1090$, na figura (b), $a = 46,6$ e $r = -1060$, em (c) , $a = 48,2$ e $r = -1070$, e por fim em (d), $a = 44,6$ e $r = -1070$.

Capítulo 4

Um Novo Sistema Construído a partir do Sistema de Lorenz

4.1 O Novo Sistema

Aqui consideramos um novo sistema de quatro dimensões, por nós construído a partir da inserção de uma nova variável w no sistema de Lorenz [3], o qual é um sistema tridimensional. Com essa nova variável passa-se do sistema tridimensional para um de quatro dimensões, como pode ser observado nas equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz + w, \\ \dot{w} &= -a(x^2 + w),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde x , y , z e w , são as variáveis, e σ , r , b e a , são os parâmetros, todos positivos. O motivo da inserção dessa nova variável é estudar o possível aparecimento de hipercaos no novo sistema, visto que o hipercaos aparece apenas em sistemas de quatro ou mais dimensões. O estudo é desenvolvido em duas partes. Primeiramente fazemos um estudo analítico do sistema e, posteriormente um estudo numérico.

4.2 Resultados Analíticos

Começamos encontrando o divergente do sistema mostrado na Eq. (4.1), que é dado por

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -(\sigma + b + 1 + a).\tag{4.2}$$

Sendo o resultado da Eq. (4.2) negativo, tem-se um sistema sempre dissipativo conforme o teorema de Liouville [5], implicando que trajetórias limitadas do sistema convergem para um atrator de quatro dimensões no espaço de fase. Portanto, para que o sistema (4.1) tenha um atrator é necessário que $-a < \sigma + b + 1$. Para os estudos numéricos consideramos $b = 8/3$ e $\sigma = 10$, obtendo então $a > -41/3$.

Agora analisaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Para encontrá-los basta fazermos $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} -\sigma(x - y) &= 0, \\ rx - y - xz &= 0, \\ xy - bz + w &= 0, \\ -a(x^2 + w) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Resolvendo o sistema (4.3), obtém-se um único ponto de equilíbrio, que neste caso pode ser denominado como *ponto de equilíbrio trivial*, porque é dado por uma solução trivial, ou seja, $P_0 = (0, 0, 0, 0)$ é o ponto de equilíbrio. Para estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio P_0 , utiliza-se a matriz Jacobiana do sistema (4.1) calculada em P_0 , que é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

resultando no seguinte conjunto de autovalores:

$$\begin{aligned} m_1 &= -b, \\ m_2 &= -a, \\ m_{3,4} &= \frac{-\sigma-1 \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}{2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para $r > 1$, $m_3 = (-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma})/2$ é positivo, significando que o ponto P_0 é instável. Obedecida esta condição, o sistema pode apresentar caos, hipercaos, ou ciclo limite.

4.3 Resultados Numéricos

No estudo numérico desse novo sistema, utilizamos para integrar o sistema o método Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração igual a 1×10^{-3} , e com as condições iniciais $(x, y, z, w) = (10, 10, 10, 10)$. Para realizar o estudo numérico é necessário fixar alguns parâmetros. Nesse caso fixamos os parâmetros $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, valores já

utilizados na Ref.[3]. Os parâmetros a e r podem ter seus valores variando, ou fixados, conforme o apresentado em cada análise.

A primeira análise aqui efetuada é denominada espaço de parâmetros. A função desse estudo é encontrar e classificar as regiões de valores dos parâmetros a e r , para os quais o sistema apresenta periodicidade, quaseperiodicidade, caos e hipercaos. Para a construção do espaço de parâmetros da Fig. 4.1, o sistema (4.1) foi integrado 5×10^5 vezes para cada um dos $2,5 \times 10^5$ diferentes pontos do espaço de parâmetros a e r , gerado pela divisão de cada parâmetro por 500, então dizemos que essa figura tem uma malha de 500×500 .

Nos gráficos da Fig. 4.1, observamos que o sistema apresenta periodicidade, quase-periodicidade, caos, e hipercaos. A periodicidade é observada em toda as regiões de cor preta na Fig. 4.1(a), e de cor branca ou azul na Fig. 4.1(b), pois nessas regiões o maior expoente de Lyapunov é zero e o segundo maior é negativo. O caos é mais facilmente observado pois basta o maior expoente de Lyapunov ser positivo. Então, observando a Fig. 4.1(a), conclui-se que toda a região amarela-vermelha é caótica. Todavia a região caótica ainda pode ser hipercaótica. Encontrar essas regiões que apresentam hipercaos é um dos objetivos deste trabalho. O hipercaos é observado em toda a região amarela e vermelha da Fig. 4.1(b), porque nessa região existem dois expoentes de Lyapunov positivos.

Consideremos agora a região interna à caixa azul A na Fig. 4.1. Essa região apresenta uma dinâmica rica e diferente, pois como podemos observar a dinâmica mostra estruturas periódicas com formato de "espinhos", algumas delas imersas em regiões de caos e outras imersas em regiões de hipercaos. Para melhor compreender essa dinâmica fazemos a ampliação da região interna da caixa A, que pode ser observada na Fig. 4.2.

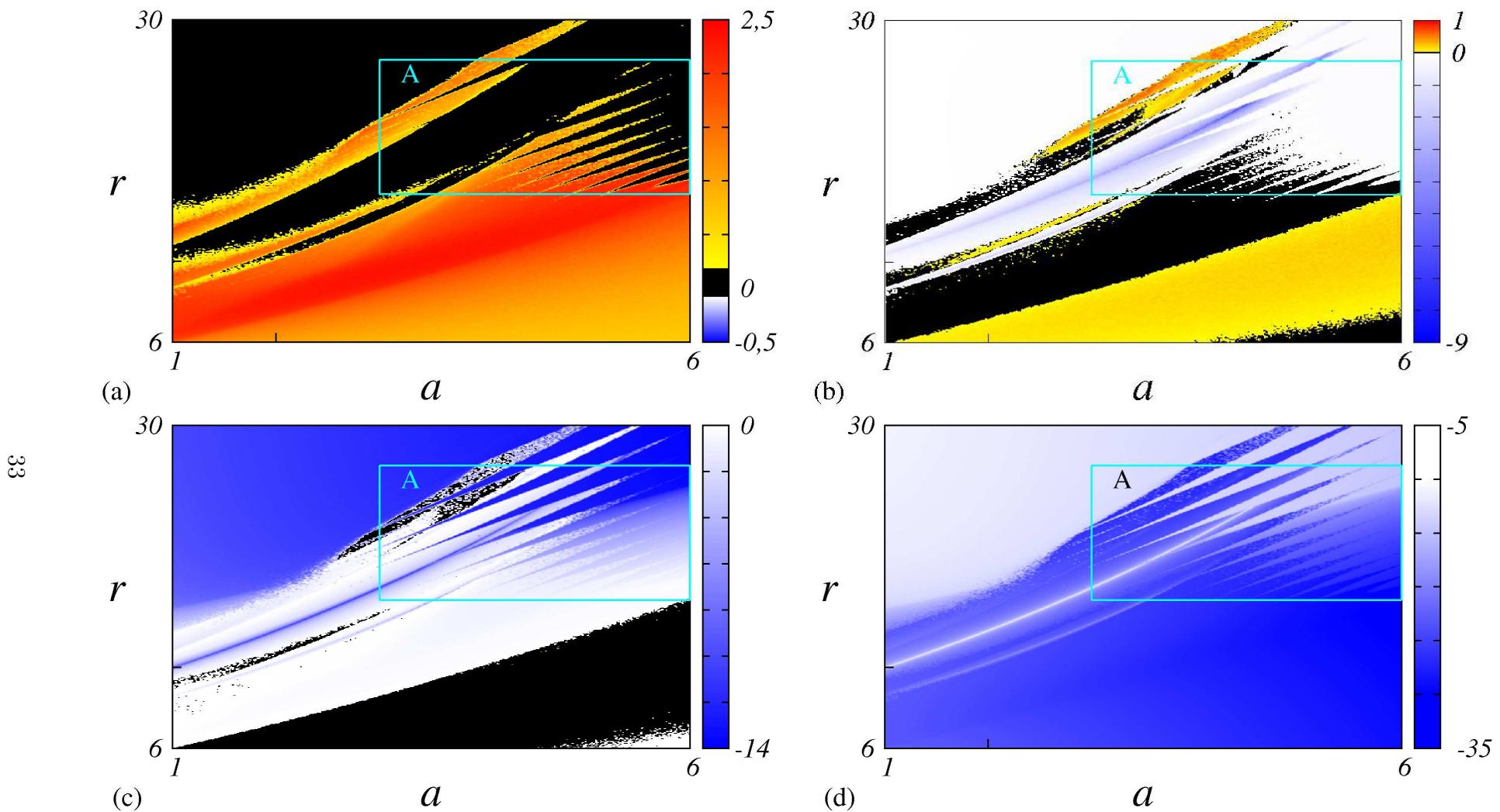
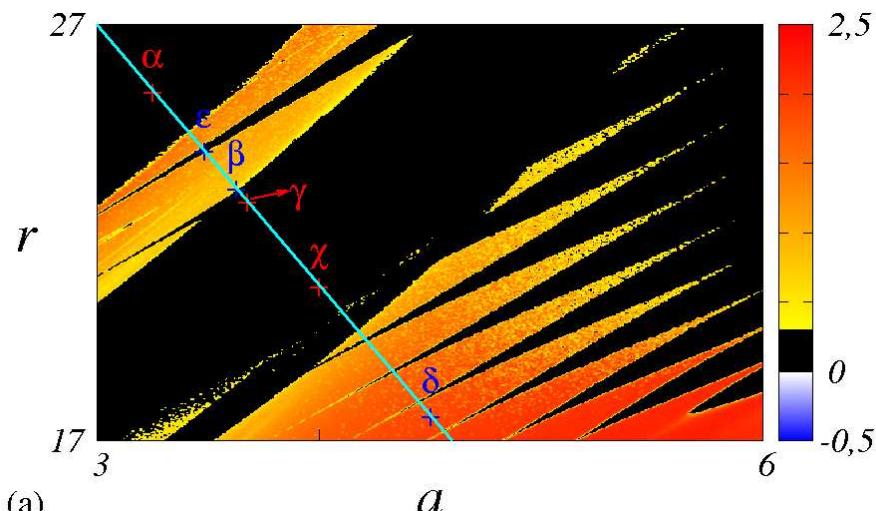
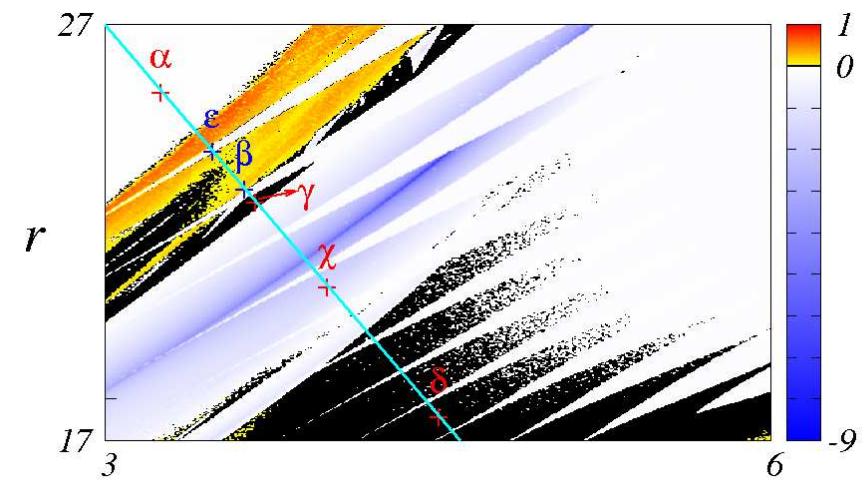


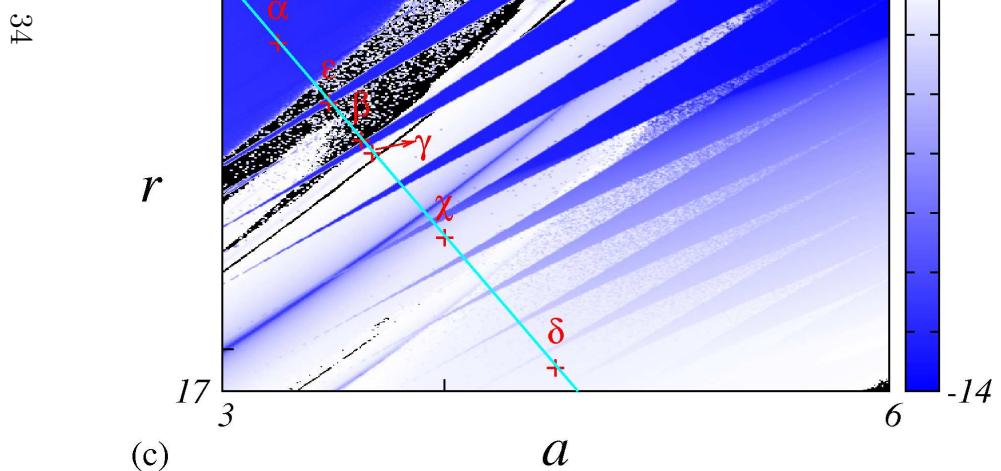
Fig. 4.1: Espaço de parâmetros, gerado pelo sistema (4.1), para a variando de 1 até 6, e r variando de 6 até 30. (a) espaço de parâmetros com λ_1 . (b) com λ_2 . (c) com λ_3 . (d) com λ_4



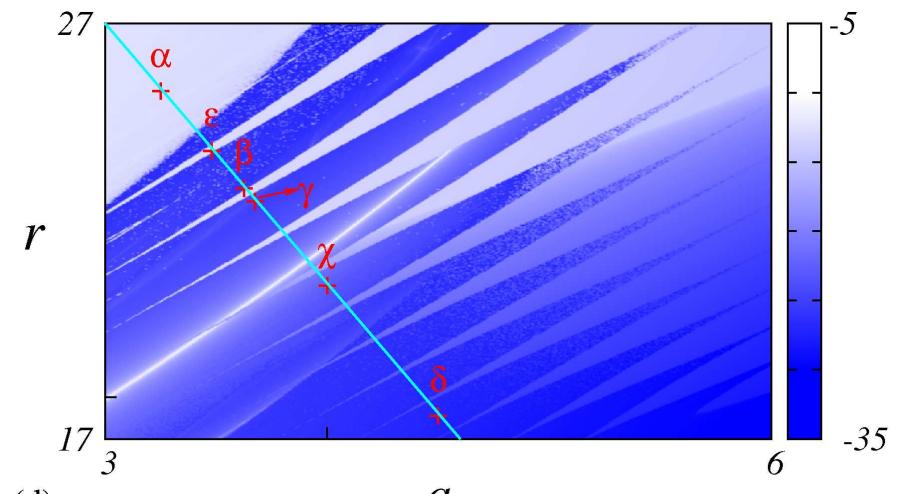
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4.2: Espaço de parâmetros, gerado pelo sistema (4.1), para a variando de 3 até 6, e r variando de 17 até 27. (a) espaço de parâmetros com λ_1 . (b) com λ_2 . (c) com λ_3 . (d) com λ_4 . Todos eles correspondem a ampliação da caixa A da Fig 4.1.

A análise da periodicidade, caos e hipercaos, não será efetuada para a Fig. 4.2, pois já foi feita para a Fig. 4.1, mas será enfatizado a observação de uma nova dinâmica observada na Fig. 4.2, que não foi possível observar na Fig. 4.1. A nova dinâmica observada é a quase-periodicidade que aparece na região que separa o hipercaos e a periodicidade logo após o ponto β da Fig. 4.2. A região tem as seguintes cores nos espaços de parâmetros: preto nas Figs. 4.2(a) e 4.2(b) e branco na Fig. 4.2(c). Sendo assim, dois expoentes de Lyapunov são iguais a zero e o terceiro é negativo.

Para corroborar os resultados obtidos utilizando o espaço de parâmetros, faremos um estudo sobre tais regiões utilizando outras ferramentas, como os diagramas de bifurcação e espaços de fase. A Fig. 4.3 mostra quatro diagramas de bifurcação, construídos para pontos ao longo da reta azul $r = -6,25a + 45,75$, para $3 < a < 4,6$. Observamos nestes

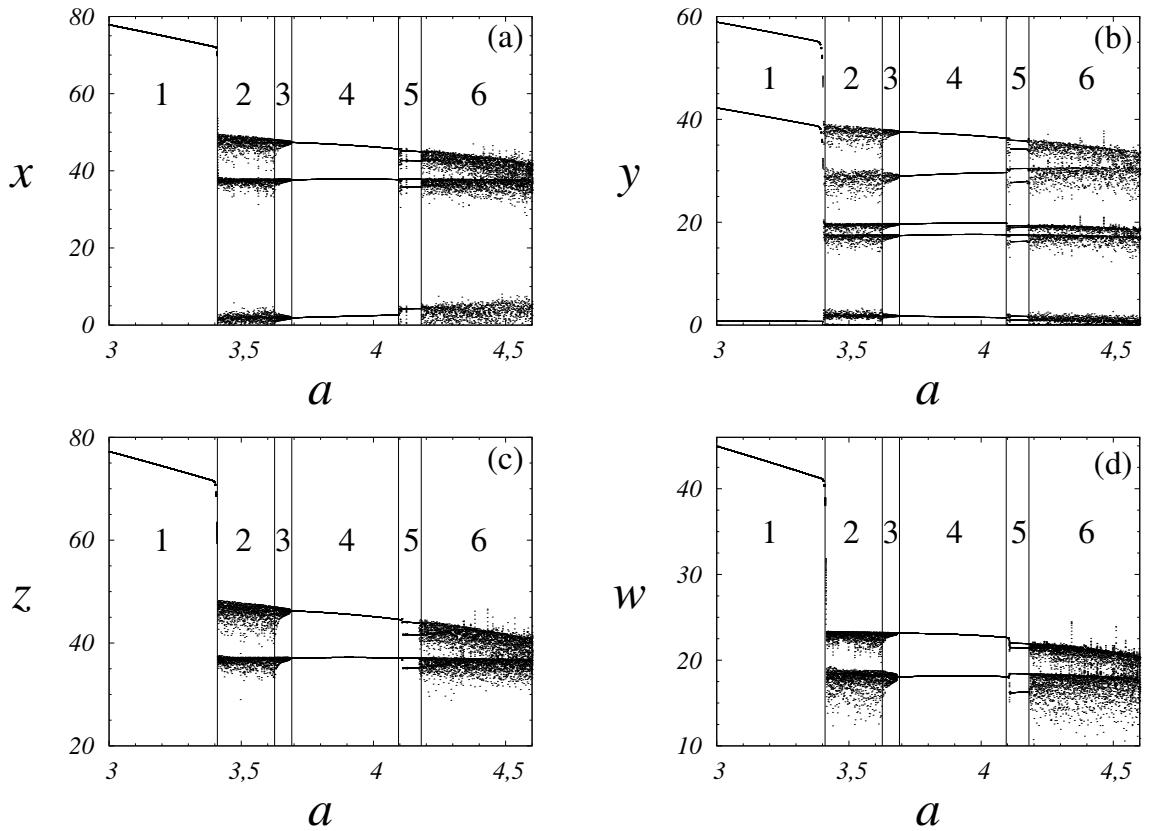


Fig. 4.3: Nos diagramas de bifurcação, foram plotados quarenta pontos para cada valor de a . Os parâmetros a e r , respectivamente variam de 3 até 4,6, e de 17 até 27, conforme a equação $r = -6,25a + 45,75$. (a) diagrama de bifurcação da variável x , (b) diagrama de bifurcação da variável y , (c) diagrama de bifurcação da variável z , e (d) diagrama de bifurcação da variável w .

diagramas de bifurcação da Fig. 4.3 os quatro tipos de comportamento, o periódico, o quaseperiódico, o caótico, e o hipercaótico, não sendo possível diferenciar, entre si, os dois últimos tipos de movimento. A Fig. 4.3, mostra que o movimento do sistema é periódico na região 1 que pertence ao intervalo de $a = 3,0$ até $3,4096$, e que nessa região o sis-

tema apresenta um único máximo para as variáveis x , z , e w , e três máximos para a variável y . Na região 2 de $a = 3,4096$ até $a = 3,6262$, o sistema apresenta um movimento caótico, mais precisamente hipercaótico, como pode ser observado na Fig. 4.2(b). No intervalo de $a = 3,6262$ até $a = 3,6912$ pertencente a região 3, o movimento é quaseperiódico, enquanto de $a = 3,6912$ até $a = 4,0948$, região 4, o movimento torna-se novamente periódico, apresentando dois máximos para as variáveis z e w , três máximos para a variável x , e cinco máximos para a variável y . Para a região 5 de $a = 4,0948$ até $a = 4,1808$, o sistema apresenta um movimento periódico, e em alguns pequenos intervalos do parâmetro a ele apresenta um movimento caótico. Na região 6, de $a = 4,1808$ até $4,6$ o comportamento do sistema torna-se caótico. A situação exposta acima está resumida na Tab. 4.1. Comportamento periódico é observado naquelas regiões onde conseguimos

região	intervalos de a	variável x	variável y	variável z	variável w
1	$3,0 \rightarrow 3,4096$	1 máximo	3 máximos	1 máximo	1 máximo
2	$3,4096 \rightarrow 3,6262$	hipercaos	hipercaos	hipercaos	hipercaos
3	$3,6262 \rightarrow 3,6912$	torus-2	torus-2	torus-2	torus-2
4	$3,6912 \rightarrow 4,0948$	3 máximos	5 máximos	2 máximos	2 máximos
5	$4,0948 \rightarrow 4,1808$	d*	d*	d*	d*
6	$4,1808 \rightarrow 4,6$	caos	caos	caos	caos

Tab. 4.1: Tabela da dinâmica do sistema ao longo da reta $r = -6,25a + 45,75$ na Fig. 4.2, tendo como base os 4 diagramas de bifurcações da Fig. 4.3. O d* significa que a dinâmica na região é periódica, mas com pequenos intervalos de caos.

contar o número de máximos locais de cada variável. Para corroborar os resultados obtidos nos diagramas de bifurcação e nos espaços de parâmetros, construímos as projeções bidimensionais de seis atratores. Cada um dos atratores corresponde a um ponto no espaço de parâmetros indicados na Fig. 4.2, pelos pontos α , β , χ , δ , ϵ e γ , sobre a reta $r = -6,25a + 45,75$.

Para que o atrator da Fig. 4.4 confirmem os resultados obtidos da análise dos diagramas de bifurcação da Fig. 4.3, é necessário que o número de máximos de cada variável, contado no atrator, seja correspondente ao número de máximos apresentado no correspondente diagrama de bifurcação, deste que ambos tenham os mesmos valores de parâmetros. Para facilitar a contagem dos máximos locais nos atratores das Figs. 4.4 e 4.5. Os máximos estão marcados nas projeções bidimensionais, com um ponto.

Na Fig. 4.4(c), o número de máximos da variável x é um, o mesmo resultado que se encontra na Tab. 4.1, para o primeiro intervalo, o qual contém o ponto α , que define os parâmetros utilizados para construir o atrator. Na projeção do atrator da Fig. 4.4(a), o número de máximos da variável y é três, correspondendo ao mesmo resultado apresentado

pelo diagrama de bifurcação da mesma variável. No entanto, ao fazer a mesma análise para as projeções do atrator apresentadas nas Figs. 4.4(b) e 4.4(d), que neste caso, respectivamente, são para as contagens dos máximos das variáveis z e w , contamos dois máximos, enquanto no correspondente diagrama de bifurcação aparece apenas um máximo. Essa discrepância pode ser explicada com uma análise mais apurada das Figs. 4.4(b) e 4.4(d). Observamos que em ambos os casos os dois máximos apresentados são coincidentes, não podendo assim aparecer nos correspondentes diagramas de bifurcação. Da mesma forma, ao observar as projeções bidimensionais do atrator da Fig. 4.5, correspondente ao ponto χ da Fig. 4.2, dentro da região 5 na Fig. 4.3, encontra-se o número de máximo para cada variável, através das projeções dos atratores, e compara-se com o número de máximos encontrados no diagrama de bifurcação respectivo. Se os valores não forem os mesmos, confere-se, se os máximos nos atratores são coincidentes. Neste caso os resultados também são compatíveis entre o atrator e os diagramas de bifurcação.

Nas projeções bidimensionais do atrator da Fig. 4.6, construído com os valores dos parâmetros do ponto β da Fig. 4.2, localizado numa zona de hipercaos como pode ser verificado observando a Fig. 4.2(b), não conseguimos contar o número de máximos, e o atrator tem um comportamento hipercaótico. O sistema é dito hipercaótico. As projeções bidimensionais do atrator da Fig. 4.7, correspondente ao ponto δ da Fig. 4.2, localizado numa região de caos, tal fato só pode ser observado analisando simultaneamente as Figs. 4.2(a) e 4.2(b), como anteriormente comentado. Apresentam um comportamento similar ao observado na Fig. 4.6, que corresponde a uma região de hipercaos. Assim, vemos que não é possível diferenciar uma região de hipercaos de uma de caos, apenas observando os diagramas de bifurcação e espaços de fase. A melhor maneira de caracterizar as regiões de hipercaos é plotando o segundo maior expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros. A Fig. 4.8 mostra as projeções bidimensionais do atrator correspondente ao ponto γ da Fig. 4.2, localizado numa região de quaseperiodicidade. Tal comportamento só pode ser observado considerando simultaneamente as Figs. 4.2(a) e 4.2(b). O atrator é do tipo torus-2, ou seja, o atrator deixa de ser o atrator periódico da Fig. 4.4, que era apenas uma linha, e começa a formar uma "mangueira" recobrindo a linha.

Importante observar que todos os resultados acima obtidos para a dinâmica do sistema (4.1) são corroborados pelo uso das três ferramentas de diagnóstico: espaço de parâmetros, diagramas de bifurcação e espaço de fase. Mas no caso das estruturas periódicas em formato de "espinhos" que aparecem no espaço de parâmetros da Fig. 4.2, elas não são observadas no diagrama de bifurcações. Todavia elas também aparecem no espaço de fase, como pode se observar nas projeções bidimensionais do atrator periódico da Fig. 4.9.

Atrator quaseperiódico correspondente ao ponto α

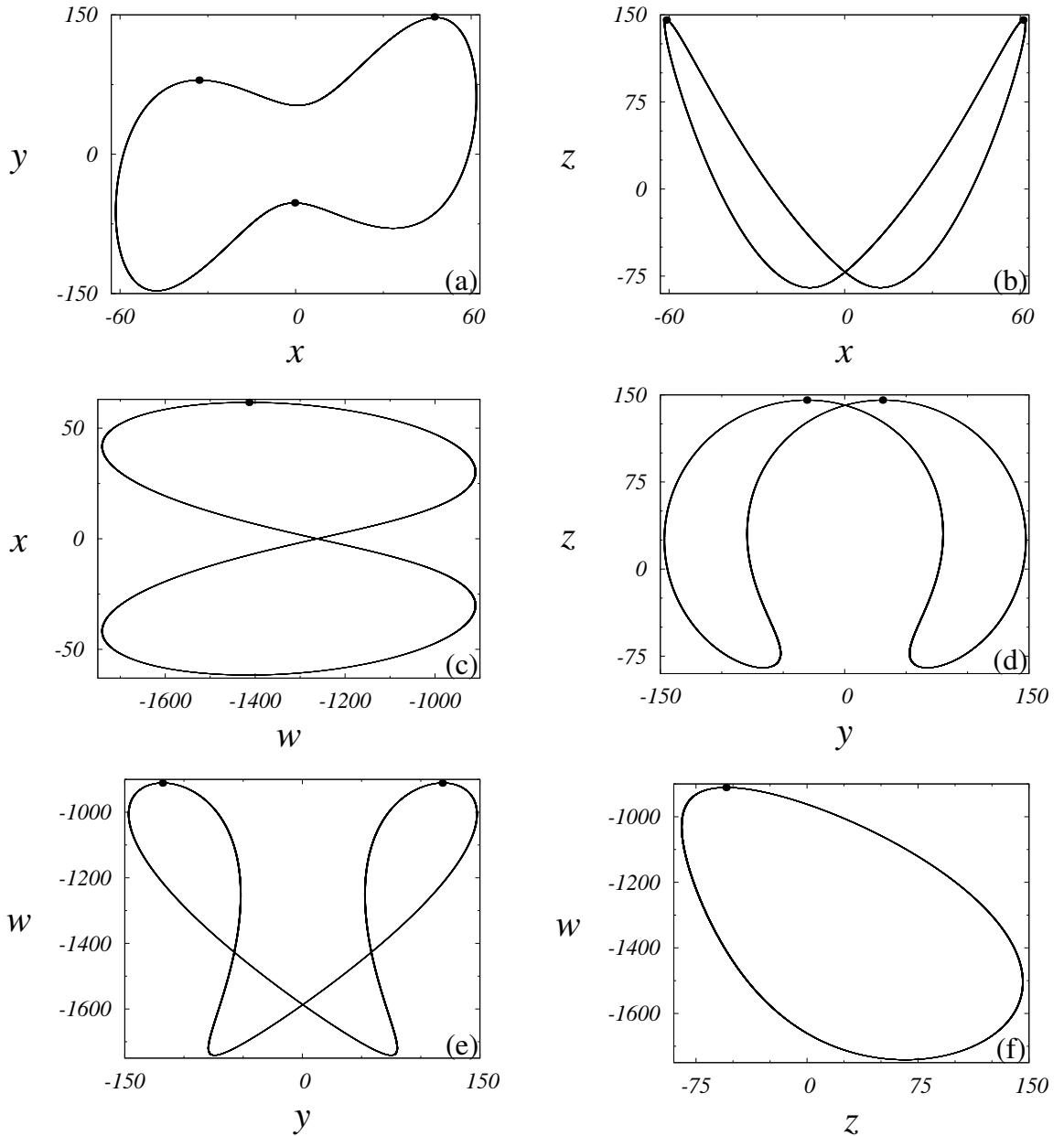


Fig. 4.4: Projeções do atrator periódico em duas dimensões, gerado pelo sistema (4.1), para $a = 3,25$ e $r = 25,43750$, correspondente ao ponto α da Fig. 4.2, com a condição inicial $(x,y,z,w) = (10,10,10,10)$. Todos os atratores foram construídos com 2×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase xz . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase yz . (e) plano de fase yw . (f) plano de fase zw .

Atrator periódico correspondente ao ponto χ

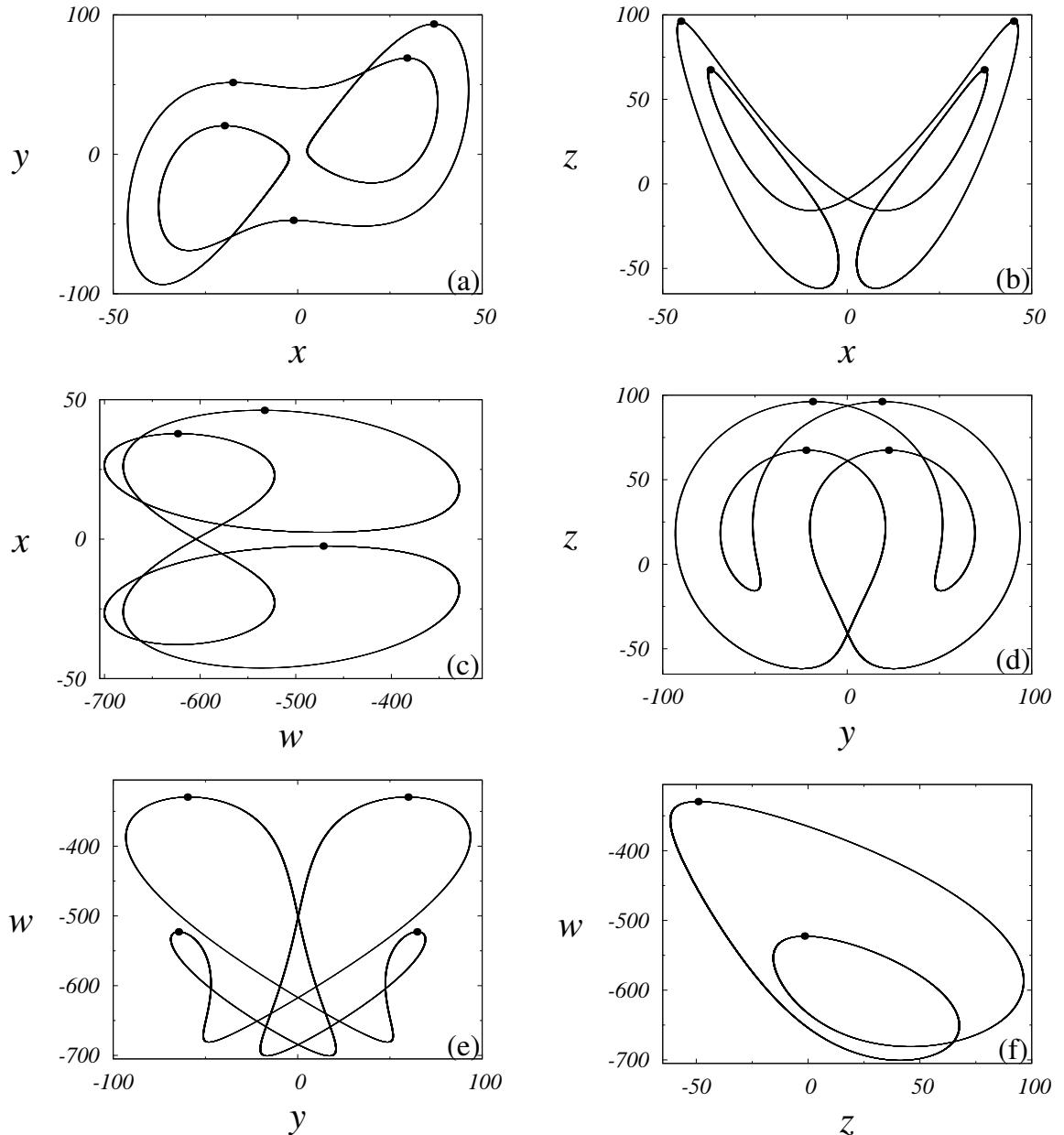


Fig. 4.5: Projeções do atrator periódico em duas dimensões, gerado pelo sistema (4.1), para $a = 4,0$ e $r = 20,750$, correspondente ao ponto χ da Fig. 4.2, com a condição inicial $(x,y,z,w) = (10,10,10,10)$. Todos os atratores foram construídos com 2×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase xz . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase yz . (e) plano de fase yw . (f) plano de fase zw .

Atrator hipercaótico correspondente ao ponto β

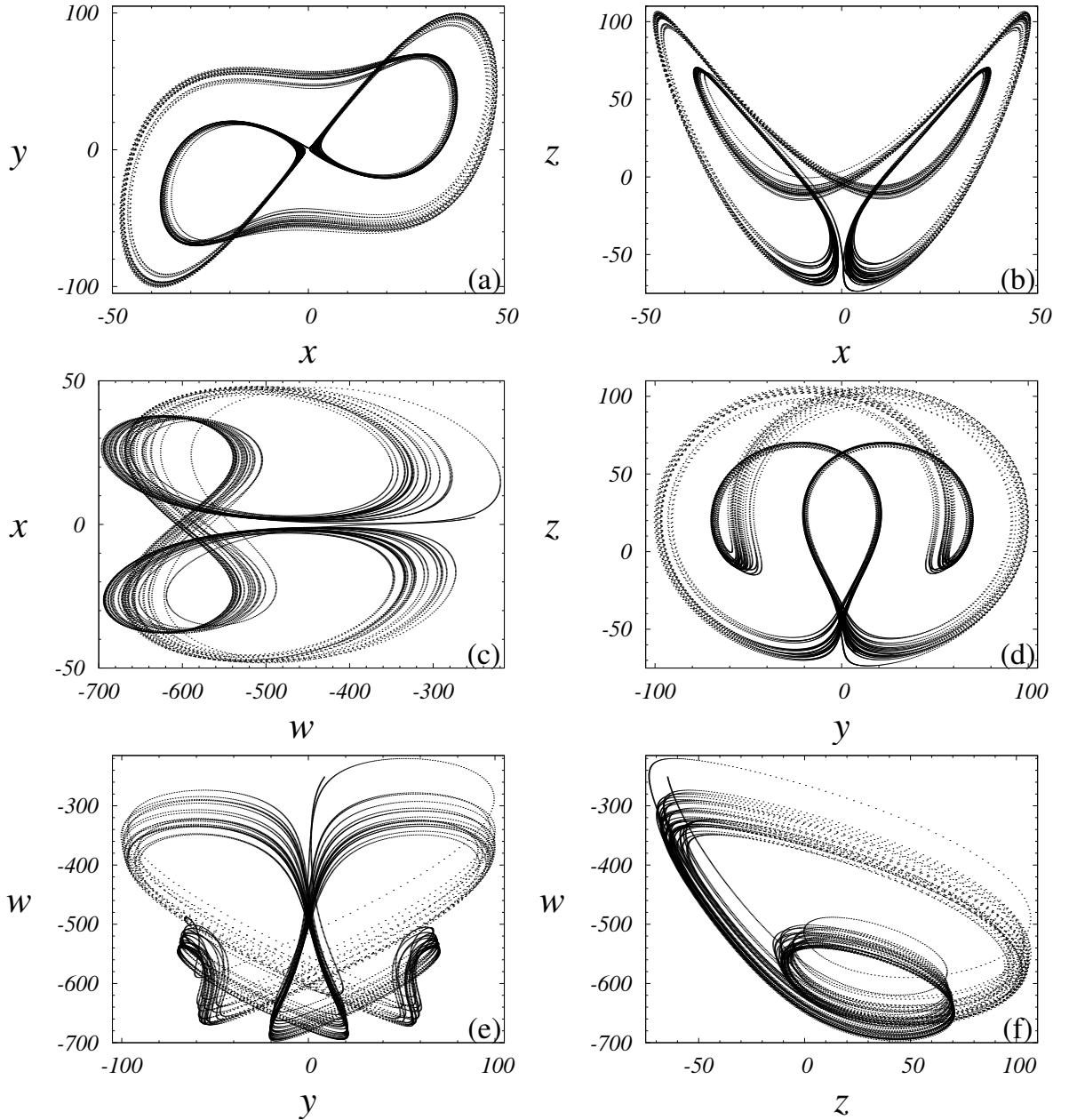


Fig. 4.6: Projeções do atrator hipercaótico em duas dimensões, gerado pelo sistema (4.1), para $a = 3,625$ e $r = 23,09375$, correspondente ao ponto β da Fig. 4.2, com a condição inicial $(x,y,z,w) = (10,10,10,10)$. Todos os atratores foram construídos com 2×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase xz . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase yz . (e) plano de fase yw . (f) plano de fase zw .

Atrator caótico correspondente ao ponto δ

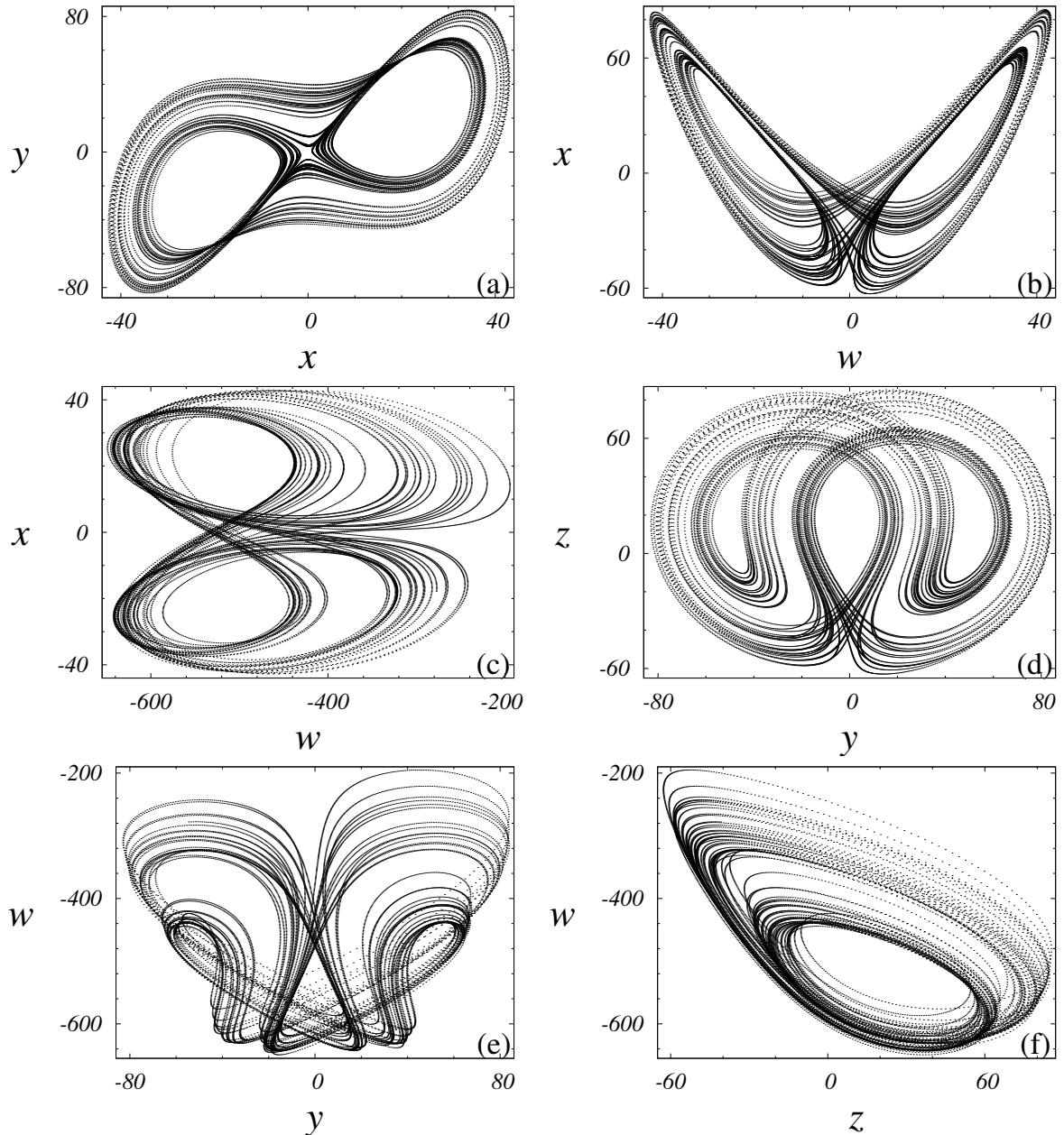


Fig. 4.7: Projeções do atrator caótico em duas dimensões, gerado pelo sistema (4.1), para $a = 4,5$ e $r = 17,625$, correspondente ao ponto δ da Fig. 4.2, com a condição inicial $(x,y,z,w) = (10,10,10,10)$. Todos os atratores foram construídos com 2×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase xz . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase yz . (e) plano de fase yw . (f) plano de fase zw .

Atrator quaseperiódico correspondente ao ponto γ

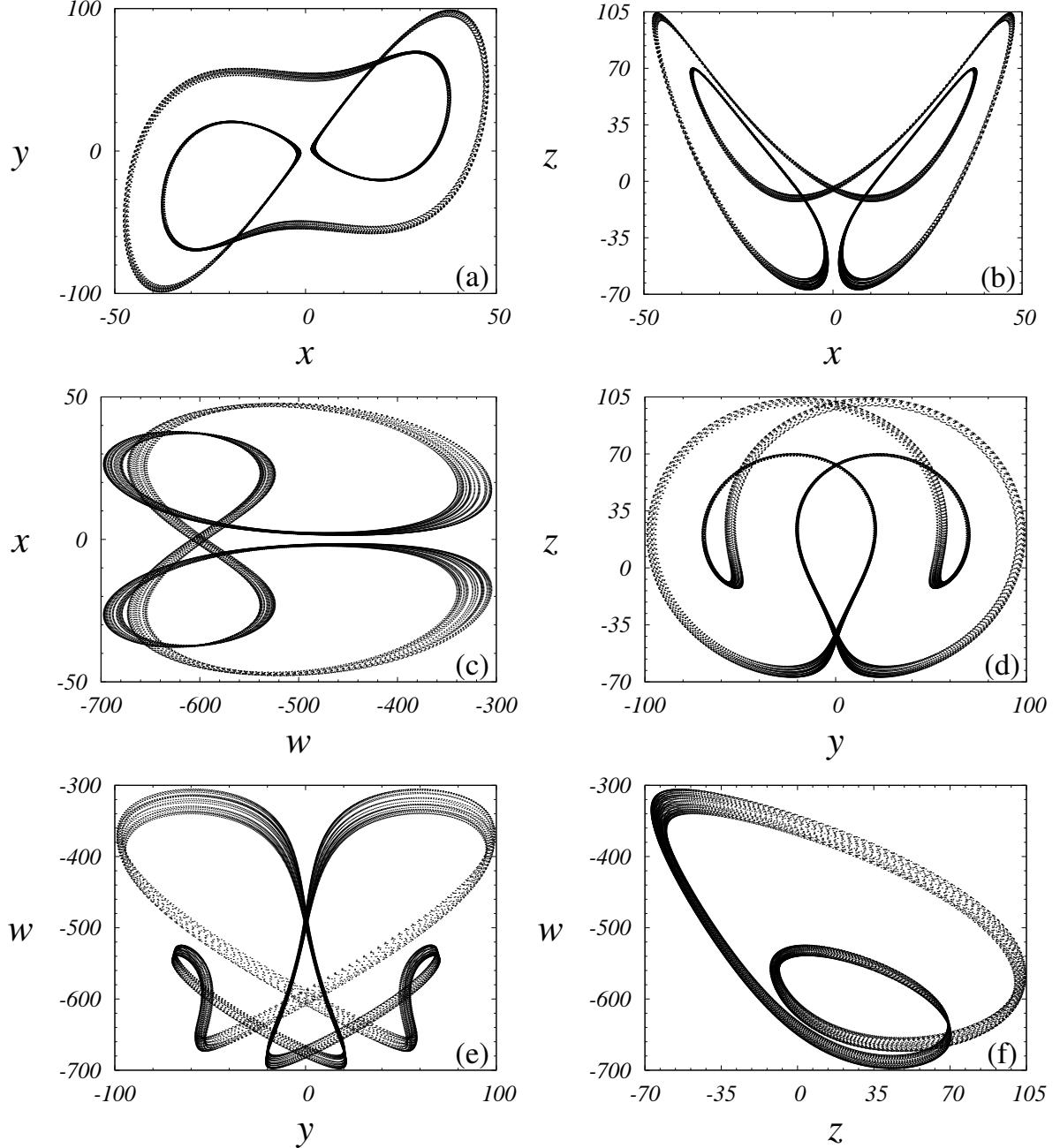


Fig. 4.8: Projeções do atrator quaseperiódico em duas dimensões, gerado pelo sistema (4.1), para $a = 3,675$ e $r = 22,78125$, correspondente ao ponto γ da Fig. 4.2, com a condição inicial $(x,y,z,w) = (10,10,10,10)$. Todos os atratores foram construídos com 2×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase xz . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase yz . (e) plano de fase yw . (f) plano de fase zw .

Atrator periódico correspondente ao ponto ϵ

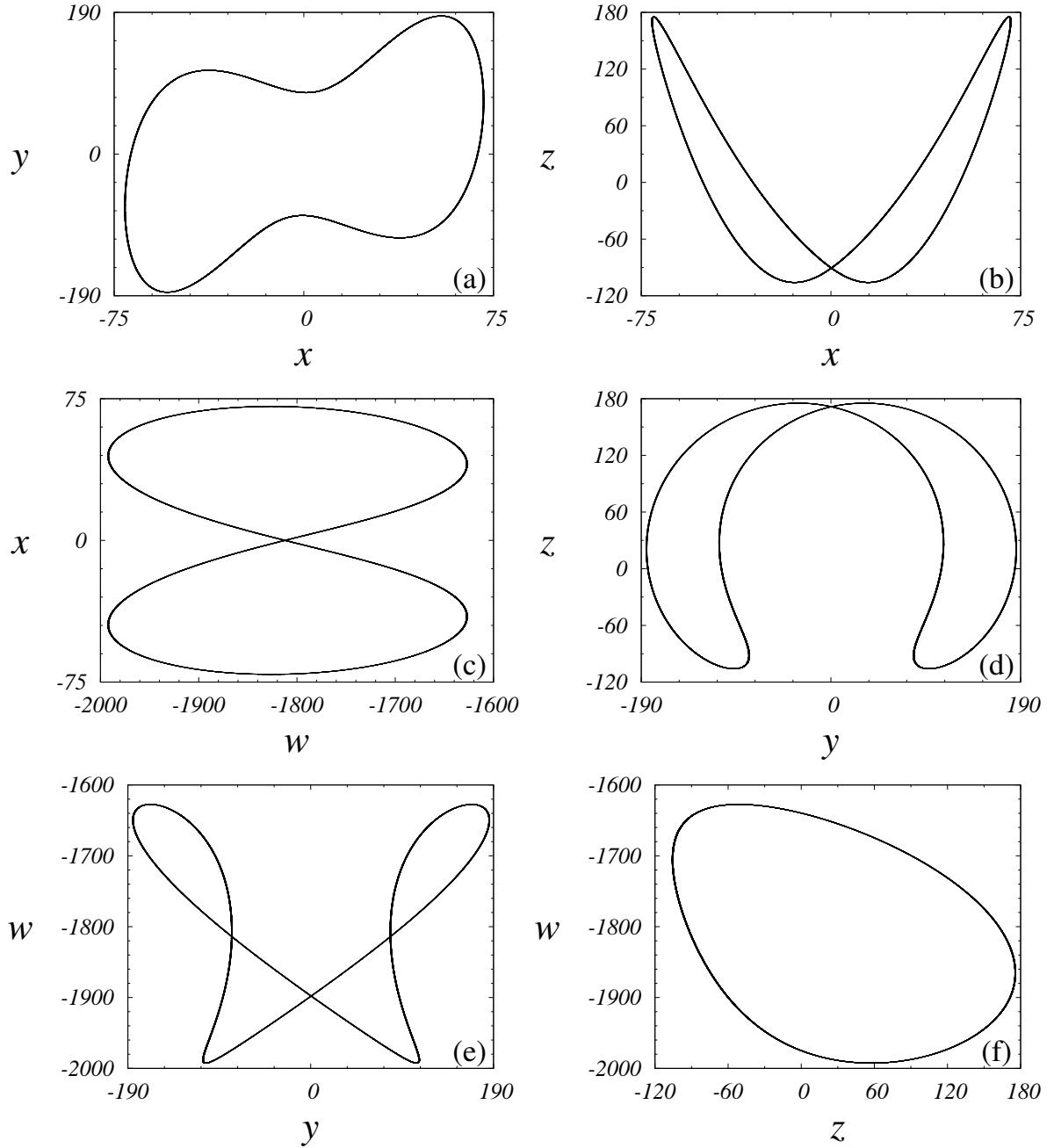


Fig. 4.9: Projeções do atrator periódico em duas dimensões, gerado pelo sistema (4.1), para $a = 3.48$ e $r = 24.0$, correspondente ao ponto ϵ da Fig. 4.2, com a condição inicial $(x,y,z,w) = (10,10,10,10)$. Todos os atratores foram construídos com 2×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase xz . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase yz . (e) plano de fase yw . (f) plano de fase zw .

Capítulo 5

Um Outro Sistema de Quatro Dimensões

5.1 O Novo Sistema

Objetivo deste capítulo é apresentar e estudar um outro sistema de quatro dimensões, por nós construído, a partir da inserção de uma nova variável w no sistema proposto na Ref. [4], o qual é um sistema tridimensional.

Com essa nova variável passa-se de um sistema tridimensional para um sistema de quatro dimensões, dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x - y) - yz + w, \\ \dot{y} &= -by - xz, \\ \dot{z} &= -cz + dx + xy, \\ \dot{w} &= -e(x + y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde x, y, z e w , são as variáveis, e a, b, c, d e e , são os parâmetros. O motivo da inserção dessa nova variável, está relacionado com o estudo do possível aparecimento de hipercaos neste novo sistema, visto que hipercaos aparece apenas em sistemas de quatro ou mais dimensões.

O estudo é desenvolvido em duas partes. Primeiramente o estudo analítico do sistema, posteriormente o estudo numérico.

5.2 Resultados Analíticos

Começamos calculando o divergente do sistema (5.1), que é dado por

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = a - b - c.\tag{5.2}$$

Sendo o resultado da Eq. (5.2) negativo, teremos um sistema dissipativo, implicando que trajetórias limitadas, convergem para um atrator de quatro dimensões no espaço de fase. Portanto, para que o sistema (5.1) tenha um atrator é necessário que $a < b + c$. Para os estudos numéricos consideramos $b = 10$ e $c = 4$, resultando $a < 14$. Na sequência, localizamos os pontos de equilíbrio no espaço de fase e estudamos a estabilidade. Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (5.1), fazemos $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$, $\dot{w} = 0$ para obter

$$\begin{aligned} a(x - y) - yz + w &= 0, \\ -by + xz &= 0, \\ -cz + dx + xy &= 0, \\ -e(x + y) &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Resolvendo o sistema (5.3), obtém-se os três pontos de equilíbrio,

$$P_0 = (0, 0, 0, 0), \quad P_{\pm} = \left(\frac{d \pm \Delta}{2}, -\frac{d \pm \Delta}{2}, -b, (b - 2a)\frac{d \pm \Delta}{2} \right), \tag{5.4}$$

onde $\Delta = \sqrt{d^2 + 4cb}$.

Para estudar a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio encontrados, utilizamos a matriz Jacobiana do sistema calculada no ponto de equilíbrio de interesse. Por exemplo, a matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio trivial P_0 , representada por J_0 , é dado por

$$J_0 = \begin{pmatrix} a & -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ d & 0 & -c & 0 \\ -e & -e & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

resultando no seguinte conjunto de autovalores:

$$\begin{aligned} m_1 &= -b, \\ m_2 &= -c, \\ m_{3,4} &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4e}}{2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para $a > 0$ o autovalor $m_3 = (a + \sqrt{a^2 - 4e})/2$ tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio é instável. Portanto, consideraremos o estudo no intervalo de a entre 0 e 14, que é o intervalo que o sistema pode apresentar caos, hipercaos ou ciclos limite, e as trajetórias limitadas convergem para um atrator no espaço de fase, com o tipo de comportamento dependendo apenas dos parâmetros a , b , c , d e e .

As matrizes J_+ e J_- , que são, respectivamente, as matrizes jacobianas do sistema calculada nos pontos P_+ e P_- , assim como seus autovalores, não serão aqui mostrados, já que seus autovalores são formados por uma quantidade demasiadamente grande de termos, sendo assim muito complicado interpretá-los.

5.3 Resultados Numéricos

Durante todo o estudo numérico da dinâmica do novo sistema aqui apresentado, fixamos os parâmetros $b = 10$, $c = 4$, e $d = 0,4$. Integrados o sistema com o método Runge-Kutta de quarta ordem, com um passo de integração igual a 1×10^{-3} , e com a condição inicial $C_i = (5, 5, -5, -5)$. Os parâmetros a e e , foram variados conforme a necessidade e a possibilidade do estudo efetuado.

Para calcular os expoentes de Lyapunov, objetivando a construção do espaço de parâmetros, varia-se a no intervalo de $a = 1,5$ até $a = 5,5$, e e no intervalo de $e = 0$ até $e = 8$, com 5×10^5 passos de integração, gerando o espectro dos expoentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, sendo $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. Com estes expoentes de Lyapunov construímos os quatro espaços de parâmetros, um para cada expoente de Lyapunov, como mostrado na Fig. 5.1.

A Fig. 5.1 permite estudar o comportamento dinâmico do sistema (5.1), em função dos parâmetros a e e . Observamos, na Fig. 5.1(a), que o sistema apresenta um comportamento caótico na região amarela e vermelha, e um comportamento periódico na região preta. Agora, ao analisar a Fig. 5.1(b), já podemos observar o comportamento hipercaótico na região amarela e vermelha, pois existem dois expoentes Lyapunov positivos, λ_1 e λ_2 . Analisando simultaneamente as duas figuras já citadas pode-se observar uma região de cor preta próxima as margens superiores de ambas as figuras, significando que neste espaço os dois expoentes de Lyapunov são iguais a zero, sendo portanto esta uma região de quaseperiodicidade.

Na Fig. 5.1(c), encontramos uma região em preto que corresponde a região de hipercaos já comentada anteriormente. Esse fato concorda com o resultado já encontrado, pois como escrito anteriormente dois expoentes de Lyapunov são positivos, e o terceiro maior é igual a zero. Na mesma figura observamos uma faixa em preto, próximo ao seu topo, que localiza-se bem na transição de periodicidade para quaseperiodicidade, transição esta que pode ser observada na Fig. 5.1(b), onde o branco significa periodicidade e o preto quaseperiodicidade. Como é esperado as Fig. 5.1(c) e Fig. 5.1(d), não apresentam expoentes de Lyapunov positivos, pois como é sabido, sistemas de quatro dimensões podem apresentar no máximo dois expoentes de Lyapunov positivos.

A Fig. 5.2 mostra uma ampliação da região interna à caixa azul A da Fig. 5.1, e com as mesmas características que a figura original.

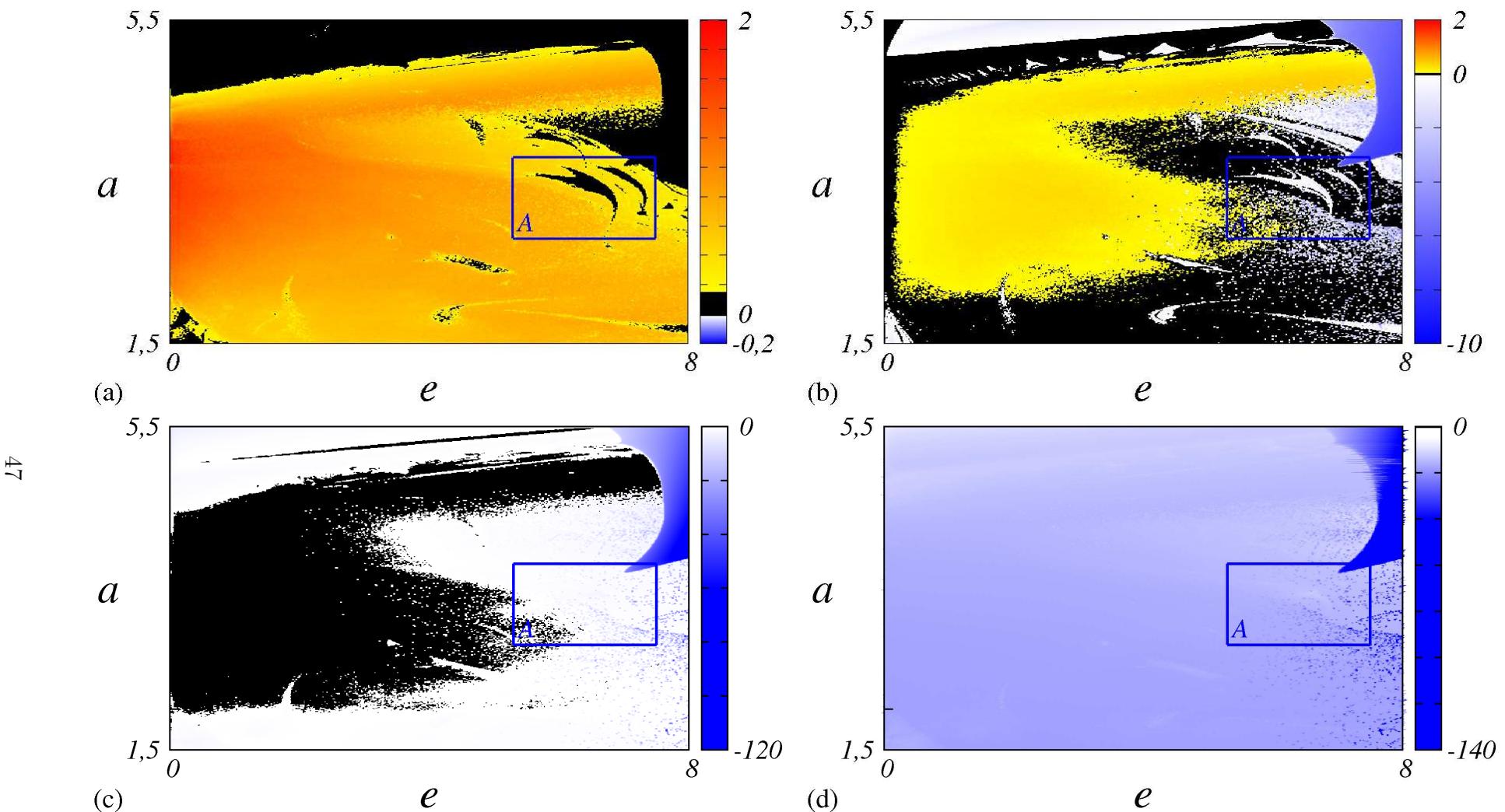


Fig. 5.1: Espaço de parâmetros do sistema (5.1), para $1,0 < a < 5,5$ e $0 < e < 8$, numa malha de 500 por 500. Cada figura corresponde a um expoente de Lyapunov, a) λ_1 , b) λ_2 , c) λ_3 e d) λ_4 .

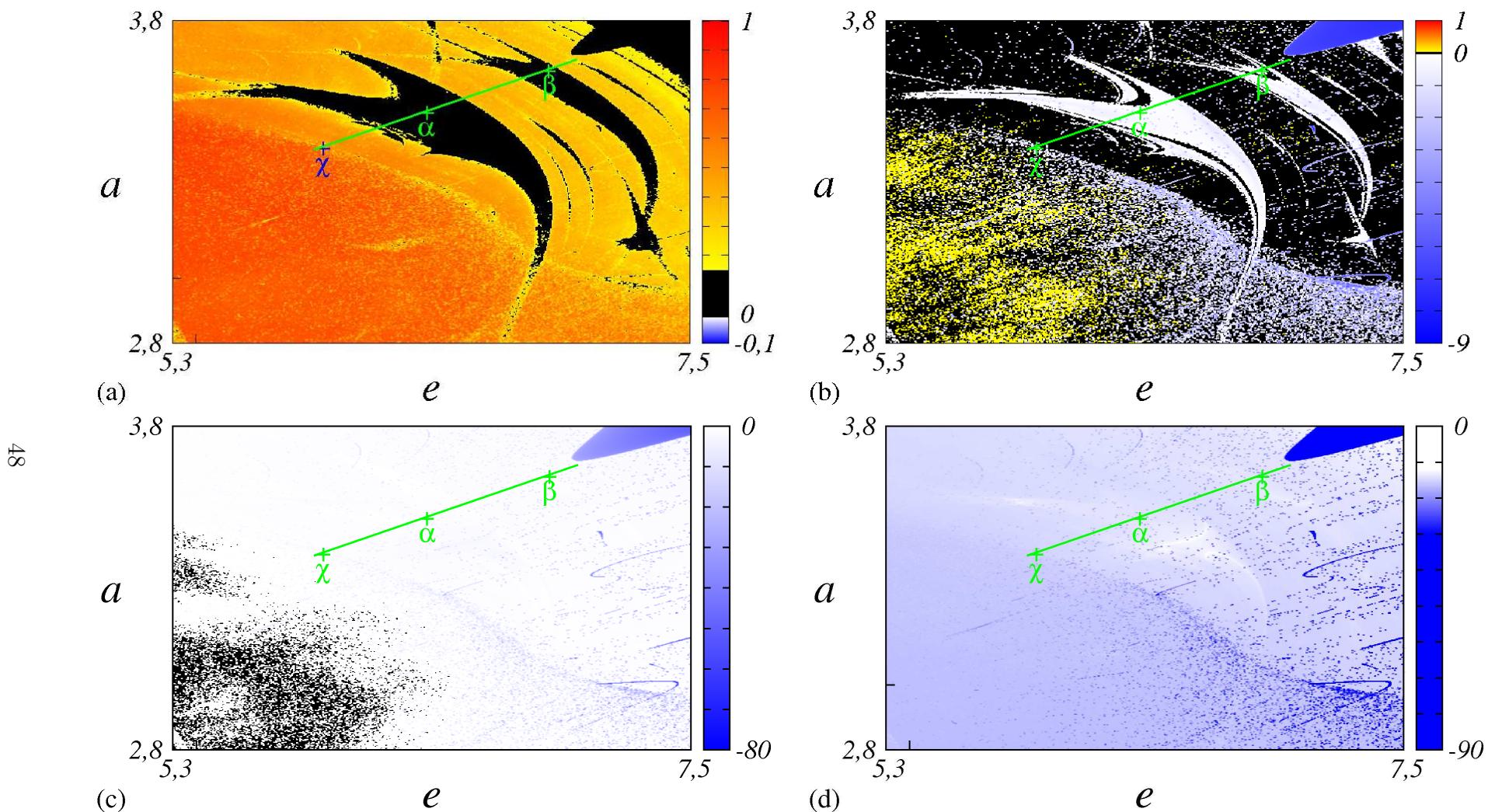


Fig. 5.2: Ampliações da caixa A da Fig. 5.1, sendo cada espaço de parâmetros correspondente a um expoente de Lyapunov, a) λ_1 , b) λ_2 , c) λ_3 , e d) λ_4 .

Analizando simultaneamente as Fig. 5.2(a) e a Fig. 5.2(b), observa-se uma estrutura em preto na Fig. 5.2(a), ou seja, com o maior expoente de Lyapunov igual a zero, e a mesma estrutura pode ser vista em branco na Fig. 5.2(b), mostrando que o segundo maior expoente é negativo, isto significa que esta estrutura é periódica. A estrutura periódica está mergulhada numa região caótica, já que o maior expoente de Lyapunov é positivo nesta região, como pode ser visto na Fig. 5.2(a). Em ambos os casos os demais expoentes de Lyapunov, ou seja, o terceiro e o quarto maior, são negativos, como pode ser observado nas Figs. 5.2(c) e 5.2(d).

Observamos na Fig. 5.2(b), as estruturas periódicas anteriormente citadas, na cor branca, e dentro delas é possível ver estruturas em preto. Para tentar compreender o que acontece nessas estruturas, assim como toda a dinâmica envolvida nelas, foram construídos os diagramas de bifurcações, mostrados na Fig. 5.3, para pontos sobre a reta verde $a = 0,25e + 1,725$, e o espectro dos expoentes de Lyapunov para pontos sobre essa mesma reta, que aparece na Fig. 5.4.

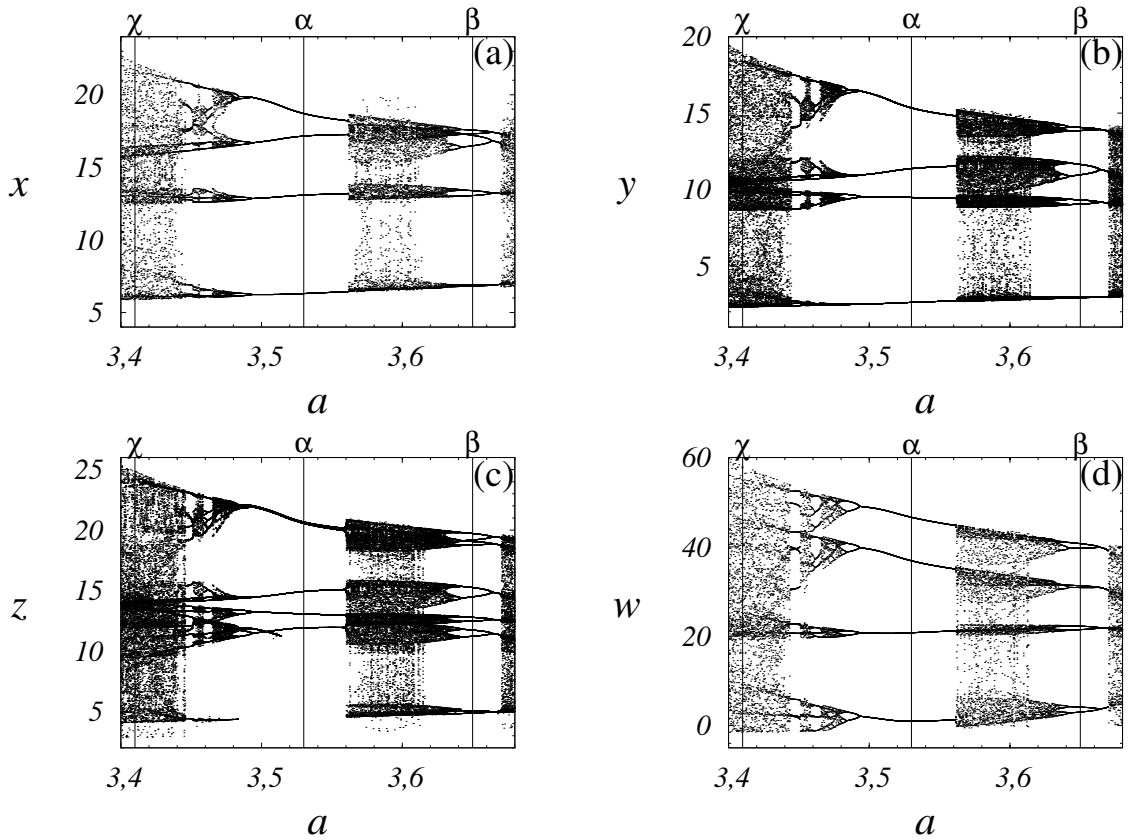


Fig. 5.3: Diagrama de bifurcação do sistema (5.1). Foram plotados quarenta pontos para cada um dos 500 valores da a , entre o intervalo de $a = 3,4$ até $a = 3,7$, e o parâmetro e varia respeitando a seguinte equação de reta $e = 4a - 6,9$. (a) diagrama de bifurcação da variável x por a . (b) diagrama de bifurcação da variável y por a . (c) diagrama de bifurcação da variável z por a . (d) diagrama de bifurcação da variável w por a .

Em todos os diagramas de bifurcação da Fig. 5.3, são observadas janelas periódicas, que são correspondentes as estruturas periódicas, discutidas anteriormente, e mostradas no espaço de parâmetros da Fig. 5.2(a). Observa-se nos diagramas de bifurcações, que a bifurcação acontece por dobramento de período. Dessa maneira, acontece a transição de um comportamento caótico para um comportamento periódico. Essa bifurcação que acontece por dobramento de período é marcado no espaço de parâmetros da Fig. 5.2(b), pelas estruturas em formas de listras pretas dentro das estruturas periódicas em branco, pois como é sabido para ocorrer esse tipo bifurcação é necessário que o segundo expoente de Lyapunov toque no eixo zero. Esse comportamento também pode ser observado no espectro dos expoentes de Lyapunov da Fig. 5.4(b), juntamente com os diagramas de bifurcação da Fig. 5.3. Os pontos $a = 3,485$, $a = 3,641$, e $a = 3,655$ são aqueles nos quais acontecem as bifurcações por dobramento de período, e são também os pontos nos quais o segundo expoente de Lyapunov toca o eixo zero e volta a ser negativo. Deste modo fica evidenciada a capacidade de reconhecer bifurcações periódicas, utilizando uma análise minuciosa no gráfico do espaço de parâmetros do segundo maior expoente de Lyapunov.

Consideramos agora três pontos sobre a reta verde $a = 0,25e + 1,725$ na Fig. 5.2, os quais são identificados pelo símbolo $+$. O ponto α encontra-se dentro da maior estrutura periódica da Fig. 5.2(a), região que contém quatro máximos nos diagramas de bifurcação da Fig. 5.3. O ponto β está na estrutura periódica menor, e o ponto χ dentro de uma região caótica. Projeções bidimensionais dos respectivos atratores são mostradas na Fig. 5.5 para o ponto α , na Fig. 5.6 para o ponto β , e na Fig. 5.7 para o ponto χ .

Nas projeções das variáveis x , y , e w , apresentadas na Fig. 5.5, observa-se um atrator com quatro máximos que corresponde, como o esperado, à região da maior estrutura periódica da Fig. 5.2(a). Agora, para a variável z a projeção do atrator contém cinco máximos, sendo esperado apenas quatro, conforme o diagrama de bifurcação da Fig. 5.3(c). Tal fato ocorre porque neste atrator dois dos máximos da variável z , são coincidentes, como pode ser visto na Fig. 5.5(b). Os respectivos valores dos expoentes de Lyapunov para este atrator são, $\lambda_1 = 0,000754$, $\lambda_2 = -0,148835$, $\lambda_3 = -1,13842$, e o $\lambda_4 = -13,8324$.

As projeções bidimensionais apresentadas na Fig. 5.6, são do atrator construído sobre o ponto β da Fig. 5.2, observa-se um atrator periódico que corresponde, como esperado, com os resultados obtidos, nos diagramas de bifurcação da Fig. 5.3 e nos espaços de parâmetros da Fig. 5.2. Os respectivos valores dos expoentes de Lyapunov para este atrator são, $\lambda_1 = 0,005126$, $\lambda_2 = -0,251985$, $\lambda_3 = -0,617772$, e o $\lambda_4 = -14,0623$.

No atrator caótico da Fig. 5.7 notamos uma estrutura bem complexa, corroborando com os resultados para este atrator, mostrado tanto no diagrama de bifurcação Fig. 5.3, quando no espaço de parâmetros Fig. 5.2.

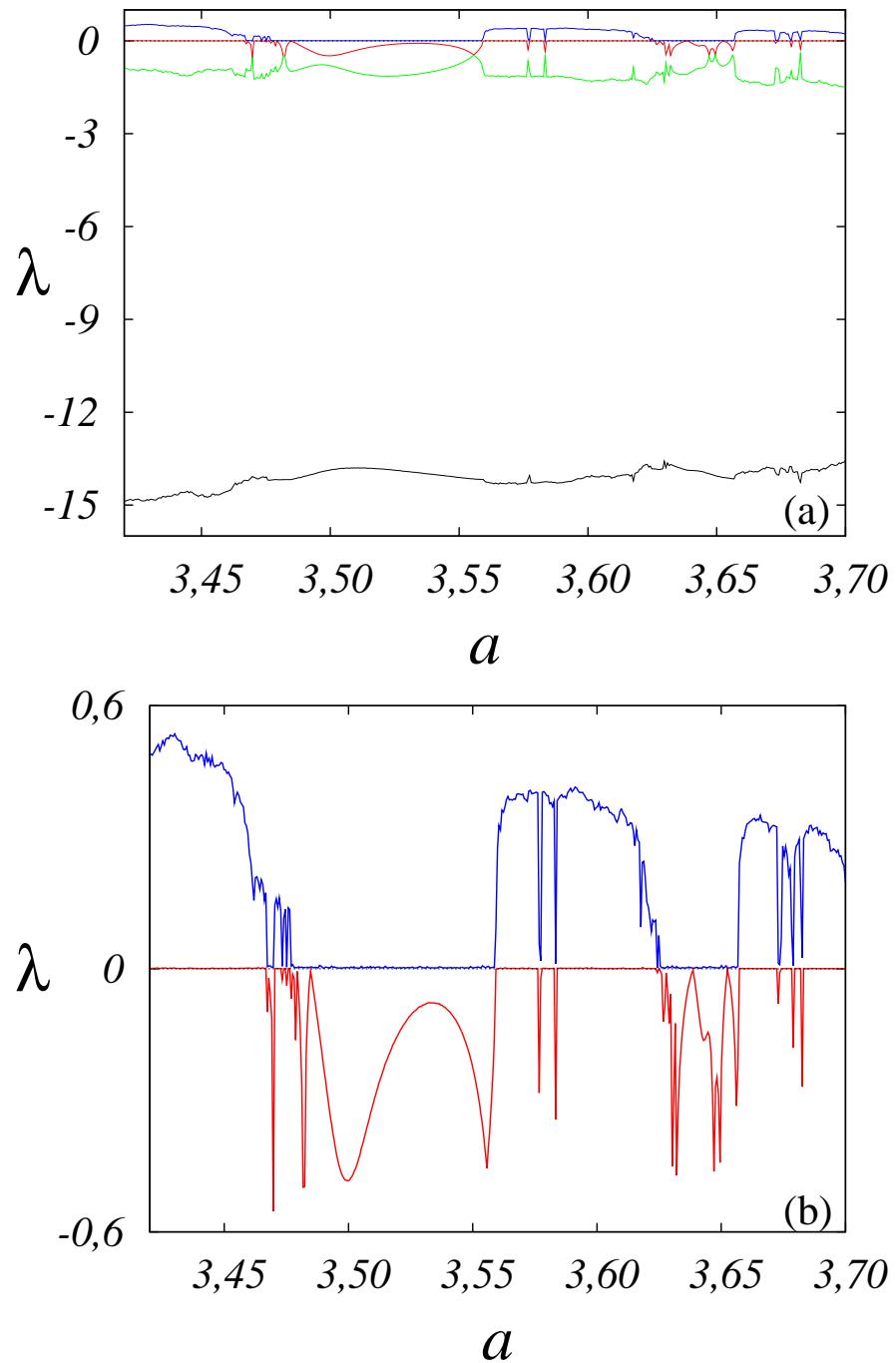


Fig. 5.4: Espectro dos expoentes de Lyapunov do sistema (5.1). O parâmetro a varia de 3,4 até 3,7 sendo este intervalo dividido em 500 pontos, e o parâmetro e varia respeitando a seguinte equação de reta $e = 4a - 6,9$. (a) Os quatro expoentes de Lyapunov em função do parâmetro a . (b) Os dois maiores expoentes de Lyapunov em função do parâmetro a . Sendo λ_1 correspondente a linha da cor azul, λ_2 correspondente a linha da cor vermelha, λ_3 a linha da cor verde, e λ_4 a linha da cor preta,

Atrator periódico correspondente ao ponto α

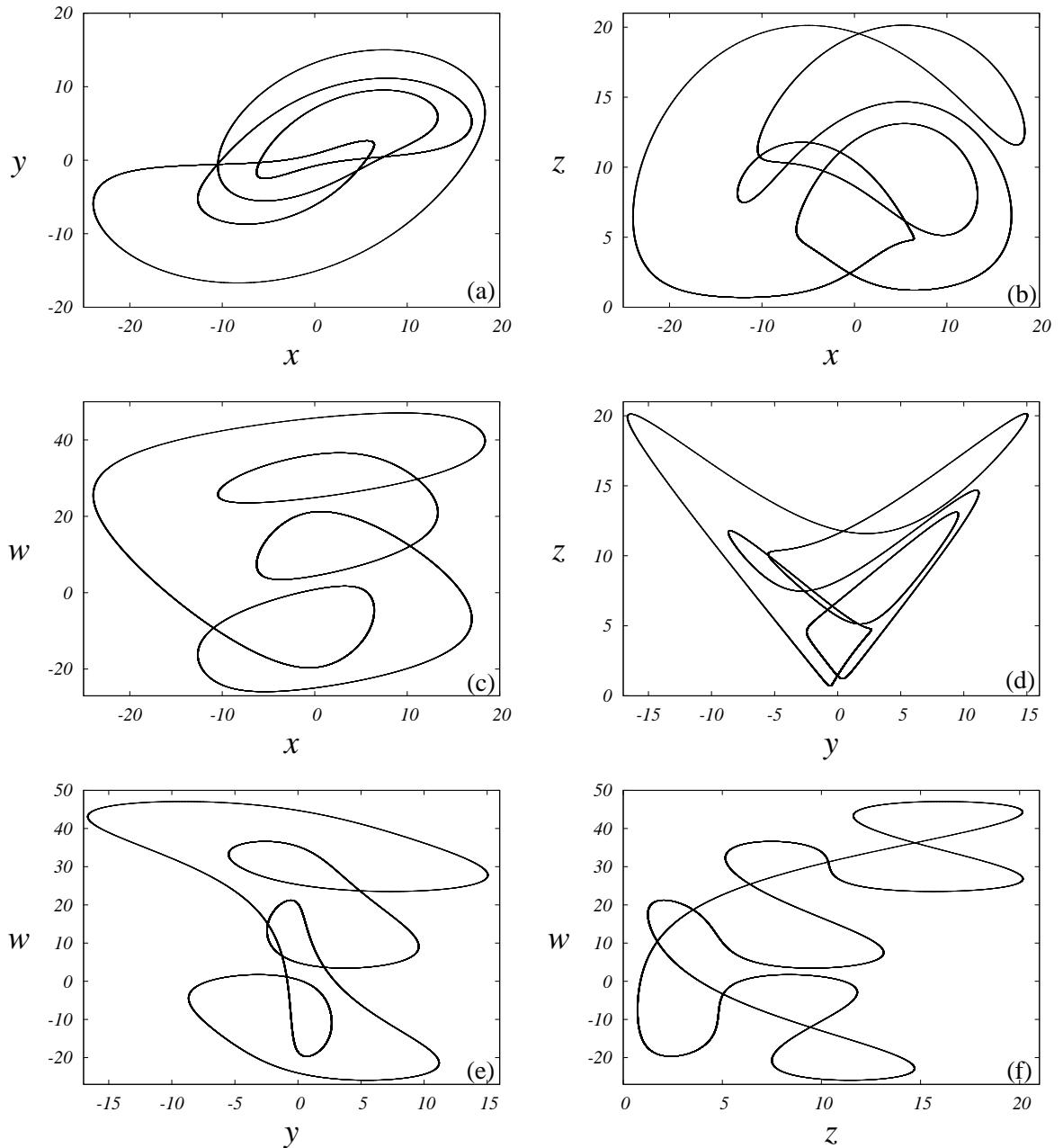


Fig. 5.5: Projeções bidimensionais do atrator periódico gerado pelo sistema (5.1), para $a = 3,52$ e $e = 6,38$, correspondente ao ponto α da Fig. 5.2. Todas as projeções foram construídas com 3×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase zx . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase zy . (e) plano de fase wy . (f) plano de fase wz .

Atrator periódico correspondente ao ponto β

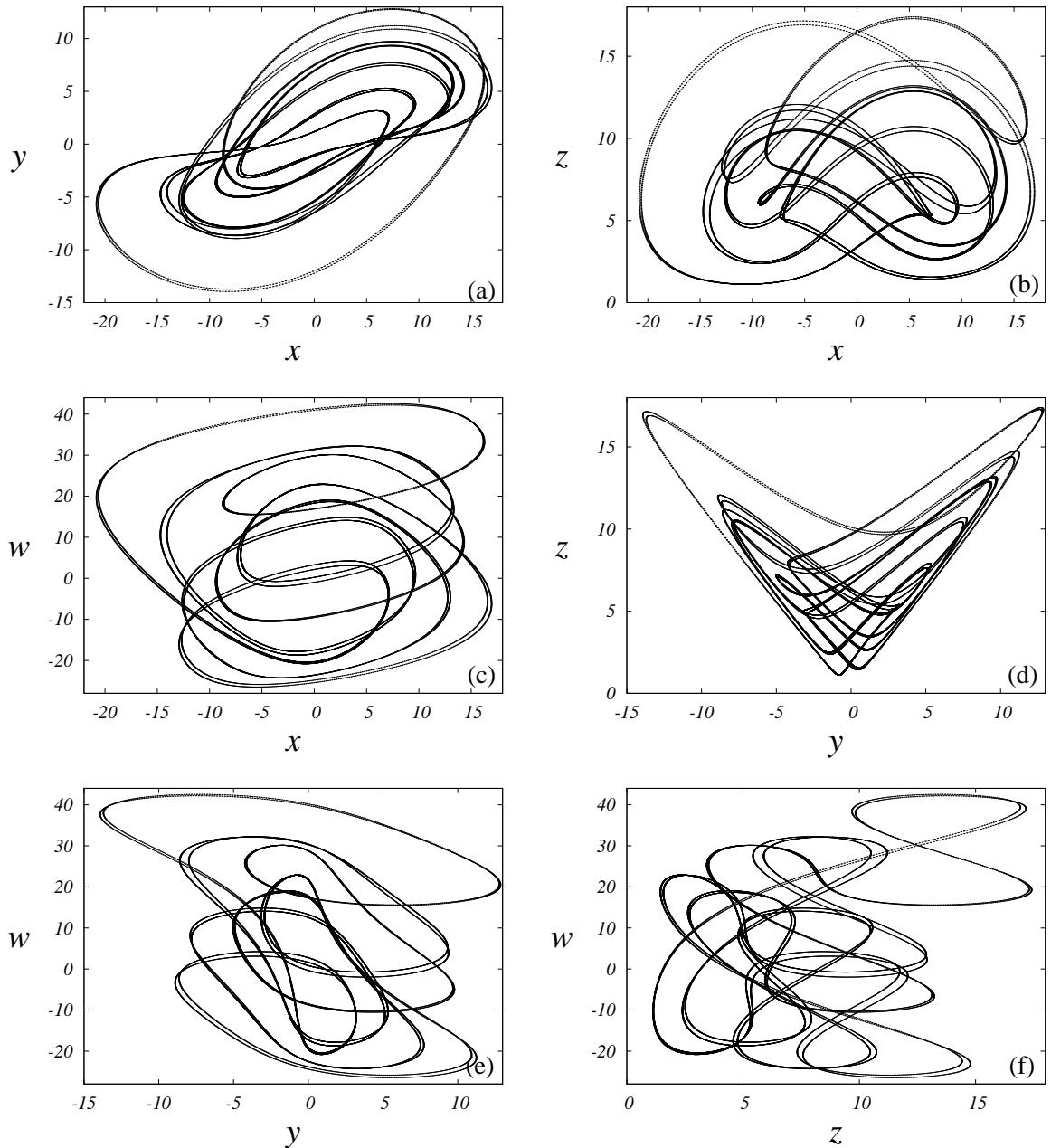


Fig. 5.6: Projeções bidimensionais do atrator periódico gerado pelo sistema (5.1), para $a = 3,65$ e $e = 6,90$, correspondente ao ponto β da Fig. 5.2. Todas as projeções foram construídas com 3×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase zx . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase zy . (e) plano de fase wy . (f) plano de fase wz .

Atrator caótico correspondente ao ponto χ

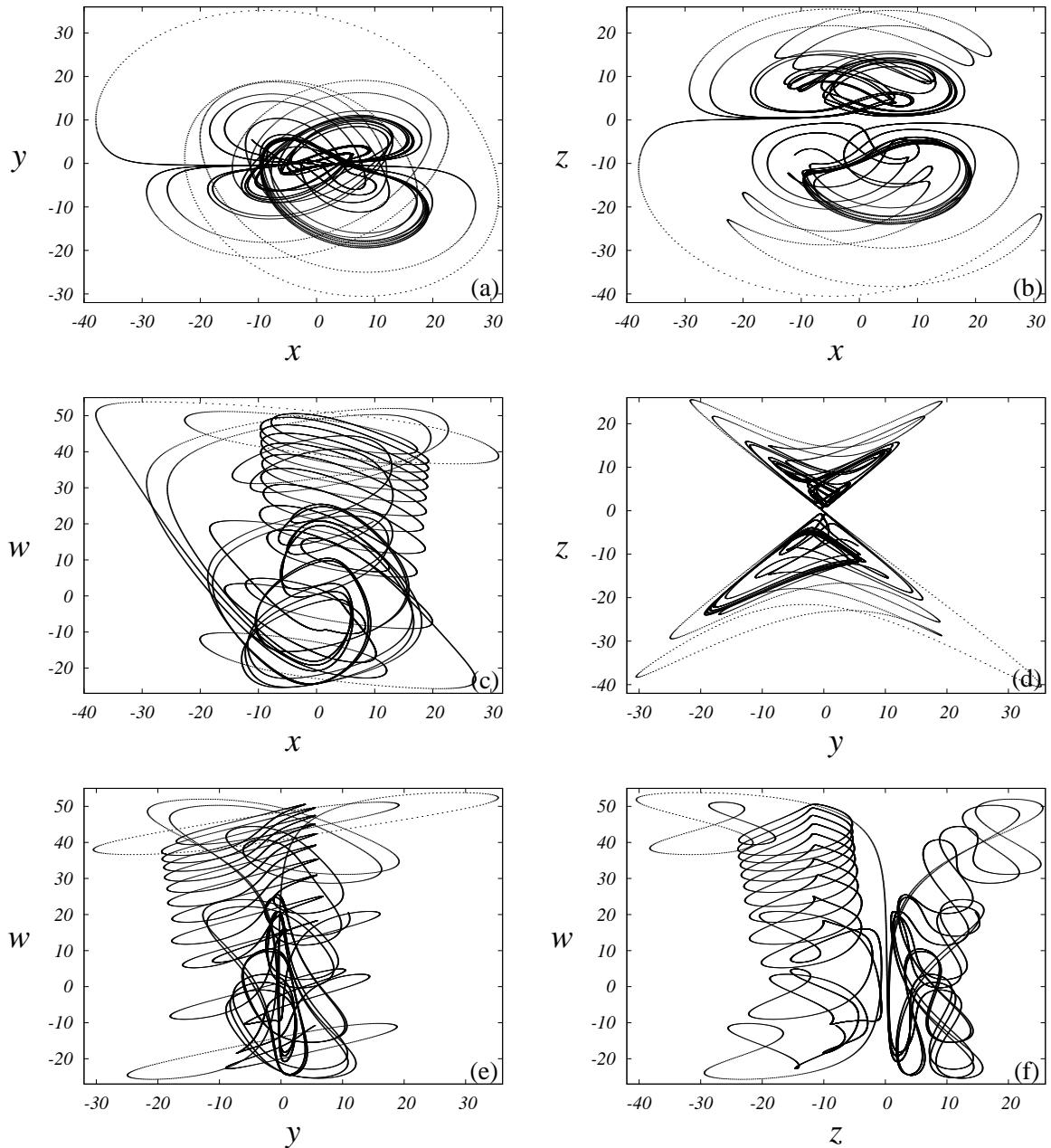


Fig. 5.7: Projeções bidimensionais do atrator caótico gerado pelo sistema (5.1), para $a = 3, 41$ e $e = 5, 94$, correspondente ao ponto χ da Fig. 5.2. Todas as projeções foram construídas com 3×10^4 pontos. (a) plano de fase xy . (b) plano de fase zx . (c) plano de fase wx . (d) plano de fase zy . (e) plano de fase wy . (f) plano de fase wz .

Capítulo 6

Conclusão

O método que considera apenas o maior expoente de Lyapunov na construção do espaço de parâmetros, é capaz de caracterizar: (i) caos, quando o maior expoente é positivo, (ii) periodicidade ou quaseperiodicidade, quando o maior expoente é nulo, (iii) ponto de equilíbrio, quando o maior expoente é negativo. Afora o fato do método ser ineficiente para diferenciar periodicidade de quaseperiodicidade, é largamente empregado para caracterizar a dinâmica de sistemas tridimensionais [28, 29, 30, 31, 32]. Para sistemas de mais de quatro dimensões, os quais podem apresentar além dos comportamentos acima mencionados, também hipercaos, este último comportamento é impossível de ser caracterizado no espaço de parâmetros construído com o maior expoente de Lyapunov.

Com o método aqui proposto, podemos caracterizar caos num sistema de quatro dimensões, construindo o espaço de parâmetros com o maior expoente de Lyapunov. Podemos caracterizar hipercaos, usando o espaço de parâmetros construído com o segundo maior expoente Lyapunov. Também podemos caracterizar torus-2 ou torus-3, sendo torus-2 quando o primeiro maior e o segundo maior expoentes de Lyapunov são nulos, e torus-3 quando o terceiro maior expoente também é nulo. Podemos ainda caracterizar periodicidade, quando apenas o maior expoente é nulo, e ponto de equilíbrio, quando todos os expoentes de Lyapunov são negativos. O quarto maior expoente de Lyapunov, que no caso de um sistema de quatro dimensões, é o menor de todos os expoentes, serve para mostrar que a soma total dos expoentes de Lyapunov é negativa, o que caracteriza o sistema como dissipativo.

Desse modo é mostrada a importância desse novo tipo de análise de todos os expoentes de Lyapunov no espaço de parâmetros, pois só assim é possível caracterizar toda a dinâmica do sistema, conforme os valores dos parâmetros. Outro fato interessante desse método, é que sua aplicabilidade se torna cada vez mais necessária, conforme a dimensão do sistema aumenta, pois os tipos de dinâmica que o sistema apresenta também aumentam.

Bibliografia

- [1] O. E. Rössler, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A* **71**, (1979) 155-157.
- [2] W. Wu, Z. Chen, Z. Yuan, The evolution of a novel four-dimensional autonomous system : Among 3-torus, limit cycle, 2-torus, chaos and hyperchaos, *Chaos, Solitons and Fractals* **39**, (2009) 2340-2356.
- [3] E. N. Lorenz, Deterministic non-periodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, (1963) 130-141.
- [4] L. Wang, 3-scroll and 4-scroll chaotic attractors generated from a new 3-D quadratic autonomous system, *Nonlinear Dynamics* **56**, (2009) 453-462.
- [5] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [6] N. F. Ferrara, C.P.C. Prado. Caos Uma Introdução. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1995.
- [7] K. T. Alligood, Chaos an Introduction to Dynamical Systems, Editora Springer, New York, 1996.
- [8] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Editora Copyright, USA, 1983.
- [9] L. H. A. Monteiro, Sistemas Dinâmicos, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002.
- [10] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York 1990.
- [11] G. Perez, H. A. Cerdeira, Extracting messages masked by chaos, *Physical Review Letters* **74**, (1995) 1970-1973.
- [12] X. Yang, F. Yang, Q. Li, Hyperchaos in Hopfield-type neural networks, *Neurocomputing* **67**, (2005) 275-280.
- [13] A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *The Journal of Physiology* **117**, (1952) 500-544.

- [14] H. Killory, O.E. Rössler, J.L. Hudson, Higher chaos in a four-variable chemical reaction model, *Physics Letters A* **122**, (1987) 341-345.
- [15] B. Cannas, S. Cincotti, Hyperchaotic behaviour of two bi-directionally coupled Chua's circuits, *International Journal of Circuit Theory and Applications* **30**, (2002) 625-637.
- [16] L. Stenflo, Generalized Lorenz Equations for Acoustic-Gravity Waves in the Atmosphere, *Physica Scripta* **53**, (1996) 83-84.
- [17] S. Zhang, K. Shen, Controlling hyperchaos in erbium-doped fibre laser, *Chinese Physics* **12**, (2003) 1009-1963.
- [18] R. Barboza, Dynamics of a hyperchaotic Lorenz system, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17**, (2007) 4285-4294.
- [19] G. -L. Cai, S. Zheng, L. -X. Tian, Adaptive control and synchronization of an uncertain new hyperchaotic Lorenz system, *Chinese Physics B* **17**, (2008) 2412-2419.
- [20] M. J. Correia, P. C. Rech, Hyperchaos in a new four-dimensional autonomous system, *International Journal of Bifurcation and Chaos* (2010), aceito para publicação.
- [21] T. G. Gao, Z. Q. Chen, G. Chen, A hyperchaos generated from Chen's system, *International Journal of Modern Physics C* **17**, (2006) 471-478.
- [22] T. Gao, Q. Gu, Z. Chen, Analysis of the hyperchaos generated from Chen's system, *Chaos Solitons and Fractals* **39**, (2009) 1849-1855.
- [23] Y. Li, S. K. Tang, G. Chen, Generating hyperchaos via state feedback control, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15**, (2005) 3367-3375.
- [24] B. -C. Bao, Z. Liu, A Hyperchaotic Attractor Coined from Chaotic Lü System, *Chinese Physics Letters* **25**, (2008) 2396-2399.
- [25] A. Chen, J. Lu, J. L. Lü, S. Yu, Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control, *Physica A* **364**, (2006) 103-110.
- [26] G. Wang, X. Zhang, Y. Zheng, Y. Li, A new modified hyperchaotic Lü system, *Physica A* **371**, (2006) 260-272.
- [27] P. C. Rech, H. A. Albuquerque, A Hyperchaotic Chua System, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19**, (2009) 3823-3828.

- [28] H. A. Albuquerque, P. C. Rech, A parameter-space of a Chua system with a smooth nonlinearity, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19**, (2009) 1351-1355.
- [29] H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, P. C. Rech, Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit. *Physics Letters A* **372**, (2008) 4793-4798.
- [30] C. Bonatto, J. A. C. Gallas, Periodicity Hub and Nested Spirals in the Phase Diagram of a Simple Resistive Circuit, *Physical Review Letters* **101**, (2008) 2396-2399.
- [31] A. Dabrowski, T. Kapitaniak, A. Stefanski, Evaluation of the largest Lyapunov exponent in dynamical systems with time delay, *Chaos, Solitons and Fractals* **23**, (2005) 1651-1659.
- [32] K. Ullmann, I. L. Caldas, Transitions in the Parameter Space of a Periodically Forced Dissipative System, *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, (1996) 1913-1921.
- [33] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, A. w. John, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D* **16**, (1985) 285-317.