

O tema principal desenvolvido nesta dissertação de Mestrado está relacionado com o estudo da dinâmica de sistemas conservativos, utilizando diferentes abordagens estatísticas. O parâmetro de não-linearidade que caracteriza a dinâmica destes sistemas tem um papel fundamental na existência de trajetórias caóticas que podem ser aprisionadas por um tempo finito nas proximidades das regiões regulares. Este fenômeno é conhecido como efeito *stickiness*, e pode ser identificado através da utilização de diferentes abordagens como, por exemplo, o espectro de Lyapunov calculado a tempo finito ou a estatística dos tempos de recorrência de Poincaré (ETR). No decorrer desta dissertação, propomos caracterizar o efeito *stickiness* utilizando tais abordagens, além de aplicar uma nova metodologia que consiste em analisar séries temporais do espectro de expoentes de Lyapunov afim de definir diferentes regimes de movimento. Para isso, estudamos dois sistemas conservativos multidimensionais derivados do mapa padrão. O primeiro sistema consiste em uma rede de mapas padrão acoplados que dá origem a um sistema de $2N$ -dimensões, sendo N o número de mapas acoplados. Utilizando este sistema, a partir da definição de regimes de movimento, foi possível determinar a distribuição cumulativa do tempo consecutivo que a trajetória permanece em um determinado regime, sendo que os resultados obtidos por meio da análise desta quantidade podem reproduzir de forma satisfatória aqueles obtidos quando utilizamos a ETR. O segundo sistema estudado foi o Mapa Padrão Modificado (MPM), resultante do acoplamento entre uma variável ação extra e o mapa padrão tradicional. O acoplamento com uma dimensão extra permite que trajetórias penetrem nas regiões de regularidade, o que antes era proibido para o caso bidimensional. A aplicação da técnica de separação de regimes neste sistema permite uma análise mais detalhada do efeito *stickiness*, mostrando que apenas trajetórias que se encontram em torno das estruturas de regularidade possuem expoentes de Lyapunov Locais com valores próximos a zero. Desta forma, o desenvolvimento desta pesquisa contribui para o melhor entendimento do efeito *stickiness* em sistemas conservativos de alta dimensionalidade.

Orientador: César Manchein

Joinville, 2015



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**EFEITO *STICKINESS* EM SISTEMAS CONSERVATIVOS:
UMA ABORDAGEM ESTATÍSTICA**

RAFAEL MARQUES DA SILVA

JOINVILLE, 2015

Rafael Marques da Silva

**Efeito *stickiness* em sistemas conservativos: uma
abordagem estatística**

Dissertação apresentada para obtenção do
título de Mestre em Física pela Universidade
do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciência Tecnológicas - CCT.

Orientador: Prof. Dr. César Manchein

Joinville, SC

2015

S586e

da Silva, Rafael Marques

Efeito *stickiness* em sistemas conservativos: uma abordagem estatística / Rafael Marques da Silva – 2015.

102 p.: il.; 21 cm

Orientador: César Manchein

Bibliografia: p. 93-96.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2015.

1. Sistemas conservativos. 2. Expoentes de Lyapunov a tempo finito. 3. Recorrências de Poincaré. 4. Caos. 5. Efeito *stickiness*. I. Manchein, César. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDD: 530 - 23. ed.

**“EFETIO STICKINESS EM SISTEMAS CONSERVATIVOS: UMA ABORDAGEM
ESTATÍSTICA”**

por

RAFAEL MARQUES DA SILVA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

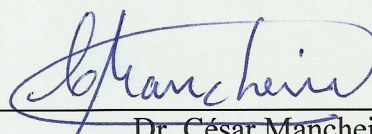
MESTRE EM FÍSICA

área de concentração em “Física”, e aprovada em sua forma final pelo

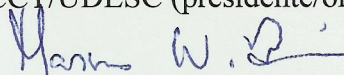
**CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.**

Banca Examinadora:

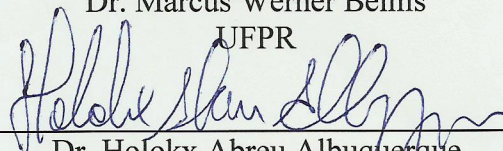
Joinville, 11 de março de 2015.



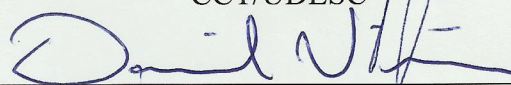
Dr. César Manchein
CCT/UDESC (presidente/orientador)



Dr. Marcus Werner Beims
UFPR



Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC



Dr. Daniel Vieira
CCT/UDESC

Agradecimentos

A conclusão de mais esta etapa de minha formação acadêmica não seria possível sem a força e o incentivo que recebi durante este período. Por isso, dedico este espaço para agradecer:

- * à Deus, pela vida;
- * à minha esposa Silvia, pela paciência, compreensão e companhia em todos os momentos;
- * aos meus pais Valdemiro e Maria, responsáveis pela minha formação como pessoa, a quem admiro e tenho como exemplos de vida;
- * à minha irmã Andreia e aos meus irmãos Amarildo e Rogério, pelo incentivo e amizade incondicionais;
- * ao meu orientador e amigo Prof. César Manchein, pelos ensinamentos, conselhos e discussões proveitosas;
- * aos Profs. Marcus W. Beims e Eduardo G. Altmann, pela valiosa colaboração científica;
- * aos colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Física, que colaboraram grandemente para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, compartilhando ideias e conhecimento;
- * à UDESC e ao grupo de Dinâmica Não-linear, pela oportunidade e pelo suporte computacional;
- * à CAPES, pelo suporte financeiro.

“Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam ambas de refletir.”

Henri Poincaré.

Resumo

O tema principal desenvolvido nesta dissertação de Mestrado está relacionado com o estudo da dinâmica de sistemas conservativos, utilizando diferentes abordagens estatísticas. Ao analisarmos o espaço de fases de um sistema dinâmico pertencente a esta classe, podemos encontrar regiões caóticas e regulares que são caracterizadas pela distribuição aleatória de pontos e por estruturas periódicas formadas por órbitas fechadas, respectivamente. O parâmetro de não-linearidade tem um papel fundamental na existência de trajetórias caóticas que podem ser aprisionadas por um tempo finito nas proximidades das regiões regulares. Este fenômeno é conhecido como efeito *stickiness*, e pode ser identificado através da utilização de diferentes abordagens como, por exemplo, o espectro de Lyapunov calculado a tempo finito ou a estatística dos tempos de recorrência de Poincaré (ETR). No decorrer desta dissertação, propomos caracterizar o efeito *stickiness* utilizando tais abordagens, além de aplicar uma nova metodologia que consiste em analisar séries temporais do espectro de expoentes de Lyapunov afim de definir diferentes regimes de movimento. Para isso, estudamos dois sistemas conservativos multidimensionais derivados do mapa padrão, um mapa simplético muito utilizado para a investigação da transição da dinâmica regular para caótica. O primeiro deles consiste em uma rede de mapas padrão acoplados que dá origem a um sistema de $2N$ -dimensões, sendo N o número de mapas acoplados. Utilizando este sistema, a partir da definição de regimes de movimento, foi possível determinar a distribuição cumulativa do tempo consecutivo que a trajetória permanece em um determinado regime, sendo que os resultados obtidos por meio da análise desta quantidade podem reproduzir de forma satisfatória aqueles obtidos quando utilizamos a ETR. O segundo sistema estudado foi o Mapa Padrão Modificado (MPM), resultante do acoplamento entre uma variável ação extra e o mapa padrão tradicional. O acoplamento com uma dimensão extra permite que trajetórias penetrem nas regiões de regularidade, o que antes era proibido para o caso bidimensional. A aplicação da técnica de separação de regimes neste sistema permite uma análise mais detalhada do efeito *stickiness*, mostrando que apenas trajetórias que se encontram em torno das estruturas de regularidade possuem expoentes de Lyapunov Locais com valores próximos a zero. Desta forma, o desenvolvimento desta pesquisa contribui para o melhor entendimento do efeito *stickiness* em sistemas conservativos de alta dimensionalidade.

Palavras-chaves: Sistemas conservativos. Expoentes de Lyapunov a tempo finito. Recorrências de Poincaré. Caos. Efeito *Stickiness*.

Abstract

The main subject developed in this dissertation is the characterization of the dynamics of high-dimensional conservative systems using different statistical approaches. Looking at the conservative system phase-space, we can find chaotic and regular regions that are characterized by a random distribution of points and periodic structures formed by closed orbits, respectively. The nonlinearity parameter has a fundamental role to the occurrence of chaotic trajectories that can get stuck for a finite time on the vicinity of regular regions. This phenomenon is known as stickiness effect and can be identified using different tools as the spectrum of finite time Lyapunov exponents or the recurrence time statistics (RTS), *e.g.* Throughout this dissertation, we propose to characterize this effect using such approaches and also apply a new methodology which uses the time series of the spectrum of finite time Lyapunov exponents to separate the dynamics in different regimes of motion. For this purpose, we study two conservative systems that are derived from standard map, a symplectic map extensively used to investigate the transition from regular to chaotic dynamic. The first system consists in a chain of coupled standard maps that originates a $2N$ -dimensional system, where N is the number of coupled maps. Using this system, from the definition of regimes of motion, we obtained the cumulative distribution of the consecutive time that the trajectory spends in a particular regime, which reproduces with a good precision the results obtained when using the RTS. The second system studied was the Modified Standard Map, which is obtained adding an action variable to the standard map. The coupling with an extra dimension allows the penetration of the regular structures by the trajectories, what was forbidden for the two-dimensional case. The application of the method of separation of regimes in this system enables a more detailed analysis of the stickiness effect, showing that only the trajectories located near the regular structures have Local Lyapunov exponents about zero. Thus, the development of this research contributes to a better understanding of the stickiness effect in high-dimensional conservative systems.

Key-words: Conservative systems. Finite time Lyapunov exponents. Poincaré recurrences. Chaos. Stickiness effect.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Breve introdução histórica	9
1.2	Representação matemática de sistemas dinâmicos	11
1.3	Aspectos gerais dos sistemas dinâmicos não-lineares	12
1.4	Estrutura da dissertação	13
2	Fundamentação teórica	15
2.1	Dinâmica Hamiltoniana	15
2.1.1	Transformações canônicas e notação simplética	16
2.1.2	A equação de Hamilton-Jacobi	19
2.1.3	Integrabilidade	20
2.1.4	Variáveis ação-ângulo	21
2.2	O teorema KAM	24
2.2.1	O teorema de Poincaré-Birkhoff	26
2.3	Expoentes de Lyapunov	29
2.3.1	Método numérico	32
2.4	Recorrências de Poincaré	34
2.5	Quase-armadilhas dinâmicas (QADs) e o efeito <i>stickiness</i>	35
3	O mapa padrão	38
3.1	Modelo físico	38
3.1.1	Função Hamiltoniana dependente do tempo	39
3.2	Derivação do mapa padrão	40
3.3	Pontos fixos e estabilidade	43
3.4	Transição para o caos no mapa padrão	45
4	Caracterizando caos fraco usando expoentes de Lyapunov	47
4.1	Rede de mapas Hamiltonianos acoplados	49
4.2	O método	50
4.3	Resultados numéricos	53

4.3.1	Identificando as regiões do espaço de fases	53
4.3.2	Tempo de residência em cada regime	55
4.3.3	Transições entre diferentes regimes	59
4.3.4	Tempo consecutivo gasto em cada regime	62
4.3.5	Dependência sensível dos expoentes de Lyapunov ao acoplamento	67
4.4	Conclusões parciais	71
5	Efeito <i>stickiness</i> em um mapa ação-ação-ângulo	72
5.1	O modelo	73
5.2	Resultados numéricos	74
5.2.1	Dinâmica do MPM no espaço de fases	74
5.2.2	Lei de escala para a ETR	80
5.2.3	Efeito <i>stickiness</i> e difusão	84
5.2.4	Regimes de movimento ordenado e caótico	86
5.3	Conclusões parciais	88
6	Considerações finais	90
	Referências	93
	Apêndices	97
	APÊNDICE A Condição simplética do mapa padrão	98
	A.1 Prova de que o MPM é conservativo	99
	APÊNDICE B Ortonormalização de Gram-Schmidt	100
	APÊNDICE C Condição simplética do acoplamento $T^{(i)}$	101

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação de Mestrado propomos investigar algumas propriedades de sistemas dinâmicos não-lineares. Uma das características mais intrigantes destes sistemas é a existência do que hoje conhecemos como **comportamento caótico**, que pode ocorrer em diversas áreas da ciência. Na sequência deste Capítulo, apresentaremos um resumo dos principais fatos históricos relacionados com o tema principal desta dissertação, assim como alguns aspectos que caracterizam tais sistemas, os quais nos motivaram a realizar este trabalho de investigação.

1.1 Breve introdução histórica

O estudo de sistemas dinâmicos é amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento humano. Um **sistema** pode ser entendido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito [1]. Podemos afirmar que um sistema é **dinâmico** quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. A palavra **dinâmica**, proveniente do grego “*dynamike*” (que traduzida para o português significa “forte”), nos traz a ideia de movimento, sendo o ilustre cientista italiano **Galileu Galilei** (1564-1642) provavelmente o pioneiro nos estudos deste ramo da Física. Ele antecipou a lei da Inércia, consolidada posteriormente por **Isaac Newton** (1643-1727), ao perceber que a ação de uma força é necessária para mudar o movimento de um corpo, mas não para mantê-lo deslocando-se em linha reta com velocidade constante.

O estabelecimento das leis que regem o movimento aconteceu em julho de 1687, quando foi publicada a obra de Newton, intitulada *Philosophiae naturalis principia mathematica*, que em português significa “Princípios matemáticos da filosofia natural”, talvez o livro de Ciências Naturais mais influente até os dias de hoje. Compreender o motivo de tamanha importância desta obra é simples: nela constam os princípios da Mecânica Clássica resumidos em três leis, conhecidas como as **Leis de Newton**. Neste livro, Newton não apenas enunciou suas leis, mas também apresentou uma sólida base

matemática para explorar a implicância das mesmas [2]. O sucesso e a imponentia das Leis de Newton possibilitaram o surgimento de uma visão determinística da natureza e, conseqüentemente, conduziu a um grande desenvolvimento científico ao longo dos séculos. As equações de Newton certamente são o ponto de partida da Mecânica. No entanto, geralmente elas apenas nos possibilitam determinar o comportamento dinâmico de uma classe restrita de sistemas mecânicos: os sistemas **integráveis**. O problema é que esta classe de sistemas não é capaz de descrever a maioria dos fenômenos naturais comuns em nosso cotidiano.

De acordo com a segunda Lei de Newton, a força total $\mathbf{F}$ que age sobre uma partícula de massa m é proporcional à sua aceleração $\mathbf{a}$, ou seja:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.1)$$

Portanto, conhecendo a força total que age sobre a partícula e também sua massa, basta-nos resolver a Eq. (1.1) com as condições iniciais $\mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ para determinar a função $\mathbf{r}(t)$, que traz a informação sobre a trajetória da partícula. A abordagem newtoniana é eficaz para um problema que envolve a interação entre duas partículas. Porém, aumentando este número para três, o problema se torna insolucionável. Não é possível encontrar expressões analíticas para as soluções das equações diferenciais resultantes do problema de três corpos.

Em 1886, **Henri Poincaré** (1854-1912) estudou um modelo simplificado do Sistema Solar com três corpos, inspirado pelo desafio lançado pelo rei Oscar II, da Suécia e da Noruega, que consistia em provar matematicamente a estabilidade (ou não) do Sistema Solar. Poincaré supôs que os três corpos moviam-se em um plano e assumiu que dois destes corpos eram massivos e o terceiro possuía massa desprezível em comparação aos demais. A segunda suposição refletia no fato de que o terceiro corpo era incapaz de causar interferência no movimento dos outros dois corpos. O método de Poincaré foi baseado no fato de que o movimento de uma massa muito pequena pode ser estudado através de sua órbita em um plano [3]. Esta metodologia envolvia estudos qualitativos de equações diferenciais não-lineares, nos quais Poincaré utilizava técnicas geométricas. Ele se deu conta de quão complexo era o movimento destes corpos e, provavelmente, foi ele também o primeiro a vislumbrar a existência de **movimento caótico** no problema de três corpos interagentes [1].

Após muitos anos, percebeu-se que o problema de três corpos era árduo e um método capaz de solucioná-lo requeria o emprego de novas e poderosas ferramentas matemáticas. Tal método foi desenvolvido pelos autores do **Teorema KAM**, os matemáticos **A. N. Kolmogorov** (1903-1987), **V. I. Arnold** (1937-2010) e **J. K. Moser** (1928-1999). Este teorema não apenas permitiu a construção de um procedimento para resolver tal problema, mas também desenvolveu uma chave para compreender a natureza da dinâmica caótica [4]. A ocorrência de caos em um sistema dinâmico determinístico é caracterizada pela

dependência sensível das condições iniciais. Em sua obra *Ciência e Método*, Poincaré afirmou que: “... *um pequeno erro nos antecedentes pode produzir um erro enorme nos acontecimentos posteriores. A predição se torna impossível* ...” [5]. As descobertas de Poincaré motivaram muitos outros cientistas a colaborarem para o entendimento da dinâmica caótica. Porém, um considerável avanço apenas ocorreu com o desenvolvimento dos computadores modernos que possibilitaram a integração numérica de equações diferenciais não-lineares. A melhora recorrente da capacidade e precisão computacionais nas últimas décadas intensificaram a pesquisa sobre o que conhecemos hoje como **caos determinístico**, o que ampliou a compreensão da ciência moderna.

1.2 Representação matemática de sistemas dinâmicos

Visto a importância do estudo de sistemas dinâmicos na descrição de fenômenos naturais e também para o desenvolvimento científico ao longo das últimas décadas, torna-se importante compreender a definição matemática destes sistemas. É possível subdividir os sistemas dinâmicos em duas categorias, de acordo com o tipo de variável que designa o tempo. A primeira categoria se refere aos chamados **fluxos**, para os quais o tempo é uma variável contínua. Os fluxos são descritos na forma de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem em relação ao tempo, tal que

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= f^{(1)}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(m)}}{dt} &= f^{(m)}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

sendo $(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ as variáveis dependentes do tempo e $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ funções arbitrárias destas variáveis. O sistema descrito pela Eq. (1.2) é chamado **fluxo m -dimensional**. Uma equação diferencial de ordem k é classificada como **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} + a_{k-1}(x) \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x). \tag{1.3}$$

Na Eq. (1.3), é possível observar que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1;
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente x [6].

No entanto, é comum encontrarmos situações físicas de interesse que são representadas por equações diferenciais **não-lineares**, ou seja, que não satisfazem as duas propriedades supracitadas. Na maioria dos casos, para esta classe de equações diferenciais, é impossível

obter soluções analíticas exatas. Ao analisar a evolução temporal de sistemas descritos por equações não-lineares, uma série de comportamentos, alguns deles bastante complicados, podem surgir. O estudo desta classe de sistemas é realizado utilizando-se recursos computacionais, que permitem a resolução numérica das equações diferenciais não-lineares. O campo de aplicação da dinâmica não-linear é muito extenso pois abrange qualquer sistema físico, biológico, econômico, entre outros, que possa ser descrito por este tipo de equações.

A segunda categoria de sistemas dinâmicos é composta pelos **mapas**, sendo que neste caso o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros. A forma geral de um mapa m -dimensional é dada por:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= f^{(1)}(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}), \\ &\vdots \\ x_{n+1}^{(m)} &= f^{(m)}(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Um mapa pode ser obtido a partir de uma simplificação de um modelo inicialmente representado por um determinado fluxo, o que permite reduzir o estudo da estabilidade de uma órbita periódica ao estudo da estabilidade de pontos fixos periódicos, por exemplo. Desta forma, algumas características de sistemas físicos representados por equações diferenciais não-lineares podem ser compreendidas por meio de modelos simplificados de fácil manipulação computacional. Um destes modelos é o mapa de **Chirikov-Taylor** [7], mais conhecido como **mapa padrão**, que é representado matematicamente pela expressão

$$\mathbf{M} = \begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin(x_n) & [\text{mod } 2\pi], \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 2\pi], \end{cases} \tag{1.5}$$

de maneira que o mapa fica restrito à região $[0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ do espaço de fases, já que a coordenada generalizada x corresponde a um ângulo. Na Eq. (1.5), n é a variável temporal discreta e K o parâmetro de não-linearidade. Este modelo é extensivamente utilizado para o estudo da transição da dinâmica regular para caótica, que pode ser obtida por meio da variação do parâmetro K .

1.3 Aspectos gerais dos sistemas dinâmicos não-lineares

É possível separar os sistemas dinâmicos em duas classes distintas: os sistemas dinâmicos **conservativos** e os **dissipativos**. A característica principal que difere estas duas classes de sistemas é que, para os sistemas conservativos, ocorre a conservação do volume do espaço de fases, região na qual é representada a dinâmica característica do sistema, enquanto que para sistemas dissipativos este volume sofre contração. Uma subclasse importante dos sistemas conservativos consiste nos **sistemas Hamiltonianos**, cuja dinâmica é completamente descrita por uma função $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, chamada **função Hamiltoniana**. A caracterização desta

classe de sistemas é feita através de N coordenadas espaciais generalizadas¹ $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ e N momentos conjugados generalizados $(p_1, p_2, \dots, p_N)$, sendo N o número de graus de liberdade do sistema.

Ao longo das últimas décadas, o estudo de sistemas não-lineares atraiu a atenção de diversos cientistas, resultando em um amplo desenvolvimento de diferentes técnicas de análise com o intuito de caracterizar e compreender a dinâmica destes sistemas. Como visto na Seção 1.1, a ocorrência de caos em sistemas dinâmicos não-lineares está relacionada à dependência sensível às condições iniciais. Um método robusto capaz de quantificar esta dependência consiste na determinação do **expoente de Lyapunov** ou número de Lyapunov, assim chamado em referência ao matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). Diversos cientistas produziram trabalhos afim de otimizar os métodos computacionais para obtenção do(s) expoente(s) de Lyapunov, com destaque para Benettin *et al.* [8] e Wolf *et al.* [9]. Fundamentos teóricos e detalhes matemáticos sobre esta ferramenta serão apresentados na Seção 2.3, visto que a obtenção dos expoentes de Lyapunov é um fator importante deste trabalho.

Outra maneira de obter informações sobre a dinâmica de sistemas conservativos, que também foi utilizada nesta dissertação, consiste na utilização do **teorema da recorrência de Poincaré**. Para compreendê-lo, considere inicialmente uma esfera R_0 de raio $\rho > 0$ na qual encontra-se um conjunto de pontos iniciais. O teorema da recorrência de Poincaré estabelece que, se os pontos iniciais saírem de R_0 , alguns destes pontos retornarão para esta região após um tempo suficientemente longo, por menor que seja o valor de ρ escolhido [10]. Este teorema é muito útil para investigar aspectos da dinâmica de sistemas conservativos, mas durante muito tempo não foi utilizado para tal finalidade. Porém, este cenário mudou drasticamente nas últimas décadas após o desenvolvimento de novas técnicas para análise de séries temporais e para a descrição de sistemas não-lineares que apresentam dinâmica caótica. Na Seção 2.4 abordaremos alguns aspectos matemáticos deste teorema e também como podemos aplicá-lo para obter informações relevantes sobre a estrutura do espaço de fases de um sistemas conservativos.

1.4 Estrutura da dissertação

A pesquisa desenvolvida ao longo deste Mestrado envolveu o estudo da dinâmica de sistemas conservativos com espaço de fases **dividido**, no qual regiões regulares e caóticas coexistem. Para este tipo de sistemas, trajetórias caóticas podem permanecer aprisionadas nas vizinhanças das estruturas de regularidade por tempos finitos, dando origem ao que é conhecido na literatura como efeito *stickiness*. Alguns dos primeiros cientistas a identificar a ocorrência deste efeito foram Contopoulos [11], na década de 70, Shirts e Reinhardt [12]

¹ Dá-se o nome de coordenadas generalizadas a qualquer conjunto de quantidades que especificam o estado de um sistema.

e também Karney [13], na década de 80.

Para validar os métodos aplicados nesta pesquisa e também os resultados obtidos, torna-se necessário basear nossas considerações em conceitos físicos e matemáticos robustos. Tais conceitos serão apresentados no Capítulo 2, no qual abordaremos tópicos relacionados com o formalismo Hamiltoniano, variáveis ação-ângulo e ao teorema KAM, fundamentais para a compreensão das características físicas dos sistemas dinâmicos que foram utilizados nesta pesquisa. Além disso, para caracterizar a dinâmica de sistemas conservativos, utilizamos duas abordagens estatísticas: o espectro de expoentes de Lyapunov calculado a tempo finito e a estatística dos tempos de recorrência, sendo que as principais características destas duas ferramentas também serão introduzidas no Capítulo 2.

Os sistemas utilizados na pesquisa apresentada nesta dissertação foram obtidos a partir do mapa padrão, descrito matematicamente pela Eq. (1.5). No Capítulo 3 apresentamos os principais aspectos deste mapa, como sua derivação a partir de um sistema físico, determinação de seus pontos fixos e as alterações em sua dinâmica causadas pela variação do parâmetro de não-linearidade K . O acoplamento de N mapas padrão resulta em um sistema que possui um espaço de fases $2N$ -dimensional como, por exemplo, o sistema proposto nas Refs. [14, 15]. Para compreender alguns aspectos da dinâmica de um sistema multidimensional, adotamos esta rede de mapas e aplicamos uma metodologia que consiste em dividir a dinâmica do sistema em diferentes regimes de movimento, que serão definidos a partir da análise da série temporal do espectro de expoentes de Lyapunov calculados a tempo finito. A utilização deste método permite obter informações relevantes sobre o efeito *stickiness* em sistemas de alta dimensionalidade, sendo que os principais resultados desta investigação serão apresentados no Capítulo 4.

Podemos obter um sistema cuja dinâmica é descrita em um espaço de fases tridimensional acoplando uma variável ação ao mapa padrão bidimensional, dando origem a um mapa do tipo ação-ação-ângulo. Este sistema é denominado **Mapa Padrão Modificado** (MPM) e suas propriedades físicas e matemáticas foram estudadas nas Refs. [16, 17]. Sistemas conservativos tridimensionais são muito úteis para simular a dinâmica de fluidos estacionários e fenômenos de transporte [16, 18]. No caso do MPM, a intensidade do acoplamento entre a dimensão extra z e o mapa padrão é definida pelo parâmetro δ , sendo que z pode apresentar uma dinâmica regular, mista ou caótica, dependendo do parâmetro de não-linearidade K_2 . A combinação destes parâmetros é determinante para a ocorrência do efeito *stickiness* neste sistema, sendo que no Capítulo 5 apresentamos alguns resultados obtidos através de sua investigação. Por fim, serão apresentadas as conclusões gerais desta dissertação no Capítulo 6, que discutirá os principais resultados obtidos com o desenvolvimento da pesquisa, assim como alguns aspectos que poderão ser explorados em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Este Capítulo tem o objetivo de introduzir alguns conceitos teóricos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos inicialmente uma revisão sobre alguns dos principais aspectos que caracterizam a mecânica Hamiltoniana e, posteriormente, tratamos dos teoremas KAM e de Poincaré-Birkhoff, que são ferramentas importantes para a compreensão do surgimento da dinâmica caótica em sistemas Hamiltonianos. Na sequência, serão discutidos os procedimentos para o cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov e também para obtenção da estatística dos tempos de recorrência, quantidades importantes na caracterização do efeito *stickiness*, principal tema desta dissertação.

2.1 Dinâmica Hamiltoniana

Na formulação Hamiltoniana da dinâmica de sistemas mecânicos, a descrição do estado de um sistema é dada por coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ e momentos generalizados $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, sendo que o menor número de coordenadas generalizadas necessário para descrever o estado de um sistema é chamado de **número de graus de liberdade** N [19]. Para encontrar as funções $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ que descrevem a evolução temporal das coordenadas e dos momentos generalizados, precisamos resolver o conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem, conhecidas como **equações de Hamilton**, que são dadas por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_i}, \quad (2.1)$$

nas quais o índice i representa o i -ésimo grau de liberdade [20].

Um caso especial do formalismo Hamiltoniano ocorre quando não há uma dependência explícita do tempo, sendo $H = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$. Este tipo de sistema é chamado **autônomo**, e o valor da função Hamiltoniana H permanece constante, tal que [1]

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (2.2)$$

sendo que, para obter este resultado, utilizamos as Eqs. (2.1). Desta forma, sendo a função

Hamiltoniana do sistema equivalente a energia, concluímos que em sistemas Hamiltonianos a energia é uma quantidade conservada, tal que $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{constante}$.

Ao efetuarmos a integração das Eqs. (2.1), torna-se possível determinar a trajetória do sistema em uma região chamada de **espaço de fases**, cuja dimensão é $2N$. Na Figura 2.1 vemos a representação da dinâmica do **mapa padrão** no espaço de fases de dimensão $2N = 2$. O mapa padrão, descrito matematicamente pela Eq. (1.5), faz parte da classe de sistemas Hamiltonianos e descreve a dinâmica de um sistema físico conhecido como **rotor pulsado**, que será tratado com maiores detalhes na Seção 3.1. Este sistema consiste em uma barra rígida com uma das extremidades fixa em um pivô sem atrito, sendo que a outra é deixada livre para girar. Aplicando-se uma força externa de intensidade K na extremidade livre, é possível descrever a dinâmica deste sistema pela coordenada generalizada x e pelo momento conjugado p . Para o valor $K = 0,971635$, ocorrem importantes alterações na dinâmica deste sistema, que serão tratadas na Seção 3.4. Na Figura 2.1 podemos identificar a coexistência de regiões caóticas, representada pela distribuição aleatória de pontos, e regiões de regularidade, representadas por estruturas periódicas formadas por órbitas fechadas. Detalhes sobre estes diferentes tipos de dinâmica serão discutidos nas Seções 2.2 e 2.3, que tratam sobre o teorema KAM e sobre os expoentes de Lyapunov, respectivamente.

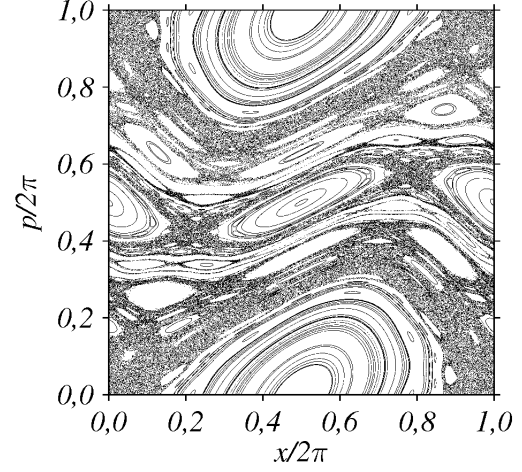


Figura 2.1 – Espaço de fases do mapa padrão utilizando o parâmetro $K = 0,971635$.

2.1.1 Transformações canônicas e notação simplética

Em algumas situações, as coordenadas generalizadas escolhidas para escrever a função Hamiltoniana podem não ser as mais adequadas para a resolução das equações de movimento de Hamilton. A escolha ideal é aquela que torna trivial a integração das Eqs. (2.1). Para isso, muitas vezes torna-se necessário efetuar uma transformação das coordenadas e momentos generalizados q_i e p_i em um novo conjunto Q_i e P_i , tal que

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \quad P_i = P_i(q_i, p_i, t), \quad (2.3)$$

sendo que as novas coordenadas serão definidas em termos da coordenada antiga e também do momento antigo.

No formalismo Hamiltoniano, é interessante que o conjunto Q_i e P_i constitua uma **transformação canônica**, ou seja, uma transformação de coordenadas que preserva a forma das equações de Hamilton. Para isso, é necessário que exista alguma função $\bar{H}(Q, P, t)$,

sendo que as equações de movimento de Hamilton em termos das novas coordenadas sejam dadas por [20]

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i}. \quad (2.4)$$

Para obter uma transformação canônica, é necessário determinar uma expressão que seja função das variáveis antigas e também das novas variáveis. Do princípio variacional de Hamilton temos

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) dt \right] = 0. \quad (2.5)$$

Da mesma forma, as novas variáveis Q_i e P_i também devem satisfazer este princípio, ou seja

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) dt \right] = 0. \quad (2.6)$$

As Eqs. (2.5) e (2.6) na forma diferencial podem ser escritas como

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{d}{dt} F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (2.7)$$

na qual escolhemos uma função $F = F_1$ arbitrária que depende de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ [21]. A função F_1 é muito útil para expressar a forma exata da transformação canônica, e a ela dá-se o nome de função geradora. Da Eq. (2.7), ao tomarmos a derivada total de $F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$, temos que

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right). \quad (2.8)$$

Sendo as coordenadas q_i e Q_i independentes, a igualdade apresentada na Eq. (2.8) é satisfeita somente se

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \\ \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

As Eqs. (2.9) apresentam o procedimento pelo qual, partindo de uma função geradora do tipo F_1 , podemos obter a transformação canônica. Também podemos definir funções geradoras em termos de outros pares de variáveis, sendo que a única restrição se encontra no fato de que envolva sempre uma variável nova ($\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{P}$) e uma antiga ($\mathbf{q}$ ou $\mathbf{p}$):

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \quad F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t).$$

É comum utilizar uma abordagem mais compacta e elegante, conhecida como **notação simplética**, na qual podemos perceber importantes propriedades de simetria na dinâmica Hamiltoniana [22]. Considere a matriz $\mathbb{M}$, tal que

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_N & \mathbb{I}_N \\ -\mathbb{I}_N & \mathbb{O}_N \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

sendo $\mathbb{O}_N$ a matriz nula de dimensão N e $\mathbb{I}_N$ a matriz identidade de mesma dimensão. Podemos escrever as Eqs. (2.1) da seguinte forma:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}, \quad (2.11)$$

na qual $\tilde{\mathbf{x}}$ corresponde à matriz coluna de dimensão $2N$, tal que:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Usando a notação simplética, percebe-se que uma transformação é canônica se obedece a expressão

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{\mathbf{X}}}, \quad (2.13)$$

na qual aplicamos a transformação $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow \tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, de forma que seja válida a relação

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (2.14)$$

Derivando a Eq. (2.14) em função da variável t , obtemos

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbb{J} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}, \quad (2.15)$$

sendo $\mathbb{J}_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$ a matriz **Jacobiana** da transformação proposta. Aplicando uma transformação inversa $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{X}})$, H se tornará uma função de $\tilde{\mathbf{X}}$ e, portanto, é válida a seguinte expressão:

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbb{J}^T \cdot \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{X}}}. \quad (2.16)$$

Por sua vez, substituindo a Eq. (2.11) em (2.15) e, em seguida, substituindo (2.16) no resultado obtido, obtêm-se que

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T \cdot \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{X}}}. \quad (2.17)$$

Efetuada uma simples comparação entre as equações (2.13) e (2.17), facilmente perceberemos que a estrutura do sistema Hamiltoniano é conservada e, conseqüentemente, a transformação proposta é canônica se a matriz $\mathbb{J}$ é uma **matriz simplética**, definida pela condição

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \mathbb{M}. \quad (2.18)$$

O módulo do determinante de uma matriz simplética é igual a unidade [22], já que

$$\det(\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T) = \det(\mathbb{J})^2 \det(\mathbb{M}) = \det(\mathbb{J}) = |\det(\mathbb{J})| = 1. \quad (2.19)$$

Uma das mais importantes propriedades de sistemas Hamiltonianos, a conservação do volume do espaço de fases que o representa, pode ser deduzida a partir do resultado apresentado na Eq. (2.19) [2]. Um elemento de volume em um determinado instante t_0 pode ser representado por

$$dV_{t_0}^N = dp_1(t_0) \dots dp_{3N}(t_0) dq_1(t_0) \dots dq_{3N}(t_0).$$

Tal elemento pode ser relacionado com um elemento de volume no instante t , representado por dV_t . Esta relação ocorre através da Jacobiana $\mathbb{J}_{3N}(t_0, t)$ da transformação canônica entre as coordenadas do espaço de fases no tempo t_0 ($q_i(t_0), p_i(t_0)$), e as coordenadas no tempo t ($q_i(t), p_i(t)$). Portanto:

$$dV_t^N = \mathbb{J}_{3N}(t_0, t) dV_{t_0}^N. \quad (2.20)$$

Mas, da Eq. (2.19), temos que a matriz Jacobiana de uma transformação canônica é simplética, e o determinante de matrizes pertencentes a esta classe é igual a unidade. Sendo assim, podemos concluir que [2]

$$dV_t^N = dV_{t_0}^N, \quad (2.21)$$

e, portanto, o volume do espaço de fases é conservado ao longo do tempo. No Apêndice A consta a prova de que o mapa padrão é simplético e, conseqüentemente, pode ser considerado um sistema Hamiltoniano. Além disso, na Seção 3.2 mostramos como este mapa é obtido a partir da função Hamiltoniana que descreve a dinâmica do rotor pulsado.

2.1.2 A equação de Hamilton-Jacobi

Podemos simplificar a resolução das equações de movimento de Hamilton propondo uma transformação canônica cuja Hamiltoniana transformada $\bar{H}$ seja igual a zero. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} &= \dot{Q}_i = 0, \\ -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} &= \dot{P}_i = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como vimos na Eq. (2.9), existe uma relação entre a nova Hamiltoniana $\bar{H}$ e a antiga Hamiltoniana H por meio de uma função geradora F . Para que $\bar{H}$ seja zero, é necessário que F satisfaça a relação

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (2.23)$$

Tomando uma função geradora $F = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$, tal que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

a Eq. (2.23) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$H(q_1, \dots, q_N; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_N}; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \quad (2.24)$$

conhecida como a **equação de Hamilton-Jacobi**, que é uma equação diferencial parcial de $(N + 1)$ variáveis q_N e t , e proporciona uma nova maneira de obter equações de movimento. Usualmente, utiliza-se a variável S para denotar a função F_2 , sendo S chamada de **função principal de Hamilton** [20].

2.1.3 Integrabilidade

Em Mecânica Clássica, uma das questões mais fundamentais se refere ao fato de um sistema ser integrável ou não. Neste contexto, a definição de integrabilidade não condiz apenas com a possibilidade de resolução analítica das equações de movimento de Hamilton, mas também com a existência de **constantes de movimento** (ou integrais de movimento) que são responsáveis pela evolução regular de trajetórias de um sistema em uma região bem definida do espaço de fases [19].

Para compreender este conceito, é necessário definir as condições matemáticas para existência de constantes de movimento em um sistema mecânico. Vamos assumir que uma dada propriedade de um sistema mecânico (por exemplo, a energia ou o momento angular) é representada pela função $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. A variação temporal desta função é dada por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], \quad (2.25)$$

sendo que o termo $[f, H]$ é conhecido como **colchetes de Poisson**, tal que

$$[f, H] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (2.26)$$

No caso em que f não depende explicitamente do tempo, ou seja, $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, o termo $\partial f / \partial t$ é nulo. Além disso, se $[f, H] = 0$, então diz-se que a função f representa uma **constante de movimento**, tal que a derivada total $df/dt = 0$.

A definição dos colchetes de Poisson, presente na Eq. (2.26), pode ser estendida para quaisquer grandezas de um sistema que sejam funções das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ e dos momentos conjugados $\mathbf{p}$. Sendo assim, considerando as funções $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, temos que:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (2.27)$$

Se considerarmos um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade e se a equação de Hamilton-Jacobi é separável em N equações independentes, então podemos dizer que o sistema em questão é **integrável**. Porém, isto apenas é possível se existirem N constantes de movimento α_i , com $i = 1, \dots, N$ (sendo uma delas a própria Hamiltoniana do sistema), de tal forma que [10, 21]

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 0, \quad (2.28)$$

e assim podemos escrever

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \dots, q_N; \alpha_1, \dots, \alpha_N; t).$$

A Eq. (2.28) é consequência do fato de que as N constantes de movimento α_i comutam umas com as outras, ou seja, tais constantes são independentes entre si. Uma constante será independente se ela não pode ser expressa em termos das outras $(N - 1)$ constantes do sistema.

O fato de um sistema integrável possuir N constantes de movimento independentes implica na trajetória do sistema se restringir em uma superfície N -dimensional $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i$, sendo k_i constante [10]. A consequência de um sistema Hamiltoniano ser **não-integrável** consiste na impossibilidade de determinarmos soluções analíticas das equações de movimento de Hamilton. Porém, tais sistemas podem ser investigados por meio de métodos computacionais. Além disso, sistemas não-integráveis podem apresentar diferentes tipos de órbitas em seu espaço de fases, que são provenientes de diferentes condições iniciais. Maiores detalhes sobre as órbitas geradas por sistemas Hamiltonianos não-integráveis serão apresentadas na Seção 2.2, na qual abordamos os principais aspectos do teorema KAM.

2.1.4 Variáveis ação-ângulo

Sistemas periódicos são de grande importância em praticamente todos os ramos da Física e, muitas vezes, torna-se mais interessante obter informações sobre a frequência do movimento do que as próprias equações de movimento do sistema. Há um método eficaz para obter tais frequências e que se baseia na equação de Hamilton-Jacobi. Considere uma função Hamiltoniana que não depende explicitamente do tempo, de tal forma que podemos escrever a função principal de Hamilton como

$$S = \sum_i W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_N).$$

Sendo assim, para sistemas integráveis com N graus de liberdade, as equações da transformação canônica têm a forma

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_N)}{\partial q_i}, \quad (2.29)$$

que nos mostra que cada momento p_i é função da coordenada generalizada q_i correspondente e também de N constantes de integração α_j , tal que

$$p_i = p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_N). \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) representa a projeção no plano (q_i, p_i) do movimento que o sistema realiza no espaço de fases [20]. Podemos então definir a **variável ação** em termos da integral sobre um período completo da órbita no plano (q_i, p_i) , tal que

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i. \quad (2.31)$$

Da Eq. (2.29), podemos escrever J_i da seguinte forma:

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_N)}{\partial q_i} dq_i. \quad (2.32)$$

Como q_i é a variável de integração, J_i é função somente das N constantes de integração. Aplicando a função inversa, ou seja, escrevendo α_i como função da variável ação J_i , temos que:

$$W = W(q_1, \dots, q_N; J_1, \dots, J_N) = \sum_j W_j(q_j, J_1, \dots, J_N), \quad (2.33)$$

sendo que as variáveis J_i são identificadas como os novos momentos transformados P_i . Considerando a transformação canônica gerada por $W_i(q_i, J_i)$, a Hamiltoniana transformada $\bar{H}$ é dada por

$$\bar{H} = H = \alpha_1 = \alpha_1(J_1, \dots, J_N) = H(J_1, \dots, J_N). \quad (2.34)$$

Ou seja, a nova Hamiltoniana $\bar{H}$ é simplesmente a Hamiltoniana original H expressa em termos das variáveis ação.

Por sua vez, as variáveis conjugadas aos J_i , conhecidas como **variáveis ângulo** ϕ_i , são definidas por

$$\phi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \dots, J_N)}{\partial J_i}. \quad (2.35)$$

Portanto, temos uma transformação canônica do tipo $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi})$, que satisfaz as equações de movimento descritas por (2.4) de tal forma que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \frac{\partial H(J_1, \dots, J_N)}{\partial J_i} = \omega_i(J_1, \dots, J_N), \\ \dot{J}_i &= -\frac{\partial H(J_1, \dots, J_N)}{\partial \phi_i} = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Analisando a Eq. (2.36), podemos ver que as variáveis ação (que correspondem ao momento transformado) são constantes e que as variáveis ângulo (coordenadas transformadas) são funções lineares do tempo, já que os ω_i 's são constantes, ou seja:

$$\phi_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (2.37)$$

sendo β_i 's também constantes determinadas pelas condições iniciais [20]. Desta forma, ao longo de uma curva $J = \text{constante}$, ϕ cresce linearmente de acordo com a Eq. (2.37).

É usual descrever o movimento deste sistema de coordenadas sobre uma **superfície toroidal** de dimensão N (uma circunferência para $N = 1$ ou uma superfície toroidal para $N = 2$), como mostra a Figura 2.2. Nesta Figura é representado o caso $N = 2$, sendo que o toro é constituído por dois raios J_1 e J_2 constantes e duas variáveis angulares ϕ_1 e ϕ_2 , que representam o ângulo poloidal e toroidal, respectivamente. O conceito de movimento sobre um toro é particularmente útil, e pode ser generalizado para casos com mais de dois graus de liberdade.

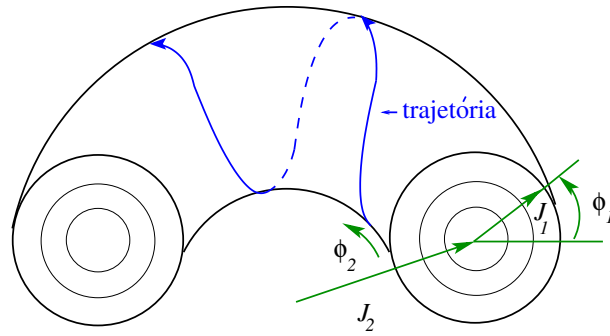


Figura 2.2 – Movimento no espaço de fases para o caso com dois graus de liberdade ($N = 2$). Figura construída com base na ilustração da pág. 165 da Ref. [21].

Efetuada a integração da Eq. (2.37) sobre um período de oscilação completo T , temos que

$$\phi_i = \int_t^{t+T} d\phi_i = \omega_i T. \quad (2.38)$$

Mas, da Eq. (2.35), podemos escrever

$$d\phi_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial J_i} dq_i. \quad (2.39)$$

Substituindo a Eq. (2.39) em (2.38) e trocando a ordem das derivadas, além de integrar sobre um ciclo completo, obtemos [21]

$$\Delta\phi_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p dq_i = 2\pi. \quad (2.40)$$

Comparando as Equações (2.38) e (2.40), concluímos que

$$\omega_i T = 2\pi, \quad (2.41)$$

ou seja, as constantes ω_i 's equivalem às **frequências angulares** de oscilação de cada grau de liberdade. No caso representado na Figura 2.2, trata-se das frequências ω_1 e ω_2 .

A partir das frequências angulares do movimento sobre um toro, é possível obter importantes conclusões. Novamente tomando como exemplo um sistema com dois graus

de liberdade, chama-se **número de rotação** a razão q entre as frequências angulares, de tal forma que

$$q = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (2.42)$$

Se q é um número racional, ou seja, $q = r/s$ com r e s inteiros, então o toro no qual repousa a trajetória é denominado **toro racional**. Qualquer trajetória que pertence a esse toro se fecha após r voltas poloidais e s voltas toroidais. Portanto, q racional significa que o movimento é **periódico**. Por outro lado, se q é um número irracional, trata-se de um **toro irracional**, e a trajetória jamais se fecha. Neste caso, diz-se que o movimento é **quase-periódico** [4]. De forma geral, para sistemas com N graus de liberdade, podemos analisar as trajetórias sobre um toro quanto à sua periodicidade ou quase-periodicidade através da condição de ressonância dada por

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \omega_i = 0, \quad (2.43)$$

sendo m_i números inteiros. Por outro lado, trajetórias quase-periódicas não obedecem a esta condição.

2.2 O teorema KAM

Podemos frequentemente expressar a dinâmica de um sistema em termos de uma função Hamiltoniana integrável perturbada por uma pequena interação que a torna não-integrável [20]. Como exemplo desta consideração, podemos citar o movimento da Terra em torno do Sol, perturbado pela presença dos planetas Marte e Júpiter. Esta interação é fraca e portanto resulta em um pequeno distúrbio na órbita elíptica terrestre.

Na presença de perturbação, a função Hamiltoniana do sistema em termos das variáveis ação-ângulo pode ser descrita matematicamente da seguinte forma:

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi}) = H_0(\mathbf{J}) + \epsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi}), \quad (2.44)$$

sendo H_0 a Hamiltoniana não-perturbada e H_1 a Hamiltoniana perturbada. Como H_0 depende apenas das variáveis ação, trata-se de uma Hamiltoniana integrável. Por outro lado, o termo perturbativo H_1 corresponde a uma Hamiltoniana não-integrável, o que impede que se resolva analiticamente as equações de Hamilton associadas a função Hamiltoniana total H . No entanto, para o caso em que a função H_1 é pequena quando comparada a H_0 , dizemos que o sistema é **quase-integrável**. Algumas questões interessantes podem surgir diante deste cenário:

- quão robusta é a integrabilidade do sistema quando $\epsilon \neq 0$?
- como se comporta o toro irracional nesta condição?

As respostas para estas questões surgiram com rigorosos trabalhos matemáticos e computacionais de **Andrey N. Kolmogorov** (1903-1987) [23], **Juergen K. Moser** (1928-1999) [24] e **Vladimir I. Arnold** (1937-2010) [25]. Em 1954, Kolmogorov deu início a pesquisa sobre o tema e conjecturou o que aconteceria com o sistema quando adicionado um termo perturbativo a sua função Hamiltoniana. A versão atual deste teorema foi resultado das contribuições de Moser (1962) e Arnold (1963) [10]. O resultado final deste trabalho ficou conhecido como **teorema KAM**, em homenagem ao nome dos envolvidos.

A dedução deste teorema é trabalhosa, utiliza diversas técnicas matemáticas e, portanto, será omitida nesta dissertação. Sendo assim, serão tratadas apenas as condições necessárias para a validade deste teorema. A questão principal consiste em determinar se as soluções perturbadas são estáveis e se tais órbitas estáveis irão permanecer próximas das órbitas não-perturbadas após um longo tempo. Para garantir que toros sobrevivam a uma pequena perturbação ou alteração de sua forma, além da intensidade da perturbação imposta ao sistema ser pequena, é necessário que

1. exista a independência linear das frequências, ou seja, $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) \neq 0$ em um domínio de $\mathbf{J}$ (suficientemente não-linear) [21];
2. a perturbação deve ser suave (deve existir um número suficiente de derivadas contínuas de H_1) [21];
3. as condições iniciais devem estar suficientemente afastadas das ressonâncias [21].

De acordo com o teorema KAM, satisfazendo-se as condições supracitadas, os toros irracionais (formados por trajetórias quase-periódicas) são apenas ligeiramente distorcidos. Estes toros, cuja estrutura topológica é preservada mesmo com a presença do termo não-integrável H_1 , são conhecidos como **toros KAM** ou **superfícies KAM**. Os toros percorridos por trajetórias periódicas são chamados de **toros ressonantes** e a sobrevivência destas superfícies não é garantida pelo teorema KAM.

A terceira condição para a validade do teorema KAM assegura que o último toro KAM que será destruído é aquele cuja frequência é o “número mais irracional” [21]. Para esta classe de toros, a condição de ressonância (2.43) não é satisfeita. Um número irracional R pode ser representado através de frações continuadas infinitas na forma

$$R = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}, \quad (2.45)$$

em que os números a_i são inteiros [10]. De forma simplificada, podemos escrever $R = [a_1, a_2, a_3, \dots]$. Truncando a fração em um certo valor de a_n , $R = [a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots]$, podemos obter um valor racional relativamente próximo ao número irracional R . Desta

forma, o número “mais irracional” é definido como sendo o que se aproxima mais lentamente do valor inteiro da fração (2.45). Tal número, conhecido como **razão áurea**, é definido por [2]

$$R_a = [1, 1, 1, 1, \dots] = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}. \quad (2.46)$$

Tais definições são de extrema importância para a compreensão da dinâmica de sistemas perturbados. Sabemos que um toro KAM é destruído pela ressonância entre as frequências angulares características de cada grau de liberdade, de tal forma que razão entre os ω_i 's dá origem a um número racional. Sendo assim, cada aproximação racional será associada a uma região de ressonância no espaço de fases e corresponderá a uma cadeia de ilhas. A medida que o parâmetro de perturbação ϵ aumenta, estas regiões de ressonância crescem e finalmente destroem os toros KAM vizinhos. No entanto, os toros KAM cujo número de rotação (razão entre as frequências angulares) possui a sequência na forma da Eq. (2.46), serão os mais irracionais e, conseqüentemente, os mais difíceis de serem destruídos. Estas estruturas são chamadas de **toros KAM nobres**, sendo que a zona de ressonância nas imediações destes toros será muito menor que aquela encontrada nas vizinhanças de toros KAM não-nobres. Por este motivo, um toro KAM nobre é muito mais difícil de ser destruído.

2.2.1 O teorema de Poincaré-Birkhoff

Para casos em que a perturbação é fraca, a maioria dos toros que contém trajetórias quase-periódicas não sofrem alterações drásticas. Serão destruídos apenas os toros ressonantes (número de rotação q racional) e o teorema KAM não fornece informações sobre o destino destas curvas após uma perturbação. Para descobrir o que acontece com estes toros, recorre-se a um teorema enunciado por Poincaré e provado por George D. Birkhoff (1884-1944), em 1927 [1].

Seja um mapa T_ϵ^s submetido a uma perturbação de intensidade $\epsilon = 0$. Se o número de rotação $q = r/s$ for racional, então os pontos x no espaço de fases serão **pontos fixos periódicos** de período s , ou seja: $x = T_0^s(x)$. O teorema de Poincaré-Birkhoff consiste em determinar o comportamento destes pontos fixos em um mapa perturbado T_ϵ^s , com $\epsilon \neq 0$.

Para introduzir a ideia principal deste teorema, considere uma curva com raio ρ e número de rotação $q = r/s$ racional, sendo r e s inteiros. Além disso, considere também uma curva com raio ρ_+ que rotaciona no sentido anti-horário de acordo com T_ϵ^s , sendo que o número de rotação $q_+ > q = r/s$ é irracional, e uma curva com raio ρ_- com sentido de rotação horário, com $q_- < q = r/s$ também irracional, conforme ilustrado na Figura 2.3(a). Ao aplicarmos o mapa $T_{\epsilon=0}^s$, os pontos sobre o círculo de raio ρ não sofrerão mudanças, e temos portanto pontos fixos. Porém, no caso de pequenas perturbações ϵ , os pontos

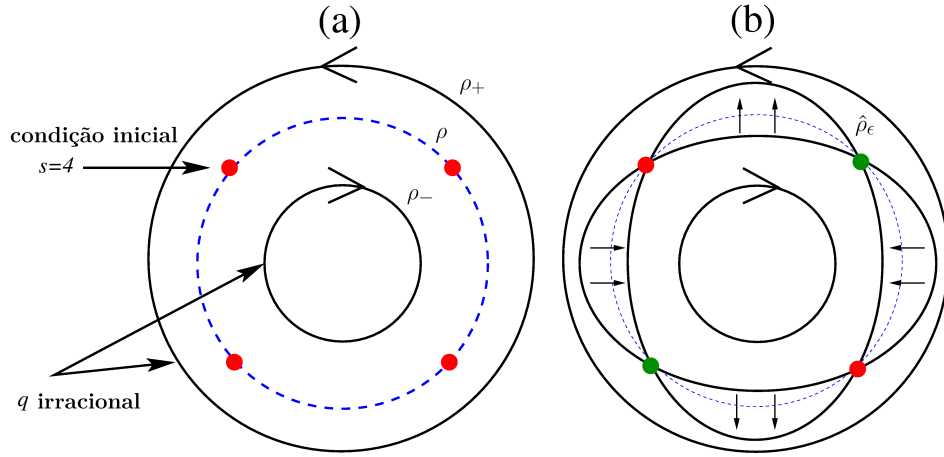


Figura 2.3 – (a) Curvas invariantes de diferentes raios no caso sem perturbação $\epsilon = 0$. (b) A perturbação imposta ao sistema dá origem a uma curva $\hat{\rho}_\epsilon$. Figura construída com base na ilustração da pág. 231 da Ref. [10].

sobre os círculos de raios ρ_+ e ρ_- serão mapeados em novas posições pois haverá um deslocamento da coordenada radial devido as torções geradas pelo mapa perturbado [2].

As torções do mapa darão origem a uma curva fechada $\hat{\rho}_\epsilon$ que se encontra próxima a curva de raio ρ . A curva $T_\epsilon^s(\hat{\rho}_\epsilon)$ (gerada pela aplicação do mapa T_ϵ^s sobre $\hat{\rho}_\epsilon$) irá interceptar $\hat{\rho}_\epsilon$, já que a área de ambas as curvas devem ser iguais e constantes, pois trata-se de um mapa conservativo. A intersecção ocorre em um número par de distintos pontos, que correspondem aos pontos fixos do mapa T_ϵ^s . Portanto, o círculo de raio ρ formado pelos pontos fixos do mapa quando $\epsilon = 0$ dá origem a um número finito de pontos fixos quando o mapa é perturbado, como mostra a Figura 2.3(b) [10], que são conhecidos como **pontos fixos de Poincaré-Birkhoff**. Como os pontos fixos de T_ϵ^s são de período s , é possível mostrar que o número de intersecções deve ser múltiplo de s , ou seja, existem $2ks$ pontos fixos para o mapa T_ϵ^s , sendo k um número inteiro. Além disso, os pontos fixos se alternam entre **pontos fixos elípticos** e **pontos fixos hiperbólicos**. Portanto, próximo a cada toro ressonante do mapa perturbado podemos esperar o aparecimento de uma estrutura formada por órbitas elípticas e hiperbólicas, como mostram as Figuras 2.4(a) e (b), com os casos $s = 3$ e $s = 4$ utilizados como exemplos.

Para pontos fixos elípticos, os autovalores da matriz Jacobiana do mapa T_ϵ^s são imaginários puros e os autovetores descreverão um movimento que oscila em torno do ponto fixo. Portanto, pontos elípticos são cercados por trajetórias fechadas invariantes à aplicação do mapa T_ϵ^s . Para os pontos fixos hiperbólicos, os autovalores serão reais e da forma $h_1 = 1/h$ e $h_2 = h$, sendo h um número real e $h > 1$. Denotemos a curva associada a $1/h$ como $W^{(s)}$ e a curva associada a h como $W^{(u)}$, sendo que estas curvas são chamadas de **variedades estáveis** e **instáveis**, respectivamente. Os pontos da curva $W^{(s)}$ serão mapeados na direção do ponto fixo, pois $(\nabla T_\epsilon^s)^n W^{(s)} = (1/h)^n W^{(s)}$ enquanto os

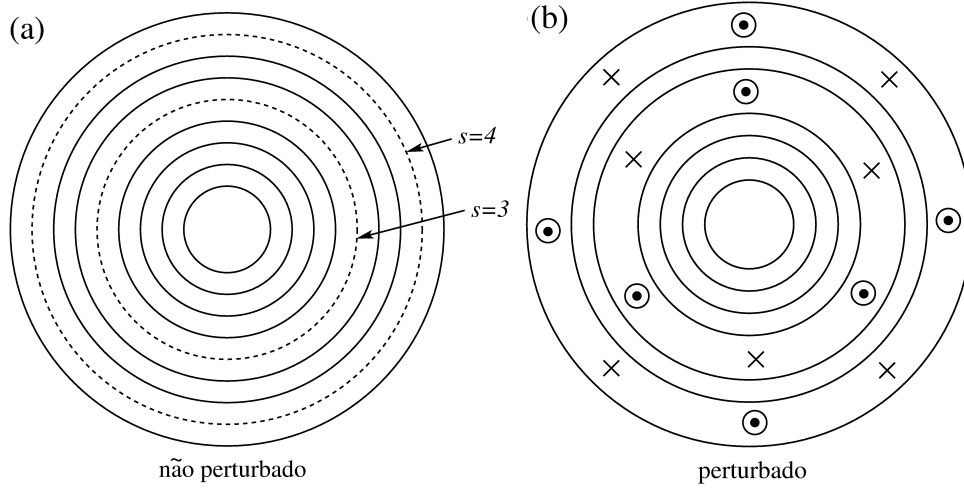


Figura 2.4 – Representação do toro ressonante para $s = 3$ e $s = 4$ (a) para o caso não perturbado $\epsilon = 0$ e (b) para o caso com perturbação. Figura construída com base na ilustração da pág. 233 da Ref. [10].

pontos da curva $W^{(u)}$ se afastarão do ponto fixo, pois $(\nabla T_\epsilon^s)^n W^{(u)} = h^n W^{(u)}$ [2].

Neste cenário, aparecem os pontos fixos conhecidos como **homoclínicos** e **heteroclínicos**. Uma órbita é chamada de homoclínica quando liga um ponto homoclínico P a ele mesmo, como mostra a Figura 2.5(a). Por outro lado, uma órbita é classificada como heteroclínica quando conecta dois pontos fixos hiperbólicos distintos P e Q , conhecidos como pontos heteroclínicos [2, 10]. Este caso é representado na Figura 2.5(b).

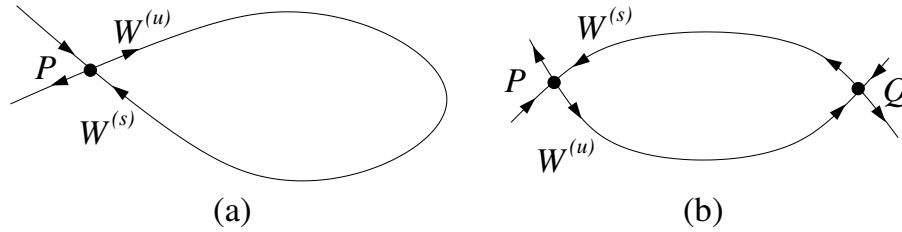


Figura 2.5 – Exemplos de (a) órbita homoclínica e (b) órbita heteroclínica. Figura construída com base na ilustração da pág. 68 da Ref. [2].

As órbitas heteroclínicas também são conhecidas como **separatrizes**, pois delimitam a região onde existe movimento periódico. Em sistemas Hamiltonianos, a área próxima a separatriz é a mais importante no estudo da origem do caos, já que a dinâmica próxima a um ponto hiperbólico é mais sensível a pequenas perturbações. Uma pequena perturbação destrói a separatriz, dando origem a uma espaço de fases com uma estrutura topológica extremamente complexa, composto por uma região caótica conhecida como **camada estocástica** ou **camada ergódica**. Na Seção 3.4, utilizamos o mapa padrão para exemplificar esta transição.

2.3 Expoentes de Lyapunov

Uma das principais características dos sistemas caóticos refere-se a sensibilidade às condições iniciais, ou seja, quando duas condições iniciais arbitrariamente próximas, após um período suficientemente longo, levam a soluções totalmente diferentes. A quantificação da dependência sensível às condições iniciais pode ser feita através dos **expoentes de Lyapunov**, uma grandeza que desempenha um papel importante na análise tanto de sistemas dissipativos como de sistemas conservativos, pois proporciona uma medida do grau de caoticidade de uma trajetória típica.

Se inicialmente considerarmos um **mapa** unidimensional, é possível avaliar a evolução da distância entre órbitas vizinhas através do expoente de Lyapunov da seguinte forma. Sejam x_0 e $x_0 + \delta_0$ duas condições iniciais vizinhas, separadas por uma distância infinitesimal δ_0 . Considere que, após n iterações do mapa

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (2.47)$$

com $n \rightarrow \infty$, a distância entre estes dois pontos seja δ_n . Se δ_n relaciona-se com δ_0 por:

$$|\delta_n| \sim |\delta_0| e^{\lambda n},$$

então λ é o expoente de Lyapunov procurado. A expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \right).$$

A distância δ_n é a diferença entre a n -ésima iteração a partir do ponto $x_0 + \delta_0$ e a n -ésima iteração a partir do ponto x_0 . Portanto:

$$\delta_n = F^{(n)}(x_0 + \delta_0) - F^{(n)}(x_0).$$

Assim, reescrevemos a expressão para λ como:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{F^{(n)}(x_0 + \delta_0) - F^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right| \right),$$

em que λ depende de δ_0 e de n . Então, admitindo que a separação entre os pontos $x_0 + \delta_0$ e x_0 é infinitesimal e considerando um número infinito de iterações, obtemos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{F^{(n)}(x_0 + \delta_0) - F^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right| \right), \quad (2.48)$$

sendo que o argumento do logaritmo na Eq. (2.48) é a **derivada** de $F^{(n)}(x)$ calculada em x_0 [1]. Portanto, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{dF^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \right). \quad (2.49)$$

Aplicando a regra da cadeia para o cálculo dessa derivada, obtém-se

$$\left. \frac{dF^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_{n-1}} \times \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_{n-2}} \times \dots \times \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0},$$

de tal forma que λ pode ser calculado pela expressão:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{dF(x_i)}{dx_i} \right|, \quad (2.50)$$

que é, por definição, o **expoente de Lyapunov máximo** do mapa e constitui uma medida da expansão ($\lambda > 0$) ou da contração ($\lambda < 0$) exponencial da distância δ_n .

Generalizando o caso anterior para um mapa m -dimensional, tem-se m expoentes de Lyapunov que correspondem às m dimensões linearmente independentes do espaço de fases nas quais o elemento de volume inicial pode se expandir ou contrair, formando o que se conhece por **espectro de Lyapunov** [26]. Para compreender a expressão matemática pela qual se obtêm os m expoentes de Lyapunov, é conveniente introduzirmos brevemente a noção de estabilidade de um sistema. Para determinar se o ponto fixo $x^* = F(x^*)$ é **estável** ou **instável**, investiga-se a parte linear deste sistema próximo ao ponto fixo. No caso de um mapa unidimensional, esta linearização é obtida através da derivada da Eq. (2.47), calculada em x^* . Considerando agora um mapa m -dimensional

$$\mathbf{x}_{n+1} = F_i(\mathbf{x}_n), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (2.51)$$

substitui-se a derivada pela matriz Jacobiana calculada no ponto fixo $\mathbf{x}^*$, tal que:

$$\mathbb{J}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^*} & \dots & \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \right|_{\mathbf{x}^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^*} & \dots & \left. \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right|_{\mathbf{x}^*} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Sendo assim, a análise da estabilidade do ponto fixo é feita através da magnitude dos autovalores de $\mathbb{J}$, como pode-se verificar na Seção 3.3, na qual é feita uma análise detalhada dos pontos fixos do mapa padrão. Tratando-se de uma órbita $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ de período k , a estabilidade da órbita será determinada pelos autovalores da matriz $\mathbb{J}_k(\mathbf{x}_0)$, tal que:

$$\mathbb{J}_k(\mathbf{x}_0) = \mathbb{J}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot \mathbb{J}(\mathbf{x}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{J}(\mathbf{x}_0). \quad (2.53)$$

No caso de órbitas não-periódicas, a dinâmica de órbitas vizinhas é governada pelo produto de n matrizes Jacobianas, calculadas nos n pontos que compõem a órbita. Neste caso, o papel dos autovalores da matriz $\mathbb{J}_n(\mathbf{x}_0)$ é medir a taxa de expansão ou contração dos m eixos ortogonais que compõem o sistema. Para ilustrar esta ideia, suponha uma

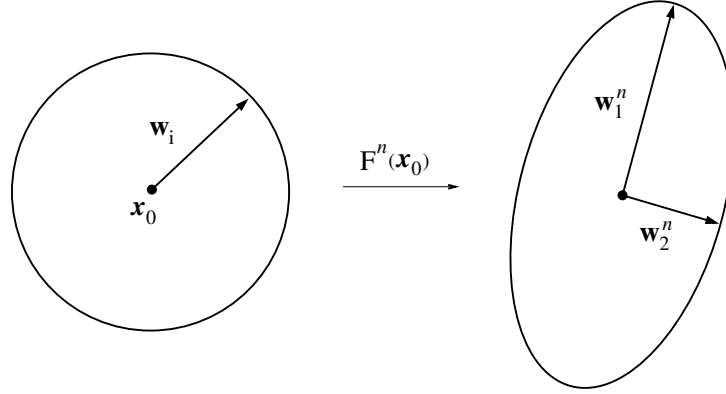


Figura 2.6 – Após n iterações, a hipersfera se torna um hiperelipsoide.

hipersfera de raio infinitesimal centrada no ponto inicial $\mathbf{x}_0$ da órbita. Se iterarmos o mapa n vezes, a hipersfera dará lugar a um hiperelipsóide, como mostra a Figura 2.6.

A instabilidade exponencial dos comprimentos dos eixos ortogonais se reflete diretamente no espectro de autovalores da matriz $\mathbb{A}(\mathbf{x}_0)$, definida por

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{J}_n^T(\mathbf{x}_0) \mathbb{J}_n(\mathbf{x}_0)]^{\frac{1}{2n}}, \quad (2.54)$$

cujas condições de existência do limite são dadas pelo **teorema multiplicativo de Oseledec** [27]. Os m autovalores $h_i(\mathbf{x}_0)$ de $\mathbb{A}(\mathbf{x}_0)$ são reais e positivos e os respectivos logaritmos definem os expoentes de Lyapunov

$$\lambda_i^\infty = \ln[h_i(\mathbf{x}_0)]. \quad (2.55)$$

O teorema multiplicativo de Oseledec garante que o espectro de Lyapunov é independente das condições iniciais $\mathbf{x}_0$, desde que a dinâmica do sistema seja ergódica. Usualmente, o espectro de Lyapunov é listado em ordem decrescente, tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m,$$

sendo que o sinal de igual se refere a multiplicidade dos expoentes, que pode ocorrer no caso da existência de autovalores degenerados.

Uma das propriedades mais importantes apresentada por um sistema dinâmico **caótico** é a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Sendo assim, para identificar a ocorrência de caos em um sistema dinâmico, basta conhecer o maior expoente. Para sistemas Hamiltonianos, a soma de todos os elementos que formam o espectro de Lyapunov deve ser igual a zero, como uma consequência da conservação do volume do espaço de fases. Além disso, esta classe de sistemas apresenta uma simetria particular, dada por

$$\lambda_i = -\lambda_{2N-i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.56)$$

sendo a dimensão m deste sistema igual a $2N$. A Eq. (2.56) mostra que, para sistemas Hamiltonianos, os expoente de Lyapunov aparecem em pares, ou seja, para cada expoente

positivo existe um expoente negativo de mesma magnitude, sendo que o número de expoentes nulos é par. Este resultado é consequência da natureza simplética desta classe de sistemas, como abordado na Subseção 2.1.1. Sendo assim, toda a informação do espectro de Lyapunov para sistemas Hamiltonianos pode ser encontrada na metade positiva dele [21].

2.3.1 Método numérico

Na Eq. (2.55) podemos notar que o cálculo de λ depende da condição inicial $\mathbf{x}_0$ escolhida, sendo que esta dependência é minimizada quando fazemos $n \rightarrow \infty$. Numericamente é impossível aplicar esta condição, de tal forma que devemos trabalhar com valores finitos para o número de iterações. Sendo assim, costuma-se truncar o cálculo dos expoentes de Lyapunov em valores de n suficientemente grandes, e então definimos esta nova quantidade como **expoentes de Lyapunov a tempo finito** (ELTFs) [10].

O procedimento numérico para obtenção do expoente de Lyapunov máximo a tempo finito será detalhado a seguir: consideremos que $\mathbf{x}_0$ corresponde a condição inicial de uma trajetória de referência e $\mathbf{y}_0$ representa a posição inicial de uma trajetória próxima, sendo a distância entre elas dada por $d_0 = |\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0|$. Ao final de um determinado intervalo de tempo finito t , a distância será $d_1 = |\mathbf{y}'_1 - \mathbf{x}_1|$. Para a nova distância entre as trajetórias no próximo intervalo t , devemos escolher um novo vetor $\mathbf{y}_1$ de forma que o vetor $(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1)$ tenha a mesma direção que $(\mathbf{y}'_1 - \mathbf{x}_1)$, porém seu módulo seja d_0 , como mostra a Figura 2.7.

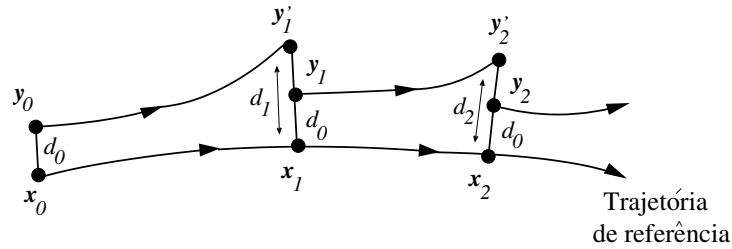


Figura 2.7 – O expoente de Lyapunov é determinado ao obtermos uma sequência de distâncias d_l entre a trajetória de referência $\mathbf{x}_n$ e uma trajetória vizinha, que é ajustada no início de cada intervalo de tempo t para que se encontre a uma distância d_0 de $\mathbf{x}_n$ [2].

Após efetuar a escolha adequada, evolui-se o sistema até obter-se a distância d_2 ao final do segundo intervalo de tempo t . Este procedimento é repetido por l intervalos de tempo iguais e, desta forma, obtêm-se uma sequência de distâncias d_j , onde $j = 1, \dots, l$. O expoente de Lyapunov máximo a tempo finito é então definido pela seguinte expressão [2]:

$$\lambda_l = \frac{1}{lt} \sum_{j=1}^l \ln \left(\frac{d_j}{d_0} \right), \quad (2.57)$$

sendo que, nesta expressão, já omitimos o limite de $l \rightarrow \infty$. Para t relativamente pequeno, Benettin *et al.* [28] mostraram que

$$\lambda_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_l = \lambda_1$$

existe e é independente de t . Outra conclusão importante referente a esta quantidade é que, em regiões regulares de sistemas quase-integráveis, $\lambda_\infty = 0$. Por outro lado, em uma região estocástica, $\lambda_\infty > 0$, sendo independente da condição inicial $\mathbf{x}_0$.

Para obter-se o espectro de Lyapunov numericamente, utiliza-se uma abordagem na qual a evolução temporal do sistema é tratada simultaneamente no **espaço de fases** e no **espaço tangente**, sendo este último o espaço formado por uma base de vetores ortonormais centrada na trajetória de referência. Primeiramente, da condição inicial $\mathbf{x}_0$, obtêm-se uma trajetória de referência a partir da iteração do mapa m -dimensional descrito pela Eq. (2.51). Sendo assim, esta trajetória define o movimento do centro de uma hipersfera que, inicialmente, se encontrava em $\mathbf{x}_0$. A trajetória dos pontos que encontram-se na superfície da hipersfera é então obtida com o auxílio das **equações linearizadas**, que determinam a evolução temporal dos m eixos principais independentes $\mathbf{w}_i$ da hipersfera e que formam o espaço tangente, como representado na Figura 2.6. A evolução temporal destes vetores é obtida através da linearização da Eq. (2.51), dada por

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbb{J}(\mathbf{x}_n) \mathbf{w}_n, \quad (2.58)$$

sendo $\mathbb{J}_{ij} = \partial F_i(\mathbf{x}) / \partial x_j|_{\mathbf{x}_n}$.

Deste modo, itera-se o mapa com uma condição inicial $\mathbf{x}_0$ e, simultaneamente, itera-se as equações linearizadas (2.58) para m diferentes condições iniciais que definem uma base ortonormal $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. No entanto, a execução deste procedimento conduz a alguns empecilhos: (i) o módulo dos vetores $\mathbf{w}_i$ cresce muito rapidamente a medida que o sistema é iterado e (ii) os vetores tendem a alinhar-se ao longo da direção com maior taxa de expansão local (que corresponde a λ_1). Este segundo problema implica que os ângulos entre os vetores se tornam muito pequenos e, devido a capacidade computacional limitada, é impossível distinguir a direção dos vetores, inviabilizando a obtenção dos resultados desejados [3].

Com isso, além de renormalizar os vetores $\mathbf{w}_i$ a cada intervalo de tempo t , torna-se necessário substituí-los por um novo conjunto de vetores ortogonais que preservem o subespaço linear do conjunto antigo, resultante da iteração (2.58). Este novo conjunto de vetores é obtido através do processo de **ortonormalização de Gram-Schmidt**, que encontra-se detalhado no Apêndice B. Os m vetores $\mathbf{w}_i$ escolhidos inicialmente formam um hiperparalelepípedo de m dimensões. Iterando o conjunto de equações linearizadas e efetuando o processo de ortonormalização a cada intervalo t , obtêm-se

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lt} \sum_{j=1}^l \ln V_j^{(m)}, \quad (2.59)$$

sendo $V_j^{(m)}$ o volume do hiperparalelepípedo m -dimensional ao final do j -ésimo intervalo de iteração, antes da normalização. Subtraindo o resultado obtido para o volume que abrange $m - 1$ vetores do resultado obtido para o volume total, temos [10]

$$\lambda_m = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lt} \sum_{j=1}^l \ln \left(\frac{V_j^{(m)}}{V_j^{(m-1)}} \right), \quad (2.60)$$

que é o m -ésimo expoente de Lyapunov.

2.4 Recorrências de Poincaré

Uma importante consequência da conservação do volume do espaço de fases para sistemas Hamiltonianos é o Teorema das recorrências de Poincaré, enunciado em 1890. Este teorema afirma que para um espaço de fases limitado e com energia fixa, uma trajetória dinâmica irá retornar, após um determinado intervalo de tempo, a regiões próximas ao ponto inicial [29]. A Figura 2.8 ilustra a ideia deste teorema.

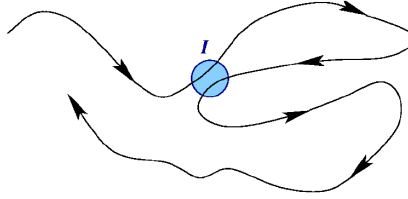


Figura 2.8 – Ilustração da recorrência de uma trajetória a região I do espaço de fases.

Informações relevantes sobre este teorema são obtidas através da distribuição de probabilidade $P(\tau)$ para um conjunto de amostras $\tau \{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M \}$, com $M \rightarrow \infty$, sendo τ o tempo transcorrido até que a trajetória retorne a uma região específica do espaço de fases, que denominamos **região de recorrência**. No caso de tempo contínuo, $P(\tau)$ é a **função densidade de probabilidade** e $P(\tau)d\tau$ é a probabilidade de encontrar o tempo de recorrência τ_i entre τ_i e $\tau_i + d\tau_i$, sendo que esta distribuição é normalizada, tal que

$$\int_0^\infty P(\tau)d\tau = 1. \quad (2.61)$$

Numericamente, é conveniente obter a probabilidade de se encontrar um tempo de recorrência τ' com valor maior que τ , ou seja,

$$P_{cum}(\tau) \equiv \int_\tau^\infty P(\tau')d\tau', \quad (2.62)$$

sendo $P(\tau')$ a função densidade de probabilidade de τ' . A quantidade $P_{cum}(\tau)$ é conhecida como **distribuição cumulativa dos tempos de recorrência**, ou ainda **estatística dos tempos de recorrência** (ETR). Na prática, observa-se que quanto maior o valor do tempo τ de recorrência, menor é a probabilidade de que ocorra uma recorrência para este valor e,

portanto, a função $P_{cum}(\tau)$ é representada por uma curva que apresenta um decaimento. A generalização para o caso de tempo discreto é direta, e então a estatística dos tempos de recorrência é dada por

$$P_{cum}(\tau) \equiv \sum_{\tau'=\tau}^{\infty} P(\tau'). \quad (2.63)$$

O objetivo da análise feita a partir da estatística dos tempos de recorrência, $P_{cum}(\tau)$, é encontrar a melhor equação que reproduz o comportamento desta curva, sendo que os casos mais comuns são curvas que seguem uma lei de decaimento exponencial ou de potência. O comportamento do tipo exponencial para $P_{cum}(\tau)$ em função do tempo de recorrência τ é uma propriedade de sistemas totalmente caóticos, com espaço de fases ergódico, ou seja, no qual qualquer região tem a mesma probabilidade de ser visitada. Este tipo de comportamento pode ser interpretado como a recorrente visita da trajetória à região de recorrência, sendo que o tempo de recorrência é curto.

No entanto, quando trata-se de um sistema em que o espaço de fases é **dividido**, ou seja, formado por estruturas que apresentam movimento regular, conhecidas como **ilhas de regularidade**, e regiões caóticas, a trajetória poderá ser aprisionada nas proximidades destas ilhas e permanecer nesta região por longos períodos de tempo, dando origem ao efeito conhecido como *stickiness*, e que será abordado na Seção 2.5, assim como a sua relação com o teorema das recorrências de Poincaré.

2.5 Quase-armadilhas dinâmicas (QADs) e o efeito *stickiness*

Ao analisarmos trajetórias de sistemas dinâmicos no espaço de fases, podemos encontrar estruturas complexas ainda não muito bem conhecidas, até mesmo para sistemas simples com um ou dois graus de liberdade. Usualmente, o espaço de fases de sistemas Hamiltonianos é **dividido**, consistindo de domínios caóticos e regulares [30]. Analisar a dinâmica de sistemas Hamiltonianos com espaço de fases dividido não é uma tarefa simples devido aos motivos listados a seguir:

- (i) a estrutura topológica do espaço de fases deste tipo de sistemas é muito complexa, pois contém toros KAM coexistindo com regiões caóticas;
- (ii) a geometria (bordas dos toros KAM) é desconhecida e, sem conhecer a estrutura exata do espaço de fases, é impossível desenvolver uma abordagem analítica rigorosa;
- (iii) além de regiões regulares e caóticas, outros objetos topológicos como os *cantori*, que serão abordados a seguir, e as variedades estáveis/instáveis, introduzidos na Subseção 2.2.1, também são importantes no estudo da dinâmica [30].

Neste cenário surge um tipo de dinâmica conhecida como **caos fraco**, caracterizado pelo comportamento intermitente de trajetórias caóticas que esporadicamente executam

movimento quase regular por longos, porém finitos, intervalos de tempo nas vizinhanças das estruturas regulares. As regiões localizadas nas bordas das ilhas de regularidade que “aprisionam” trajetórias são conhecidas como **singularidades** ou **regiões de aprisionamento**. Uma singularidade pode ser comparada a uma armadilha, ou mais especificamente, uma **quase-armadilha dinâmica** (QAD), já que armadilhas absolutas são proibidas em sistemas conservativos [31]. A Figura 2.9 ilustra a ideia de uma QAD. Uma das principais características destas estruturas consiste em apresentar propriedades fractais ou de auto-similaridade [32].

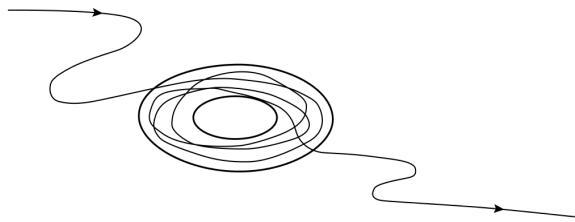


Figura 2.9 – Esquema que ilustra uma trajetória que esteve presa em uma quase-armadilha dinâmica. Figura retirada da Ref. [31].

O aprisionamento de trajetórias em QADs é conhecido como efeito *stickiness*, e a ocorrência deste efeito depende da estrutura topológica do espaço de fases e também dos parâmetros envolvidos no sistema em questão. A origem deste efeito não é um consenso na literatura, porém algumas teorias foram desenvolvidas para explicá-la. Entre elas, destacam-se as seguintes: o efeito *stickiness* pode surgir devido a cadeias de ilhas que obedecem a uma hierarquia [33, 34], ou até mesmo um único ponto fixo marginal pode gerá-lo [35], não sendo necessária a existência de toros KAM no espaço de fases para aprisionar a trajetória [36]. No entanto, a explicação mais aceita é que este efeito ocorre devido a existência de *cantori* [37, 38], que são barreiras na forma de um **conjunto de Cantor** formadas por estruturas remanescentes de um toro KAM destruído pelo aumento da perturbação.

A transformação de um toro KAM em um *cantorus* ocorre para um determinado parâmetro do sistema dinâmico em questão. Este tipo de barreira pode ser descrita como um toro no qual existem infinitas entradas geradas pela sobreposição das cadeias de ilhas vizinhas. A medida que se aumenta a perturbação do sistema, uma camada caótica é formada na região interna do último toro KAM. No entanto, esta curva remanescente não permite a conexão entre a camada caótica interna e o mar caótico que a cerca. Após a destruição deste toro e a formação do *cantorus*, as entradas características deste tipo de barreira, que são ilustradas na Figura 2.10, são muito pequenas e, portanto, as órbitas caóticas permanecem por longos tempos dentro do *cantorus* antes de escapar para o mar caótico. Surge então o efeito *stickiness* [39, 40].

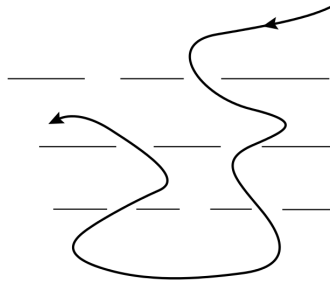


Figura 2.10 – Trajetória atravessando as entradas dos *cantori*. Figura retirada da Ref. [32].

A estatística dos tempos de recorrência, $P_{cum}(\tau)$, é fundamental na identificação do efeito *stickiness* em sistemas Hamiltonianos pois, quando tal efeito ocorre, é observado um decaimento lento desta distribuição, resultando em uma lei de potência do tipo [13, 29, 41, 42]

$$P_{cum}(\tau) \sim \frac{1}{\tau^\gamma}, \quad (2.64)$$

sendo γ o expoente de decaimento. Durante o efeito *stickiness*, a trajetória executa um movimento quase regular, que pode também ser identificado a partir do espectro dos expoentes de Lyapunov, como verificado na Ref. [43], na qual os autores concluíram que, na presença do efeito de *stickiness*, o valor dos expoentes de Lyapunov positivos decai abruptamente e permanece próximo a zero durante o intervalo de tempo no qual a trajetória encontra-se aprisionada.

Capítulo 3

O mapa padrão

O mapa padrão, também muitas vezes referido como mapa de Chirikov-Taylor, pode representar diversas situações físicas de interesse. Este mapa é amplamente utilizado para se investigar a transição da dinâmica regular para caótica, principalmente pelo fato de ser um sistema de fácil manipulação computacional. Neste Capítulo abordamos as principais características do mapa padrão, como a estabilidade dos pontos fixos e os tipos de órbitas características. Além disso, apresentamos a dedução do mapa padrão a partir do modelo físico conhecido como rotor pulsado.

3.1 Modelo físico

Um dos modelos físicos mais usados para obter o mapa padrão é o **rotor pulsado**, que consiste em uma barra rígida de momento de inércia I e comprimento L , com uma das extremidades fixa em um pivô sem atrito, sendo que a outra é deixada livre para girar [10]. O sistema é representado na Figura 3.1.

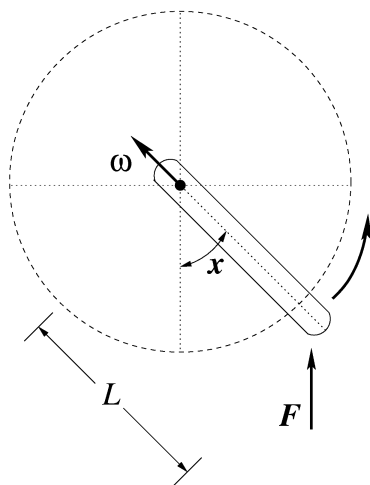


Figura 3.1 – Ilustração do rotor pulsado.

A extremidade livre está sujeita a uma força periódica vertical de intensidade

K/L , aplicada no tempo $t = 0, \tau, 2\tau, \dots, n\tau$. Usando a coordenada generalizada x , que representa a posição angular da barra em relação a vertical, e o momento generalizado conjugado p , que representa o momento angular, podemos escrever a Hamiltoniana do sistema [31]

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2I} + K \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (3.1)$$

sendo que $\delta(t - n\tau)$ é a função Delta de Dirac. Da Eq. (3.1), temos que o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade representa a energia cinética do sistema, sendo que o segundo termo do mesmo lado é a energia potencial.

3.1.1 Função Hamiltoniana dependente do tempo

No caso da função Hamiltoniana descrita pela Eq. (3.1), nota-se que H é periódica no tempo, de tal forma que $H(x, p, t) = H(x, p, t + \tau)$. Para este tipo de sistemas, é possível interpretar o tempo como uma **coordenada generalizada**, utilizando para isso um parâmetro auxiliar θ capaz de descrever a evolução do sistema e que seja inversível em relação ao tempo. A única restrição sobre θ é que seja uma função crescente de t , já que o tempo cresce inexoravelmente, de tal forma que $d\theta/dt > 0$. Este parâmetro poderia ser, por exemplo, a distância percorrida por uma partícula.

Na formulação Hamiltoniana usual temos, para um sistema com N graus de liberdade, as coordenadas e momentos generalizados $(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$. Se o sistema é dependente do tempo, a função Hamiltoniana é $H(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N, t)$. Podemos tornar o tempo t uma coordenada que, neste caso, seria a coordenada generalizada de número $N + 1$. Desta forma, fazendo $t \equiv q_{N+1}$, obtemos

$$H(q_1, \dots, q_{N+1}; p_1, \dots, p_N).$$

Do princípio variacional de Hamilton, descrito pela Eq. (2.5), temos que a variável ação é dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(q_1, \dots, q_{N+1}; p_1, \dots, p_N) \right) dt, \quad (3.2)$$

sendo que, por simplicidade, faremos $H(q_1, \dots, q_{N+1}; p_1, \dots, p_N) = H$. Podemos efetuar uma mudança de variável $t \rightarrow \theta$ e, portanto, reescrevemos a Eq. (3.2) da seguinte forma:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{dq_i}{dt} - H \right) \frac{dt}{d\theta} d\theta. \quad (3.3)$$

Manipulando a Eq. (3.3), lembrando que $t \equiv q_{N+1}$ e que, aplicando a regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{dq_i}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dq_i}{d\theta},$$

então, obtemos

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{dq_i}{d\theta} - \frac{dq_{N+1}}{d\theta} H \right) d\theta,$$

e, usando a notação compactada $dq_i/d\theta = q'_i$, temos

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_{i=1}^N p_i q'_i - q'_{N+1} H \right) d\theta. \quad (3.4)$$

Se $p_{N+1} = -H$, então podemos afirmar que:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_{i=1}^N p_i q'_i - q'_{N+1} H \right) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{N+1} p_i q'_i d\theta. \quad (3.5)$$

Sendo assim, concluímos que o momento conjugado ao tempo é $p_{N+1} = -H$. Além disso, se compararmos a expressão obtida para a ação S na Eq. (3.5) com a Eq. (3.2), observa-se que, no espaço de fases estendido $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_{N+1}; p_1, \dots, p_{N+1})$, a Hamiltoniana é nula. Neste espaço de fases existe um vínculo dado por $p_{N+1} = -H$, o que faz com que as coordenadas generalizadas e seus momentos conjugados não sejam independentes entre si [44]. A nova Hamiltoniana será dada por

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_{N+1}; p_1, \dots, p_{N+1}) = H(q_1, \dots, q_{N+1}; p_1, \dots, p_N) + p_{N+1}. \quad (3.6)$$

Sendo assim, obtemos as equações de Hamilton a partir da Eq. (3.6), resultando em

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.7)$$

coincidindo com as equações de Hamilton para a função Hamiltoniana original H . Além disso, temos que

$$\dot{p}_{N+1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{N+1}} = -\frac{\partial H}{\partial t}; \quad \dot{q}_{N+1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{N+1}} = 1, \quad (3.8)$$

o que confirma as definições do novo par de coordenadas generalizadas $(q_{N+1}, p_{N+1}) = (t, -H)$. Como $\mathcal{H} \equiv 0$, da Eq. (3.6) obtemos $p_{N+1} = -H$, o que não leva a nenhuma informação relevante sobre o sistema. Por este motivo, sistemas cuja Hamiltoniana depende do tempo são conhecidos como **sistemas com $(N + 1/2)$ grau de liberdade** [31]. Se a Hamiltoniana for uma função periódica no tempo, então a variável t faz um papel análogo ao de uma variável ângulo [2].

3.2 Derivação do mapa padrão

Conforme detalhado na Subseção 3.1.1, o rotor pulsado consiste em um sistema com $(N + 1/2)$ grau de liberdade, devido a dependência temporal. A visualização de trajetórias de um sistema com N graus de liberdade se torna difícil se $N > 1$ e, para contornar este problema, podemos utilizar as **seções de Poincaré**. Esta ferramenta possibilita

reduzir o estudo de um fluxo contínuo em um espaço de fases com N dimensões para o estudo de um mapa em um espaço de fases com dimensão $N - 1$.

Utilizando como exemplo o rotor pulsado, temos que o espaço de fases correspondente é formado pelas variáveis x , p e t . Deve-se então escolher uma superfície adequada dentro deste espaço tridimensional e marcar as sucessivas intersecções do fluxo com a superfície escolhida. Tal superfície que faz o mapeamento da trajetória é a **seção de Poincaré**. A equação que relaciona as sucessivas posições dos pontos nesse plano é o **mapa de Poincaré**, e evolui de forma discreta no tempo. Considerando um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ em um mapa, se uma trajetória gerada por um fluxo que começa em $\mathbf{x}^*$ e retorna a $\mathbf{x}^*$ após um tempo τ , então esta trajetória corresponde a uma órbita periódica com período τ desse fluxo. Portanto, ao utilizar-se um mapa de Poincaré para analisar a dinâmica de um fluxo, todas as propriedades qualitativas do sistema são conservadas. No caso do rotor pulsado, como a Hamiltoniana depende do tempo periodicamente, então a superfície conveniente é $t_n = t_0 + n\tau$, sendo t_0 uma constante positiva entre 0 e τ . A Figura 3.2 ilustra o processo de obtenção de uma seção de Poincaré para um sistema que depende periodicamente do tempo.

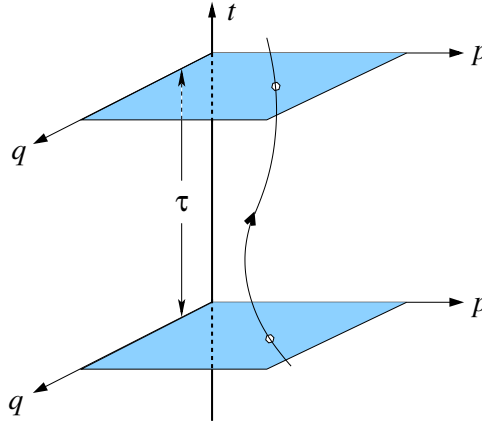


Figura 3.2 – Para uma função Hamiltoniana que é periódica no tempo, uma seção de Poincaré pode ser obtida tomando os pontos (q, p) a cada período τ . Figura construída com base na ilustração da pág. 49 da Ref. [2].

Podemos obter as equações de movimento do rotor pulsado a partir das Equações de Hamilton, dadas pelas Eqs. (2.1), utilizando a função Hamiltoniana (3.1), de onde obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{I}, \quad (3.9a)$$

$$\frac{dp}{dt} = K \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (3.9b)$$

A Eq. (3.9b) nos mostra que p é constante entre dois impulsos, mas varia descontinuamente em cada impulso. Consequentemente, de acordo com a Eq. (3.9a), a posição x varia

linearmente com o tempo entre dois impulsos e é contínua no momento do impulso, como mostra a Figura 3.3 [2].

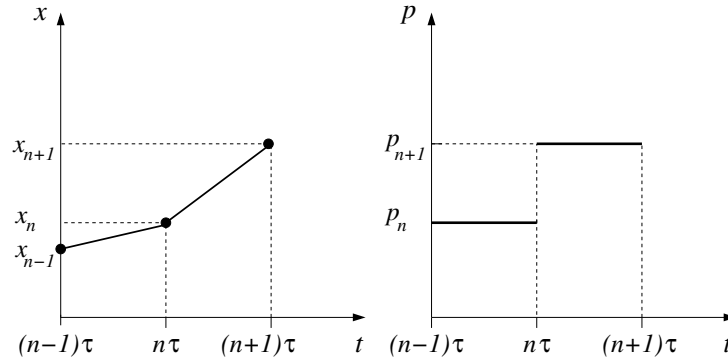


Figura 3.3 – Dependência temporal do momento p e da posição angular x do rotor pulsado. Figura construída com base na ilustração da pág. 138 da Ref. [2].

Para obter o mapa, devemos integrar as Eqs. (3.9a) e (3.9b) em um intervalo de tempo em que ocorre a ação da força impulsiva e em outro intervalo em que não há aplicação de força. Para isso, vamos considerar uma quantidade infinitesimal ϵ , tal que possamos definir o intervalo $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$, em que ocorre o impulso no tempo $t = n\tau$ e o intervalo $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$, que corresponde ao intervalo entre dois impulsos.

Podemos definir as seguintes grandezas:

$$\begin{aligned} p_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} p(t = n\tau - \epsilon), \\ p_n^* &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} p(t = n\tau + \epsilon), \\ p_{n+1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} p(t = (n+1)\tau - \epsilon), \end{aligned}$$

e, vale-se da mesma convenção para a posição x . Integrando inicialmente a Eq. (3.9a) no intervalo $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$, lembrando que este intervalo localiza-se entre dois impulsos e por isso p é uma constante, então

$$x[(n+1)\tau - \epsilon] - x[n\tau + \epsilon] = \frac{p[n\tau + \epsilon]}{I}(\tau - 2\epsilon).$$

Da integração da Eq. (3.9b), obtemos

$$p[(n+1)\tau - \epsilon] - p[n\tau + \epsilon] = 0,$$

já que, $\delta(t - n\tau) = 0$ neste intervalo. Aplicando o limite de $\epsilon \rightarrow \infty$, temos que:

$$x_{n+1} - x_n^* = \frac{p_n^*}{I}\tau, \quad (3.10a)$$

$$p_{n+1} - p_n^* = 0. \quad (3.10b)$$

Agora, analisemos a integração no intervalo $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$, para o qual ocorre a aplicação da força no instante $t = n\tau$. Da Eq. (3.9a), temos que

$$x[n\tau + \epsilon] - x[n\tau - \epsilon] \simeq \frac{p[n\tau - \epsilon]}{I}(2\epsilon),$$

e, da integração da Eq. (3.9b), obtemos

$$p[n\tau + \epsilon] - p[n\tau - \epsilon] \simeq K \text{sen}[x(n\tau - \epsilon)].$$

Ao aplicarmos o limite de $\epsilon \rightarrow \infty$, encontramos

$$x_n^* - x_n = 0, \quad (3.11a)$$

$$p_n^* - p_n = K \text{sen}(x_n). \quad (3.11b)$$

Isolando x_n^* e p_n^* nas equações (3.11a) e (3.11b) respectivamente e, substituindo o resultado nas equações (3.10a) e (3.10b), obtemos finalmente

$$p_{n+1} = p_n + K \text{sen}(x_n),$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\tau}{I} p_{n+1}.$$

Fazendo $\tau/I = 1$, obtemos a forma conhecida do mapa padrão, descrita matematicamente por [2, 10]:

$$p_{n+1} = p_n + K \text{sen}(x_n) \quad [\text{mod } 2\pi], \quad (3.12)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \quad [\text{mod } 2\pi].$$

Podemos também escrever o mapa padrão da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} p_{n+1} = p_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) & [\text{mod } 1], \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 1], \end{cases} \quad (3.13)$$

de modo que o espaço de fases fica restrito a $[0; 1] \times [0; 1]$ e não mais à $[0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$.

3.3 Pontos fixos e estabilidade

Considerando o mapa unidimensional (2.47), diz-se que x^* é um ponto fixo deste mapa se

$$x^* = F(x^*).$$

Para concluir-se algo sobre a estabilidade do ponto fixo x^* , faz-se necessário verificar o que ocorre com as sucessivas iterações do mapa a partir de um ponto x_i próximo de x^* . Para isso, como abordado brevemente na Seção 2.3, lineariza-se o sistema em torno de x^* .

A análise da estabilidade é feita através da derivada de primeira ordem do mapa no ponto fixo. Assim, x^* é um **ponto fixo assintoticamente estável** se $|F'(x^*)| < 1$, o que significa que todos os pontos suficientemente próximos a x^* são atraídos por ele conforme itera-se o sistema. Por outro lado, se $|F'(x^*)| > 1$, diz-se que x^* é um **ponto fixo instável**.

No caso de um sistema com mais dimensões, a estabilidade do ponto fixo $\mathbf{x}^*$ é analisada através da linearização do sistema obtida através da matriz Jacobiana $\mathbb{J}(\mathbf{x}^*)$ calculada no ponto. Os autovalores h_i de $\mathbb{J}(\mathbf{x}^*)$ definem o movimento do sistema nas vizinhanças do ponto fixo. Nesta Seção, vamos estudar a estabilidade dos pontos fixos do mapa padrão, descrito matematicamente pela Eq. (3.13).

Inicialmente, obtêm-se a matriz Jacobiana do mapa, que é dada por

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

A partir da Eq. (3.14), determina-se os autovalores através do polinômio característico de $\mathbb{J}$, tal que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} - h & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} - h \end{vmatrix} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} - h \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} - h \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} + h^2 - \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} = 0.$$

Ainda a partir da Eq. (3.14), podemos definir o traço e o determinante de $\mathbb{J}$, tal que

$$\text{Tr } \mathbb{J} = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} + \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}, \quad (3.16a)$$

$$\det \mathbb{J} = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} - \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n}. \quad (3.16b)$$

Desta forma, agrupando os termos da Eq. (3.15) e substituindo as Eqs. (3.16a) e (3.16b), encontramos

$$h^2 - h \text{Tr } \mathbb{J} + 1 = 0, \quad (3.17)$$

já que, como provado na Eq. (2.19), o determinante de uma matriz simplética é 1. A solução desta equação quadrática é

$$h_{1,2} = \frac{\text{Tr } \mathbb{J} \pm [(\text{Tr } \mathbb{J})^2 - 4]^{1/2}}{2}. \quad (3.18)$$

Da Eq. (3.18), obtemos os seguintes casos possíveis:

1. $\text{Tr } \mathbb{J} > 2$: os autovalores são reais e positivos;

2. $\text{Tr } \mathbb{J} < -2$: os autovalores são reais e negativos;
3. $-2 < \text{Tr } \mathbb{J} < 2$: os autovalores são complexos conjugados de magnitude 1, tal que $h_{1,2} = \exp^{\pm i\theta}$.

No caso 1 diz-se que a órbita periódica é **hiperbólica** e no caso 2 a órbita periódica resultante é chamada de **hiperbólica com reflexão**. No caso 3 a órbita é **elíptica**, dando origem a toros racionais se seus períodos forem um número racional e toros irracionais caso contrário. Do ponto de vista da estabilidade linear, os casos 1 e 2 conduzem a órbitas vizinhas que divergem exponencialmente da órbita periódica (**instabilidade linear**), enquanto que, no caso 3, as órbitas vizinhas não se afastam (**estabilidade linear**) [10].

3.4 Transição para o caos no mapa padrão

Uma análise detalhada das propriedades do mapa padrão pode proporcionar uma noção muito clara do mecanismo que envolve a transição para o caos em sistemas conservativos. Partindo da expressão (3.13), que descreve matematicamente o mapa padrão, e fazendo $K = 0$, temos um exemplo de sistema integrável. Neste caso, o momento p é uma constante de movimento e a trajetória encontra-se confinada em um toro. A intersecção do toro na superfície de seção (x, p) resulta em linhas com $p_{n+1} = p_n$. Quando $p_n = r/s$, a órbita será periódica e com período s , ou seja, após s iterações a órbita se repetirá, e $x_s = x_0 + s = x_0$. No entanto, se p_n for irracional, então x_n nunca se repetirá [2].

Aumentando o valor de K , pequenas perturbações não integráveis são adicionadas ao caso integrável, como mostram as Figuras 3.4(a) e (b), em que foram usados os valores $K = 0,1716354$ e $K = 0,4716354$, respectivamente. Nestes dois casos de perturbações relativamente pequenas, o espaço de fases é preenchido por diversos toros KAM que resistem a perturbação do sistema, e se estendem horizontalmente de $x = 0,0$ até $x = 1,0$. Na Figura 3.4(b) podemos constatar também a presença de órbitas periódicas elípticas ao longo de $p = 0,5$.

Na Figura 3.4(c), obtida com $K = 0,7716354$, nota-se que as órbitas hiperbólicas localizadas em $p \approx 0,5$ começam a se tornar caóticas, já que as estruturas invariantes passam a ser substituídas pelos *cantori*, como abordado na Seção 2.5. Todas as ressonâncias começam a ser distorcidas devido a principal ressonância que se localiza em torno do ponto elíptico localizado ao centro do espaço de fases. A Figura 3.4(d) mostra o espaço de fases do mapa padrão para o valor crítico $K_c = 0,9716354$, para o qual o último toro KAM que se estende de $x = 0,0$ até $x = 1,0$ é quebrado. Para valores de $K < K_c$, a difusão de trajetórias verticalmente (direção de p) através deste toro não é permitida. Por outro lado, para valores de $K > K_c$, uma camada estocástica surge em torno dos toros que resistem a perturbação, criando um domínio caótico contínuo que cobre a maior parte do espaço de

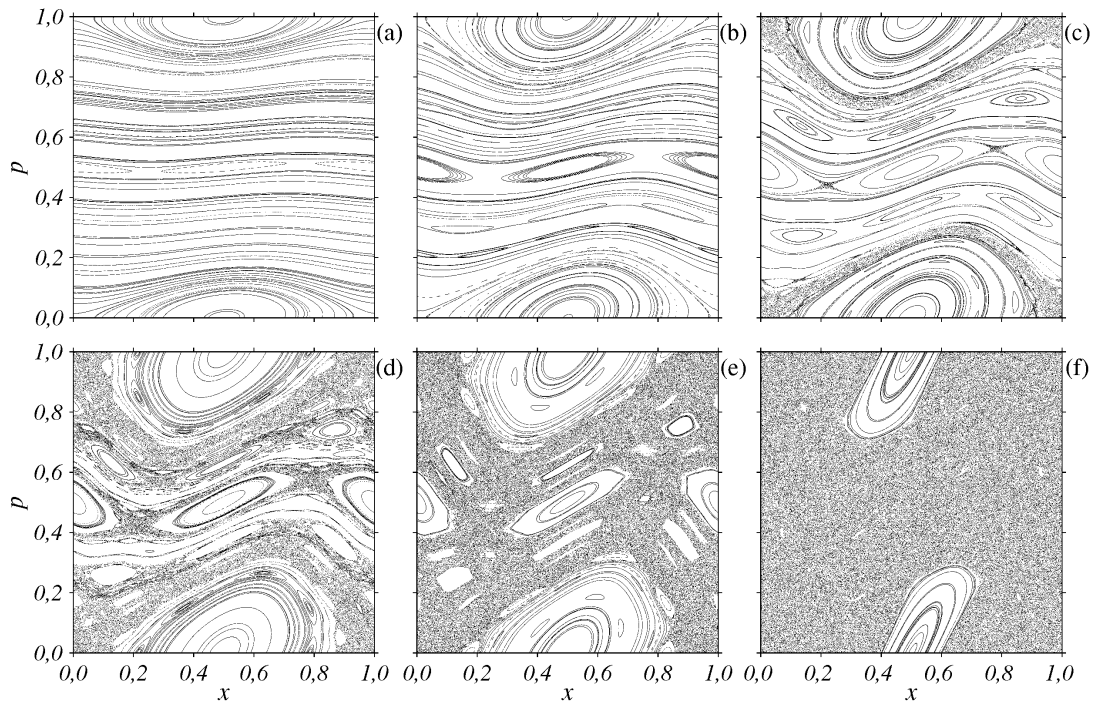


Figura 3.4 – Espaço de fases do mapa padrão para (a) $K = 0,1716354$, (b) $K = 0,4716354$, (c) $K = 0,7716354$, (d) $K = 0,9716354$, (e) $K = 1,1716354$ e (f) $K = 2,9716354$. Figuras obtidas usando 80 condições iniciais espaçadas igualmente ao longo de p e escolhidas aleatoriamente em x .

fases, permitindo a propagação de trajetórias na direção do momento p , como mostram as Figuras 3.4(e) e (f), com $K = 1,1716354$ e $K = 2,9716354$, respectivamente. É muito comum na literatura se referir a camada estocástica do espaço de fases como **mar caótico**, assim como as estruturas regulares cercadas por esta camada são usualmente referidas como **ilhas de regularidade** [32].

Capítulo 4

Caracterizando caos fraco usando expoentes de Lyapunov

O espaço de fases de sistemas Hamiltonianos pode ser composto por regiões de movimento regular (periódico e quase-periódico) e caótico. A dinâmica caótica de sistemas Hamiltonianos com espaço de fases dividido é significativamente afetada pela presença das estruturas regulares, originando o que é conhecido como **caos fraco**, sendo esta a principal “assinatura” do efeito *stickiness*.

Em sistemas com um grande número N de graus de liberdade, a fração do espaço de fases ocupada pelos toros invariantes diminui significativamente [21, 45], pois a dimensão do espaço de fases ($2N$) aumenta mais rapidamente que a dimensão dos toros invariantes (N). Considere um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade ($N = 2$) e quase-integrável, sendo que a perturbação imposta ao sistema seja suficientemente pequena. Neste caso, o fluxo de trajetórias se encontra restrito a uma superfície tridimensional $H = \text{constante}$ do espaço de fases quadridimensional, sendo que os toros KAM de dimensão $N = 2$ dividem esta superfície em regiões caóticas desconectadas, não permitindo a passagem de uma para outra [2].

Por outro lado, para o caso $N \geq 3$, as regiões de comportamento caótico encontram-se interligadas pois os toros de dimensão N não podem dividir a superfície de energia de dimensão $(2N - 1)$ em regiões distintas. A conexão entre diferentes regiões caóticas dá origem a chamada **teia de Arnold**, que permite a difusão de trajetórias por todo o espaço de fases pois, a medida que o número de graus de liberdade aumenta, as trajetórias caóticas ficam menos restritas as estruturas regulares que formam uma espécie de “barreira parcial”. A existência deste tipo de difusão foi provada primeiramente por Vladimir I. Arnold e, por este motivo, leva o nome de **difusão de Arnold** [1, 19].

Na década de 1970, Claude Froeschlé realizou estudos numéricos detalhados utilizando sistemas Hamiltonianos com três graus de liberdade ($N = 3$) e que apresentavam movimento caótico [46]. Uma das principais conclusões obtidas foi que, a medida que

alteravam-se as condições iniciais do sistema, duas ou então nenhuma constante de movimento era encontrada, desconsiderando a energia que também é uma constante de movimento. Em outras palavras, o desaparecimento de uma constante leva ao desaparecimento da outra. Froeschlé então conjecturou que um sistema dinâmico com N graus de liberdade tem geralmente $N - 1$ constantes de movimento ou nenhuma (além da energia), sendo que estas configurações correspondem ao movimento sobre um toro KAM e ao movimento na camada estocástica, respectivamente [21]. Tais observações sobre a dinâmica de sistemas Hamiltonianos com mais de dois graus de liberdade foram um importante ponto de partida para o entendimento desta classe de sistemas.

Em mapas bidimensionais que preservam a área, o efeito *stickiness* ocorre usualmente nas bordas das ilhas de regularidade. Em sistemas de alta dimensionalidade ($N \geq 2$) também sabemos que ocorre este efeito [15, 43, 47, 48], que pode ter origem devido a presença de toros com diferentes dimensões. Porém, ao contrário de sistemas com um ou dois graus de liberdades, mapas com $N > 2$ ainda são pouco compreendidos devido as dificuldades de manipulação computacional que surgem quando trabalhamos com este tipo de sistemas.

Como abordado na Seção 2.5, uma das principais formas de caracterizar o efeito *stickiness* consiste na análise da estatística dos tempos de recorrência (ETR). Chirikov e Shepelyansky foram os primeiros a mostrar a eficácia desta técnica na análise da dinâmica de sistemas Hamiltonianos [41]. Outras abordagens estatísticas também foram utilizadas para tal finalidade, sendo que podemos citar como exemplos: (i) o decaimento das correlações temporais [49], que possui íntima relação com a ETR pois, na presença do efeito *stickiness*, ambas quantidades apresentam um comportamento que segue uma lei de potência; (ii) a teoria dos grandes desvios [50] e (iii) os cumulantes de ordens maiores (variância, assimetria e curtose) [47] que, quando aplicados a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito (ELTF), possibilitam a caracterização deste efeito. Porém, ao contrário da ETR, as demais técnicas supracitadas não serão utilizadas nesta dissertação e portanto não as trataremos com detalhes.

Outra forma de compreender a dinâmica de sistemas Hamiltonianos com $N \geq 2$ consiste em analisar a série temporal dos ELTFs, que nos trazem a informação sobre o quão caótica é a trajetória. Em sistemas Hamiltonianos com espaço de fases dividido, o efeito *stickiness* influencia consideravelmente o valor dos ELTFs pois observa-se que esta quantidade, na presença do efeito *stickiness*, decai para valores próximos a zero de forma abrupta [43], mantendo este comportamento por um intervalo de tempo finito antes de seu valor aumentar novamente, o que significa que a trajetória retornou ao mar caótico.

Neste Capítulo, propomos a aplicação de uma nova ferramenta na investigação da dinâmica de sistemas conservativos de alta dimensionalidade. Esta metodologia consiste em utilizar as séries temporais dos expoentes de Lyapunov Locais (ELTs) para definir

regimes de movimento **ordenado**, **semi-ordenado** (ou **semi-caótico**) e **caótico**, obtendo com isso informações adicionais àquelas obtidas quando utilizamos as técnicas tradicionais abordadas na literatura sobre o tema. Para aplicar este método, utilizamos um sistema obtido através do acoplamento de N mapas padrão, que será introduzido na Seção 4.1. Detalhes do procedimento desenvolvido serão descritos na Seção 4.2, sendo que os resultados e comparações de nosso método com a ETR serão apresentados na Seção 4.3. Por fim, a Seção 4.4 resume as principais conclusões obtidas com a aplicação da metodologia proposta.

4.1 Rede de mapas Hamiltonianos acoplados

Afim de investigar o efeito *stickiness* em sistemas Hamiltonianos de alta dimensionalidade, é desejável encontrar um modelo eficiente do ponto de vista computacional e, além disso, que permita variar o número de graus de liberdade. Um modelo que satisfaz ambas as condições pode ser obtido da composição $\mathbf{T} \circ \mathbf{M}$ entre N mapas simpléticos bidimensionais $\mathbf{M} = (M^{(1)}, \dots, M^{(N)})$ e um acoplamento simplético $\mathbf{T} = (T^{(1)}, \dots, T^{(N)})$. O mapa simplético utilizado para compor este sistema é o mapa padrão, que descreve a dinâmica do rotor pulsado e pode ser descrito matematicamente na forma matricial por

$$M^{(i)} \begin{pmatrix} p_{n+1}^{(i)} \\ x_{n+1}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n^{(i)} + \frac{K^{(i)}}{2\pi} \sin(2\pi x_n^{(i)}) & [\text{mod } 1] \\ x_n^{(i)} + p_n^{(i)} + \frac{K^{(i)}}{2\pi} \sin(2\pi x_n^{(i)}) & [\text{mod } 1] \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Admitindo que existam N rotores acoplados em um círculo de raio unitário e que o estado de cada rotor seja definido por sua posição $2\pi x^{(i)}$ e por seu momento conjugado $p^{(i)}$, sendo que o índice i representa o i -ésimo rotor, podemos utilizar um potencial de acoplamento entre os mapas i e j do tipo [42, 51]

$$V_{i,j} = \frac{\xi}{(2\pi)^2 \sqrt{N-1}} \cos[2\pi(x^{(i)} - x^{(j)})],$$

e a ação do acoplamento sobre o i -ésimo mapa é então dada por

$$T^{(i)} \begin{pmatrix} p_{n+1}^{(i)} \\ x_{n+1}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n^{(i)} + \sum_{j=1}^N \xi^{(i,j)} \sin[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

que corresponde a uma perturbação $\Delta p^{(i)}$. O acoplamento $\mathbf{T}$ somente satisfaz a condição simplética dada pela Eq. (2.18) se $\xi^{(i,j)} = \xi^{(j,i)} = \frac{\xi}{2\pi\sqrt{N-1}}$, como pode ser verificado no Apêndice C. Podemos observar pela Eq. (4.2) que o acoplamento do sistema como um todo é obtido pela soma dos acoplamentos de todos os rotores entre si. Outra propriedade deste sistema é que, no limite $\xi \rightarrow 0$, podemos compreendê-lo como sendo composto por N mapas padrão desacoplados.

Estudos detalhados desta rede de mapas acoplados foram desenvolvidos nas Refs. [15, 42] utilizando a ETR, o que permite efetuar uma comparação destes resultados com os que serão apresentados nesta dissertação. Na Ref. [14], os autores investigaram o fenômeno de sincronização para este mesmo sistema. Em nossa pesquisa, para investigar a dinâmica do sistema formado pelas Eqs. (4.1)-(4.2), abordaremos os casos de dois e três mapas acoplados ($N = 2$ e 3), sendo que em todas as simulações computacionais utilizamos os valores $K_1 = 3,2760$ para o mapa $M^{(1)}$ e $K_2 = K_3 = 3,2094$ para os mapas $M^{(2)}$ e $M^{(3)}$. Somente na Subseção 4.3.4 apresentamos resultados para $N = 4$ e $N = 5$, e os parâmetros utilizados para tais simulações serão abordados posteriormente.

4.2 O método

Considere uma trajetória caótica em um sistema Hamiltoniano fechado com N graus de liberdade. Para tempos longos, a trajetória preenche de forma ergódica a componente caótica do espaço de fases que é caracterizada por um espectro de N expoentes de Lyapunov $\{\lambda_{i=1\dots N}^{(\infty)}\}$, sendo $\lambda_1^{(\infty)} > \lambda_2^{(\infty)}, \dots, \lambda_N^{(\infty)} > 0$, como descrito na Seção 2.3. O ingrediente central da metodologia utilizada nesta dissertação é o espectro de ELTFs calculado ao longo de uma trajetória durante uma **janela temporal** de tamanho ω , resultando no espectro de **expoentes de Lyapunov locais** (ELTs) $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$.

O tempo utilizado para determinar o valor dos ELTs é um parâmetro importante, que merece uma discussão mais detalhada. A ocorrência do efeito *stickiness* em determinadas regiões do espaço de fases de sistemas Hamiltonianos pode gerar algumas dificuldades no uso do espectro de Lyapunov para caracterização de sua dinâmica, pois a convergência dos ELTFs não é obtida tão facilmente como no caso de um sistema completamente ergódico. Para isso, em sistemas cuja ergodicidade não é satisfeita devido a presença de ilhas de regularidade imersas no mar caótico que impedem que trajetórias visitem todas as regiões do espaço de fases, é necessário executar simulações computacionais razoavelmente longas afim de obter valores assintóticos para os ELTFs com maior precisão. Em sistemas Hamiltonianos com espaço de fases dividido, grandes flutuações são observadas no cálculo dos ELTFs para uma trajetória de referência, que estão relacionadas com a alternância entre diferentes tipos de movimento (caótico e regular).

Uma vez que o aprisionamento de trajetórias por QADs ocorre por um intervalo finito de tempo, o uso dos ELTFs é um importante aliado para quantificar o efeito destas armadilhas. Na Refs. [52, 53] os autores mostram que, usando o espectro de ELTFs, as QADs podem ser detectadas numericamente, além de ser possível estimar o quanto a trajetória é influenciada pelo efeito *stickiness*. Como neste trabalho utilizamos os ELTs calculados durante uma janela temporal de tamanho ω , torna-se essencial que o valor de ω satisfaça as seguintes condições:

- (i) seja suficientemente pequeno para garantir uma boa resolução da variação temporal do espectro $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ **localmente**, de tal forma que os ELTFs não carreguem informações do espaço de fases como um todo;
- (ii) seja suficientemente grande para que a estimativa do espectro $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ seja razoável, já que as quantidades vetoriais intrínsecas do método de cálculo dos ELTFs (ver Seção 2.3) necessitam de algumas iterações para que ocorra o correto alinhamento com as direções mais instáveis do espaço de fases.

Após a realização de diversos testes numéricos e uma comparação com resultados encontrados na literatura, a escolha de $\omega = 10^2$ mostrou-se bastante eficaz, além de ser suportada pelas Refs. [43, 52, 53]. Sendo assim, os resultados apresentados na Seção 4.3 (exceto para a Subseção 4.3.5) foram obtidos executando o cálculo dos ELLs após uma janela temporal de tamanho $\omega = 10^2$. No entanto, na Subseção 4.3.4, mostraremos que, qualitativamente, tais resultados são **independentes** da escolha de ω .

Compreendida a escolha do tamanho da janela de iteração ω , podemos exemplificar a metodologia utilizada neste trabalho apresentando as séries temporais dos ELLs referentes ao sistema (4.1)-(4.2). Nas Figuras 4.1(a) e (b) encontram-se os $\lambda_i^{(\omega)}$ com $i = 1, \dots, N$ para os casos $N = 2$ e 3, respectivamente. O decaimento de $\lambda_i^{(\omega)}$ para valores próximos a zero permite a classificação de regimes constituídos por diferentes tipos de movimento, o que significa que regiões com diferentes graus de movimento caótico podem coexistir no espaço de fases [54, 55]. Para exemplificar tal classificação, considere o caso $N = 2$. Desta forma, podemos obter regimes de movimento (a) **ordenado** ($\lambda_{1,2}^{(\omega)} \approx 0$), (b) **semi-ordenado** ($\lambda_1^{(\omega)} > 0; \lambda_2^{(\omega)} \approx 0$) e (c) **caótico** ($\lambda_{1,2}^{(\omega)} > 0$).

A metodologia que utilizaremos propõe uma nova abordagem para classificar os regimes, incluindo um **limiar** para o valor de $\lambda_i^{(\omega)}$ que definirá em qual regime a trajetória se encontra. Para um sistema com N graus de liberdade, dizemos que uma trajetória está em um regime do tipo S_M quando ela possui M ELLs $\lambda_i^{(\omega)} > \varepsilon_i$, sendo ε_i um limiar ou “valor de corte” (“*threshold*”). Isto significa que S_0 e S_N são regimes de movimento ordenado e caótico, respectivamente. Para implementações práticas, valores da ordem de $\varepsilon_i \approx 0.10 \langle \lambda_i^{(\omega)} \rangle$ se mostraram adequados para tal procedimento. Em outras palavras, calcula-se uma amostra de valores $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$, obtêm-se a média deste espectro e então determina-se o valor do limiar a ser utilizado, que corresponde a aproximadamente 10% deste valor médio. Torna-se relevante executar este procedimento sempre que altera-se o número N de mapas acoplados, pois esta alteração influencia no valor dos ELTFs.

É importante ressaltar que este método considera apenas a parte positiva do espectro de ELLs composta por N valores, o que é perfeitamente aceitável devido ao caráter simplético de sistemas Hamiltonianos, como abordado na Seção 2.3. Portanto, classificamos os regimes de acordo com o método proposto da seguinte forma:

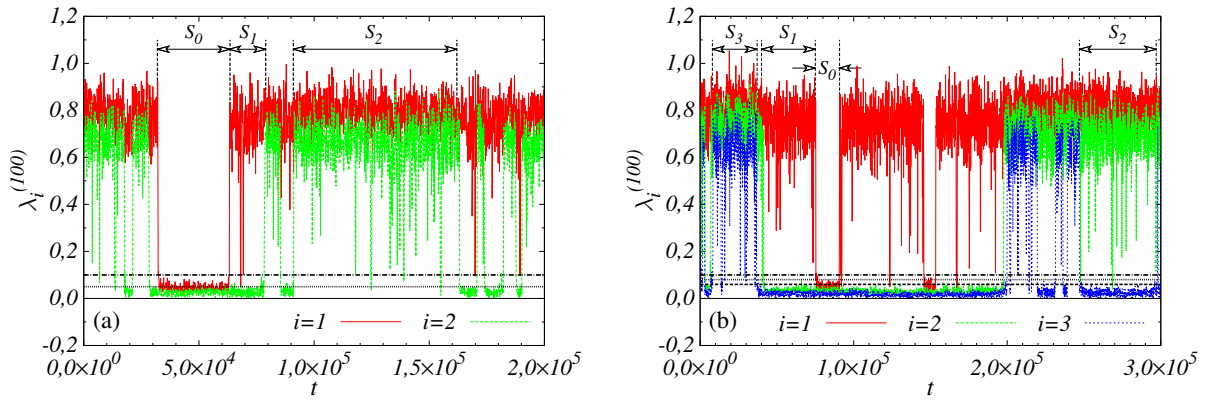


Figura 4.1 – Ilustração do método proposto para definição dos regimes S_M a partir das séries temporais do espectro dos ELLs $\{\lambda_i^{(\omega=100)}\}$ para o sistema (4.1)-(4.2). (a) Caso $N = 2$ e os limiares $\varepsilon_1 = 0,10$ e $\varepsilon_2 = 0,05$ são representados pela linha traço-ponto e pontilhada, respectivamente. (b) Caso $N = 3$ cujos limiares $\varepsilon_1 = 0,10$, $\varepsilon_2 = 0,08$ e $\varepsilon_3 = 0,06$ são representados pelas linhas traço-ponto, pontilhada e tracejada, respectivamente.

- (i) $S_0 \rightarrow$ **ordenado**: todos os ELLs são menores que seus respectivos limiares ($\lambda_i^{(\omega)} < \varepsilon_i$). Para qualquer valor de N , o regime ordenado será representado por S_0 .
- (ii) $S_{0 < M < N} \rightarrow$ **semi-ordenado**: pelo menos um ELL $\lambda_i^{(\omega)}$ menor e pelo menos um maior que seus respectivos limiares ε_i . Isso significa que no caso de $N = 2$ existe apenas um regime semi-ordenado (S_1), enquanto no caso $N = 3$ existem dois (S_1 e S_2).
- (iii) $S_N \rightarrow$ **caótico**: todos os ELLs maiores que seus respectivos limiares ($\lambda_i^{(\omega)} > \varepsilon_i$). No caso $N = 2$ o regime caótico corresponde a S_2 , enquanto que no caso $N = 3$ corresponde a S_3 .

Para obtenção dos ELLs, utilizamos o algoritmo desenvolvido por Benettin *et al.* [8] e implementado por Wolf *et al.* [9], abordado na Seção 2.3. Uma importante informação diz respeito ao procedimento numérico adotado para calcular o espectro de ELLs $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$. Tal procedimento consiste em utilizar uma única trajetória, o que significa que uma única condição inicial foi escolhida para o sistema não-linear e também para o espaço tangente. Desta forma, após ω iterações, apenas os valores dos ELLs são zerados, sendo que a trajetória continua sendo a mesma. Tal metodologia é bastante diferente daquela que calcula os ELTFs para trajetórias de comprimento total $t_L = \omega$ pois, neste caso, uma nova condição inicial é escolhida após ω iterações tanto para o sistema não-linear como também para o espaço tangente. Sendo assim, durante as primeiras iterações da nova trajetória, os vetores que correspondem aos $2N$ eixos ortogonais do sistema ainda não estão corretamente alinhados de acordo com as direções mais instáveis, o que é evitado pelo método utilizado neste trabalho.

4.3 Resultados numéricos

Nesta Seção apresentamos os resultados obtidos ao aplicar a metodologia descrita na Seção anterior ao sistema de dimensão $2N$, representado pelas Eqs. (4.1)-(4.2). Primeiramente identificamos as regiões do espaço de fases associadas a cada regime S_M e, na sequência, determinamos quatro quantidades relevantes do método: o tempo total gasto pela trajetória em cada regime, que denominamos **tempo de residência**, as **probabilidades de transições** entre diferentes regimes, a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ do tempo consecutivo τ_M que a trajetória permaneceu em cada regime S_M e por fim, a dependência sensível dos ELTFs ao acoplamento, conhecida como **Relação de Daido**.

4.3.1 Identificando as regiões do espaço de fases

Afim de compreender as propriedades das séries temporais dos ELLs $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$, é importante considerar as regiões do espaço de fases associadas a cada regime S_M definido na seção anterior. Seja Γ o espaço de fases limitado tal que sua **medida natural** ou simplesmente **medida** seja $\mu(\Gamma) \equiv 1$. Entende-se por medida natural ou medida de Liouville como sendo a probabilidade de encontrar a trajetória em um volume $d\Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ do espaço de fases com coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ no instante n [32]. Denotaremos por $\mu(A)$ a medida da região A , sendo que a mais importante distinção a ser feita é entre regiões de movimento regular (quase-regular) e caótico, representadas por Γ_{regular} e $\Gamma_{\text{caótico}}$, respectivamente.

Como citado anteriormente, em sistemas Hamiltonianos com espaço de fases dividido, temos que $\mu(\Gamma_{\text{regular}}) > 0$ e $\mu(\Gamma_{\text{caótico}}) > 0$. A princípio, a região regular pode ser subdividida de acordo com a dimensionalidade dos toros KAM. No entanto, de acordo com a conjectura de Froeschlé, se existirem toros em um espaço de fases $2N$ -dimensional, estas estruturas obrigatoriamente tem dimensão N e, portanto, são responsáveis pelo movimento regular. Desta forma, é válida a relação $\mu(\Gamma_{\text{regular}}) = \mu(\Gamma_{\text{toro}})$ [46]. Além disso, o acoplamento de dois mapas padrão é equivalente a um fluxo Hamiltoniano com três graus de liberdade, o que permite a ocorrência da difusão de Arnold, como discutido na introdução deste Capítulo. Portanto, neste caso, espera-se que a região caótica seja formada por apenas uma componente para casos com $N \geq 2$, e que as trajetórias caóticas explorem, via difusão de Arnold, toda a região $\Gamma_{\text{caótico}}$.

Não temos como objetivo, nesta dissertação, testar a conjectura de Froeschlé ou investigar a ocorrência da difusão de Arnold, mas sim estudar algumas características da dinâmica caótica usando as séries temporais do espectro de Lyapunov $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ e a definição dos regimes S_M . Uma importante aplicação dos regimes S_M consiste na separação da componente caótica do espaço de fases $\Gamma_{\text{caótico}}$ em mais componentes que tenham algum significado físico. Para isso, considere o conjunto de pontos $\mathbf{X}_M$ do espaço de fases que

pertencem a cada regime S_M e que são definidos por

$$\mathbf{X}_M = \lim_{t_L \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n (\mathbf{x}_n \in S_M), \quad (4.3)$$

sendo que t_L é o comprimento total da trajetória, e $\mathbf{x}_n \in S_M$ indica que no tempo n a trajetória $\mathbf{x}_n$ possui o espectro de ELLs $\{\lambda_i^{(\omega)}\} \in S_M$.

A Figura 4.2 mostra as regiões do espaço de fases associadas a cada regime S_M para o sistema (4.1)-(4.2), sendo que o caso (a) corresponde ao espaço de fases de um único mapa padrão cujo parâmetro de não-linearidade é $K = 3,2760$. Em outras palavras, trata-se do mapa $M^{(1)}$ com acoplamento nulo. Neste caso, é possível ver que o espaço de fases é formado por um toro central Γ_{toro} cercado pela camada caótica $\Gamma_{\text{caótico}}$, caracterizada por uma distribuição aleatória de pontos. Esta ilustração foi construída a partir de 10^2 condições iniciais escolhidas aleatoriamente e iteradas 10^4 vezes. Nas Figuras 4.2(b) e (c) são apresentadas as projeções dos espaços de fases nas variáveis $(x^{(1)}, p^{(1)})$ para os casos de dois ($N = 2$) e três ($N = 3$) mapas acoplados, respectivamente, com acoplamento $\xi = 10^{-3}$. Para obter estas ilustrações, foi utilizada a técnica de separação de regimes analisando o valor do espectro dos ELLs em relação a seus respectivos limiares ε_i , após $\omega = 10^2$ iterações. Cada regime S_M foi identificado com uma cor que representa os pontos $\mathbf{x}_n \in S_M$, como pode ser verificado na legenda da Figura 4.2.

O regime S_0 (movimento ordenado), representado nas Figuras 4.2(b) e (c) por pontos azuis, está associado a região localizada próxima a borda do toro KAM existente no caso desacoplado (Figura 4.2(a)). Esta observação é facilmente compreendida pois regimes de movimento ordenado correspondem ao caso $\lambda_i^{(\omega)} \approx 0$ para todo $i = 1, \dots, N$, o

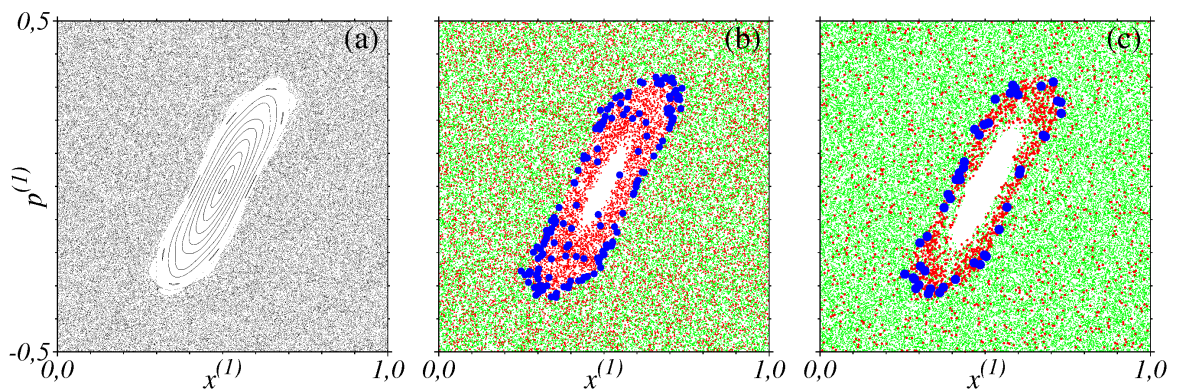


Figura 4.2 – Projeção do espaço de fases nas variáveis $(x^{(1)}, p^{(1)})$ para diferentes valores de N mapas acoplados do sistema (4.1)-(4.2). (a) Caso $N = 1$ (caso desacoplado), obtido com 10^2 condições iniciais escolhidas aleatoriamente e iteradas 10^4 vezes. (b) Caso $N = 2$ com acoplamento $\xi = 10^{-3}$. Pontos azuis, vermelhos e verdes representam os regimes S_0 , S_1 e S_2 respectivamente. (c) Caso $N = 3$ para mesmo valor de acoplamento ξ e, neste caso, os pontos azuis representam o regime S_0 , enquanto os pontos vermelhos representam os regimes S_1 e S_2 e os pontos verdes representam o regime S_3 .

que ocorre quando a trajetória encontra-se aprisionada próxima ao toro N -dimensional, resultante do produto dos toros unidimensionais existentes em cada mapa desacoplado. Portanto, podemos concluir que o regime S_0 está diretamente relacionado com o efeito *stickiness*. Os pontos vermelhos, associados aos regimes de movimento semi-ordenado (S_1 para $N = 2$ e $S_{1,2}$ para $N = 3$), podem ser encontrados em todo o espaço de fases, porém estão mais concentrados na região central na qual encontra-se o toro KAM para o caso desacoplado. Tal observação mostra que a trajetória penetra na estrutura de regularidade (ilha para o caso desacoplado) com maior facilidade quando encontra-se em regiões associadas a estes regimes, que sugerem que pelo menos um ELL $\lambda_i \gg 0$ e pelo menos um $\lambda_i \approx 0$. Sendo assim, a trajetória projetada no mapa pode estar tanto em uma região caótica como em uma região regular. Os pontos verdes, associados aos regimes de movimento caótico, são encontrados na camada estocástica do espaço de fases, como era esperado. Portanto, estas observações confirmam que o método utilizado permite dar um sentido mais completo as componentes obtidas a partir da associação das regiões do espaço de fases a regimes de movimento ordenado, semi-ordenado e caótico, sendo que podemos analisá-las individualmente dependendo do interesse em questão, como mostraremos nas próximas Seções.

4.3.2 Tempo de residência em cada regime

Após identificar as regiões do espaço de fases que encontram-se associadas a cada regime S_M , aplicamos o método afim de obter algumas quantidades importantes para caracterizar o efeito *stickiness* em sistemas Hamiltonianos com mais de um grau de liberdade. A primeira delas é a probabilidade $P(S_M)$ de encontrar a trajetória em cada regime S_M , que é equivalente ao tempo normalizado que a trajetória permanece em cada regime, sendo que denominamos esta quantidade de **tempo de residência**, definida por

$$P(S_M) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{t_L} \delta_{n \in S_M}, \quad (4.4)$$

sendo que $\beta = t_L/\omega$ é o fator de normalização. O comprimento total t_L da trajetória é dividido por ω pois os regimes apenas são definidos em tempos n de iteração do mapa múltiplos de ω , nos quais ocorre a determinação dos ELLs e do regime em que a trajetória se encontra, seguindo a metodologia apresentada na Seção 4.2. Na Eq. (4.4), $\delta_{n \in S_M} = 1$ se no instante n a trajetória encontra-se no regime S_M , e $\delta_{n \in S_M} = 0$ caso contrário.

Nas Figuras 4.3(a) e (b) são apresentados os tempos de residência $P(S_M)$, usando o sistema (4.1)-(4.2), para os casos $N = 2$ e 3 , respectivamente. Estas quantidades foram obtidas em função do parâmetro de acoplamento ξ e podemos compreender o comportamento de $P(S_M)$ discutindo como as regiões do espaço de fases associadas a cada regime S_M são afetadas pelo acoplamento entre os mapas. Devido a propriedade ergódica do domínio caótico que se estende por todo o espaço de fases para sistemas de alta dimensionalidade, conforme discutido no início deste Capítulo, temos que $\mu(\Gamma) \approx \mu(\Gamma_{\text{caótico}})$.

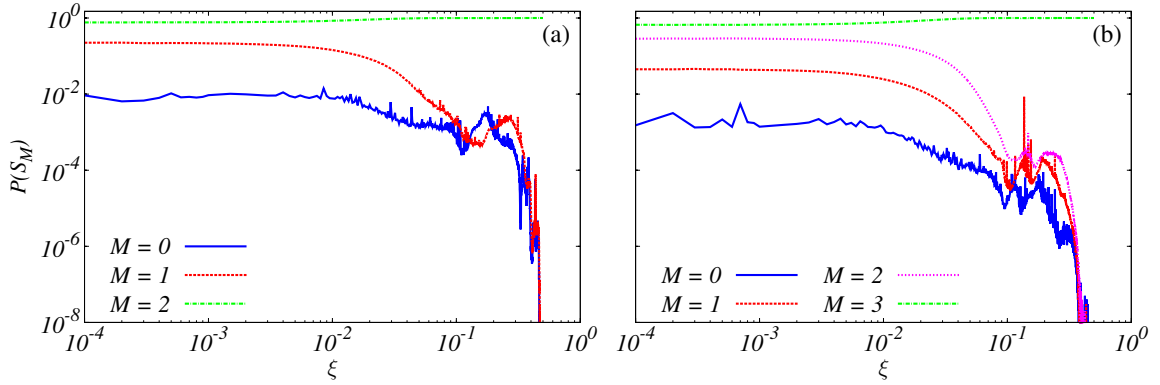


Figura 4.3 – Tempo de residência em cada regime S_M para o caso (a) $N = 2$ com $\varepsilon_1 = 0,10$ e $\varepsilon_2 = 0,05$ e (b) $N = 3$ com $\varepsilon_1 = 0,10$, $\varepsilon_2 = 0,08$ e $\varepsilon_3 = 0,06$. Os resultados apresentados para cada valor de acoplamento foram obtidos através de uma trajetória de comprimento $t_L = 10^{10}$, resultando em uma estatística de $t_L/\omega = 10^8$ dados para cada um dos 10^3 valores de ξ utilizados dentro do intervalo $\xi = [0, 0; 0, 5]$.

Portanto, $P(S_M)$ corresponde a medida normalizada da região do espaço de fases associada ao regime S_M , tal que

$$P(S_M) = \frac{\mu(S_M)}{\mu(\Gamma_{\text{caótico}})} = \frac{\mu(S_M)}{1 - \mu(\Gamma_{\text{toro}})}. \quad (4.5)$$

Sendo assim, os resultados da Figura 4.3 mostram que a região caótica (linha verde traço-ponto) é a maior região do espaço de fases para qualquer valor de acoplamento, enquanto regiões associadas aos regimes de movimento semi-ordenado possuem uma medida maior que a região associada ao regime de movimento ordenado, exceto para alguns valores específicos de acoplamento ξ .

Para compreendermos como o tempo de residência em um determinado regime S_M está relacionado com a medida da região no espaço de fases a ele associado, consideremos o caso desacoplado, $\xi = 0$. Denotaremos por $\mu(U_j)$ o volume do toro do j -ésimo mapa com parâmetro de não-linearidade K_j . Para pequenos acoplamentos $\xi \approx 0$, a maior parte dos toros do caso desacoplado sobrevivem e então a medida do toro para o sistema acoplado é

$$\mu(\Gamma_{\text{toro}}) \approx \prod_{j=1}^N \mu(U_j), \quad (4.6)$$

sendo que, se todos os toros do caso desacoplado tiverem mesmo volume $\mu(U_j) = \mu$, a Eq. (4.6) se reduz a

$$\mu(\Gamma_{\text{toro}}) \approx \mu^N.$$

A partir desta relação, podemos concluir que:

- a medida $\mu(S_{M=0})$ está relacionada com um pequeno volume ao redor da região Γ_{toro} , como visto nas Figuras 4.2(a) e (b). Isto significa que $\mu(S_{M=0}) \sim \mu(\Gamma_{\text{toro}})$, e da Eq. (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
P(S_0) &\approx \frac{\mu(S_0)}{1 - \mu(S_0)}, \\
1 - \mu(S_0) &\approx \frac{\mu(S_0)}{P(S_0)}, \\
1 &\approx \frac{\mu(S_0)}{P(S_0)} + \mu(S_0), \\
1 &\approx \frac{\mu(S_0) + P(S_0)\mu(S_0)}{P(S_0)}, \\
1 &\approx \frac{\mu(S_0)[1 + P(S_0)]}{P(S_0)}, \\
\mu(S_0) &\approx \frac{P(S_0)}{1 + P(S_0)}.
\end{aligned}$$

- No caso em que $N - M$ mapas possuem a trajetória contida em seus correspondentes toros KAM com medida $\mu(U_j)$, e M mapas possuem a trajetória imersa na componente caótica com medida $1 - \mu(U_j)$, temos que

$$\mu(S_M) \approx \sum_{j_1} \dots \sum_{j_M} \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_M\}} (1 - \mu(U_j)) \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_M\}} \mu(U_j), \quad (4.7)$$

sendo o último produtório sobre todos os mapas, $j = 1, \dots, N$, exceto quando $j \in \{j_1, \dots, j_M\}$. No caso de toros com mesma medida $\mu(U_j) = \mu$ (aproximação válida quando $K_j \approx K_{j+1}$, com $j = 1, \dots, N - 1$) a Eq. (4.7) se reduz a

$$\mu(S_M) \approx \binom{N}{M} \mu^{N-M} (1 - \mu)^M \approx \frac{N!}{M!(N - M)!} \mu^{N-M} (1 - \mu)^M, \quad (4.8)$$

que é a distribuição binomial que descreve a probabilidade de ter M mapas com a trajetória no mar caótico e $N - M$ mapas com a trajetória sobre o toro. O termo $\binom{N}{M}$ descreve o total de possíveis combinação evitando repetições.

Vamos resolver alguns exemplos para determinar a medida da região $\mu(S_M)$ para $0 < M < N$ a partir das Eqs. (4.7) e (4.8). Consideremos primeiramente o caso trivial $N = 2$ sendo que, obrigatoriamente, $M = 1$. Deste modo, temos que a trajetória encontra-se sobre o toro para um dos mapas e no mar caótico para o outro mapa. A partir da Eq. (4.7), considerando as possíveis combinações para o caso $N = 2$, obtemos

$$\mu(S_1) \approx (1 - \mu(U_1)) \cdot \mu(U_2) + (1 - \mu(U_2)) \cdot \mu(U_1),$$

$$\mu(S_1) \approx \mu(U_1) + \mu(U_2) - 2\mu(U_1) \cdot \mu(U_2).$$

Para o caso de toros com mesmo volume, temos $\mu(U_1) = \mu(U_2) = \mu$ que resulta em

$$\mu(S_1) \approx 2\mu - 2\mu^2,$$

expressão esta que pode ser obtida diretamente da Eq. (4.8), utilizando $N = 2$ e $M = 1$. Um caso mais complexo consiste em considerar $N = 3$ e $M = 2$, sendo que dois mapas possuem a trajetória no mar caótico e, em um único mapa, a trajetória está sobre o toro. Portanto, a partir da Eq. (4.7), as possíveis combinações para este caso resultam em

$$\begin{aligned} \mu(S_2) \approx & (1 - \mu(U_1)) \cdot (1 - \mu(U_2)) \cdot \mu(U_3) + \\ & (1 - \mu(U_1)) \cdot (1 - \mu(U_3)) \cdot \mu(U_2) + (1 - \mu(U_2)) \cdot (1 - \mu(U_3)) \cdot \mu(U_1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para o caso de toros com volumes iguais, obtemos da Eq. (4.8), com $N = 3$ e $M = 2$, a seguinte expressão:

$$\mu(S_2) \approx 3\mu(1 - \mu)^2 \approx 3\mu - 6\mu^2 + 3\mu^3$$

que é o mesmo resultado obtido se fizermos $\mu(U_1) = \mu(U_2) = \mu(U_3)$, a partir da Eq. (4.9). É importante ressaltar que estes resultados são válidos para o caso $\xi = 0$, sendo que aproximações podem ser feitas para pequenos valores de acoplamento.

Podemos observar alguns efeitos interessantes conforme aumentamos o parâmetro de acoplamento ξ entre os mapas. De acordo com o teorema KAM, o toro de dimensão N do caso acoplado (obtido pelo produto dos toros de dimensão 1 de cada mapa) resiste a pequenos acoplamentos ξ , que neste caso atua como uma perturbação no sistema. Aumentando o valor de ξ , a não-linearidade do sistema aumenta e portanto a medida $\mu(\Gamma_{\text{toro}})$ do toro no espaço de fases deve diminuir, sendo que $\mu(\Gamma_{\text{toro}}) \rightarrow 0$ quando $\xi \gg 0$. Esta diminuição da medida do toro conduz a um aumento do denominador $1 - \mu(\Gamma_{\text{toro}})$ da Eq. (4.5), o que explica a redução do tempo de residência $P(S_M)$ para os regimes associados ao efeito *stickiness* ($S_{M < N}$), e um aumento do regime S_N , associado a região caótica do espaço de fases. Observamos também que, para $\xi \geq 0,5$, não é mais detectada a presença do toro ou do efeito *stickiness* numericamente, e portanto $P(S_N) = 1$.

Além disso, um interessante comportamento do tempo de residência no regime de movimento ordenado ($P(S_0)$) ocorre para valores de acoplamento $0,10 \lesssim \xi \lesssim 0,20$. Analisando o caso $N = 2$ (Figura 4.3(a)), vemos um vale para $P(S_0)$ (curva azul sólida) em $\xi \approx 0,12$, que volta a crescer atingindo um pico para $\xi \approx 0,17$, antes de cair até zero. Para investigar o que acontece com a região do espaço de fases associada a este regime, na Figura 4.4 encontram-se as projeções do espaço de fases quadridimensional, do caso $N = 2$, nas variáveis $(x^{(1)}, p^{(1)})$, obtidas para diferentes valores de ξ .

Na Figura 4.4(a) temos o caso de acoplamento $\xi = 10^{-3}$, para o qual encontramos valores razoavelmente altos para $P(S_0)$ e $P(S_1)$. Nas Figuras 4.4(b) e (c) temos as projeções do espaço de fases para $\xi = 0,12$ e $\xi = 0,17$ que equivalem ao vale e ao pico que ocorrem na curva de $P(S_0)$, respectivamente. Podemos observar que estes dois casos não seguem a tendência natural de diminuição do volume das estruturas invariantes com o aumento do acoplamento, pois para $\xi = 0,17$ encontramos mais pontos azuis e vermelhos (associados aos regimes de movimento ordenado e semi-ordenado, respectivamente) do que no caso

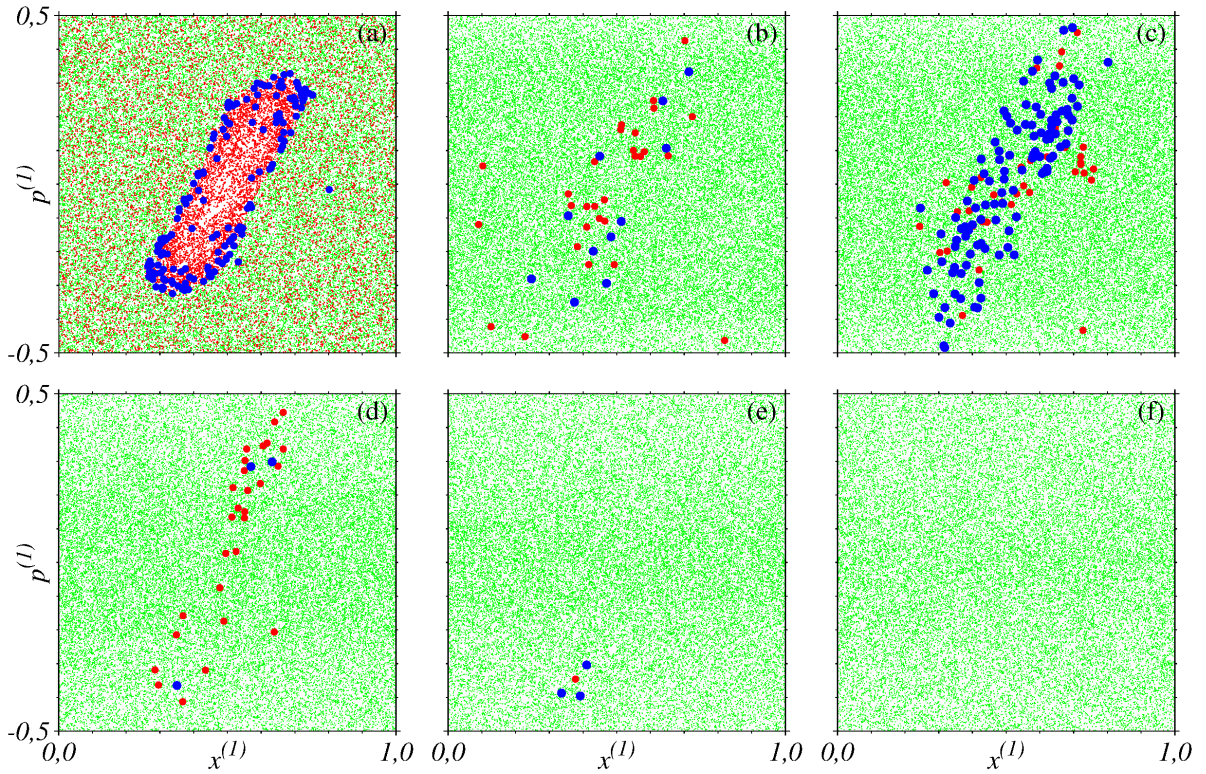


Figura 4.4 – Projeções do espaço de fases do caso $N = 2$ nas variáveis $(x^{(1)}, p^{(1)})$ para (a) $\xi = 10^{-3}$, (b) $\xi = 0, 12$, (c) $\xi = 0, 17$, (d) $\xi = 0, 32$, (e) $\xi = 0, 39$ e (f) $\xi = 0, 50$. As condições iniciais utilizadas foram $(x_0^{(1)}, p_0^{(1)}) = (0, 30, -0, 25)$ e $(x_0^{(2)}, p_0^{(2)}) = (0, 33, -0, 29)$. Os pontos azuis representam o regime S_0 , os pontos vermelhos o regime S_1 e os pontos verdes representam o regime S_2 .

$\xi = 0, 12$. A partir deste pico, o volume do toro volta a diminuir com o aumento do acoplamento, como podemos ver nas Figuras 4.4(d), (e) e (f), que correspondem aos casos $\xi = 0, 32, 0, 39$ e $0, 50$, respectivamente. Neste último caso encontramos apenas pontos verdes, e não há mais sinais de estruturas regulares.

4.3.3 Transições entre diferentes regimes

Outra quantidade relevante que o método proposto permite determinar é a probabilidade de transição entre dois diferentes regimes S_M e $S_{M'}$. Mais precisamente, estamos interessados na probabilidade $P(S_M \rightarrow S_{M'})$ que equivale a fração do tempo total t_L na qual $\mathbf{x}_n \in S_M$ e $\mathbf{x}_{n+\omega} \in S_{M'}$. Denominaremos cada transição $S_M \rightarrow S_{M'}$ de um **evento**, sendo que o número total de eventos contidos na amostragem é novamente dado pelo fator $\beta = t_L/\omega$, pelo mesmo motivo que foi exposto na Subseção 4.3.2. Esta quantidade foi obtida apenas para o caso de dois mapas acoplados, para o qual temos seis possíveis transições entre diferentes regimes: $S_0 \rightarrow S_1$, $S_1 \rightarrow S_0$, $S_0 \rightarrow S_2$, $S_2 \rightarrow S_0$, $S_1 \rightarrow S_2$ e $S_2 \rightarrow S_1$. Além disso, também foram consideradas as transições $P(S_M \rightarrow S_M)$, para $M = 0, 1$ e 2 .

A Figura 4.5(a) mostra a dependência de $P(S_M \rightarrow S_{M'})$ em relação ao acoplamento ξ para o sistema (4.1)-(4.2). A primeira importante conclusão que obtemos é que as transições $P(S_0 \rightarrow S_0)$ (curva azul traço-ponto), $P(S_1 \rightarrow S_1)$ (curva vermelha traço-ponto) e $P(S_2 \rightarrow S_2)$ (curva verde traço-ponto) são idênticas as curvas que representam os tempos de residência em cada regime, ou seja, idênticas as curvas $P(S_0)$, $P(S_1)$ e $P(S_2)$ respectivamente, que são mostradas na Figura 4.3(a). Este resultado é esperado pois uma transição $S_M \rightarrow S_M$ é equivalente ao fato da trajetória permanecer no mesmo regime S_M , sendo que a diferença entre estas duas quantidades é apenas o processo computacional utilizado para obtê-las. Além disso, ainda analisando a Figura 4.5(a), verificamos que $P(S_M \rightarrow S_{M'}) = P(S_{M'} \rightarrow S_M)$, o que é esperado já que o sistema utilizado possui as seguintes características:

- (i) **preserva o volume:** o que significa que, mantendo-se os mesmos parâmetros (ξ e K_i), não ocorrerão alterações estruturais no espaço de fases a medida que o sistema é iterado;
- (ii) **é reversível no tempo:** teremos, portanto, $P(S_M \rightarrow S_{M'}) = P(S_{M'} \rightarrow S_M)$ quando a trajetória for iterada de forma reversa no tempo.

Além dos motivos listados acima, a igualdade $P(S_M \rightarrow S_{M'}) = P(S_{M'} \rightarrow S_M)$ é esperada pelo fato de que a probabilidade total obtida pela soma de todas as possíveis probabilidades de transições também é conservada. Numericamente, para que a probabilidade total seja conservada, é necessário escolher uma condição inicial em uma região S_M e garantir que, ao final do processo de iteração do sistema, a trajetória esteja no mesmo regime S_M .

Outras informações relevantes podem ser obtidas através da **probabilidade condicional** $P_{M,M'}$, definida por

$$P_{M,M'} \equiv P(S_M \rightarrow S_{M'} | S_M) \equiv \frac{P(S_M \rightarrow S_{M'})}{P(S_M)}, \quad (4.10)$$

que quantifica a probabilidade da trajetória ser encontrada em S_M e se mover para $S_{M'}$. Mais especificamente, a probabilidade condicional é obtida pela razão entre a probabilidade de transição $P(S_M \rightarrow S_{M'})$ e o tempo de residência $P(S_M)$ no regime S_M . Os resultados obtidos da Eq. (4.10) são apresentados nas Figuras 4.5(b) até (d) para todos os regimes S_M . Observando as quantidades $P_{0,0}$ na Figura 4.5(b), $P_{1,1}$ na Figura 4.5(c) e $P_{2,2}$ na Figura 4.5(d) e comparando-as com as demais quantidades, podemos concluir que a permanência em um mesmo regime é um evento mais provável que a transição para um regime diferente. Além disso, analisando as demais quantidades nestas Figuras, podemos concluir que transições entre regimes “vizinhos” ocorrem com probabilidades maiores que as demais transições. Para exemplificar esta conclusão, vemos nas Figuras 4.5(b) e (d) que

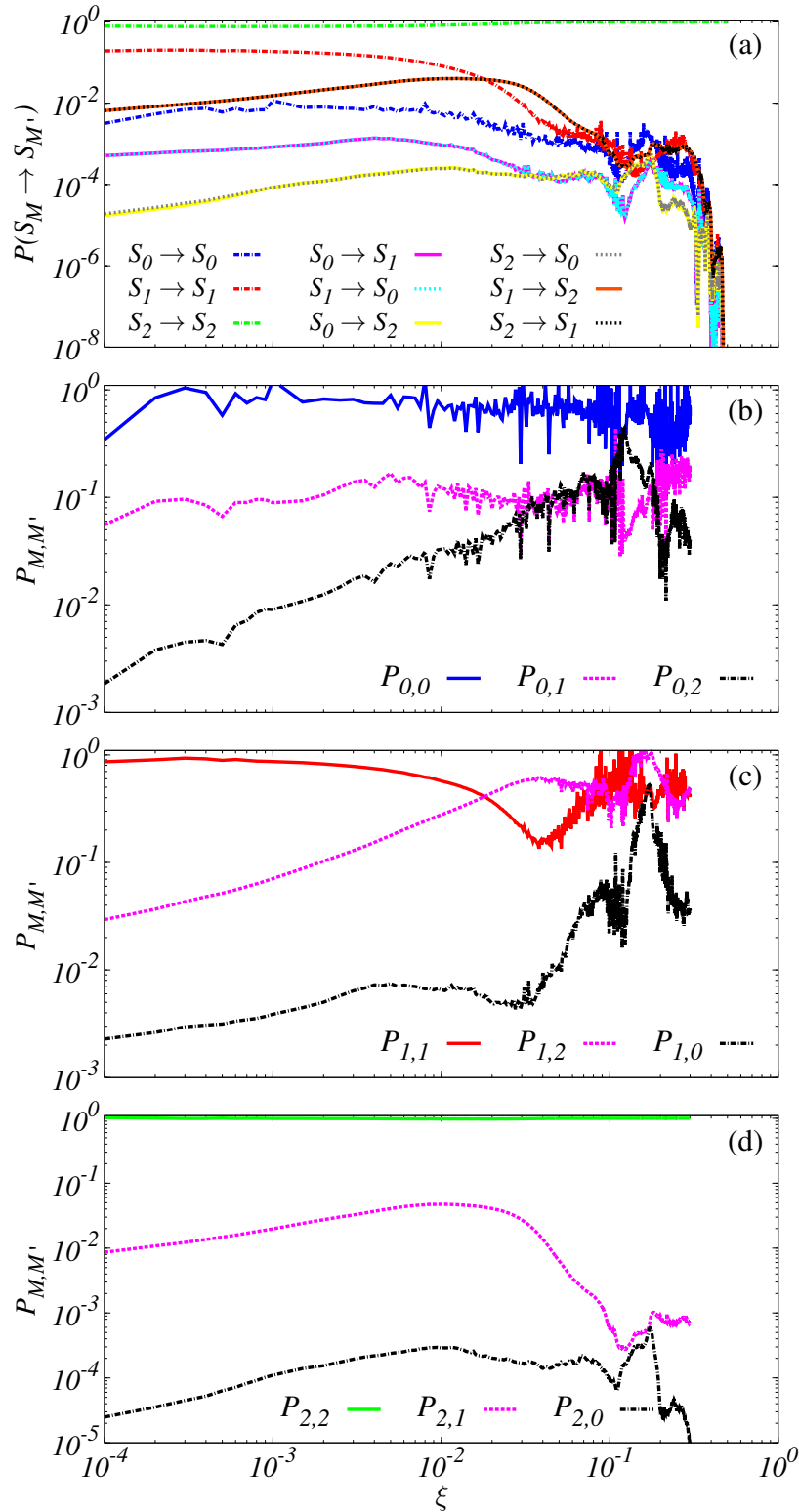


Figura 4.5 – Transições entre diferentes regimes em função do parâmetro de acoplamento ξ . (a) Probabilidade de transição $P(S_M \rightarrow S_{M'})$. (b-d) Probabilidade condicional de transição $P_{M,M'}$ definida na Eq. (4.10) da trajetória se mover para $S_{M'}$ estando em S_M . Os resultados para cada um dos 10^3 valores de ξ utilizados foram obtidos a partir de uma trajetória de $t_L = 10^{10}$ utilizando como limiares $\varepsilon_1 = 0,1$ e $\varepsilon_2 = 0,05$.

as probabilidades de transições entre os regimes $S_0 \leftrightarrow S_2$ são as que apresentam valores menores quando comparadas as probabilidades de transições entre os regimes $S_0 \leftrightarrow S_1$ ou $S_1 \leftrightarrow S_2$, sendo que o símbolo $\leftrightarrow$ indica transições em ambos os sentidos.

4.3.4 Tempo consecutivo gasto em cada regime

Como visto na Subseção 4.3.3, o tempo de residência em um mesmo regime é o comportamento predominante encontrado ao longo de uma trajetória. Esta conclusão nos motiva a investigar uma nova quantidade: o tempo τ_M gasto por uma trajetória, de forma consecutiva, em um mesmo regime S_M . Em outras palavras, τ_M equivale ao tempo entre duas transições consecutivas, a primeira para dentro do regime S_M e a segunda para fora do mesmo regime. Durante uma trajetória de comprimento t_L coletamos uma série de valores para τ_M , sendo que importantes resultados são obtidos pela análise da **distribuição cumulativa do tempo consecutivo τ_M gasto em um mesmo regime S_M** , definida por

$$P_{cum}(\tau_M) \equiv \sum_{\tau'_M=\tau_M}^{\infty} P(\tau'_M). \quad (4.11)$$

Os resultados obtidos numericamente para as distribuições cumulativas $P_{cum}(\tau_M)$ são apresentados nas Figuras 4.6(a) e (b) para os casos $N = 2$ e 3, respectivamente. Para $N = 2$, observamos as seguintes formas de decaimento para as curvas que representam as distribuições:

- (i) exponencial para a distribuição $P_{cum}(\tau_{M=2})$, representada pela curva verde pontilhada, e que está associada ao regime de movimento caótico S_2 ;
- (ii) lei de potência com expoente $\beta \approx 0,5$ seguido de um decaimento exponencial para a distribuição $P_{cum}(\tau_{M=1})$, representada pela curva vermelha tracejada, e que está associada ao regime de movimento semi-ordenado S_1 ;
- (iii) lei de potência com expoente $\gamma = 1,17$ para o comportamento assintótico da distribuição $P_{cum}(\tau_{M=0})$, representada pela curva azul sólida, e que está associada ao regime de movimento ordenado S_0 .

Para o caso $N = 3$, apresentado na Figura 4.6(b), as mesmas conclusões podem ser obtidas, porém neste caso o regime caótico é o representado por S_3 (curva verde pontilhada), e temos dois regimes semi-ordenados S_1 e S_2 , representados pelas curvas vermelha e magenta tracejadas, respectivamente. Além disso, o expoente de decaimento para o caso da distribuição $P_{cum}(\tau_{M=0})$, referente ao regime ordenado S_0 , é $\gamma = 1,10$. É importante notar que o primeiro valor para o tempo τ_M equivale a $\tau_M = 10^2$, pois a primeira análise para definir o regime no qual a trajetória se encontra ocorre somente após 10^2 iterações do sistema.

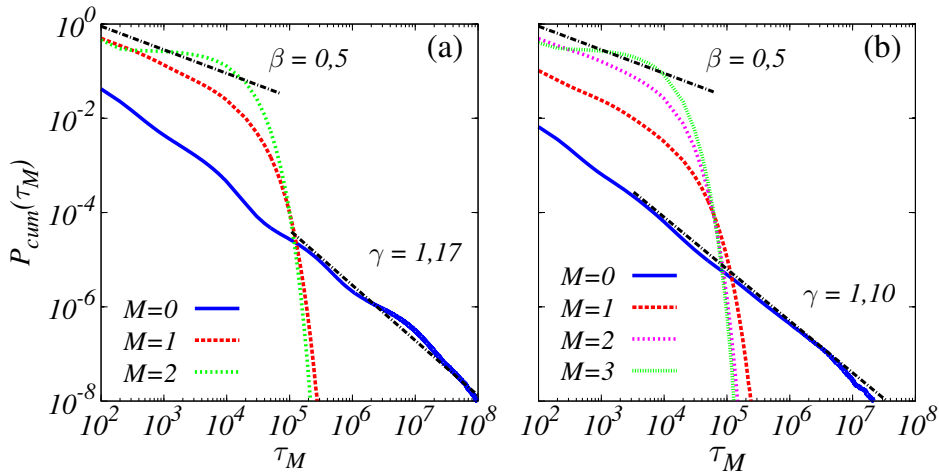


Figura 4.6 – Distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ do tempo consecutivo τ_M gasto em cada regime para os casos (a) $N = 2$ com 10^{10} valores de τ_M e (b) $N = 3$ com 5×10^9 valores de τ_M . Os resultados foram obtidos para o sistema definido pelas Eqs. (4.1)-(4.2) com $\xi = 10^{-3}$. Os limiares utilizados para definição dos regimes foram $\varepsilon_1 = 0,10$ e $\varepsilon_2 = 0,05$ para o caso $N = 2$ e $\varepsilon_1 = 0,10$, $\varepsilon_2 = 0,08$ e $\varepsilon_3 = 0,06$ para o caso $N = 3$.

A distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ pode ser comparada com a ETR, $P_{cum}(\tau)$, definida na Seção 2.4, sendo que o tempo de recorrência τ é definido como o tempo consecutivo gasto pela trajetória fora da região de recorrência, definida usualmente no domínio caótico do espaço de fases. Para definir esta região, analisamos o espaço de fases de cada mapa $M^{(j)}$, com $j = 1, \dots, N$, para o caso desacoplado $\xi = 0$. Aplicando o módulo $[x_i^{(j)}; x_f^{(j)}] \times [p_i^{(j)}; p_f^{(j)}] = [-0,5; 0,5] \times [-0,5; 0,5]$, fato este que não altera a dinâmica do sistema pois trata-se apenas da aplicação de uma diferente condição de contorno, percebemos que a camada caótica se concentra na parte central do espaço de fases, como mostra a Figura 4.7. Como esta camada é ergódica, não contendo regiões preferenciais para visitação da trajetória, podemos definir como região de recorrência a maior porção caótica contínua do espaço de fases, o que facilita computacionalmente a obtenção dos dados necessários para cálculo da ETR. Tal região equivale ao intervalo $[x_i^{(j)}; x_f^{(j)}] \times [p_i^{(j)}; p_f^{(j)}] = [-0,2; 0,2] \times [-0,5; 0,5]$, indicado na Figura 4.7 para o mapa $M^{(1)}$. Iniciando uma trajetória com condições iniciais $(x_0^{(j)}, p_0^{(j)})$ escolhidas aleatoriamente no intervalo $[-0,2; 0,2] \times [-0,5; 0,5]$, com $j = 1, \dots, N$, coletamos uma amostra de tempos

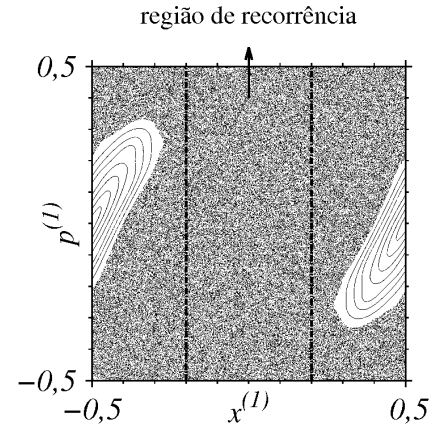


Figura 4.7 – Região de recorrência para o mapa $M^{(1)}$. A mesma região é definida para os demais mapas $M^{(j)}$, com $j = 2$ e 3 .

de recorrência τ afim de obter a ETR, que é apresentada na Figura 4.8.

A curva vermelha sólida na Figura 4.8(a) e a curva verde sólida na Figura 4.8(b) representam a ETR, $P_{cum}(\tau)$, para os casos $N = 2$ e 3 , respectivamente. Em ambos os casos observamos os seguintes comportamentos: (i) um decaimento exponencial para tempos curtos, (ii) um decaimento que segue uma lei de potência com expoente $\beta \approx 0,5$ para tempos intermediários e (iii) um decaimento que segue uma lei de potência para o comportamento assintótico a tempos longos, com expoentes $\gamma = 1,18$ para $N = 2$ e $\gamma = 1,15$ para $N = 3$. Além disso, nas Figuras 4.8(a) e (b), as curvas azuis tracejadas representam os resultados das somas das distribuições cumulativas $P_{cum}(\tau_M)$ para os regimes de movimento ordenado e semi-ordenado ($S_{M < N}$). Em outras palavras, apenas o regime de movimento caótico S_N foi desconsiderado. Podemos perceber que as curvas apresentam grandes semelhanças para os comportamentos (ii) e (iii) descritos acima.

Como apresentado na Seção 2.5, a ETR $P_{cum}(\tau)$ é uma importante ferramenta para a caracterização da dinâmica de sistemas Hamiltonianos, inclusive para casos com um considerável número de graus de liberdade. Além disso, o decaimento da curva $P_{cum}(\tau)$ na forma de uma lei de potência é um importante indicativo da existência do efeito *stickiness* no sistema. Segundo Altmann e Kantz, o decaimento que segue uma lei de potência com expoente $\beta \approx 0,5$, presente na ETR para intervalos de tempos intermediários, é devido a existência de um regime de aprisionamento gerado por trajetórias que executam uma caminhada aleatória (*random walk*) na região do espaço de fases na qual encontra-se o toro KAM do caso desacoplado [15]. Esta situação foi discutida com maiores detalhes na Subseção 4.3.1, na qual foi possível verificar que trajetórias nesta região estavam associadas

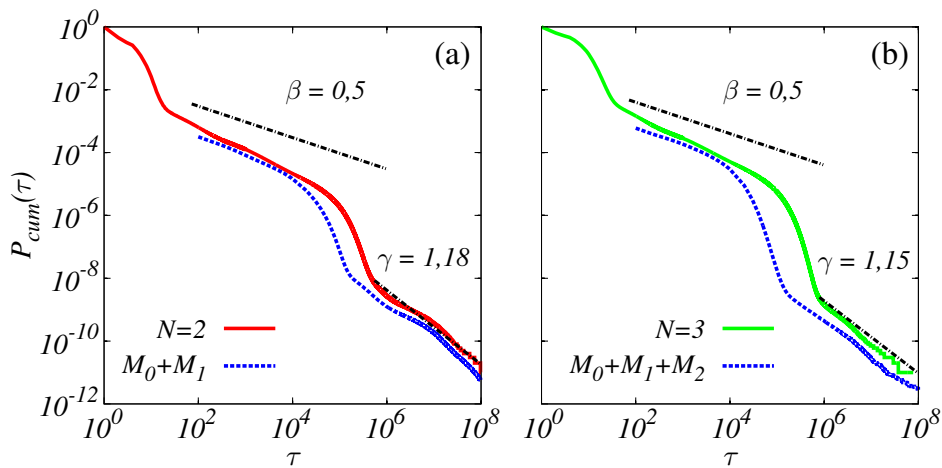


Figura 4.8 – Comparação entre a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ do tempo consecutivo gasto em cada regime $S_{M < N}$ e a ETR $P_{cum}(\tau)$ para os casos (a) $N = 2$, combinando as curvas $M_0 + M_1$ da Figura 4.6(a) e (b) $N = 3$, combinando as curvas $M_0 + M_1 + M_2$ da Figura 4.6(b). A ETR foi obtida com 10^{12} recorrência para o sistema definido pelas Eqs. (4.1)-(4.2) com $\xi = 10^{-3}$.

ao regime de movimento semi-ordenado e eram representadas pelos pontos vermelhos nas Figuras 4.2(b) e (c). A Figura 4.8 confirma esta observação, mostrando que o mesmo expoente de decaimento $\beta \approx 0,5$ obtido para a ETR $P_{cum}(\tau)$ para tempos intermediários pode ser obtido pela distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{0 < M < N})$ para o tempo consecutivo gasto nos regimes $S_{0 < M < N}$, associados ao movimento semi-ordenado.

Analisando o comportamento assintótico da ETR, obtemos o expoente de decaimento que identifica a ocorrência do efeito *stickiness* no sistema. É possível perceber na Figura 4.8 que este mesmo comportamento é reproduzido pela distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$. Se efetuarmos uma comparação entre os expoentes apresentados para os casos $N = 2$ e $N = 3$ das Figuras 4.6 e 4.8, observamos uma concordância considerável entre estes expoentes, o que indica que o método aplicado proporciona uma inédita e confiável forma de caracterização do efeito *stickiness*. Além disso, a vantagem deste método é que, com a separação da dinâmica em diferentes tipos de regimes, torna-se possível analisar apenas a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ do tempo consecutivo gasto no regime de movimento ordenado S_0 para obter a informação sobre a presença ou não do efeito *stickiness*. Tal procedimento é relativamente mais prático quando o número de graus de liberdade é alto, sendo que o espectro de ELLs aumenta e, conseqüentemente, o número de possíveis regimes também aumenta. Os expoentes de decaimento $\gamma = 1,18$ e $\gamma = 1,15$ obtidos para os casos $N = 2$ e 3 , respectivamente, estão de acordo com a conjectura proposta por D. Shepelyansky que afirma que, em sistemas conservativos nos quais existam estruturas de regularidade com medida não-nula, o decaimento da ETR ocorre de acordo com um expoente universal $\gamma \approx 1,3$, independente do parâmetro de não-linearidade e do número de graus de liberdade N [29].

Para analisar a eficácia do método proposto, investigamos o expoente de decaimento dos casos $N = 4$ e $N = 5$ para o sistema (4.1)-(4.2), obtendo apenas a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$. Para efetuar as simulações computacionais, utilizamos os valores de limiares que se encontram na Tabela 4.1, e que determinam em qual regime a trajetória

Tabela 4.1 – Relação de limiares utilizados para definição dos regimes para os casos de 4 e 5 mapas acoplados.

Limiar	$N = 4$	$N = 5$
ε_1	0,10	0,10
ε_2	0,08	0,08
ε_3	0,06	0,07
ε_4	0,04	0,06
ε_5	-	0,04

está, sendo que para a ocorrência do regime S_0 é necessário que todos os ELLs $\lambda_i^{(\omega)}$ sejam menores que seus respectivos limiares ε_i .

Na Figura 4.9, apresentamos os resultados para a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ para $N = 2, 3, 4$ e 5 . Além dos parâmetros K_1, K_2 e K_3 já descritos na Seção 4.1, foram utilizados também $K_4 = K_5 = 3,2760$ para os mapas $M^{(4)}$ e $M^{(5)}$. É possível verificar a concordância dos resultados com a conjectura de Shepelyansky, já que todas as curvas apresentam aproximadamente o mesmo expoente de decaimento ($\gamma \approx 1,20$), independente do valor de N .

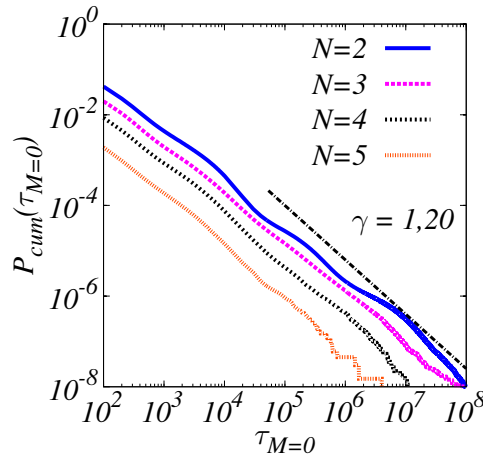


Figura 4.9 – Distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ do tempo consecutivo gasto no regime S_0 para $N = 2, 3, 4$ e 5 .

Uma questão importante discutida brevemente na Seção 4.2 se refere a escolha do valor da janela temporal ω . Todos os resultados apresentados até aqui foram obtidos utilizando $\omega = 10^2$, porém é importante verificar a robustez do método quando altera-se este parâmetro. Para tal finalidade, obtemos a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ usando diferentes valores para ω , comprovando assim que esta escolha não altera o expoente de decaimento γ , responsável pela identificação do efeito *stickiness* no sistema. Os resultados foram obtidos para janelas temporais $\omega = 50, 100$ e 500 , utilizando o sistema (4.1)-(4.2) para o caso $N = 2$, e os resultados são apresentados na Figura 4.10. O caso $\omega = 100$ é representado pela curva azul sólida, sendo este o mesmo valor utilizado nas Figuras 4.6 e 4.8. Podemos verificar que, para uma janela $\omega = 50$ (curva magenta tracejada), torna-se necessário aumentar o número de valores de τ_M considerados na distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ para obter o mesmo comportamento assintótico apresentado pelos casos com ω maior. Além disso, os resultados mostram uma concordância considerável entre as curvas obtidas para $\omega = 100$ (curva azul sólida) e $\omega = 500$ (curva preta traço-ponto), o que mostra que a utilização do valor $\omega = 100$ é suficiente para dar credibilidade aos resultados obtidos, além de ser mais apropriado do ponto de vista computacional. Como a janela de iteração para obtenção dos ELLs é diferente, as curvas $P_{cum}(\tau_{M=0})$ também iniciam em

valores diferentes de $\tau_{M=0}$.

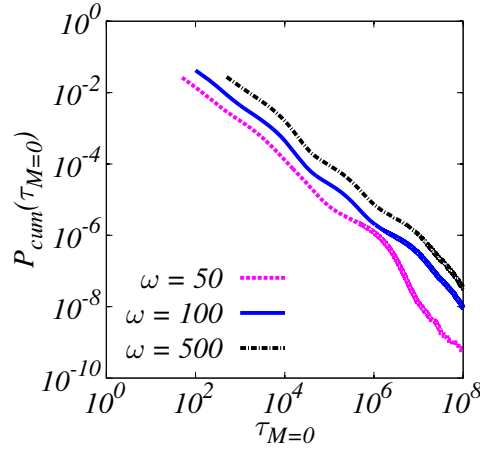


Figura 4.10 – Comparação da distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ para os tempos consecutivos gastos no regime S_0 para o caso de dois mapas acoplados e diferentes janelas de iteração dos ELLs.

4.3.5 Dependência sensível dos expoentes de Lyapunov ao acoplamento

Uma questão importante no tratamento de sistemas dinâmicos caóticos se refere a compreender como tais sistemas reagem a uma perturbação externa. Uma forma de perturbar um sistema consiste em acoplá-lo a outro idêntico, e o interesse particular deste tipo de perturbação reside na relação entre a intensidade do acoplamento e o expoente de Lyapunov, quantidade que nos dá uma noção sobre o quão caótico será o sistema como um todo. A dinâmica caótica apresentada por sistemas acoplados é um assunto de grande interesse e alguns efeitos que ocorrem com este tipo de sistemas são bem conhecidos. Para o caso de sistemas fortemente acoplados, a tendência é que ocorra o fenômeno de sincronização entre os mesmos [14]. Por outro lado, um comportamento interessante surge no limite de pequenos valores de acoplamento, conforme observado por H. Daido inicialmente para um sistema de dois mapas unidimensionais acoplados [56] e posteriormente para um sistema de dois mapas bidimensionais acoplados [57]. Por meio de simulações computacionais, Daido constatou que os expoentes de Lyapunov de mapas caóticos fracamente acoplados são fortemente dependentes do valor do acoplamento. Além disso, ele demonstrou que estes expoentes seguem uma lei de escala logarítmica quando o acoplamento do sistema tende a zero, tal que

$$\lambda - \Lambda \approx \frac{c}{|\ln(\xi)|}, \quad (4.12)$$

na qual Λ é o expoente de Lyapunov para o caso desacoplado, λ é o expoente de Lyapunov do sistema acoplado com intensidade ξ e c é uma constante. Esta lei de escala ficou conhecida como **Relação de Daido**, e é válida para sistemas completamente caóticos. Sendo assim, vamos utilizar a relação de Daido para verificar a eficácia do método utilizado nesta

dissertação em separar os diferentes tipos de dinâmica existentes no sistema composto pelas Eqs. (4.1)-(4.2), com parâmetros de não-linearidade utilizados até então. Como vimos nas Seções anteriores, este sistema apresenta um espaço de fases dividido, sendo que a presença das estruturas de regularidade influencia a dinâmica de trajetórias caóticas.

Primeiramente, para comprovar que a relação de Daido é válida para o sistema Hamiltoniano em questão, escolhemos valores para os parâmetros K_i que o tornam completamente caótico, eliminando as estruturas de regularidades existentes no espaço de fases. Para isso, escolhemos os parâmetros $K_1 = K_2 = 8,8$, sendo que o mapa padrão com este valor de K não apresenta o efeito *stickiness*, conforme constatado na Ref. [47]. O resultado é apresentado na Figura 4.11 para os dois ELTFs positivos do sistema para o caso $N = 2$. O procedimento para a obtenção desta relação foi o seguinte: para cada valor de ξ , inclusive para o caso desacoplado ($\xi = 0$), foram escolhidas 10^3 condições iniciais e cada uma delas foi iterada 10^7 vezes. Como o sistema é totalmente caótico, a convergência do valor dos ELTFs ocorre mais rapidamente, sendo que os valores obtidos são muito próximos do valor assintótico. Após este procedimento, foi obtida uma média sobre estes valores, resultando nos valores médios Λ_i e λ_i para os casos desacoplados e acoplados, respectivamente, sendo $i = 1, 2$. Na Figura 4.11 observamos que, a medida que aumentamos o valor de ξ , o valor do maior ELTF λ_1 (curva vermelha sólida) cresce, e o valor do segundo maior λ_2 (curva azul traço-ponto) diminui. No limite de $\xi \rightarrow 0$, percebemos que ambas as curvas seguem a Relação de Daido, representada pelas linhas pretas tracejadas.

O cenário é diferente quando utilizamos o mesmo sistema com parâmetros de não-linearidade $K_1 = 3,2760$ e $K_2 = 3,2094$, para os quais o efeito *stickiness* existe. Para

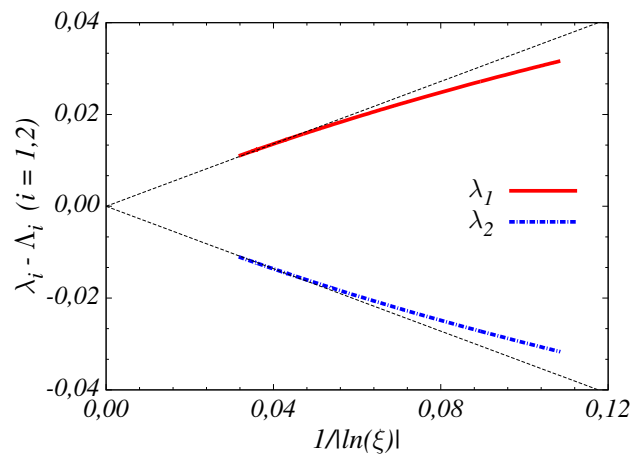


Figura 4.11 – Relação de Daido verificada para o sistema composto pelas Eqs. (4.1)-(4.2) usando $K_1 = K_2 = 8,8$, valor para o qual o efeito *stickiness* não ocorre para o mapa padrão. O intervalo de valores de acoplamento utilizado foi $\xi = [10^{-14} : 10^{-4}]$.

este caso, investigamos a validade da relação de Daido para os valores médios de Λ_i e λ_i obtidos a partir de uma amostra de 5×10^4 valores de ELLs definidos após uma janela temporal de tamanho ω ao longo de uma série temporal, e os resultados para diferentes valores de ω são apresentados na Figura 4.12. O aumento do número de condições iniciais utilizadas tem a intenção de diminuir as flutuações no valor médio dos ELLs, pois trata-se de um sistema com espaço de fases dividido cujo valor dos ELTFs são influenciados pela presença das estruturas de regularidade.

Na Figura 4.12(a) apresentamos o resultado da relação de Daido para o sistema (4.1)-(4.2) utilizando $\omega = 10^2$, sem aplicar o método de separação de regimes. Portanto, na amostra de 5×10^4 valores de ELLs, podemos encontrar qualquer configuração para espectro $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ (regime de movimento ordenado, semi-ordenado ou caótico). É possível observar neste caso uma grande flutuação para a curva que relaciona a diferença entre a média dos ELLs do caso acoplado λ_i e desacoplado Λ_i com $1/|\ln(\xi)|$, principalmente para o segundo ELL (curva azul). A Figura 4.12(b) apresenta a relação de Daido obtida após a aplicação do método, sendo que apenas os valores para os ELLs pertencentes ao regime de movimento totalmente caótico S_2 foram utilizados. Como estamos utilizando uma grande variação para o valor do acoplamento ξ , não é possível fixar o valor do limiar, como feito nas Seções anteriores em que utilizamos para qualquer valor de acoplamento ξ os limiares $\varepsilon_1 = 0,10$ e $\varepsilon_2 = 0,05$ para o caso $N = 2$. Para o procedimento executado nesta Seção, os valores dos limiares utilizados para definir os regimes serão uma função do acoplamento. Definiremos dois diferentes limiares, sendo o primeiro limiar Θ_1 , equivalente a 10% do valor médio dos ELLs $\lambda_i^{(\omega)}$ obtidos após ω iterações para acoplamento ξ . O segundo trata-se de um limiar maior, afim de filtrar ainda mais os valores que pertencem ao regime S_2 , tal que definimos Θ_2 como sendo equivalente a 90% do valor médio dos ELLs $\lambda_i^{(\omega)}$ obtidos após ω iterações para acoplamento ξ . Para a determinação destes limiares, efetuamos os seguintes passos:

- (i) escolhemos uma condição inicial e iteramos o sistema $5 \times 10^4 \omega$ vezes, afim de obter 5×10^4 valores de ELLs;
- (ii) ao longo da trajetória, obtemos a média dos ELLs $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ (com $i = 1, 2$) incluindo todos os valores de ELLs (sem separação de regimes);
- (iii) calculamos os limiares $\Theta_1 = 0,10 \langle \lambda_i^{(\omega)} \rangle$ e $\Theta_2 = 0,90 \langle \lambda_i^{(\omega)} \rangle$ a partir dos valores médios dos ELLs;
- (iv) uma nova condição inicial é escolhida e iterada $5 \times 10^4 \omega$ vezes. A partir dos valores de Θ_1 e Θ_2 , será definido em qual regime S_M a trajetória está e, somente quando o espectro $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ pertencer ao regime S_2 , os ELLs serão considerados na amostra. Este procedimento é realizado até que se obtenha 5×10^4 valores de ELLs pertencentes

ao regime S_2 , já que uma trajetória apenas não é suficiente devido a existência dos demais regimes;

(v) incrementamos o valor de ξ e todo o procedimento é novamente executado.

Isto significa que o regime S_2 , obtido quando utilizamos $\lambda_i(\Theta_2)$ (ELs maiores que o limiar Θ_2), será composto por valores de ELs maiores do que o mesmo regime obtido quando utilizamos $\lambda_i(\Theta_1)$ (ELs maiores que o limiar Θ_1), sendo portanto mais “caótico” e eliminando com maior eficácia o efeito *stickiness*.

A partir dos resultados das Figuras 4.12(a) e (b) podemos perceber que para uma janela $\omega = 10^2$, os valores dos ELs para os casos acoplado λ_i e desacoplado Λ_i

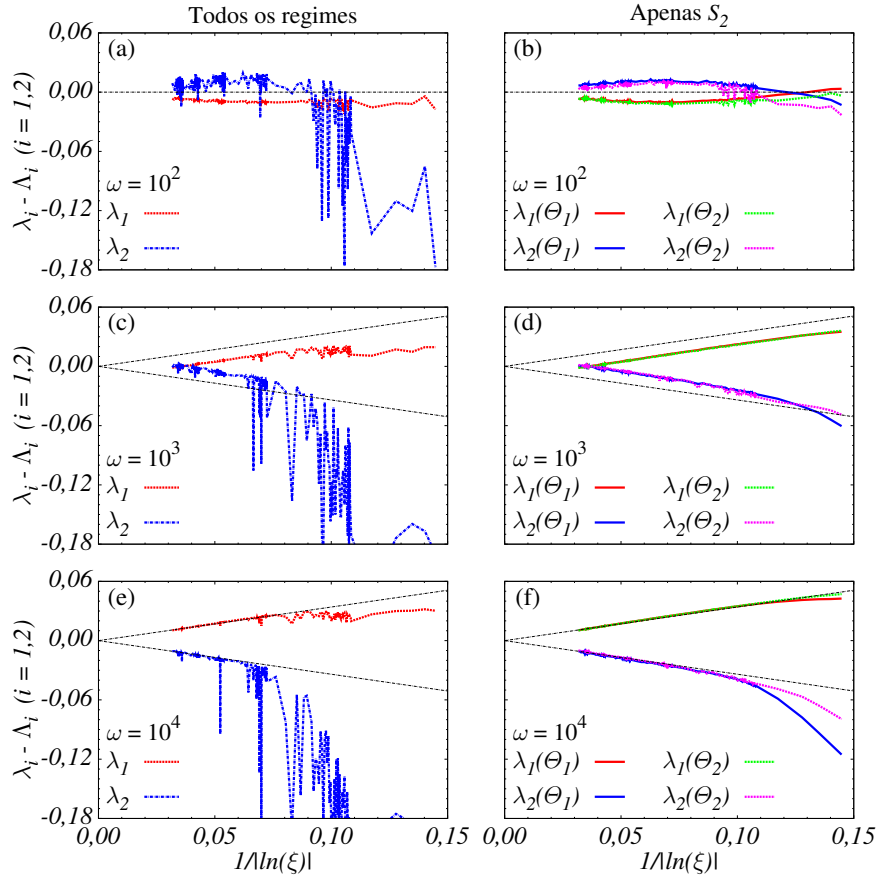


Figura 4.12 – Relação de Daido para os ELs positivos do sistema composto pelas Eqs. (4.1)-(4.2). Esta relação consiste em verificar o comportamento da diferença entre os ELs para o sistema acoplado (λ) e desacoplado (Λ) em função de $1/|\ln(\xi)|$. Os resultados são apresentados para $N = 2$, utilizando diferentes janelas de iteração ω , sendo (a)-(b) $\omega = 10^2$, (c)-(d) $\omega = 10^3$ e (e)-(f) $\omega = 10^4$. As Figuras da coluna esquerda (a,c,e) foram obtidas utilizando toda a série temporal do sistema, enquanto as Figuras da coluna direita (b,d,f) correspondem ao resultado obtido considerando apenas os ELs pertencentes ao regime S_2 . As cores diferentes correspondem aos valores de limiares utilizados, tal que $\Theta_1 = 0, 10\langle\lambda_i\rangle$ e $\Theta_2 = 0, 90\langle\lambda_i\rangle$.

são muito próximos e, portanto, a relação de Daido não é obedecida. No entanto, com a aplicação do método de separação de regimes, eliminamos as flutuações das curvas ao selecionar somente o regime S_2 . A medida que aumentamos o valor de ω , percebemos a concordância dos resultados com a relação descrita matematicamente pela Eq. (4.12), cujo comportamento é representado pelas linhas pretas tracejadas nas Figuras 4.12(c) até (f). Além disso, analisando as Figuras 4.12(d) e (f), observamos que a utilização do limiar Θ_2 resulta em uma aproximação maior do comportamento esperado, mostrando que é possível utilizar o método para separar a dinâmica caótica das demais.

4.4 Conclusões parciais

Com a aplicação da metodologia descrita neste Capítulo em um sistema de mapas acoplados, cujo conjunto de parâmetros resulta em um espaço de fases dividido constituído por estruturas de regularidade e domínios caóticos, concluímos que é possível definir regimes de movimento ordenado, semi-ordenado e totalmente caótico analisando as séries temporais de ELTFs. Este procedimento permite extrair um tipo de dinâmica específico, como por exemplo o regime de movimento ordenado S_0 , responsável pela caracterização do efeito *stickiness* presente no sistema. Com os resultados apresentados na Subseção 4.3.4, podemos concluir que é possível estimar o expoente de decaimento da ETR e, consequentemente, verificar a influência do efeito *stickiness* na dinâmica de sistemas de alta dimensionalidade, analisando somente a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_{M=0})$ do tempo consecutivo gasto no regime S_0 , sem a necessidade de analisar o que ocorre com os demais regimes. Por outro lado, pode haver um interesse particular em separar a dinâmica totalmente caótica, representada pelo regime S_N . A possibilidade desta separação foi comprovada na Subseção 4.3.5, na qual eliminamos os regimes associados ao efeito *stickiness* para obter, de forma qualitativa, a relação de Daido, válida somente para sistemas caóticos [56, 57]. Além disso, como mostrado nas Subseções 4.3.2 e 4.3.3, concluímos que as probabilidades de transições entre diferentes regimes e o tempo de residência em cada regime são proporcionais ao volume ocupado pelas regiões associadas a cada um deles.

Capítulo 5

Efeito *stickiness* em um mapa ação-ação-ângulo

Uma importante classe de sistemas conservativos tridimensionais são os sistemas conhecidos como ação-ação-ângulo. Estes sistemas são especialmente úteis no estudo da dinâmica de fluidos e de campos magnéticos, assim como na simulação do transporte de partículas em fluxos [16, 18]. Mapas ação-ação-ângulo podem ser obtidos como um mapa de Poincaré de fluxos tridimensionais periódicos no tempo e o estudo da dinâmica destes mapas é de grande interesse por não possuírem mais uma estrutura simplética característica de sistemas Hamiltonianos. No entanto, um mapa ação-ação-ângulo tem como característica a conservação do volume do espaço de fases e, portanto, encaixa-se na classe de sistemas conservativos. Além disso, possuem uma dinâmica muito diferente de sistemas simpléticos ação-ângulo, já que nenhuma superfície invariante bidimensional resiste a altos valores de perturbação imposta ao sistema inicialmente integrável, o que sugere a possibilidade de **transporte global**. Com isso, trajetórias originadas de diferentes condições iniciais podem ocupar grande parte do espaço de fases mesmo no caso do mapa ser quase-integrável [16].

Neste capítulo, propomos a investigação do efeito *stickiness* para um mapa ação-ação-ângulo obtido por meio da adição de uma variável ação z (dimensão extra) ao mapa padrão, resultando em um sistema tridimensional cujo espaço de fases possui mesma dimensão. Para o estudo deste sistema, escolhemos o parâmetro de não-linearidade $K_1 = 2,6$ para o mapa padrão, que dá origem a um espaço de fases dividido, com ilhas de regularidade imersas no mar caótico. Além disso, o valor do parâmetro de não-linearidade K_2 da dimensão extra será escolhido conforme o tipo de dinâmica que deseja-se acoplar ao mapa padrão, podendo ser uma dinâmica totalmente regular, mista ou totalmente caótica. O objetivo deste estudo é verificar a influência do parâmetro K_2 , que determina a dinâmica da variável extra, e também a influência da intensidade do acoplamento δ entre o mapa padrão e z .

O modelo utilizado será apresentado na Seção 5.1 e os principais resultados encontram-se detalhados na Seção 5.2. A investigação deste sistema foi feita através da ETR, da utilização da técnica desenvolvida no Capítulo anterior que propõe a separação de regimes, e através da análise do espaço de fases. Por fim, a Seção 5.3 apresenta as principais conclusões obtidas.

5.1 O modelo

O mapa ação-ação-ângulo investigado neste Capítulo foi proposto por Z. Levnajić e I. Mezić [16], e é obtido acoplando a variável ação z ao mapa padrão dado pela Eq. (3.13), adicionando portanto uma dimensão extra a este sistema. O novo sistema tridimensional resultante é descrito matematicamente pela expressão

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{cases} p_{n+1} = p_n + \frac{K_1}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \frac{\delta}{2\pi} \sin(2\pi z_n) \quad [\text{mod } 1], \\ z_{n+1} = z_n + \frac{K_2}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad [\text{mod } 1], \\ x_{n+1} = x_n + p_n + \frac{K_1}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \frac{\delta}{2\pi} \sin(2\pi z_n) \quad [\text{mod } 1], \end{cases} \quad (5.1)$$

que denominaremos **Mapa Padrão Modificado** (MPM). No Apêndice A apresentamos a prova matemática de que o MPM consiste em um sistema conservativo. Na Eq. (5.1), K_1 corresponde ao parâmetro de não-linearidade da dinâmica descrita pelo par de variáveis canônicas x e p , que compõem o mapa padrão em sua forma tradicional quando o parâmetro de acoplamento δ for nulo, enquanto K_2 determina o tipo de dinâmica da variável ação z (regular, mista ou caótica), que compõe a terceira dimensão do MPM. Em outras palavras, quando $\delta = 0$, temos um sistema desacoplado, sendo que a dinâmica do mapa padrão não sofre influência da dimensão z que, neste caso, trata-se de uma variável isolada. Algumas características deste sistema como pontos fixos, existência e sobrevivência de estruturas invariantes e propriedades de transporte foram estudadas analiticamente na Ref. [16].

O objetivo deste Capítulo é investigar numericamente a influência da dimensão z na dinâmica do mapa padrão, principalmente na ocorrência do efeito *stickiness*. Como o MPM não possui uma estrutura simplética, ao estudarmos sua dinâmica esperamos encontrar comportamentos diferentes daqueles conhecidos na literatura sobre sistemas Hamiltonianos como o mapa padrão, por exemplo. Sendo assim, iniciamos a investigação deste sistema propondo o caso em que o parâmetro de não-linearidade K_1 do mapa padrão é igual ao parâmetro de não-linearidade K_2 da dimensão z , alterando somente a intensidade de acoplamento δ , com o intuito de caracterizar a influência deste parâmetro. Na sequência, o parâmetro K_1 foi mantido constante enquanto a dinâmica da dimensão z foi alterada. O valor escolhido foi $K_1 = 2,6$, que dá origem a uma dinâmica descrita em um espaço de fases no qual regiões regulares e caóticas coexistem (dinâmica mista). Um estudo sobre algumas das principais propriedades da dinâmica do mapa padrão para este parâmetro

(ou seja, $K = 2,6$ na Eq.(3.13)) foi desenvolvido por C. Manchein e M. Beims na Ref. [58]. Neste trabalho foram utilizadas propriedades de convergência dos ELTFs, mostrando que a convergência numérica do maior ELTF é distinta para um mesmo parâmetro K quando utilizadas diferentes condições iniciais, mesmo entre trajetórias quase-periódicas.

5.2 Resultados numéricos

Nesta Seção apresentamos os principais resultados obtidos na investigação do MPM, dado pela Eq. (5.1). Para isso, propomos estudar este sistema utilizando quatro valores diferentes para o parâmetro K_2 , que determina o tipo de dinâmica da variável ação z , mantendo o parâmetro K_1 do mapa padrão fixo. Além disso, também investigamos o efeito do aumento do acoplamento δ na dinâmica do MPM. As metodologias adotadas para efetuar esta investigação foram: análise da dinâmica do sistema nas projeções do espaço de fases tridimensional nos planos xp e xz , análise da ETR e da distribuição cumulativa do tempo consecutivo τ_M gasto em cada regime de movimento S_M , além da identificação das regiões do espaço de fases ocupadas pela trajetória durante cada comportamento apresentado pelas curvas da ETR.

5.2.1 Dinâmica do MPM no espaço de fases

Como visto na Seção 3.4, o parâmetro de não-linearidade K do mapa padrão define como será a estrutura do espaço de fases. O aumento do valor de K significa um aumento na perturbação do sistema, gerando a destruição das estruturas regulares. A partir da Eq. (5.1), ao utilizarmos o parâmetro $K_1 = 2,6$, obtemos um espaço de fases dividido para o mapa padrão, o que possibilita a ocorrência do efeito *stickiness*. Além disso, o parâmetro de não-linearidade K_2 da dimensão extra z será escolhido de acordo com o tipo de dinâmica que se deseja acoplar ao mapa padrão. Como não é possível apresentar uma ilustração da dinâmica da variável z isoladamente, apresentamos na Figura 5.1 os espaços de fases do mapa padrão utilizando como parâmetro de não-linearidade os valores que, posteriormente, serão adotados para descrever a dinâmica da dimensão extra, como forma de apresentar a estrutura do espaço de fases obtida com a utilização destes parâmetros.

Na Figura 5.1(a) utilizamos $K = 0,09$, resultando em uma dinâmica totalmente regular para o mapa padrão. Na Figura 5.1(b), apresentamos um caso de dinâmica mista que ocorre para $K = 2,6$ com a presença de uma grande região caótica coexistindo com ilhas de regularidade de período 1 e de período 4. Nas Figuras 5.1(c) e (d) apresentamos os espaços de fases para $K = 4,9$ e $8,8$, respectivamente, sendo que na primeira apenas uma pequena região cercada por toros invariantes sobrevive e na última observamos um espaço de fases composto somente pelo mar caótico, como garante a Ref. [47]. Estes valores serão utilizados para descrever a dinâmica da dimensão extra z , por meio do parâmetro

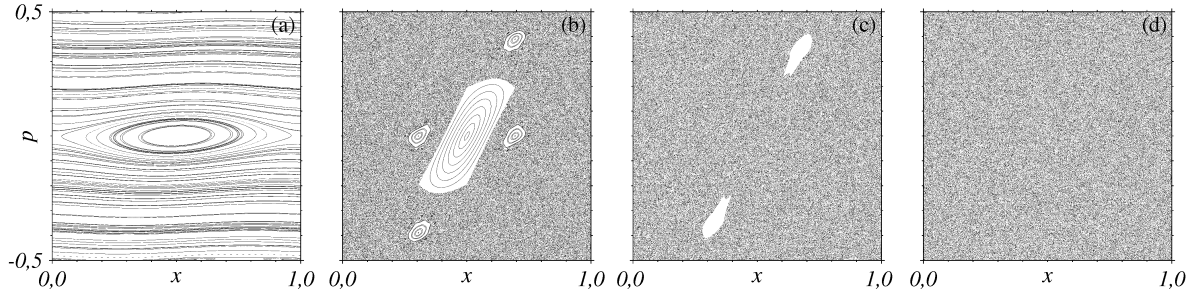


Figura 5.1 – Espaço de fases do mapa padrão, dado pela Eq. (3.13), usando (a) $K = 0,09$, (b) $K = 2,6$, (c) $K = 4,9$ e (d) $K = 8,8$. Estes valores serão utilizados para descrever a dinâmica da dimensão extra z do MPM, caracterizada pelo parâmetros K_2 na Eq. (5.1).

K_2 , sendo que o parâmetro $K_1 = 2,6$ será mantido fixo. Na sequência, apresentamos as projeções do espaço de fases tridimensional do MPM nos planos xp e xz , utilizando o conjunto de valores $K_2 = \{0,09; 2,6; 4,9; 8,8\}$, e também variando a intensidade do acoplamento δ entre o mapa padrão e a dimensão extra.

- $K_1 = K_2 = 2,6$: Neste caso, a projeção do espaço de fases tridimensional do MPM no plano xp e no plano xz são idênticas para pequenos valores de δ e, por este motivo, apresentamos apenas a projeção no plano xp . Na Figura 5.2(a) temos o caso desacoplado $\delta = 0$ e, na Figura 5.2(b), temos o caso $\delta = 10^{-6}$. Podemos observar que, para um parâmetro de acoplamento próximo de zero, a influência da dimensão extra quase não é sentida pois ambas as Figuras são muito semelhantes.

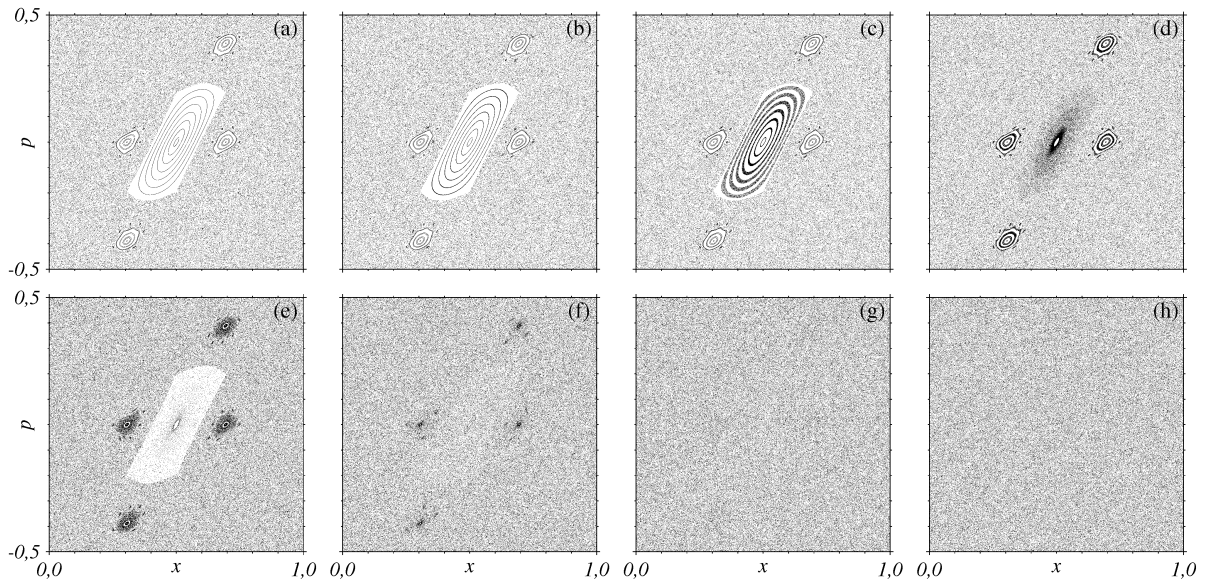


Figura 5.2 – Projeção do espaço de fases no plano xp para $K_1 = K_2 = 2,6$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

Com o gradual aumento do parâmetro δ , é possível verificar que as órbitas quase-periódicas ficam mais espessas, como mostra a Figura 5.2(c), o que é possível pelo fato de que o acoplamento atua como uma forma de perturbação do sistema. Podemos ver nas Figuras 5.2(d) a (f) que a estrutura de regularidade de período 1 é a primeira a ser destruída, sendo que para $\delta \geq 10^{-1}$ (Figuras 5.2(g) e (h)), o sistema se torna caótico. Portanto, temos uma transição da dinâmica mista (regular e caótica) para caótica devido ao incremento da intensidade do acoplamento entre o mapa padrão e a terceira dimensão, já que as condições iniciais e os parâmetros K_1 e K_2 foram os mesmos em todos os casos. Desta forma, o efeito da dimensão extra pode ser comparado com a perturbação do sistema por meio de um ruído aleatório, como apresentado na Ref. [59] para o mapa padrão e na Ref. [60] para o mapa de Hénon.

• $K_1 = 2,6$ e $K_2 = 0,09$: Uma nova configuração para a dinâmica do MPM pode ser obtida acoplando ao mapa padrão uma variável z com dinâmica regular, tal que $K_2 = 0,09$. As projeções do espaço de fases deste sistema nos planos xp e xz são apresentadas nas Figuras 5.3 e 5.4, respectivamente. Podemos notar algumas diferenças neste caso quando comparado ao anterior, apresentado na Figura 5.2. Na Figura 5.3(c) podemos perceber que o acoplamento $\delta = 10^{-5}$ ainda não é suficiente para gerar alterações na estrutura da projeção do espaço de fases, sendo que a dinâmica permanece idêntica aos casos para $\delta = 0$ e $\delta = 10^{-6}$, representados nas Figuras 5.3(a) e (b), respectivamente. As perturbações nas estruturas periódicas apenas serão sentidas para $\delta = 10^{-4}$ como mostra a Figura 5.3(d). Além disso, para uma dimensão extra regular, as estruturas de regularidade

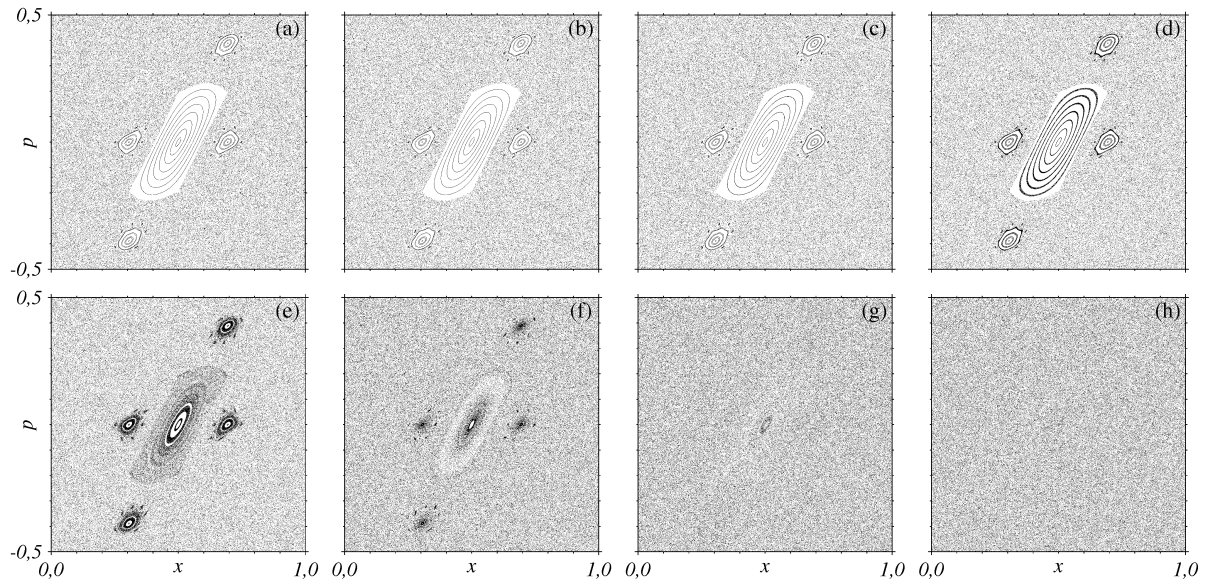


Figura 5.3 – Projeção do espaço de fases no plano xp para $K_1 = 2,6$ e $K_2 = 0,09$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

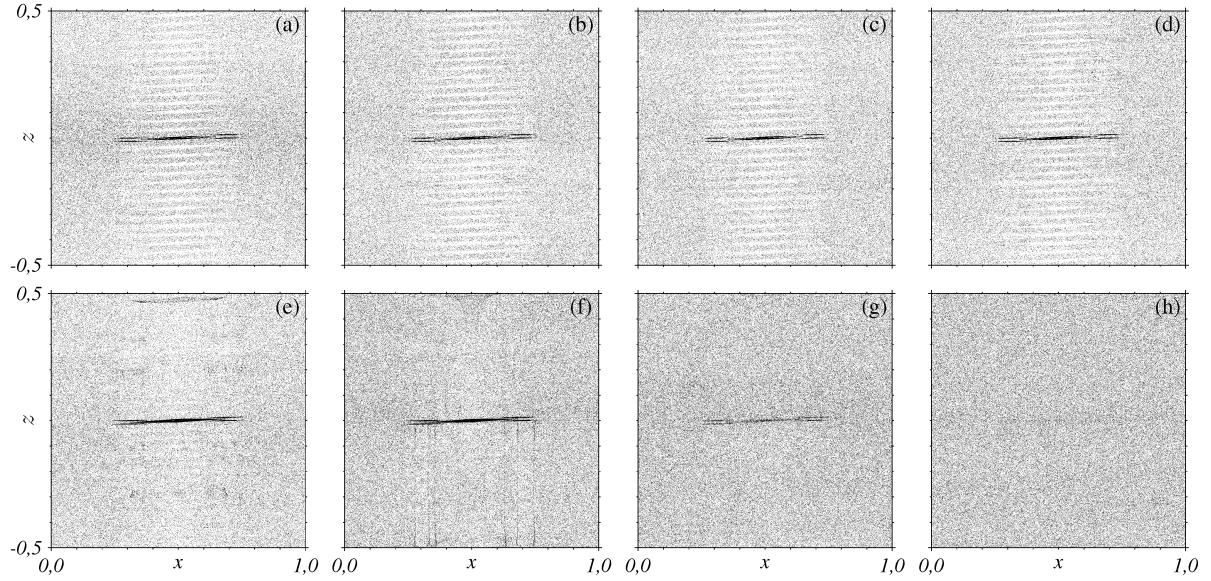


Figura 5.4 – Projecção do espaço de fases no plano xz para $K_1 = 2,6$ e $K_2 = 0,09$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

de período 4 são as primeiras a serem completamente tomadas, restando apenas parte da estrutura de período 1, como mostram as Figuras 5.3(e) até (g). O sistema se torna aparentemente caótico somente para acoplamento $\delta = 1$ (Figura 5.3(h)).

Na Figura 5.4, podemos observar a projeção do espaço de fases tridimensional do MPM no plano xz , dando origem a uma configuração totalmente diferente das anteriores. É possível encontrar uma série de estruturas de regularidade estreitas alinhadas na direção z (Figuras 5.4(a)-(d)), com uma densidade maior de pontos em $z = 0$ como consequência do fato de que as condições iniciais são escolhidas nesta região. A medida que aumentamos o valor de δ , estas estruturas deixam de existir (Figuras 5.4(f) e (g)), o que mostra que todo o espaço de fases tridimensional se torna caótico para $\delta = 1$, como mostra a Figura 5.4(h).

- $K_1 = 2,6$ e $K_2 = 4,9$: Neste caso temos que o MPM é formado por um mapa padrão com espaço de fases dividido ($K_1 = 2,6$) e uma dimensão extra z que possui uma dinâmica também mista, porém com grande predomínio da região caótica. Na Figura 5.5 são apresentadas as projeções do espaço de fases no plano xp , e vemos que um acoplamento com intensidade $\delta = 10^{-5}$ já causa o alargamento das órbitas quase-periódicas, como mostra a Figura 5.5(c), sendo que nas Figuras 5.5(a) e (b) não são percebidas alterações estruturais para os casos $\delta = 0$ e $\delta = 10^{-6}$. Na Figura 5.5(d) também torna-se evidente a presença do efeito *stickiness*, caracterizado pelas regiões com grande densidade de pontos próximas as órbitas quase-periódicas. Nas Figuras 5.5(e) e (f) vemos que, para acoplamentos da ordem de $\delta = 10^{-3}$ e $\delta = 10^{-2}$, o mar caótico invade praticamente toda a

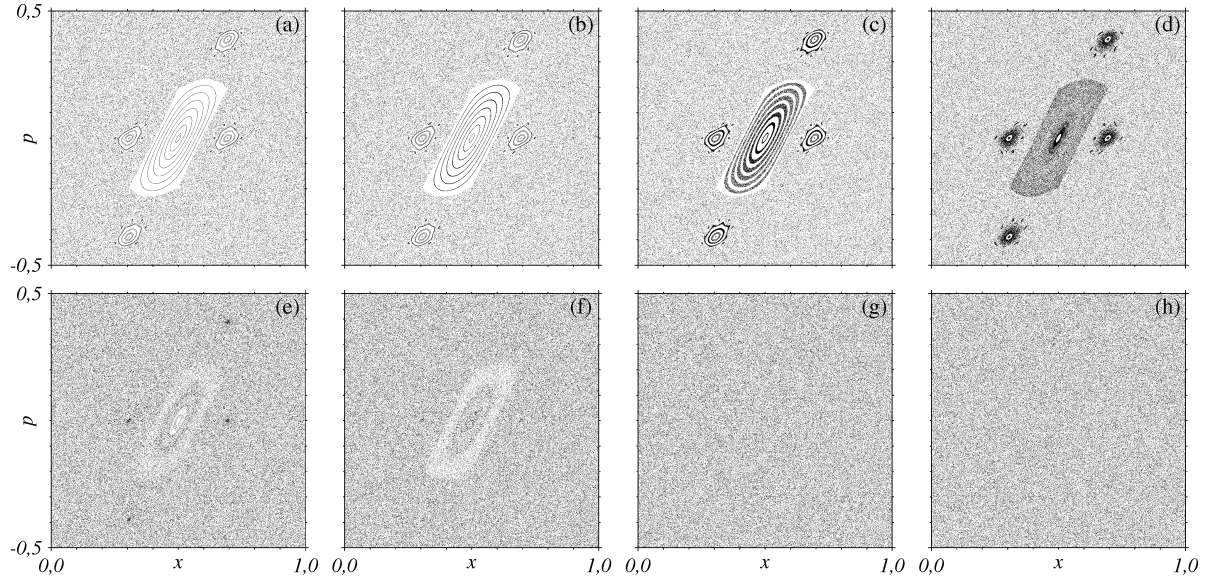


Figura 5.5 – Projeção do espaço de fases no plano xp para $K_1 = 2, 6$ e $K_2 = 4, 9$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

região que era cercada pelas estruturas invariantes no caso desacoplado, sendo que, para $\delta = 10^{-1}$, nenhuma delas permanece. Novamente podemos constatar que as estruturas de período 4 são as primeiras a serem invadidas.

Na projeção do espaço de fases no plano xz , apresentado na Figura 5.6, vemos

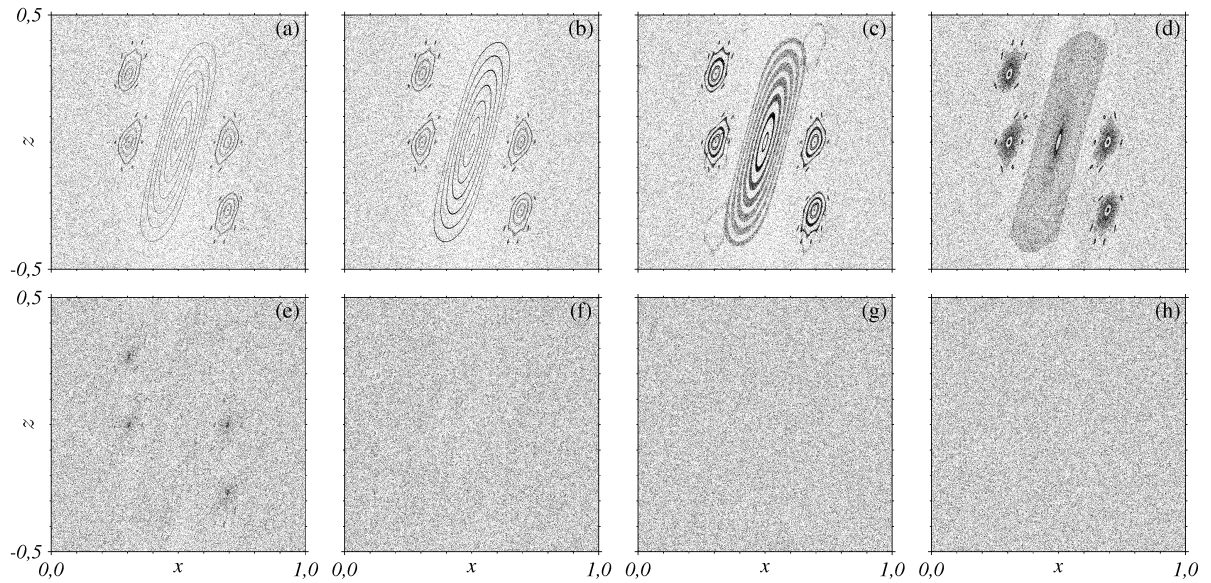


Figura 5.6 – Projeção do espaço de fases no plano xz para $K_1 = 2, 6$ e $K_2 = 4, 9$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

uma configuração parecida com a projeção xp , porém as estruturas de regularidade estão mais alongadas e também é possível verificar o aparecimento de órbitas caóticas no interior destas estruturas, mesmo para valores pequenos de acoplamento (Figuras 5.6(a)-(c)). Nesta projeção, o desaparecimento das regiões regulares ocorre para valores de acoplamento $\delta \geq 10^{-3}$, como mostram as Figuras 5.6(e) até (h).

- $K_1 = 2,6$ e $K_2 = 8,8$: Para uma dimensão extra totalmente caótica, obtida quando utilizamos $K_2 = 8,8$ é possível encontrar uma configuração bastante interessante para a dinâmica do MPM. Na Figura 5.7 vemos a projeção do espaço de fases no plano xp , e o mesmo efeito encontrado para as combinações de parâmetros anteriores também ocorre para este caso: o aumento gradativo do parâmetro de acoplamento δ faz com que as estruturas de regularidade sejam destruídas e tomadas pelo mar caótico, dando origem a uma transição da dinâmica mista para caótica que é ilustrada pela sequência de Figuras 5.7(a) até (h), cuja variação da intensidade de acoplamento foi de $\delta = 0$ até $\delta = 1$. É interessante ressaltar que, mesmo para uma dimensão extra caótica, o MPM se torna aparentemente caótico somente para $\delta = 10^{-1}$, como mostra a Figura 5.7(g). Além disso, as Figuras 5.7(c) e (d), obtidas para acoplamentos $\delta = 10^{-5}$ e $\delta = 10^{-4}$, sugerem que o aumento do parâmetro K_2 facilita o aprisionamento de trajetórias nas bordas das estruturas de regularidade, intensificando a ocorrência do efeito *stickiness*.

Na projeção do espaço de fases do MPM no plano xz , apresentado na Figura 5.8, vemos que as regiões regulares se encontram ainda mais alongadas do que no caso $K_2 = 4,9$, ocupando um período completo da variável z . Nesta projeção é possível identificar o

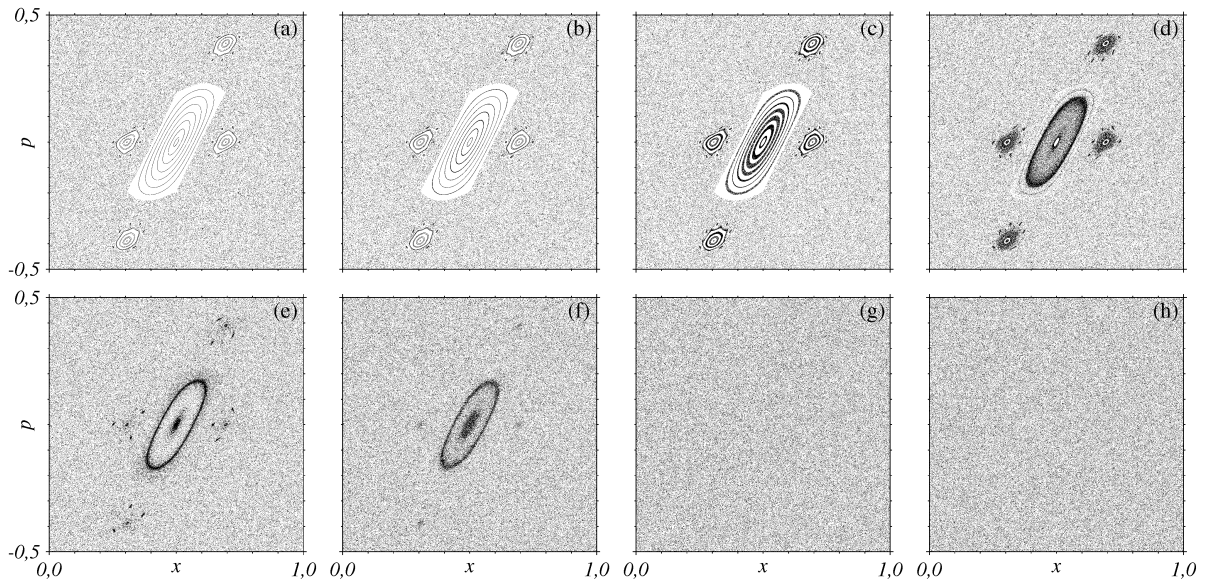


Figura 5.7 – Projeção do espaço de fases no plano xp para $K_1 = 2,6$ e $K_2 = 8,8$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

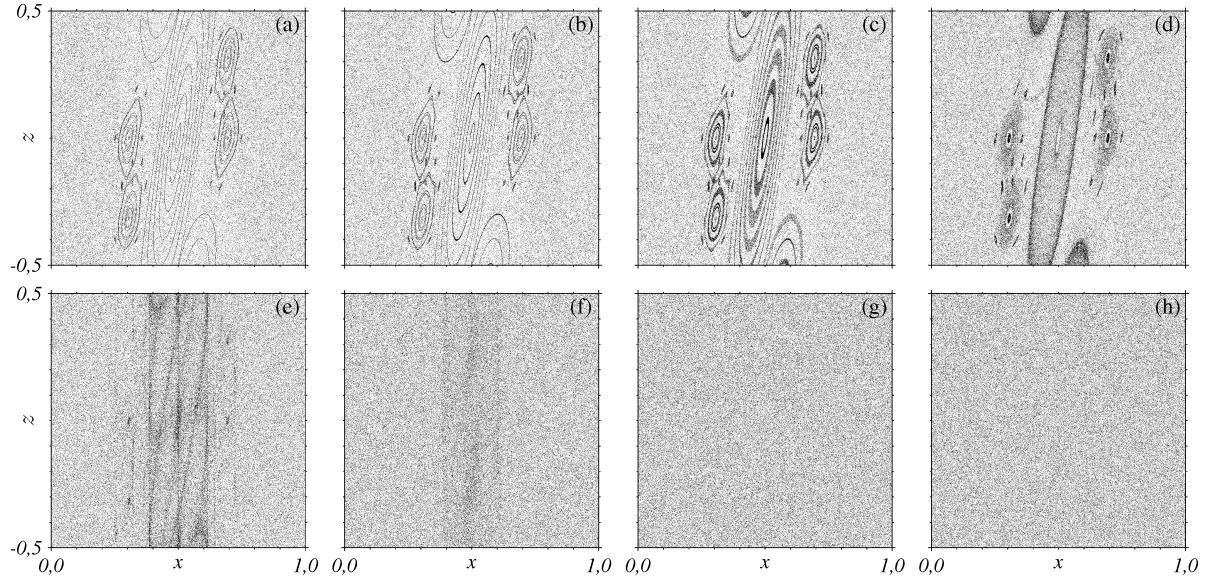


Figura 5.8 – Projeção do espaço de fases no plano xz para $K_1 = 2, 6$ e $K_2 = 8, 8$ com (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 1 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 1 \times 10^{-4}$, (e) $\delta = 1 \times 10^{-3}$, (f) $\delta = 1 \times 10^{-2}$, (g) $\delta = 1 \times 10^{-1}$, (h) $\delta = 1$. O sistema foi iterado até $n = 2 \times 10^4$ com 80 CI's espaçadas igualmente no intervalo $(x, z, p) = ([0, 1], 0, 0)$.

efeito *stickiness* ao longo da direção z , como mostram as Figuras 5.8(d) até (f). A medida que aumentamos o acoplamento δ , esse efeito deixa de ocorrer e todo o espaço de fases tridimensional do MPM se torna caótico.

5.2.2 Lei de escala para a ETR

As projeções do espaço de fases tridimensional do MPM nos planos xp e xz , apresentadas na Seção anterior, mostram que o efeito *stickiness* se faz presente neste sistema para alguns valores de acoplamento, independente do valor do parâmetro de não-linearidade K_2 . Para caracterizar este efeito, algumas quantidades foram obtidas numericamente, sendo que a primeira delas é a ETR, definida na Seção 2.4 e descrita matematicamente pela Eq. (2.63). Para delimitar a região de recorrência do MPM, consideramos apenas o plano xp , que corresponde a dinâmica do mapa padrão. Sendo assim, aplicamos o módulo $[x_i; x_f] \times [p_i; p_f] = [-0, 5; 0, 5] \times [-0, 5; 0, 5]$ às variáveis x e p e definimos a região de recorrência como sendo o maior domínio caótico da projeção do espaço de fases neste plano, que corresponde ao intervalo $[-0, 2; 0, 2] \times [-0, 5; 0, 5]$, como mostra a Figura 5.9. A dimensão extra z não foi considerada na

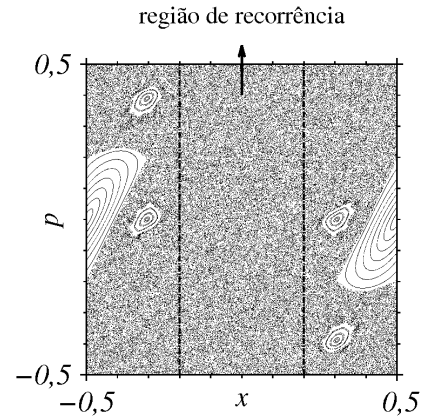


Figura 5.9 – Definição da região de recorrência para obtenção da ETR.

determinação da região de recorrência, importando apenas que a trajetória se encontre no domínio definido no plano xp .

Os resultados obtidos aplicando esta metodologia são apresentados na Figura 5.10 para diferentes valores de K_2 . Em cada Figura mostramos a ETR, $P_{cum}(\tau)$, para o mapa padrão com $K_1 = 2, 6$, que corresponde ao caso do MPM com $\delta = 0$, e é representado pela curva preta pontilhada. O comportamento apresentado por esta curva segue uma lei de potência com expoente de decaimento $\gamma \approx 1,62$, valor este que é bem conhecido na literatura [29, 61]. As demais curvas foram obtidas variando a intensidade do acoplamento δ , sendo que os valores utilizados se encontram no intervalo $\delta = [10^{-7}; 10^{-3}]$, o que permite efetuar algumas comparações entre estes resultados.

Para todos os valores de K_2 e δ utilizados podemos perceber que o primeiro tipo de comportamento apresentado pelas curvas características da ETR é equivalente ao caso desacoplado. Porém, a medida que aumentamos a intensidade do acoplamento, estas curvas alteram esta tendência inicial. Para $\delta = 10^{-7}$, representado pela curva vermelha sólida para todos os valores de K_2 estudados, o comportamento é idêntico ao caso desacoplado apenas para tempos $0 \lesssim \tau \lesssim 10^5$, sendo que após este tempo surge um **platô** que persiste até $\tau = 10^8$ quando temos uma dimensão extra regular (Figura 5.10(a)), porém que desaparece para longos tempos quando a dimensão extra é mista ou caótica (Figuras 5.10(b) até (d)). A ocorrência de um platô na curva $P_{cum}(\tau)$ significa que, para o intervalo de tempo em que ele se encontra, nenhuma recorrência ocorreu. Na Subseção 5.2.3 vamos investigar a origem destes platôs e veremos que, neste intervalo de tempo, a trajetória está aprisionada no interior de uma estrutura de regularidade existente no caso desacoplado (e que persiste no caso fracamente acoplado), não retornando para a região de recorrência.

A medida que aumentamos a intensidade do acoplamento δ , uma tendência pode ser observada para a ocorrência dos platôs: eles aparecem para tempos τ menores e persistem por um intervalo de tempo mais curto. Seguindo esta tendência, apenas para

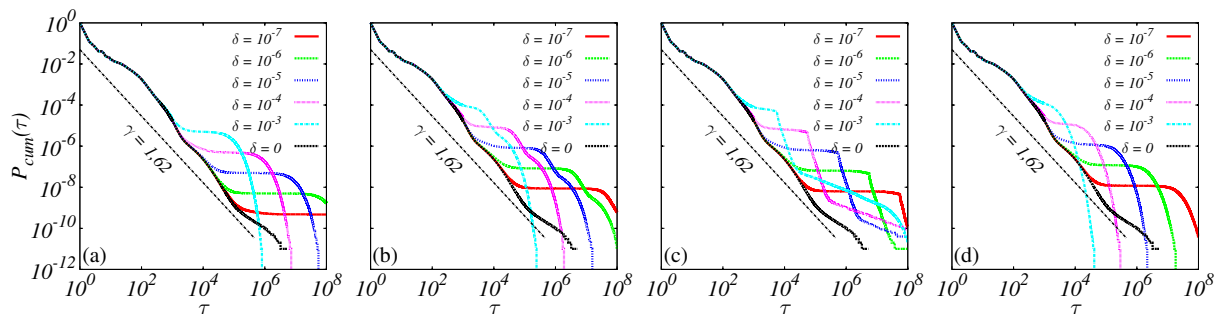


Figura 5.10 – ETR para o MPM usando $K_1 = 2, 6$ e (a) $K_2 = 0, 09$, (b) $K_2 = 2, 6$, (c) $K_2 = 4, 9$ e (d) $K_2 = 8, 8$, para valores de acoplamento δ entre 10^{-7} e 10^{-3} . Os resultados foram obtidos utilizando 10^{12} recorrências, cuja região de recorrência é definida conforme a Figura 5.9.

valores altos de acoplamento os platôs deixam de existir, o que significa que para o sistema fortemente acoplado o espaço de fases tridimensional do MPM tende a se tornar ergódico, suprimindo as QADs que existiam no espaço de fases e aprisionavam as trajetórias por longos intervalos de tempo. Para $K_2 = 0,09$, simulações computacionais mostram que os platôs não são mais encontrados para $\delta = 10^{-1}$, enquanto para os demais casos os platôs já não ocorrem mais para $\delta = 10^{-3}$, como podemos verificar nas Figuras 5.10(b) até (d). Para os casos $K_2 = 0,09, 2,6$ e $8,8$, representados pelas Figuras 5.10(a), (b) e (d) respectivamente, temos que, após os platôs, ocorre um decaimento que obedece uma função do tipo **exponencial**, tal que

$$P_{cum}(\tau) \propto e^{-b\tau}, \quad (5.2)$$

sendo b constante. Para $K_2 = 4,9$, representado pela Figura 5.10(c), temos que após o platô a ETR apresenta um decaimento na forma de uma lei de potência com expoente α e, em seguida, apresenta um novo decaimento mais suave cujo expoente é β . Também na Subseção 5.2.3 veremos que estes comportamentos apresentados após o platô estão relacionados com a difusão da trajetória para fora do plano xp , fazendo com que todo o volume do espaço de fases seja visitado.

Ainda analisando a Figura 5.10 é possível perceber que, para um dado valor de K_2 , as curvas obtidas a partir de diferentes valores de acoplamento δ apresentam o mesmo comportamento para tempos intermediários (platô) e para tempos longos (decaimento na forma de uma função exponencial ou lei de potência). Esta observação sugere que tais curvas obedecem a uma lei de escala, o que torna possível encontrar uma relação entre o tempo τ para o qual temos um comportamento característico e o parâmetro de acoplamento δ . Esta relação é apresentada na Figura 5.11, e sugere que o tempo de recorrência τ_δ e a ETR $P_{cum}(\tau_\delta)$, obtidos para um determinado valor de acoplamento δ , podem ser comparados com as mesmas quantidades ($\tau_{\delta'}$ e $P_{cum}(\tau_{\delta'})$) obtidas para um segundo valor de acoplamento δ' , tal que a relação entre elas é dada por

$$\tau_\delta = \frac{\delta'}{\delta} \tau_{\delta'}, \quad P_{cum}(\tau_\delta) = \frac{\delta}{\delta'} P_{cum}(\tau_{\delta'}). \quad (5.3)$$

As Eqs. (5.3) mostram que a dinâmica descrita pelo MPM para tempos longos, que é representada pelo comportamento assintótico da ETR, é a mesma independente do valor de acoplamento. Em outras palavras, o aumento do acoplamento δ apenas antecipa a obtenção do comportamento assintótico para o MPM caracterizado pelos parâmetros de não-linearidade K_1 e K_2 .

Na Figura 5.11, obtida aplicando a lei de escala descrita pelas Eqs. (5.3), o tempo para o qual o platô desaparece é o mesmo independente do valor de δ . Sendo assim, podemos resumir os diferentes comportamentos apresentados pelas ETRs para qualquer valor de acoplamento δ separando estas curvas nos seguintes **intervalos de tempo**:

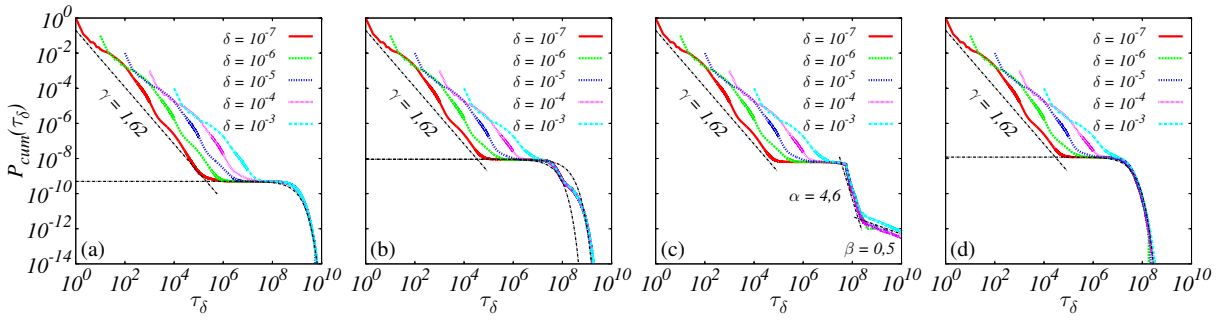


Figura 5.11 – ETR aplicando a lei de escala descrita pelas Eqs. (5.3) usando $K_1 = 2, 6$ e (a) $K_2 = 0, 09$, (b) $K_2 = 2, 6$, (c) $K_2 = 4, 9$ e (d) $K_2 = 8, 8$, para valores de acoplamento δ entre 10^{-7} e 10^{-3} . A lei de escala permite obter o mesmo comportamento assintótico para todas as curvas, independente do valor de acoplamento δ .

- R_1 : intervalo que segue um decaimento na forma de lei de potência, tal que $P_{cum}(\tau) \propto \tau^{-\gamma}$, com $\gamma = 1, 62$. Este intervalo é o único que compõe a curva obtida para o caso $\delta = 0$ (mapa padrão) e é o primeiro comportamento que surge para os demais casos;
- R_2 : intervalo caracterizado pelo platô, que diminui a medida que o acoplamento aumenta;
- R_3 : intervalo que apresenta um decaimento na forma de uma função **exponencial** $P_{cum}(\tau) \propto e^{-b\tau}$. Surge após o platô nos casos $K_2 = 0, 09$ (Figura 5.11(a)), $K_2 = 2, 6$ (Figura 5.11(b)) e $K_2 = 8, 8$ (Figura 5.11(d));
- R'_3 : intervalo que apresenta um decaimento também na forma de uma função **exponencial**. Surge após R_3 apenas no caso $K_2 = 2, 6$ (Figura 5.11(b));
- R_4 : intervalo que apresenta um decaimento na forma de uma lei de potência com $P_{cum}(\tau) \propto \tau^{-\alpha}$, sendo $\alpha = 4, 6$. Surge após uma quebra abrupta do platô, e é observado apenas para o caso $K_2 = 4, 9$ (Figura 5.11(c)). Outras simulações foram realizadas e comprovaram que este comportamento também ocorre para $K_2 \sim 4, 9$;
- R_5 : intervalo que segue uma lei de potência com $P_{cum}(\tau) \propto \tau^{-\beta}$, sendo $\beta = 0, 5$ (caminhada aleatória [42]) e ocorre para o comportamento assintótico do caso $K_2 = 4, 9$ (Figura 5.11(c)). Este caso será discutido com maiores detalhes na Subseção 5.2.3.

Além de encontrarmos estes tipos de comportamento para a ETR, podemos visualizar também uma tendência para o intervalo de ocorrência do platô $\Delta\tau$ em relação a intensidade do acoplamento δ . Para investigar esta relação, obtemos o valor de $\Delta\tau$, para todos os casos estudados, através de uma análise dos dados apresentados na Figura 5.10. A relação existente entre estes intervalos e o inverso do parâmetro de acoplamento δ é apresentada na Figura 5.12, e nos mostra que $\Delta\tau \propto (1/\delta)^{1,05}$, independente do valor de δ , o que permite concluir que este intervalo também obedece a uma lei de escala.

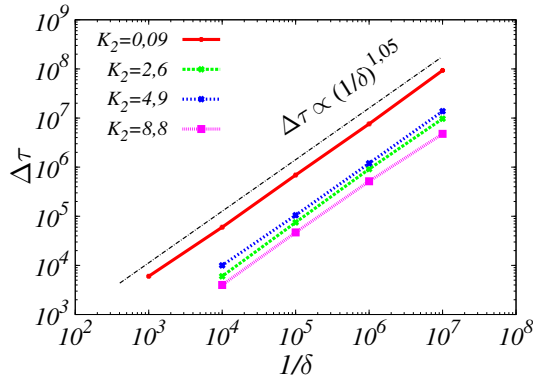


Figura 5.12 – Relação entre o intervalo de tempo para o qual ocorre o platô $\Delta\tau$ e $1/\delta$, cujo expoente 1,05 é o mesmo para qualquer valor de K_2 .

5.2.3 Efeito *stickiness* e difusão

Os diferentes comportamentos que aparecem nos intervalos de tempo introduzidos na Subseção anterior nos motivam a analisar a dinâmica do MPM, a partir do seu espaço de fases, em cada um destes intervalos. Para isso, durante a execução do procedimento numérico para obtenção das curvas $P_{cum}(\tau)$, foram guardados os valores das variáveis x , p e z que localizam a trajetória em cada um dos intervalos de tempo que desejamos estudar, sendo que os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.13. Nesta Figura encontram-se as projeções do espaço de fases do MPM no plano xp para os valores de K_2 estudados neste Capítulo e apenas para $\delta = 10^{-5}$, já que para este valor de acoplamento as curvas da ETR contêm todos os intervalos de interesse bem definidos.

Na Figura 5.13, podemos observar que a trajetória ocupa regiões distintas do espaço de fases em cada um dos diferentes intervalos de tempo que compõem a ETR, sendo que estes intervalos estão associados a diferentes cores, como mostram as Subfiguras posicionadas ao lado direito inferior. O intervalo R_1 , que corresponde ao decaimento na

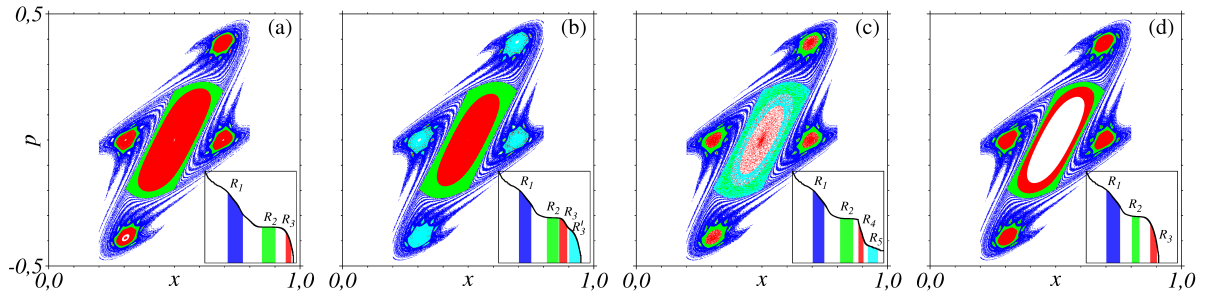


Figura 5.13 – Projeção do espaço de fases tridimensional do MPM no plano xp para $K_1 = 2,6$, $\delta = 10^{-5}$ e (a) $K_2 = 0,09$, (b) $K_2 = 2,6$, (c) $K_2 = 4,9$ e (d) $K_2 = 8,8$. As Subfiguras posicionadas ao lado direito inferior indicam os diferentes intervalos de tempo R_1 , R_2 , R_3 , R'_3 , R_4 e R_5 , sendo que a região ocupada pela trajetória em cada intervalo é representada pela mesma cor.

forma de uma lei de potência com $\gamma = 1,62$, é representado pela cor azul para todos os valores de K_2 . Podemos perceber que, para este intervalo, a trajetória ocupa regiões próximas as estruturas regulares, comprovando que o decaimento na forma de lei de potência está associado ao aprisionamento da trajetória nestas regiões. Para tempos de recorrência τ intermediários, temos a ocorrência dos platôs, que correspondem ao intervalo R_2 . Neste intervalo, a região ocupada pela trajetória é identificada pela cor verde e corresponde as bordas das estruturas regulares tanto de período 1 quanto de período 4, porém na parte interna destas estruturas. A ocupação destes domínios é possível devido ao acoplamento do mapa padrão com uma terceira dimensão pois, para o caso desacoplado que apresenta uma dinâmica descrita em um plano, a invasão das estruturas regulares é proibida. Desta forma, a trajetória permanece nesta região por longos intervalos de tempo, não retornando à região de recorrência durante este período de aprisionamento. Uma visualização mais precisa do que ocorre com a dinâmica do MPM, durante o intervalo de tempo R_2 , pode ser obtida a partir do espaço de fases tridimensional, apresentado na Figura 5.14. Podemos perceber que a região ocupada pela cor verde é limitada pelas estruturas regulares, sendo que a trajetória executa um movimento tipo espiral com a variação gradativa de z , dando origem a uma coluna verde que pode ser identificada nas Figuras 5.14(a), (c) e (d).

Após a ocorrência dos platôs, temos os decaimentos na forma de uma função exponencial que ocorrem para $K_2 = 0,09, 2,6$ e $8,8$, e são representados pelo intervalo R_3 (pontos vermelhos). Este intervalo encontra-se associado a penetração da trajetória nas estruturas de regularidade em direção ao centro das mesmas, que pode ser visualizada nas Figuras 5.13(a), (b) e (d). Apenas para o caso $K_2 = 8,8$, representado pela Figura 5.13(d), a penetração não ocorre por completo. Ao analisarmos o espaço de fases tridimensional nas Figuras 5.14(a) e (b), podemos observar que o movimento em direção ao centro das estruturas ocorre por meio da dimensão extra z , sendo que a trajetória executa novamente um movimento tipo espiral, diminuindo gradativamente o raio desta trajetória até aproximar-se do centro da estrutura, o que ocorre para os valores extremos da variável z , tal que $z = -0,5$ ou $z = 0,5$. Também é possível verificar na sequência de Figuras 5.14(a)-(c) a deformação das regiões regulares, como foi descrita na Subseção 5.2.1. Além disso, na Figura 5.14(d) podemos ver que esta deformação resulta na quebra da estrutura de regularidade de período 1, o que impede que a trajetória penetre nesta região no caso $K_2 = 8,8$. O intervalo de tempo R'_3 , que ocorre somente para o caso $K_2 = 2,6$ e também está associado a um decaimento na forma de uma função exponencial, é representado pela cor ciano. A região do espaço de fases ocupada pela trajetória neste intervalo pode ser verificada nas Figuras 5.13(b) e 5.14(b), que nos mostram que a trajetória penetra nas estruturas de período 4 até atingir o centro destes domínios.

O caso $K_2 = 4,9$ é o único que não apresenta um decaimento na forma de uma função exponencial após o platô, mas sim um decaimento que obedece a uma lei de potência

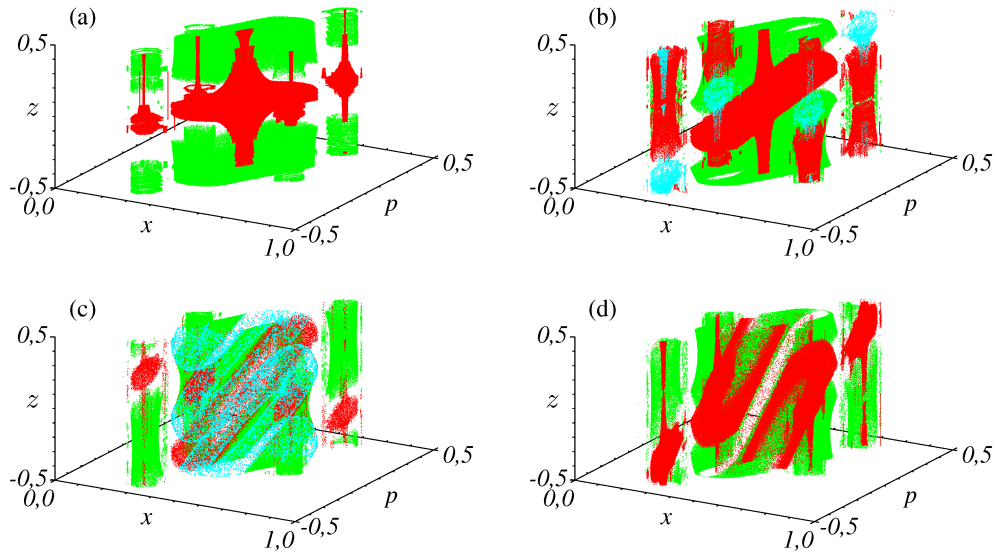


Figura 5.14 – Espaço de fases do MPM para $K_1 = 2,6$, $\delta = 10^{-5}$ e (a) $K_2 = 0,09$, (b) $K_2 = 2,6$, (c) $K_2 = 4,9$ e (d) $K_2 = 8,8$. Nesta Figura são representadas apenas as regiões ocupadas pela trajetória nos intervalos R_2 , R_3 , R'_3 , R_4 e R_5 , cujas cores que as representam são as mesmas da Figura 5.13. O intervalo R_1 foi omitido para facilitar a visualização.

com expoente $\alpha = 4,6$, que sugere a ocorrência de um processo de **superdifusão** no sistema. Este intervalo R_4 é representado pela cor vermelha na Figura 5.13(c), e também encontra-se associado a penetração das estruturas de regularidade, porém de forma diferente daquela apresentada no caso de R_3 . Para o intervalo R_4 , a trajetória difunde através da dimensão extra z executando um movimento helicoidal. No entanto, esta difusão ocorre somente pelo centro da estrutura de período 4. Ao redor destes domínios, podemos observar outras trajetórias que surgem da difusão pelo centro das estruturas de período 24, como mostra a Figura 5.14(c). O último comportamento observado, representado pelo intervalo R_5 , é obtido para tempos longos quando $K_2 = 4,9$, e está relacionado com a caminhada aleatória executada pela trajetória. No entanto, este movimento está restrito aos limites da estrutura de período 1, como podemos observar nas Figuras 5.13(c) e 5.14(c).

5.2.4 Regimes de movimento ordenado e caótico

A metodologia introduzida no Capítulo 4, que proporciona uma nova forma de caracterizar o efeito *stickiness* analisando o espectro de expoentes de Lyapunov Locais (ELL) $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ obtidos após ω iterações ao longo de uma trajetória de comprimento total t_L , pode ser aplicada ao sistema estudado neste Capítulo, definido pela Eq. (5.1), afim de obter informações mais detalhadas sobre a dinâmica deste sistema. Para isso, são necessárias algumas modificações na forma de aplicação deste método pelo fato de que o MPM não pertence a classe de sistemas Hamiltonianos, ao contrário do sistema apresentado na Seção 4.1. Por este motivo, os ELLs não aparecem aos pares, sendo que o espectro $\{\lambda_i^{(\omega)}\}$ é

formado por três ELLs. Um destes valores é nulo e os outros dois possuem mesmo módulo, porém um é positivo e outro negativo, já que trata-se de um sistema conservativo (ver Apêndice A). Desta forma, propomos analisar os regimes de movimento S_M , sendo M o número de ELLs acima do limiar ε_i , analisando apenas a série temporal do maior ELL (único positivo) $\lambda_1^{(\omega)}$, sendo que definimos o regime de movimento ordenado S_0 quando $\lambda_1^{(\omega)} < \varepsilon_1$ e o regime de movimento caótico S_1 quando $\lambda_1^{(\omega)} > \varepsilon_1$, tal que estes são os dois regimes possíveis para o MPM. Além disso, os parâmetros de controle utilizados no Capítulo 4 serão mantidos, de forma que o valor da janela de iteração para determinar o valor dos ELLs será $\omega = 10^2$ e o valor do limiar ε_1 será definido como $\varepsilon_1 = 0, 10\langle\lambda_1^{(\omega)}\rangle$.

Seguindo estes procedimentos, obtemos a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ do tempo consecutivo τ_M gasto em cada regime pela trajetória, e os resultados são apresentados na Figura 5.15 para os valores de K_2 estudados neste Capítulo, escolhendo novamente o parâmetro $\delta = 10^{-5}$. Nesta Figura, como a ETR, $P_{cum}(\tau)$, para os mesmos parâmetros também é representada para efeitos de comparação, utilizamos no eixo das abscissas o tempo de recorrência τ ao invés do tempo consecutivo gasto em cada regime τ_M , sendo que a relação entre estas duas quantidades é dada por¹ $\tau = \tau_M \cdot \omega$. Analisando a Figura 5.15, podemos verificar que o regime caótico S_1 (curva vermelha pontilhada) está conectado com o decaimento na forma de uma função exponencial, enquanto o regime ordenado S_0 (curva azul traço-ponto) reproduz de forma satisfatória todos os comportamentos apresentados pela ETR (curva preta sólida), identificados pelos intervalos R_1, R_2, R_3, R'_3, R_4 e R_5 .

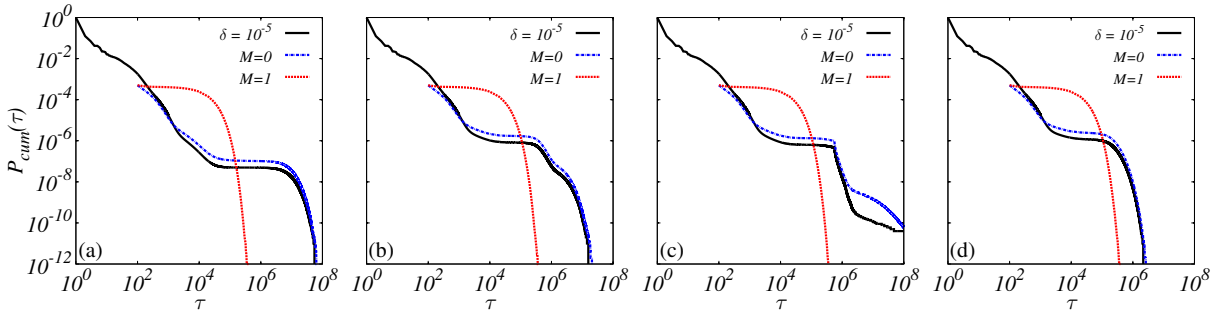


Figura 5.15 – Distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ do tempo consecutivo τ_M gasto no regime S_M em unidades de τ , que corresponde ao tempo real de iteração do mapa. Os resultados foram obtidos utilizando $\delta = 10^{-5}$ e (a) $K_2 = 0,09$, (b) $K_2 = 2,6$, (c) $K_2 = 4,9$ e (d) $K_2 = 8,8$. Para obter estas distribuições, foram coletados 10^{10} valores de τ_M sendo que o limiar utilizado foi $\varepsilon_1 = 0,05$, enquanto a ETR foi obtida com 10^{12} recorrências.

Além de identificar os diferentes tipos de comportamentos apresentados pela ETR, a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ garante que o ELL $\lambda_1^{(\omega)} \approx 0$. Com isso, podemos identificar as regiões do espaço de fases cujo ELL é quase nulo, obtendo informações adicionais sobre o efeito *stickiness* no MPM. A Figura 5.16 apresenta a projeção do espaço

¹ Esta relação se deve ao fato de que a determinação do regime S_M ocorre após ω iterações do sistema.

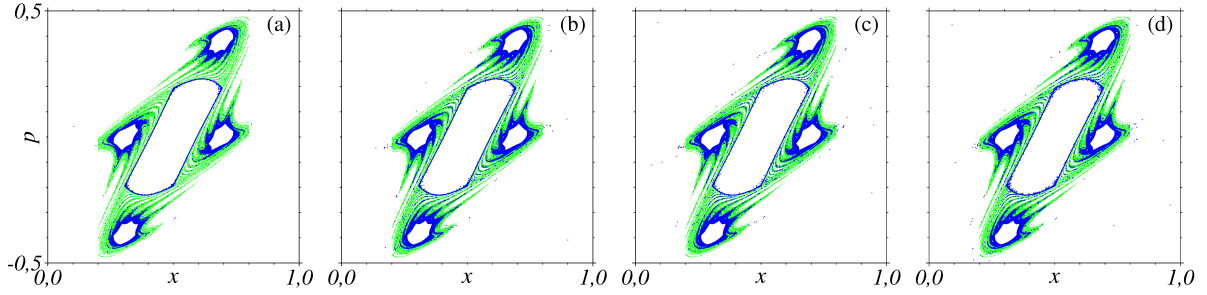


Figura 5.16 – Projeção do espaço de fases tridimensional do MPM no plano xp para $\delta = 10^{-5}$ e (a) $K_2 = 0,09$, (b) $K_2 = 2,6$, (c) $K_2 = 4,9$ e (d) $K_2 = 8,8$. A cor verde corresponde as regiões ocupadas pela trajetória no intervalo R_1 para a ETR, enquanto a cor azul representa as regiões ocupadas pela trajetória no mesmo intervalo de tempo, porém para a distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$, que garante que nestas regiões temos $\lambda_1^{(\omega)} \approx 0$.

de fases tridimensional deste sistema no plano xp , sendo que a cor verde, neste caso, representa o intervalo R_1 da ETR e a cor azul representa o mesmo intervalo, porém agora para a distribuição cumulativa, $P_{cum}(\tau_M)$. Ambos os intervalos correspondem ao decaimento na forma de lei de potência com $\gamma = 1,62$, porém no caso da distribuição cumulativa, $P_{cum}(\tau_M)$, temos a garantia de que o valor do ELL está próximo a zero. Na Figura 5.16 observamos que as regiões com $\lambda_1^{(\omega)} \approx 0$ encontram-se próximas as estruturas de regularidade, possibilitando separar o efeito *stickiness* em duas formas distintas, conforme previsto na Ref. [39]:

- (i) *stickiness* próximo às estruturas de regularidade que resulta em valores dos ELLs próximos a zero devido a regularidade da trajetória nestas regiões. Este efeito é representado pela cor azul na Figura 5.16;
- (ii) *stickiness* ao longo das variedades instáveis que se estendem por longos domínios do mar caótico e cujos valores dos ELLs não necessariamente se encontram próximos a zero. Este caso é representado pela cor verde na Figura 5.16.

Esta separação só é possível quando aplicamos a técnica de separação de regimes, sendo que a análise baseada na ETR não é capaz de diferenciar os dois efeitos.

5.3 Conclusões parciais

Neste Capítulo investigamos o efeito de uma dimensão extra acoplada ao mapa padrão, dando origem a um mapa ação-ação-ângulo, descrito matematicamente pela Eq. (5.1) [16, 17]. O sistema resultante, denominado Mapa Padrão Modificado, consiste em um sistema conservativo tridimensional, caracterizado pelos parâmetros de não-linearidade K_1 e K_2 , além do parâmetro de acoplamento δ . A medida que aumentamos a intensidade do acoplamento entre o mapa padrão e a dimensão extra z , as estruturas invariantes

bidimensionais são destruídas, pois o acoplamento atua como uma perturbação ao sistema. Com a destruição destas estruturas, as trajetórias podem percorrer todo o espaço de fases, tornando o sistema aparentemente ergódico. Analisando as projeções do espaço de fases tridimensional nos planos xp e xz , é possível identificar qual a intensidade de acoplamento necessária para que ocorra o transporte global, como denominado na Ref. [16] a possibilidade de visitação de todo o espaço de fases pela trajetória.

Através da combinação dos resultados obtidos por meio da ETR e da distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ dos tempos consecutivos gastos pela trajetória em cada regime S_M , foi possível analisar a dinâmica do sistema em intervalos de tempo caracterizados por diferentes tipos de decaimento para as curvas características destas distribuições. Tais comportamentos incluem decaimentos na forma de lei de potência, exponencial e também platôs que representam intervalos de tempo para os quais não ocorrem recorrências. Com os resultados apresentados na Seção 5.2, podemos observar que o acoplamento da dimensão extra z atua no sistema como uma espécie de *ruído*, que permite a penetração das trajetórias nas ilhas de regularidade do mapa padrão. No entanto, a difusão da trajetória por todo o domínio do espaço de fases não ocorre uniformemente, sendo que regimes de aprisionamento por longos intervalos de tempo surgem para determinados valores de acoplamento, e são caracterizados pelos platôs presentes nas curvas da ETR. Além disso, a aplicação do método de separação de regimes neste sistema permite a separação do efeito *stickiness* em duas formas distintas, o que não é possível pela análise da ETR.

Capítulo 6

Considerações finais

Nesta dissertação propomos um estudo detalhado sobre o efeito *stickiness* em sistemas conservativos com três ou mais dimensões. Para alcançar este objetivo, foram utilizadas diferentes ferramentas através de simulações computacionais, com o intuito de analisar e caracterizar os aspectos principais da dinâmica destes sistemas. Ao lidar com sistemas de alta dimensionalidade, algumas dificuldades operacionais surgem, como por exemplo, o grande número de equações e parâmetros a serem tratados, o que despende uma grande capacidade computacional para a obtenção de resultados. Por estes motivos, a literatura que aborda a dinâmica de sistemas de alta dimensionalidade ainda é escassa quando comparada a que trata de casos bidimensionais, sendo que existem diversos aspectos a serem investigados com maior profundidade referentes a esta classe de sistemas.

No Capítulo 2, no qual apresentamos a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do estudo apresentado nesta dissertação, vimos que o efeito de aprisionamento de trajetórias em QADs é conhecido como efeito *stickiness*, e a ocorrência deste fenômeno depende da estrutura do espaço de fases e também dos parâmetros envolvidos no sistema em questão. Em sistemas de alta dimensionalidade, uma trajetória caótica pode estar sujeita simultaneamente a diferentes comportamentos, cada um relacionado à instabilidade (ou estabilidade) de cada dimensão. Este comportamento é bastante complicado pois muda constantemente no tempo, mas pode ser tratado de forma mais simples quando definimos regimes de comportamento, como proposto nas Refs. [54, 55].

No Capítulo 4, estudamos um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade, obtido pela composição das Eqs. (4.1) e (4.2). Os parâmetros de não-linearidade K_i definem o tipo de dinâmica de cada mapa, sendo que o caso de interesse consiste em uma dinâmica mista, cujo espaço de fases é composto por regiões regulares e caóticas. Para investigar a dinâmica deste sistema, analisamos as séries temporais do espectro de ELLs positivos composto por N valores, para então definir regimes de movimento ordenado, semi-ordenado e caótico, dependendo do número de ELLs próximos a zero. A partir da definição destes regimes, foi possível determinar as regiões do espaço de fases associadas a

cada regime e como a alteração no parâmetro de acoplamento ξ influenciava na medida de cada uma destas regiões. O resultado mais importante obtido nesta investigação consiste na determinação da distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$ do tempo consecutivo τ_M que a trajetória permanece no regime S_M . Os resultados obtidos por meio da análise desta quantidade podem reproduzir com grande precisão aqueles provenientes da utilização da ETR, $P_{cum}(\tau)$, que são apresentados nas Refs. [15, 42]. Os diferentes comportamentos apresentados pela ETR são reproduzidos pela distribuição cumulativa $P_{cum}(\tau_M)$, sendo que o comportamento assintótico na forma de uma lei de potência com expoente γ , que identifica a influência do efeito *stickiness* no sistema, é obtido pela distribuição $P_{cum}(\tau_{M=0})$. A importância deste resultado consiste na possibilidade de analisar somente o regime de movimento ordenado S_0 quando estamos interessados no expoente de decaimento γ para o comportamento assintótico, o que consiste em uma importante simplificação do ponto de vista computacional para tratar de sistemas com um considerável número N de graus de liberdade, tendo em vista que aumentando o valor de N teremos mais regimes a serem considerados, resultando em simulações cada vez mais extensas.

A aplicação desta metodologia possibilitou a caracterização da dinâmica do sistema em questão de uma forma bastante eficaz e simplificada, permitindo separar os diferentes regimes de movimento e tratar somente o tipo de dinâmica de interesse. Recentemente foi introduzido o conceito de **Hamiltonianos efetivos**, que foram usados para reproduzir a dinâmica complicada de elétrons quicados [62] e a geração de harmônicos em colisões assistidas por lasers [63]. A ideia essencial é que os Hamiltonianos efetivos representam somente a dinâmica relevante necessária para reproduzir a grandeza a ser medida. Desta forma, os tempos intermediários, onde a dinâmica das partículas não afeta significativamente a grandeza a ser medida, não precisam ser analisados. Uma possível aplicação do método descrito nesta dissertação consiste em generalizar o conceito dos Hamiltonianos efetivos, obtidos em problemas específicos [62, 63], para o contexto de sistemas dinâmicos não-lineares. Para isto pode-se combinar a técnica de regimes de movimento ordenado, semi-ordenado e caótico, com a dos Hamiltonianos efetivos, sendo que para cada regime pode-se associar um Hamiltoniano efetivo que irá descrever localmente a dinâmica do regime, e transições entre regimes podem ser modeladas com Hamiltonianos que contenham regiões de escape. O objetivo desta associação entre metodologias é obter uma técnica geral que permite simplificar significativamente a descrição de sistemas não-lineares complexos.

No Capítulo 5, analisamos a influência de uma dimensão extra z determinística na dinâmica do mapa padrão. O sistema resultante desta combinação foi denominado Mapa Padrão Modificado (MPM), que consiste em um sistema ação-ação-ângulo que não mantém a estrutura simplética, porém é conservativo. Para o parâmetro $K_1 = 2, 6$, temos uma dinâmica do mapa padrão mista, com espaço de fases dividido. Alterando o parâmetro K_2 , que determina o tipo de dinâmica da dimensão extra, e o parâmetro

δ que determina a intensidade do acoplamento entre a dimensão z e o mapa padrão, é possível observar uma série de fenômenos interessantes. O acoplamento com uma dimensão extra permite que trajetórias penetrem nas regiões de regularidade, o que antes era proibido para o caso bidimensional. Porém, para valores pequenos de acoplamento, percebe-se que estas trajetórias ficam presas no interior destas estruturas, dando origem a platôs na curva característica da ETR. No momento em que o acoplamento torna-se suficientemente grande, o tempo de aprisionamento diminui e todo o espaço de fases passa a ser visitado pela trajetória. Temos portanto a transição de um sistema com dinâmica mista (regular e caótica) para totalmente caótica, através do aumento gradativo do parâmetro de acoplamento δ . A aplicação da técnica de separação de regimes neste sistema permite uma análise mais detalhada do efeito *stickiness*, mostrando que apenas regiões próximas as estruturas de regularidade estão associadas ao regime S_0 , enquanto o aprisionamento de trajetórias ao longo das curvas instáveis que se estendem por longos domínios do mar caótico possuem valores maiores para o ELL.

O objetivo principal da pesquisa realizada e descrita ao longo desta dissertação foi alcançado, sendo que vários resultados obtidos foram esclarecedores para a compreensão da dinâmica dos sistemas estudados. A aplicação do mapa padrão para obtenção de sistemas com mais dimensões mostra que este modelo, mesmo sendo investigado por várias décadas, ainda é capaz de trazer importantes e novas colaborações para a análise das propriedades de sistemas dinâmicos, possibilitando uma série de novas situações que podem ser elucidadas de forma relativamente simples do ponto de vista computacional.

Referências

- [1] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [2] REICHL, L. E. **The Transition To Chaos: Conservative Classical Systems And Quantum Manifestations**. Nova York: Springer, 2004.
- [3] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. Nova York: Springer-Verlag, 1996.
- [4] LOSKUTOV, A. Dynamical chaos: systems of classical mechanics. **Physics-Uspekhi**, v. 50, n. 9, p. 939–964.
- [5] POINCARÉ, H. **Science and Method**. [S.l.]: Dover Publications, 1914.
- [6] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [7] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Phys. Rep.**, v. 52, n. 5, p. 263 – 379, 1979.
- [8] BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them. Part 1: Theory. **Meccanica**, v. 15, n. 1, p. 09–20, 1980.
- [9] WOLF, A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985.
- [10] OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. Nova York: Cambridge University Press, 2002.
- [11] CONTOPOULOS, G. Orbits in highly perturbed dynamical systems. iii. nonperiodic orbits. **The Astronomical Journal**, v. 76, n. 2, p. 147–156, 1971.
- [12] SHIRTS, R. B.; REINHARDT, W. P. Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics: Vague tori, semiclassical quantization, and classical intramolecular energy flow. **The Journal of Chemical Physics**, v. 77, n. 10, p. 5204–5217, 1982.
- [13] KARNEY, C. F. Long-time correlations in the stochastic regime. **Physica D**, v. 8, n. 3, p. 360–380, 1983.
- [14] HAMPTON, A.; ZANETTE, D. Measure synchronization in coupled Hamiltonian systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, n. 11, p. 2179–2182, 1999.

- [15] ALTMANN, E. G.; KANTZ, H. Hypothesis of strong chaos and anomalous diffusion in coupled symplectic maps. **Europhys. Lett.**, v. 78, n. 1, p. 10008, 2007.
- [16] MEZIĆ, I. Break-up of invariant surfaces in action-angle-angle maps and flows. **Physica D**, v. 154, n. 1–2, p. 51–67, 2001.
- [17] LEVNAJIĆ, Z.; MEZIĆ, I. Ergodic theory and visualization. i. Mesochronic plots for visualization of ergodic partition and invariant sets. **Chaos**, v. 20, n. 3, p. 033114, 2010.
- [18] KHURANA, N.; BLAWZDZIEWICZ, J.; OUELLETTE, N. Reduced transport of swimming particles in chaotic flow due to hydrodynamic trapping. **Phys. Rev. Lett.**, v. 106, n. 19, p. 198104, 2011.
- [19] MASOLIVER, J.; ROS, A. Integrability and chaos: the classical uncertainty. **Eur. J. Phys.**, v. 32, p. 431–458, 2011.
- [20] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. São Francisco: Addison-Wesley, 2002.
- [21] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and Chaotic Dynamics**. Nova York: Springer-Verlag, 1992.
- [22] CENCINI, M.; CECCONI, F.; VULPIANI, A. **Chaos: From Simple Models to Complex Systems**. Danvers: World Scientific, 2010.
- [23] KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. **Dokl. Akad. Nauk.**, v. 98, p. 527–530, 1954.
- [24] MOSER, J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. **Nach. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl II**, v. 1, p. 1–20, 1962.
- [25] ARNOLD, V. I. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. **Uspekhi Math. Nauk.**, v. 18, n. 5, 1963.
- [26] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. do. **Caos, Uma Introdução**. São Paulo: Edgard-Blucher LTDA, 1995.
- [27] OSELEDEC, V. I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. **Trans. Moscow Math.**, v. 19, p. 197–231, 1968.
- [28] BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J.-M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. **Phys. Rev. A**, v. 14, n. 6, p. 2338–2345, 1976.
- [29] SHEPELYANSKY, D. L. Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with a few degrees of freedom. **Phys. Rev. E**, v. 82, n. 5, p. 055202, 2010.
- [30] ZASLAVSKY, G. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. **Phys. Rep.**, v. 371, n. 6, p. 461–580, 2002.
- [31] ZASLAVSKY, G. M. **The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems**. New York: Imperial College Press, 2007.
- [32] ZASLAVSKY, G. M. **Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics**. Nova York: Oxford University Press, 2005.

- [33] ZASLAVSKY, G. M. From Hamiltonian chaos to Maxwell's Demon. **Chaos**, v. 5, n. 4, p. 653–661, 1995.
- [34] BENKADDA, S. et al. Self-similarity and transport in the standard map. **Phys. Rev. E**, v. 55, n. 5, p. 4909–4917, 1997.
- [35] ARTUSO, R.; PRAMPOLINI, A. Correlation decay for an intermittent area-preserving map. **Phys. Lett. A**, v. 246, n. 5, p. 407–411, 1998.
- [36] BUNIMOVICH, L. A.; VELA-AREVALO, L. V. Many faces of stickiness in Hamiltonian systems. **Chaos**, v. 22, n. 2, p. 026103, 2012.
- [37] MEISS, J.; OTT, E. Markov-tree model of intrinsic transport in Hamiltonian systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 55, n. 25, p. 2741–2744, 1985.
- [38] HANSON, J. D.; CARY, J. R.; MEISS, J. D. Algebraic decay in self-similar Markov chains. **J. Stat. Phys.**, v. 39, n. 3-4, p. 327–345, 1985.
- [39] CONTOPOULOS, G.; HARSOULA, M. Stickiness effects in conservative systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 20, n. 7, 2010.
- [40] EFTHYMIOPOULOS, C.; CONTOPOULOS, G.; VOGLIS, N. Cantori, islands and asymptotic curves in the stickiness region. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 73, n. 1-4, p. 221–230, 1999.
- [41] CHIRIKOV, B.; SHEPELYANSKY, D. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems. **Physica D**, v. 13, n. 3, p. 395–400, 1984.
- [42] ALTMANN, E. G. **Intermittent Chaos in Hamiltonian Dynamical Systems**. Tese (Doutorado) — Max Planck Institut für Physik Komplexer Systeme, 2007.
- [43] KANTZ, H.; GRASSBERGER, P. Chaos in low-dimensional Hamiltonian maps. **Phys. Lett. A**, v. 123, n. 9, p. 437–443, 1987.
- [44] LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [45] HURD, L.; GREBOGI, C.; OTT, E. **Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior**. [S.l.]: Springer US, 1994.
- [46] FROESCHLÉ, C. On the number of isolating integrals in systems with three degrees of freedom. **Astrophys. Space Sci.**, v. 14, p. 110–117, 1971.
- [47] MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W.; ROST, J. M. Characterizing the dynamics of higher dimensional nonintegrable conservative systems. **Chaos**, v. 22, n. 3, p. 033137, 2012.
- [48] MANCHEIN, C.; BEIMS, M.; ROST, J. Characterizing weak chaos in nonintegrable Hamiltonian systems: the fundamental role of stickiness and initial conditions. **Physica A**, v. 400, p. 186–193, 2014.
- [49] ARTUSO, R. Correlation decay and return time statistics. **Physica D**, v. 131, n. 1–4, p. 68–77, 1999.
- [50] ARTUSO, R.; MANCHEIN, C. Instability statistics and mixing rates. **Phys. Rev. E**, v. 80, n. 3, p. 036210, 2009.

- [51] KANEKO, K.; KONISHI, T. Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional Hamiltonian system. **Physica D**, v. 71, n. 1–2, p. 146–167, 1994.
- [52] SZEZECH, J. D.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems. **Phys. Lett. A**, v. 335, n. 5–6, p. 394–401, 2005.
- [53] HARLE, M.; FEUDEL, U. Hierarchy of islands in conservative systems yields multimodal distributions of FTLEs. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 31, n. 1, p. 130–137, 2007.
- [54] CONTOPOULOS, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A. On the number of isolating integrals in Hamiltonian systems. **Phys. Rev. A**, v. 18, n. 3, p. 1183–1189, 1978.
- [55] MALAGOLI, A.; PALADIN, G.; VULPIANI, A. Transition to stochasticity in Hamiltonian systems: Some numerical results. **Phys. Rev. A**, v. 34, n. 2, p. 1550–1555, 1986.
- [56] DAIDO, H. Coupling sensitivity of chaos. **Prog. Theor. Phys.**, v. 72, n. 4, p. 853–856, 1984.
- [57] DAIDO, H. Coupling sensitivity of chaos and the Lyapunov dimension: The case of coupled two-dimensional maps. **Phys. Lett. A**, v. 110, n. 1, p. 5–9, 1985.
- [58] MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Conservative generalized bifurcation diagrams. **Phys. Lett. A**, v. 377, n. 10–11, p. 789–793, 2013.
- [59] RODRIGUES, C. S. et al. Diffusion in randomly perturbed dissipative dynamics. **Europhys. Lett.**, v. 108, n. 4, p. 40002.
- [60] ALTMANN, E. G.; ENDLER, A. Noise-enhanced trapping in chaotic scattering. **Phys. Rev. Lett.**, v. 105, n. 24, p. 244102, 2010.
- [61] VENEGEROLES, R. Universality of algebraic laws in Hamiltonian systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 102, n. 6, p. 064101, Feb 2009.
- [62] GERLACH, M.; WÜSTER, S.; ROST, J. M. Kicking electrons. **J. Phys. B**, v. 45, p. 235204, 2012.
- [63] ZAGOYA, C. et al. An analytical approach to high harmonic generation. **New J. Phys.**, v. 14, p. 093050, 2012.

Apêndices

APÊNDICE A

Condição simplética do mapa padrão

O mapa padrão pode ser descrito matematicamente da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{cases} x_{n+1} = x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 2\pi], \\ p_{n+1} = p_n + K \sin(x_n) & [\text{mod } 2\pi]. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Diferentemente da Eq. (3.13), utilizaremos o módulo 2π e não o módulo 1 para simplificar as operações matemáticas, já que esta modificação não gera alterações na dinâmica apresentada pelo sistema. Para provar que este sistema é Hamiltoniano, torna-se necessário satisfazer a condição simplética, que é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \mathbb{M}. \quad (\text{A.2})$$

sendo $\mathbb{J}$ a matriz Jacobiana do sistema, que neste caso é dada por:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \partial x_{n+1}/\partial x_n & \partial x_{n+1}/\partial p_n \\ \partial p_{n+1}/\partial x_n & \partial p_{n+1}/\partial p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + K \cos(x_n) & 1 \\ K \cos(x_n) & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A partir da Eq. (A.3), podemos obter facilmente a matriz transposta $\mathbb{J}^T$. Substituindo $\mathbb{J}$ e $\mathbb{J}^T$ na Eq. (A.2), obtemos:

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \begin{bmatrix} 1 + K \cos(x_n) & 1 \\ K \cos(x_n) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + K \cos(x_n) & K \cos(x_n) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Efetando o procedimento de multiplicação de matrizes, levando em conta que o produto entre matrizes é associativo, obtemos:

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \begin{bmatrix} (-1 - K \cos(x_n) + 1 + K \cos(x_n)) & (-K \cos(x_n) + 1 + K \cos(x_n)) \\ (-1 - K \cos(x_n) + K \cos(x_n)) & (-K \cos(x_n) + K \cos(x_n)) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{M}, \quad (\text{A.6})$$

mostrando de fato que o mapa padrão integra a classe de sistemas Hamiltonianos.

A.1 Prova de que o MPM é conservativo

O Mapa Padrão Modificado corresponde ao sistema formado pelo acréscimo de uma dimensão extra ao mapa padrão, e pode ser descrito matematicamente da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{cases} x_{n+1} = x_n + p_n + K \sin(x_n) + \delta \sin(z_n) \quad [\text{mod } 2\pi], \\ z_{n+1} = z_n + K \sin(x_n) \quad [\text{mod } 2\pi], \\ p_{n+1} = p_n + K \sin(x_n) + \delta \sin(z_n) \quad [\text{mod } 2\pi]. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Nitidamente, o MPM não consiste em um sistema simplético, já que sua Jacobiana não possui dimensão $2N$, condição necessária para que seja uma matriz simplética. Podemos obter a matriz Jacobiana $\tilde{\mathbb{J}}$ correspondente ao MPM da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbb{J}} = \begin{bmatrix} \partial x_{n+1}/\partial x_n & \partial x_{n+1}/\partial z_n & \partial x_{n+1}/\partial p_n \\ \partial z_{n+1}/\partial x_n & \partial z_{n+1}/\partial z_n & \partial z_{n+1}/\partial p_n \\ \partial p_{n+1}/\partial x_n & \partial p_{n+1}/\partial z_n & \partial p_{n+1}/\partial p_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Da Eq. (A.8), obtemos:

$$\tilde{\mathbb{J}} = \begin{bmatrix} 1 + K \cos(x_n) & \delta \cos(z_n) & 1 \\ K \cos(x_n) & 1 & 0 \\ K \cos(x_n) & \delta \cos(z_n) & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

cujo determinante pode ser calculado facilmente pela regra de **Sarrus**, resultando em:

$$\tilde{\mathbb{J}} = \begin{vmatrix} 1 + K \cos(x_n) & \delta \cos(z_n) & 1 \\ K \cos(x_n) & 1 & 0 \\ K \cos(x_n) & \delta \cos(z_n) & 1 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\mathbb{J}} = 1 + K \cos(x_n) + K \delta \cos^2(x_n) - K \cos(x_n) - K \delta \cos^2(x_n) = 1. \quad (\text{A.10})$$

O resultado apresentado pela Eq. (A.10) mostra que o MPM, apesar de não ser um sistema Hamiltoniano, é um sistema conservativo, já que o volume do seu espaço de fases é conservado.

APÊNDICE B

Ortonormalização de Gram-Schmidt

Dada uma base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$, o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt permite construir através da combinação linear dos vetores $\mathbf{w}_i$ uma nova base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Proceda-se da seguinte maneira: define-se um primeiro vetor unitário

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}; \quad (\text{B.1})$$

define-se agora um segundo vetor normalizado, tal que:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1}{|\mathbf{w}_2 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1|}, \quad (\text{B.2})$$

sendo que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, ou seja, $\mathbf{v}_1$ é ortogonal a $\mathbf{v}_2$. O procedimento é repetido quantas vezes for necessário, de forma que podemos generalizar pela seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_i = \left(\mathbf{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j \right) \beta_j, \quad (\text{B.3})$$

sendo que β_j é dado por

$$\beta_j = \frac{1}{\left| \mathbf{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j \right|}. \quad (\text{B.4})$$

APÊNDICE C

Condição simplética do acoplamento $T^{(i)}$

O acoplamento $T^{(i)}$ entre os mapas $M^{(i)}$ e $M^{(j)}$ é dado por:

$$T^{(i)} = \begin{cases} x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)}, \\ p_{n+1}^{(i)} = p_n^{(i)} + \frac{\xi}{2\pi\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^N \sin[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})]. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Para provar que este acoplamento é simplético, é necessário que sua matriz Jacobiana $\mathbb{J}_{T^{(i)}}$ satisfaça a seguinte relação:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} \mathbb{M} \mathbb{J}_{T^{(i)}}^T = \mathbb{M}. \quad (\text{C.2})$$

sendo que $\mathbb{J}_{T^{(i)}}$ é dada por:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} = \begin{bmatrix} \partial x_{n+1}^{(i)} / \partial x_n^{(i)} & \partial x_{n+1}^{(i)} / \partial p_n^{(i)} \\ \partial p_{n+1}^{(i)} / \partial x_n^{(i)} & \partial p_{n+1}^{(i)} / \partial p_n^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

A partir da Eq. (C.3), encontramos:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\xi}{2\pi\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^N (2\pi x_n^{(i)}) \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Como o somatório é realizado sobre a variável j , o termo $2\pi x_n^{(i)}$ pode ser retirado do somatório. Além disso, $x_n^{(i)}$ corresponde a condição inicial para a posição do mapa $M^{(i)}$, sendo portanto uma constante, assim como o parâmetro de acoplamento ξ e o número de mapas acoplados N . Desta forma, para simplificar a notação utilizada, faremos a seguinte consideração:

$$\frac{\xi \cdot (2\pi x_n^{(i)})}{2\pi\sqrt{N-1}} \equiv \gamma,$$

sendo γ uma constante. Desta forma, a Eq. (C.3) se torna:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma \sum_{j=1}^N \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Por sua vez, a matriz Jacobiana transposta $\mathbb{J}_{T^{(i)}}^T$ é dada por:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}}^T = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \sum_{j=1}^N \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Sendo assim, a condição simplética dada pela Eq. (C.2), resulta em:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} \mathbb{M} \mathbb{J}_{T^{(i)}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma \sum_{j=1}^N \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \gamma \sum_{j=1}^N \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Efetuando o procedimento de multiplicação de matrizes, levando em conta que o produto entre matrizes é associativo, obtemos:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} \mathbb{M} \mathbb{J}_{T^{(i)}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{bmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

com $\beta = (-\gamma \sum_{j=1}^N \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})] + \gamma \sum_{j=1}^N \cos[2\pi(x_n^{(i)} - x_n^{(j)})]) = 0$. Portanto, temos finalmente que:

$$\mathbb{J}_{T^{(i)}} \mathbb{M} \mathbb{J}_{T^{(i)}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{M}, \quad (\text{C.9})$$

mostrando de fato que o acoplamento é simplético.