UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

RICARDO ALBRECHT

EQUAÇÕES DE ONDA PARA GRÁVITONS COM FONTES ELETROMAGNÉTICAS EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO

JOINVILLE, SC

2011

RICARDO ALBRECHT

EQUAÇÕES DE ONDA PARA GRÁVITONS COM FONTES ELETROMAGNÉTICAS EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT.
Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso

JOINVILLE / SC
2011

APROVAÇÃO

FICHA CATALOGRÁFICA

A341e

Albrecht, Ricardo.

Equações de Onda para Grávitons com Fontes Eletromagnéticas em Espaços-tempo Curvos sem Torção / Ricardo Albrecht; Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso. – Joinville-SC,

49f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Física, Joinville, 2011.

1. Espinores. 2. Equações de Onda. 3. Grávitons . I. Cardoso, Jorge G..

CDD 530.11

Agradecimentos

Faço um agradecimento especial às seguintes pessoas e entidades que tiveram participação neste trabalho:

Professor Jorge Gonçalves Cardoso
(meu orientador)

UDESC
(pela bolsa de estudos)

Departamento de Física da UDESC

André Martorano Kuerten
(colega de mestrado)

Demais alunos de mestrado da UDESC

Maurício e Edila
(meus pais)

Monalisa
(minha esposa).

RESUMO

ALBRECHT, Ricardo. **Equações de Onda para Grávitons com Fontes Eletromagnéticas em Espaços-tempo Curvos sem Torção.** 2011. 49f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Relatividade e Cosmologia) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2011.

Os formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden são utilizados para descrever a estrutura de curvaturas espaço-temporais da Relatividade Geral. São apresentados os contextos métricos de cada formalismo assim como o comportamento de seus objetos básicos sob transformações de calibre de Weyl. O desdobramento de curvaturas em partes puramente gravitacionais e puramente eletromagnéticas como dadas originalmente por Infeld e van der Waerden é exibido. Os espinores de curvatura e suas propriedades são então considerados. Com base na implementação de um conjunto de comutadores covariantes livres de torção obtemos inicialmente o conjunto de equações de onda para grávitons com fontes generalizadas que é bem conhecido na literatura. Tais equações de onda gravitacionais são subsequentemente particularizadas para a situação que envolve a presença de fontes eletromagnéticas geométricas. Um resultado notável obtido aqui é que as fontes em um dos formalismos absorvem certas densidades de corrente eletromagnética.

PALAVRAS-CHAVE: Espinores. Equações de Onda. Grávitons.

ABSTRACT

ALBRECHT, Ricardo. **Wave Equations for Gravitons with Electromagnetic Sources in Curved Spacetimes without Torsion.** 2011. 49f. Dissertation (Master Course in Physics - Area: Relativity and Cosmology) - Santa Catarina State University, Post Graduation Program in Physics, Joinville, 2011.

The gravitational field and wave equations with arbitrary sources that take place in the two-component spinor formalisms of Infeld and van der Waerden for General Relativity are already exhibited in the literature. In the present work, we implement geometric electromagnetic sources to derive the expressions for the corresponding right-hand sides of those equations. A notable result that emerges here is the occurrence of source contributions which absorb in one of the formalisms certain electromagnetic current densities.

KEY WORDS: Spinors. Wave Equations. Gravitons.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os chamados formalismos $\gamma\varepsilon$ de Infeld e van der Waerden [1] foram publicados em 1933, e introduziram estruturas espinoriais de duas componentes generalizadas no contexto da teoria da Relatividade Geral. Em ambos os formalismos, dois pares de espaços de espin conjugados são assentados em cada ponto não-singular de um espaço-tempo curvo sem torção, com o papel desempenhado pelo grupo $SL(2, C)$ da formulação espinorial clássica de van der Waerden [2] passando a ser assumido por um grupo de transformações de calibre generalizadas, denominado grupo de Weyl [3, 4]. Os elementos do grupo de Weyl são matrizes não-singulares complexas (2×2) cujas entradas dependem essencialmente de um parâmetro real. A possibilidade de aplicar tais transformações no contexto da Relatividade Geral havia sido estabelecida anteriormente por Weyl em conexão com a formulação de um princípio generalizado de invariância de calibre [4]. Uma das principais motivações para a construção dos formalismos $\gamma\varepsilon$ foi relacionada com uma extensão de trabalhos anteriores [2, 5] os quais visavam assentar uma versão em espinores de duas componentes da teoria de Dirac do elétron em espaços-tempo curvos [1].

Uma das mais notáveis características dos formalismos $\gamma\varepsilon$ é que eles propiciam funções de onda para grávitons. Tal fato foi explorado durante os anos por alguns autores, particularmente pelo trabalho da Ref. [6], o qual estabeleceu somente com o uso de um método de transcrição que funções de onda para grávitons em algum espaço-tempo da Relatividade Geral são definidas pelos espinores que entram na decomposição espinorial do tensor de Weyl pertinente. Mais recentemente [3, 7], foi mostrado que funções de onda para grávitons emergem naturalmente em ambos os formalismos como partes totalmente simétricas da decomposição espinorial de certos objetos de curvatura que envolvem simultaneamente tensores de Riemann e bivetores de Maxwell [8-11]. Em adição, um conjunto completo de equações de onda gravitacionais foi obtido [3, 7] no caso de propagação no vácuo e, subsequentemente, estendido para o caso de fontes fisicamente arbitrárias [12]. Em ambos os formalismos, a construção de curvaturas de espin é feita com base no procedimento tradicional que envolve tomar comutadores entre operadores de derivada covariante [6]. Deste modo, tais curvaturas estão profundamente envolvidas na estrutura geométrica de espaços-tempo curvos.

No presente trabalho, estamos particularmente interessados em obter dentro dos contextos dos formalismos $\gamma\varepsilon$ as equações de campo e de onda para grávitons na presença de fontes eletromagnéticas geométricas. Para isso, faremos inicialmente uma breve revisão de alguns aspectos dos formalismos, quando particularmente exibiremos a estrutura de curvatura espinorial de um espaço-tempo curvo sem torção $\mathcal{M}$ juntamente com a definição de funções de onda para fótons geométricos tal como introduzida na Ref. [3]. Em seguida, trabalharemos com a versão espinorial da identidade de Bianchi em conjunto com as técnicas calculacionais desenvolvidas nas Refs. [3, 7, 12] e, então, obteremos as equações de campo e de onda de nosso interesse aqui.

As seguintes convenções serão adotadas. Utilizaremos letras Latinas minúsculas para índices mundo e letras Latinas maiúsculas para os índices de objetos espinoriais. A operação de conjugação complexa será representada por uma barra horizontal sobre letras núcleo ou letras núcleo indexadas. Será adotada a notação de índices linhados e não-linhados usual [13] para o caso de componentes espinoriais conjugadas. Índices mundo assumirão os valores 0, 1, 2 e 3, enquanto índices espinoriais assumirão os valores $0, 1$ ou $0', 1'$. Indicaremos as operações de simetrização e anti-simetrização com o uso de parênteses e colchetes envolvendo os índices pertinentes, respectivamente. Barras verticais separando blocos de índices indicarão que tais índices não participam de operações de simetria. A convenção de somação será assumida desde o início. Uma quantidade espinorial que porta a índices contravariantes e b índices covariantes não-linhados juntamente com c índices contravariantes e d índices covariantes linhados, respectivamente, será referida como uma quantidade espinorial de valência $\{a, b; c, d\}$. O símbolo "c.c."denotará sem ambiguidades expressões complexo-conjugadas. Os operadores derivadas parciais $\partial/\partial x^a$ para coordenadas x^a de $\mathcal{M}$ serão escritos como ∂_a, assim como também usaremos o símbolo indexado ∇_a para derivadas covariantes em ambos os formalismos. Adotaremos a assinatura métrica espaço-temporal dada por $(+ - - -)$, e utilizaremos o sistema de unidades naturais no qual $c = \hbar = 1$. Para o tensor de Ricci, usaremos a seguinte convenção de sinal:

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{c},$$

tal que, para o escalar de curvatura, teremos

$$R = g^{ab} R_{ab} = R_{ab}{}^{ab}.$$

A presença nas equações de Einstein da constante cosmológica λ estará implícita através da relação de traço estendido

$$R = 4\lambda + \kappa T,$$

com T sendo o traço de algum tensor energia-momento e κ denotando a constante gravitacional de Einstein. Demais convenções serão explicadas ocasionalmente.

Esta dissertação está organizada como segue: no Capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão da estrutura afim dos formalismos, onde serão introduzidos brevemente os espinores métricos, objetos conectores, tensores e densidades de espin, derivadas covariantes e algumas equações de autovalores. No Capítulo 3, apresentaremos a curvatura espinorial de Infeld e van der Waerden de $\mathcal{M}$ a partir da atuação de comutadores entre derivadas covariantes sobre vetores de espin. Assim, obteremos os chamados objetos de curvatura mistos de Infeld e van der Waerden [14-16], os quais exibem o desdobramento mencionado anteriormente que envolve contribuições gravitacionais e eletromagnéticas. Ainda no Capítulo 3, apresentaremos os espinores de curvatura e a versão espinorial de alguns objetos geométricos da Relatividade Geral. O Capítulo 4 será dedicado a uma revisão das equações de campo e de onda gravitacionais com fontes generalizadas tais como dadas na Ref. [12]. No Capítulo 5, particularizaremos estas equações para fontes eletromagnéticas geométricas em conexão com o principal objetivo de nosso trabalho. Finalmente, no Capítulo 6, apresentaremos nossas conclusões.

Capítulo 2

Geometria Afim Espinorial

Neste capítulo, apresentaremos de uma maneira breve alguns dos aspectos concernentes à geometria afim dos formalismos $\gamma\varepsilon$, explicitando algumas das diferenças de natureza geométrica entre eles, incluindo a apresentação de algumas das equações de autovalores que neles ocorrem.

No formalismo γ, as componentes básicas dos objetos métricos e conectores são funções de x^a de tal modo que uma função complexa de coordenadas espaço-temporais é utilizada no lugar da função real que tinha sido usada anteriormente no trabalho de Infeld [1]. Qualquer espinor métrico γ aparece como sendo um tensor de espin com relação ao grupo de Weyl, e todos os objetos conectores correspondentes portam um caráter combinado de tensor de espin e de vetor mundo, covariantes ou contravariantes [3, 14]. Os objetos básicos para a formalismo ε são considerados como entidades que portam o mesmo caráter mundo daqueles do formalismo γ, porém, um caráter de densidade de espin é atribuído a cada um deles [3]. Assim, quantidades espinorias geralmente aparecem no formalismo ε como densidades de espin cuja descrição geométrica já tinha sido fornecida por Schouten [17-19] na ocasião do advento dos formalismos. Uma descrição algébrico-geométrica completa dos formalismos pode ser encontrada na Ref. [3].

2.1 Espinores Métricos

Os espinores métricos do formalismo γ aparecem como sendo tensores de espin antissimétricos invariantes sob tranformações de coordenadas mundo. Dentre estes, temos particularmente os de valências $\{0, 2; 0, 0\}$ e $\{2, 0; 0, 0\}$

$$(\gamma_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

e

$$(\gamma^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

cujos complexos conjugados são

$$(\gamma_{A'B'}) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\gamma} \\ -\overline{\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

e

$$(\gamma^{A'B'}) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\gamma}^{-1} \\ -\overline{\gamma}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

os quais possuem valências $\{0,0;0,2\}$ e $\{0,0;2,0\}$. As entradas do par polar $(|\gamma|, \Phi)$, as quais ocorrem na expressão

$$\gamma = |\gamma| \exp{(i\Phi)}, \tag{2.5}$$

são funções reais deriváveis de x^a.

No formalismo ε, os espinores métricos também são espinores antissimétricos invariantes mundo, com suas expressões sendo dadas por

$$(\varepsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon^{AB}), \tag{2.6}$$

e

$$(\varepsilon_{A'B'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon^{A'B'}), \tag{2.7}$$

os quais são os únicos espinores métricos deste formalismo.[1] As relações entre os espinores métricos não-linhados dos formalismos são então dadas por

$$\gamma_{AB} = \gamma \varepsilon_{AB}, \tag{2.8}$$

e

$$\gamma^{AB} = \gamma^{-1} \varepsilon^{AB}. \tag{2.9}$$

É útil denotar por M as letras núcleo γ ou ε e, então, as relações (2.1-2.4) e (2.6-2.7) implicam que

$$M^{CB} M_{CA} = M_A{}^B = -M^B{}_A, \tag{2.10}$$

onde

$$(M_A{}^B) = (\delta_A{}^B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

[1] Esta propriedade de unicidade está relacionada com o caráter de densidade portado pelos espinores métricos ε. Isto deverá ser evidenciado mais tarde neste capítulo.

Os espinores métricos e seus complexos conjugados são particularmente úteis para levantar e abaixar índices de espinores e de quantidades mistas espin-mundo em $\mathcal{M}$. Assim, considerando um espinor arbitrário ζ^A, tem-se os seguintes esquemas para mover índices:

$$\zeta^A = M^{AB}\zeta_B, \tag{2.12}$$

e

$$\zeta_A = \zeta^B M_{BA}, \tag{2.13}$$

com um esquema similar sendo aplicado no caso de espinores complexos conjugados tais como, por exemplo,

$$\xi^{A'} = M^{A'B'}\xi_{B'}, \tag{2.14}$$

e

$$\xi_{A'} = \xi^{B'} M_{B'A'}. \tag{2.15}$$

Devido a propriedade tensorial das configurações métricas (2.1-2.4), o processo de mover índices no formalismo γ preserva o caráter espinorial dos objetos considerados, enquanto que no formalismo ε este processo geralmente produz objetos cujo caráter espinorial é diferente daquele do objeto inicial. Contudo, em vista da invariância das estruturas (2.1-2.4) e (2.6-2.7) sob transformações de coordenadas mundo, a ação dos espinores métricos de cada formalismo sempre preserva o caráter mundo dos objetos envolvidos.

2.2 Objetos Conectores

A correspondência entre tensores mundo e espinores é realizada por intermédio de quantidades mistas adequadas [14-16]. Estes objetos são matrizes Hermitianas (2×2) cujas componentes dependem de x^a. No formalismo γ, eles são denotados por $\sigma^a_{AB'}$ e, no formalismo ε, por $\Sigma^a_{AB'}$. Por questão notacional, denotaremos a letra núcleo dos objetos conectores de qualquer um dos formalismos por S. Assim, temos o conjunto de objetos conectores Hermitianos

$$\mathbf{HS} = \{S_{aAA'}, S^a_{AA'}, S_a^{AA'}, S^{aAA'}\}. \tag{2.16}$$

Enfatizamos que a ordem dos índices carregados por qualquer objeto conector Hermitiano é irrelevante [8]. Para levantar e abaixar índices de objetos conectores, utilizamos os espinores métricos do formalismo correspondente no caso dos índices espinoriais, e o tensor métrico g_{ab} de $\mathcal{M}$ no caso dos índices mundo. A Hermiticidade das matrizes do conjunto **HS** significa, por exemplo, que

$$S^a_{AB'} = \overline{S^a_{BA'}}. \tag{2.17}$$

Ressalta-se aqui que a Hermiticidade de qualquer objeto S é perdida quando índices espinoriais ocupam "andares"diferentes.

Os objetos conectores podem ser relacionados com g_{ab} pela relação

$$2S_{AA'(a}S^{A'}_{b)B} = g_{ab}M_{AB}, \tag{2.18}$$

ou pela relação complexo-conjugada

$$2S_{A'A(a}S^{A}_{b)B'} = g_{ab}M_{A'B'}. \tag{2.19}$$

A relação entre objetos mundo e de espin é prescrita em termos de produtos externos apropriados tais como, por exemplo,

$$K_a = S^{AA'}_a K_{AA'}, \tag{2.20}$$

$$g_{ab} = S^{AA'}_a S^{BB'}_b M_{AB}M_{A'B'}, \tag{2.21}$$

e

$$M_{AB}M_{A'B'} = S^a_{AA'}S^b_{BB'}g_{ab}. \tag{2.22}$$

2.3 Tensores de Espin e Densidades Espinoriais

Para caracterizar os objetos espinoriais de cada formalismo, precisamos verificar como estes se comportam sob transformações de calibre generalizadas. Como mencionado no Capítulo 1, estas transformações constituem o grupo de Weyl [3, 4] cujos elementos possuem componentes definidas por

$$\Lambda_A{}^B = \sqrt{\rho}e^{i\theta}\delta_A{}^B, \tag{2.23}$$

onde ρ é uma função real derivável de x^a positivo-definida, e θ é o parâmetro de calibre do grupo que é considerado como uma função real derivável arbitrária sobre $\mathcal{M}$. A ação deste grupo sob os espaços de espin de $\mathcal{M}$ é independente da ação do grupo pertinente de mapeamentos espaço-temporais. Podemos definir o determinante de $(\Lambda_A{}^B)$ como

$$\Delta_\Lambda \doteqdot \det(\Lambda_A{}^B) = |\Delta_\Lambda| \exp{(2i\theta)}\,, \tag{2.24}$$

de modo que

$$\Lambda_A{}^C\Lambda_B{}^D = \Delta_\Lambda\delta_A{}^C\delta_B{}^D. \tag{2.25}$$

Um dos mais simples exemplos de tensores de espin é um vetor de espin covariante ζ_A, o qual se transforma segundo a lei

$$\zeta'_A = \Lambda_A{}^B\zeta_B, \tag{2.26}$$

com seu complexo conjugado se transformando como

$$\zeta'_{A'} = \Lambda_{A'}{}^{B'}\zeta_{B'}. \tag{2.27}$$

Para um vetor de espin contravariante ξ^A e seu complexo conjugado $\xi^{A'}$, as leis de transformação são

$$\xi'^A = \xi^B \Lambda_B^{-1A}, \tag{2.28}$$

e

$$\xi'^{A'} = \xi^{B'} \Lambda_{B'}^{-1A'}. \tag{2.29}$$

Uma quantidade numérica que é invariante sob transformações de calibre é denominada um escalar de espin. As leis de transformação para tensores de espin de valências arbitrárias são obtidas [3, 8, 14] realizando-se produtos externos adequados entre vetores de espin e utilizando-se as prescrições (2.26-2.29). Neste estágio, podemos identificar o caráter de tensor de espin dos objetos fundamentais do formalismo γ através das seguintes configurações:

$$\gamma'_{AB} = \Lambda_A{}^C \Lambda_B{}^D \gamma_{CD} = \Delta_\Lambda \gamma_{AB}, \tag{2.30}$$

$$\gamma'^{AB} = \gamma^{CD} \Lambda_C^{-1A} \Lambda_D^{-1B} = (\Delta_\Lambda)^{-1} \gamma^{AB}, \tag{2.31}$$

e

$$\sigma'^a_{AA'} = \Lambda_A{}^B \Lambda_{A'}{}^{B'} \sigma^a_{BB'} = |\Delta_\Lambda| \sigma^a_{AA'}, \tag{2.32}$$

$$\sigma'^{aAA'} = \sigma^{aBB'} \Lambda_B^{-1A} \Lambda_{B'}^{-1A'} = |\Delta_\Lambda^{-1}| \sigma^{aAA'}, \tag{2.33}$$

ou, alternativamente, através dos complexos conjugados de (2.30-2.33). Obviamente, poder-se-ia usar também a versão covariante mundo de (2.32) e (2.33).

As densidades de espin escalares emergem quando levamos em consideração o fato de que todos os espaços de espin de $\mathcal{M}$ possuem duas dimensões complexas. Assim, os únicos objetos espinoriais totalmente antissimétricos *não-nulos* sempre carregam dois índices do mesmo tipo [8]. Para qualquer tensor de espin antissimétrico χ_{AB} pode-se, com efeito, escrever

$$\chi_{AB} = \frac{1}{2}\chi\gamma_{AB} = \chi_{[AB]}, \ \chi = \chi_C{}^C. \tag{2.34}$$

Agora, se observarmos esta última relação em conjunto com as leis de transformação para o espinor métrico γ, como enfatizado na Ref. [3], podemos definir uma densidade de espin escalar complexa de peso $+1$ como uma quantidade numérica que se comporta sob transformações de calibre como a componente γ de γ_{AB}. Uma densidade de espin escalar complexa de peso -1 emerge quando tomamos a versão contravariante de (2.34), e olhamos o comportamento sob transformações de calibre da componente γ^{-1} de γ^{AB}. Um procedimento análogo é utilizado para os casos do complexo conjugado de (2.34) e de sua versão contravariante, onde definem-se as densidades escalares complexas de anti-peso $+1$ e -1 como quantidades que se transformam como as componentes individuais não nulas de $\gamma_{A'B'}$ e $\gamma^{A'B'}$, respectivamente.

Para densidades de espin escalares complexas de peso w temos a seguinte prescrição:

$$\xi' = (\Delta_\Lambda)^w \xi, \tag{2.35}$$

e, para as de anti-peso y, temos

$$\eta' = (\bar{\Delta}_\Lambda)^y \eta. \tag{2.36}$$

No caso de uma densidade escalar α que possui peso w e anti-peso y, a lei de transformação é

$$\alpha' = (\Delta_\Lambda)^w \left(\bar{\Delta}_\Lambda\right)^y \alpha. \tag{2.37}$$

No caso particular onde $w = y$, a densidade α é dita possuir peso absoluto $2w$, e se comporta sob transformações de calibre como

$$\alpha' = |\Delta_\Lambda|^{2w} \alpha. \tag{2.38}$$

Em analogia com a situação mundo [17-19], densidades tensoriais de espin são definidas como produtos externos entre tensores de espin e densidades de espin escalares.

Quando olhamos o comportamento dos espinores métricos do formalismo ε sob transformações de calibre,[2] obtemos as propriedades de invariância

$$\varepsilon'_{AB} = (\Delta_\Lambda)^{-1} \Lambda_A{}^C \Lambda_B{}^D \varepsilon_{CD} = \varepsilon_{AB}, \tag{2.39}$$

e

$$\varepsilon'^{AB} = \Delta_\Lambda \varepsilon^{CD} \Lambda^{-1A}_{C} \Lambda^{-1B}_{D} = \varepsilon^{AB}, \tag{2.40}$$

como também suas conjugadas complexas. Assim, nota-se que todos os espinores métricos do formalismo ε se comportam como densidades tensoriais de espin invariantes de calibre. Vê-se que as densidades ε_{AB} e ε^{AB} possuem pesos -1 e $+1$ enquanto que $\varepsilon_{A'B'}$ e $\varepsilon^{A'B'}$ possuem anti-pesos -1 e $+1$, respectivamente. Assim, estes objetos podem ser vistos como símbolos de Levi-Civita espinoriais. Para alguns dos objetos conectores Hermitianos do formalismo ε , tem-se

$$\Sigma'_{aAA'} = |\Delta_\Lambda|^{-1} \Lambda_A{}^B \Lambda_{A'}{}^{B'} \Sigma_{aBB'} = \Sigma_{aAA'}, \tag{2.41}$$

[2] Tal comportamento pode ser especificado a partir da combinação das Eqs.(2.30-2.31) e (2.8-2.9).

e

$$\Sigma_a^{\prime AA'} = |\Delta_\Lambda| \Sigma_a^{BB'} \Lambda_B^{-1A} \Lambda_{B'}^{-1A'} = \Sigma_a^{AA'}, \tag{2.42}$$

de modo que os mesmos são densidades tensoriais de espin invariantes de pesos absolutos -1 e $+1$, respectivamente.

As leis de transformação (2.30-2.31) garantem a preservação de caráteres geométricos de calibre quando o processo de levantamento e abaixamento de índices é implementado no formalismo γ. Este processo no formalismo ε, por outro lado, geralmente altera os caráteres dos objetos cujos índices teriam sido movidos.

2.4 Derivadas Covariantes

Para prescrever derivadas covariantes de objetos espinoriais [3, 8], considera-se os espaços de espin de $\mathcal{M}$ assentados nos pontos x^a e $x^a + dx^a$. Uma diferencial covariante $D\zeta^A$ em x^a de um vetor de espin contravariante ζ^A é definida como a diferença entre o valor de ζ^A em $x^a + dx^a$ e o valor em x^a do vetor de espin que resulta de um deslocamento afim de ζ^A. Deste modo, tem-se

$$D\zeta^A = d\zeta^A + \vartheta_{aB}{}^A \zeta^B dx^a, \tag{2.43}$$

onde $\vartheta_{aB}{}^A$ é a conexão afim espinorial de índices não-linhados associada ao deslocamento afim em questão, sendo que no formalismo γ isto é denotado por $\gamma_{aB}{}^A$ e, no formalismo ε, por $\Gamma_{aB}{}^A$. Então, a derivada covariante de ζ^A é

$$\nabla_a \zeta^A = \partial_a \zeta^A + \vartheta_{aB}{}^A \zeta^B. \tag{2.44}$$

A derivada covariante de um vetor de espin covariante ξ_A é prescrita como

$$\nabla_a \xi_A = \partial_a \xi_A - \vartheta_{aA}{}^B \xi_B, \tag{2.45}$$

a qual emerge quando admite-se a aplicabilidade da regra de Leibniz para diferenciais covariantes, e exige-se que[3]

$$D(\zeta^A \xi_A) = d(\zeta^A \xi_A). \tag{2.46}$$

Para derivadas covariantes dos vetores de espin $\zeta^{A'}$ e $\xi_{A'}$, basta tomar o complexo conjugado das expressões (2.44) e (2.45). Derivadas covariantes de tensores de espin de valência arbitrária são obtidas efetuando-se produtos externos entre vetores de espin adequados, e levando-se a cabo expansões de Leibniz [8-11].

[3]Como na situação mundo [21-26], os operadores ∇_a são lineares e satisfazem a regra de Leibniz.

Deslocamentos afim espinoriais e mundo em $\mathcal{M}$ podem ser induzidos uns pelos outros[4] exigindo-se que os objetos conectores Hermitianos sejam covariantemente constantes, isto é,

$$DS^{a}_{AA'} = 0. \tag{2.47}$$

Este fato encontra-se profundamente envolvido na estrutura interna de cada formalismo.[5] Sempre que uma quantidade tensorial que carrega indíces mundo e índices espinoriais é derivada covariantemente, necessitaremos incorporar às expansões pertinentes as contribuições afim associadas com todos os índices carregados pela quantidade [3, 8, 9, 10]. Assim, para um objeto de valência arbitrária, com índices espinoriais e mundo, temos, por exemplo,

$$\nabla_b U^{A'}_{Aa} = \partial_b U^{A'}_{Aa} + \vartheta_{bB'}{}^{A'} U^{B'}_{Aa} - \vartheta_{bA}{}^{B} U^{A'}_{Ba} - \Gamma_{ba}{}^{c} U^{A'}_{Ac}, \tag{2.48}$$

onde $\Gamma_{ab}{}^{c}$ é a conexão afim mundo de g_{ab}.

Uma expressão que será de considerável utilidade na construção das estruturas de curvatura, é a conexão afim contraída $\vartheta_{aA}{}^{A}$ [3], a qual pode ser obtida a partir da assunção

$$\nabla_a \left(g_{AA'BB'}\right) = \nabla_a \left(\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}\right) = 0, \tag{2.49}$$

a qual, por sua vez, quando expandida explicitamente, é escrita como

$$\nabla_a \left(\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}\right) = \left(\partial_a \ln|\gamma|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\gamma_{aC}{}^{C}\right)\gamma_{AB}\gamma_{A'B'} = 0. \tag{2.50}$$

Isto nos fornece a relação

$$2\,\mathrm{Re}\,\gamma_{aC}{}^{C} = \gamma_{aC}{}^{C} + \gamma_{aC'}{}^{C'} = \partial_a \ln|\gamma|^2 . \tag{2.51}$$

Agora, se implementarmos a relação [3, 14]

$$\gamma_{aC'}{}^{C'} - \gamma_{aC}{}^{C} = 4i\Phi_a, \tag{2.52}$$

com Φ_a sendo um vetor mundo, e combiná-la com (2.51), obteremos a conexão afim contraída

$$\gamma_{aC}{}^{C} = -\left(\theta_a + 2i\Phi_a\right), \tag{2.53}$$

com o vetor mundo

$$\theta_a = \partial_a \ln|\gamma|^{-1} . \tag{2.54}$$

[4] No formalismo ε, todos os objetos conectores são covariantemente constantes, enquanto no formalismo γ, a princípio, somente os objetos conectores Hermitianos são (vide Ref. [14]).

[5] Para que a Eq.(2.47) seja uma característica da estrutura de cada formalismo, é necessário balancear o número de componentes independentes de $\Gamma_{ab}{}^{c}$ e $\vartheta_{aA}{}^{B}$, cujo procedimento é descrito em detalhes na Ref. [3].

A versão de (2.53) para o formalismo ε é escrita como

$$\Gamma_{aC}{}^{C} = -\left(\Pi_a + 2i\varphi_a\right), \tag{2.55}$$

com Π_a e φ_a sendo ambos vetores mundo. As partes imaginárias destas afinidades espinoriais contraídas geralmente coincidem uma com a outra, e fornecem um potencial eletromagnético afim Φ_a intrínsico à geometria de $\mathcal{M}$. Pode-se também usar as estruturas (2.53) e (2.55), e suas conjugadas complexas, para escrever derivadas covariantes de densidades de espin escalares de peso qualquer [3]. Por exemplo, se ζ é uma densidade escalar complexa de espin de peso w, temos

$$\nabla_a \zeta = \partial_a \zeta - w\zeta\gamma_a. \tag{2.56}$$

2.5 Algumas Equações de Autovalores

Uma das mais importantes características dos formalismos é o fato que os espinores métricos ε são covariantemente constantes [3, 8, 14]. Isto nos permite escrever

$$\nabla_a \gamma_{BC} = \left(\gamma^{-1}\nabla_a \gamma\right)\gamma_{BC}, \tag{2.57}$$

e, então, como

$$\nabla_a \gamma = \partial_a \gamma - \gamma\gamma_a, \tag{2.58}$$

obtemos a expansão

$$\nabla_a \gamma_{BC} = \left(\partial_a \log\gamma - \gamma_a\right)\gamma_{BC}. \tag{2.59}$$

Agora, utilizando a relação (2.5), podemos obter a equação de autovalor

$$\nabla_a \gamma_{BC} = i\beta_a \gamma_{BC}, \tag{2.60}$$

e, desde que $\nabla_a \delta_B{}^{C} = 0$, também obtemos

$$\nabla_a \gamma^{BC} = (-i)\,\beta_a \gamma^{BC}, \tag{2.61}$$

com β_a sendo um vetor mundo real invariante de calibre definido por [3, 14]

$$\beta_a = \partial_a \Phi + 2\Phi_a. \tag{2.62}$$

As equações de autovalores de $\gamma_{B'C'}$ e $\gamma^{B'C'}$ são encontradas tomando-se os complexos conjugados de (2.60) e (2.61).

Capítulo 3

Curvatura

Neste capítulo vamos construir as estruturas de curvaturas associadas com as conexões afim espinoriais de cada formalismo. Obteremos os objetos de curvatura mistos de Infeld e van der Waerden, e evidenciaremos o desdobramento dos mesmos em suas partes gravitacional e eletromagnética [3]. As partes gravitacionais fornecem um conjunto de funções de onda para grávitons de ambas as helicidades, como também uma constante cosmológica invariante de calibre. As partes eletromagnéticas, por suas vezes, aparecem como partes contraídas de estruturas de curvatura, e similarmente fornecem um conjunto de funções de onda para fótons. Os espinores de curvatura para o formalismo γ aparecem como tensores de espin, enquanto que para o formalismo ε, os correspondentes espinores aparecem como densidades espinoriais. Assim, realizaremos uma apresentação da estrutura de curvatura de $\mathcal{M}$ bem como as versões espinoriais de alguns dos entes matemáticos da Relatividade Geral.

3.1 Objetos de Curvatura Mistos de Infeld and van der Waerden

Um dos procedimentos para evidenciar a estrutura de curvatura de espin de $\mathcal{M}$ consiste [3, 7] primeiramente em considerar dois vetores de espin invariantes mundo ζ^A e ξ_A juntamente com a propriedade livre de torção

$$[\nabla_a, \nabla_b](\zeta^C \xi_C) = 0, \tag{3.1}$$

e, então, deixar comutadores entre operadores derivadas covariantes atuarem sobre eles individualmente, tal como segue

$$[\nabla_a, \nabla_b]\zeta^A = W_{abM}{}^A \zeta^M, \tag{3.2}$$

e

$$[\nabla_a, \nabla_b]\xi_A = -W_{abA}{}^M\xi_M. \qquad (3.3)$$

O objeto W envolvido em (3.2) e (3.3) constitui um típico objeto de curvatura misto de Infeld e van der Waerden [1, 3, 7], sendo expresso explicitamente por

$$W_{abA}{}^B = 2\partial_{[a}\vartheta_{b]A}{}^B - (\vartheta_{aA}{}^C\vartheta_{bC}{}^B - \vartheta_{bA}{}^C\vartheta_{aC}{}^B) = W_{[ab]A}{}^B, \qquad (3.4)$$

o qual satisfaz a relação

$$2W_{abA}{}^B + \delta_A{}^B W_{abA'}{}^{A'} = S^c_{AB'}S^{dBB'}R_{abcd}. \qquad (3.5)$$

Quando contraída nos índices A e B, a relação (3.5) nos mostra que

$$2(W_{abA}{}^A + W_{abA'}{}^{A'}) = R_{abh}{}^h = 0, \qquad (3.6)$$

isto é, esta contração implica na aniquilação de toda informação carregada por $R_{abc}{}^d$.

Podemos desdobrar os objetos W's em suas partes simétrica e antissimétrica em relação aos índices espinoriais, a saber [3]

$$W_{abAB} = W_{ab(AB)} + W_{ab[AB]}. \qquad (3.7)$$

Então, com a ajuda da Eq. (2.34), podemos escrever

$$W_{abAB} = W_{ab(AB)} + \frac{1}{2}W_{abC}{}^C M_{AB}. \qquad (3.8)$$

A parte simétrica de W_{abAB} da equação acima pode ser obtida movendo-se índices e realizando-se uma simetrização nos índices A e B da relação (3.5). Com efeito,

$$W_{ab(AB)} = \frac{1}{2}S^c_{AB'}S^{dB'}_B R_{abcd}. \qquad (3.9)$$

A parte antissimétrica pode ser obtida fazendo-se uma contração nos índices A e B da Eq. (3.4), o que resulta em

$$W_{abA}{}^A = 2\partial_{[a}\vartheta_{b]A}{}^A, \qquad (3.10)$$

tal que, com o auxílio da Eq. (2.53), a expressão (3.10) passa a ser escrita como

$$W_{abA}{}^A = -4i\partial_{[a}\Phi_{b]} = -2iF_{ab}, \qquad (3.11)$$

com F_{ab} sendo o tensor de Maxwell

$$F_{ab} \doteqdot 2\nabla_{[a}\Phi_{b]} = 2\partial_{[a}\Phi_{b]}. \qquad (3.12)$$

Deste modo, utilizando as relações (3.9) e (3.11), podemos reescrever (3.8) como

$$W_{abAB} = \frac{1}{2}S^c_{AB'}S^{dB'}_B R_{abcd} - iF_{ab}M_{AB}, \qquad (3.13)$$

onde fica claramente exibido o desdobramento entre a contribuição gravitacional e a eletromagnética de W: a parte simétrica em A e B carrega toda a informação gravitacional sobre a curvatura de $\mathcal{M}$, enquanto que a parte antissimétrica carrega toda a informação eletromagnética.

Sob transformações de calibre, no formalismo γ, o objeto W_{abAB} e seu complexo conjugado se comportam como tensores de espin enquanto que, no formalismo ε, os correspondentes objetos se comportam como densidades de espin invariantes de peso -1 e anti-peso -1, respectivamente.

3.2 Espinores de Curvatura Gravitacionais

Os espinores de curvatura associados ao $\vartheta_{aB}{}^{C}$ de cada formalismo surgem da configuração de bivetor portada por (3.13). Assim, tem-se

$$S^a_{AA'} S^b_{BB'} W_{abCD} = M_{A'B'} \omega_{ABCD} + M_{AB} \omega_{A'B'CD}, \tag{3.14}$$

onde

$$\omega_{ABCD} = \omega_{(AB)CD} \doteqdot \frac{1}{2} S^a_{AA'} S_B^{bA'} W_{abCD}, \tag{3.15}$$

e

$$\omega_{A'B'CD} = \omega_{(A'B')CD} \doteqdot \frac{1}{2} S^a_{AA'} S^{bA}_{B'} W_{abCD}, \tag{3.16}$$

são, de fato, usualmente chamados de espinores de curvatura. Devido ao comportamento sob transformações de calibre dos objetos W, os espinores de curvatura para o formalismo γ aparecem como tensores de espin, enquanto que os do formalismo ε aparecem como densidades tensoriais de espin de peso -2 e peso absoluto -2, respectivamente [3, 7].

O desdobramento dos objetos W em partes que carregam a informação gravitacional e a informação eletromagnética é repassado aos espinores de curvatura [3]. Assim sendo, podemos descrever a estrutura de curvatura gravitacional de $\mathcal{M}$ inteira utilizando o seguinte par de objetos espinoriais:

$$\mathbf{G} = (\omega_{AB(CD)}, \omega_{A'B'(CD)}). \tag{3.17}$$

Então, como estabelecido definitivamente na Ref. [3], podemos escrever a expressão espinorial do tensor de Riemann de acordo com a prescrição Hermitiana

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'} M_{C'D'} \omega_{AB(CD)} + M_{AB} M_{C'D'} \omega_{A'B'(CD)}) + \text{c.c.}. \tag{3.18}$$

Para fornecer uma interpretação cosmológica aos espinores gravitacionais, conforme realizado originalmente na Ref. [8], é conveniente reescrever (3.18) como

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (M_{A'B'} M_{C'D'} X_{ABCD} + M_{AB} M_{C'D'} \Xi_{CA'DB'}) + \text{c.c.}, \tag{3.19}$$

com as expressões de definição para os espinores X e Ξ sendo dadas por

$$X_{ABCD} \doteqdot \frac{1}{4} M^{A'B'} M^{C'D'} R_{AA'BB'CC'DD'} = \omega_{AB(CD)}, \tag{3.20}$$

e

$$\Xi_{CA'DB'} \doteqdot \frac{1}{4} M^{AB} M^{C'D'} R_{AA'BB'CC'DD'} = \omega_{A'B'(CD)}. \tag{3.21}$$

Elaboraremos a cerca da interpretação cosmológica referida acima na subseção 3.4.

3.3 Simetrias dos Espinores de Curvatura Gravitacionais

As propriedades de simetria de X_{ABCD} e $\Xi_{CA'DB'}$ são estabelecidas diretamente a partir das propriedades de simetria do tensor de Riemann [8-10]

$$R_{abcd} = R_{[ab][cd]}, \tag{3.22}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}, \tag{3.23}$$

e

$$R_{a[bcd]} = 0. \tag{3.24}$$

A propriedade de antissimetria em a e b exibida pela Eq. (3.22), nos fornece diretamente, com a ajuda de (3.19), as seguintes propriedades de simetria dos espinores de curvatura:

$$X_{ABCD} = X_{BACD}, \tag{3.25}$$

e

$$\Xi_{ABC'D'} = \Xi_{BAC'D'}. \tag{3.26}$$

Similarmente, a antissimetria em c e d nos fornece

$$X_{ABCD} = X_{ABDC}, \tag{3.27}$$

e

$$\Xi_{ABC'D'} = \Xi_{ABD'C'}, \tag{3.28}$$

tal que, combinando (3.25-3.28), podemos escrever

$$X_{ABCD} = X_{(AB)(CD)}, \tag{3.29}$$

e

$$\Xi_{ABC'D'} = \Xi_{(AB)(C'D')}. \tag{3.30}$$

Pela transposição dos pares de índices exibida pela Eq. (3.23), obtemos

$$X_{ABCD} = X_{CDAB}, \tag{3.31}$$

e

$$\Xi_{ABC'D'} = \Xi_{C'D'AB}. \tag{3.32}$$

Desde que índices espinoriais sempre assumem valores algebricamente independentes [8], conclui-se que a ordem dos índices de $\Xi_{ABC'D'}$ é imaterial.

Para obter a descrição espinorial da simetria cíclica do tensor de Riemann como dada em (3.24), escrevemos a bem conhecida relação mundo contraída [8]

$$^{*}R_{ab}{}^{bc} = 0, \tag{3.33}$$

onde $^{*}R_{abcd}$ é o primeiro dual a esquerda do tensor de Riemann, dado por[1]

$$^{*}R_{abcd} \doteqdot \frac{1}{2} e_{ab}{}^{rs} R_{rscd}. \tag{3.34}$$

A versão espinorial de (3.34) é escrita como [8]

$$^{*}R_{AA'BB'CC'DD'} = [(-i)(M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD} + M_{A'B'}M_{CD}\Xi_{ABC'D'})] + \text{c.c.}. \tag{3.35}$$

Assim, (3.33) produz a relação

$$X_{ABC}{}^{B} M_{A'C'} = X_{A'B'C'}{}^{B'} M_{AC}, \tag{3.36}$$

a qual, quando acoplada com $M^{A'C'}$, fornece

$$X_{ABC}{}^{B} = \frac{1}{2} X_{A'B'}{}^{A'B'} M_{AC}. \tag{3.37}$$

Então, acoplando-se (3.37) com M^{AC}, obtém-se

$$\Lambda = \bar{\Lambda}, \tag{3.38}$$

com a quantidade Λ sendo um escalar espin-mundo real definido por [8]

$$\Lambda \doteqdot \frac{1}{6} X_{AB}{}^{AB}. \tag{3.39}$$

Agora, se substituirmos (3.39) em (3.37), obtemos

$$X_{ABC}{}^{B} = 3\Lambda M_{AC}, \tag{3.40}$$

a qual estabelece que $X_{ABC}{}^{B}$ é antissimétrico no primeiro e terceiro índices,[2] a saber,

$$X_{ABC}{}^{B} = -X_{CBA}{}^{B}. \tag{3.41}$$

[1] O objeto $e_{ab}{}^{cd}$ é obtido a partir dos *tensores* alternantes de $\mathcal{M}$.

[2] Esta propriedade também pode ser verificada pelas simetrias dadas por (3.29) e (3.31).

3.4 O Espinor de Ricci

O espinor associado ao tensor de Ricci, segundo a convenção de sinal adotada aqui, é obtido acoplando-se (3.19) com $M^{BD}M^{B'D'}$. Tem-se

$$R_{AA'CC'} = X_{ABC}{}^{B}M_{A'C'} - \Xi_{ACC'A'} + \text{c.c.}. \tag{3.42}$$

Utilizando a relação (3.40), podemos reescrever (3.42) como

$$R_{AA'CC'} = 6\Lambda M_{AC}M_{A'C'} - 2\Xi_{ACA'C'}, \tag{3.43}$$

a qual, quando acoplada com $M^{AC}M^{A'C'}$, nos fornece o escalar de Ricci

$$R = 24\Lambda - \Xi_{AA'}{}^{AA'}. \tag{3.44}$$

Devido à simetria exibida por (3.30), vemos que $\Xi_{ABC'D'}$ tem traço nulo e, então, encontramos a famosa relação entre Λ e o escalar de Ricci

$$R = 24\Lambda. \tag{3.45}$$

Agora, por transcrição direta, podemos obter o resultado que o espinor associado à parte livre de traço do tensor de Ricci [8]

$$\hat{s}R_{ab} \doteqdot R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab}, \tag{3.46}$$

aparece como $-2\Xi_{ABA'B'}$. Sob certas circunstâncias, o espinor equivalente ao tensor de Einstein [8]

$$G_{ab} \doteqdot R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}, \tag{3.47}$$

é similarmente dado por

$$G_{AA'BB'} = -6\Lambda M_{AB}M_{A'B'} - 2\Xi_{AA'BB'}. \tag{3.48}$$

As equações de campo de Einstein com fontes e na presença da constante cosmológica são dadas por [22-27]

$$G_{ab} = -\kappa T_{ab} - \lambda g_{ab}, \tag{3.49}$$

onde T_{ab} denota a versão mundo do tensor energia-momento de alguma fonte. A forma espinorial de (3.49) é obtida também por transcrição direta, e é dada por [8]

$$-6\Lambda M_{AB}M_{A'B'} - 2\Xi_{AA'BB'} = -\kappa T_{AA'BB'} - \lambda M_{AB}M_{A'B'}. \tag{3.50}$$

Portanto, se acoplarmos (3.50) com $M^{AB}M^{A'B'}$, re-obtemos a relação de traço mencionada no Capítulo 1, a saber,

$$24\Lambda = \kappa T + 4\lambda, \tag{3.51}$$

a qual pode ser substítuida em (3.50) para expressar as equações de Einstein na forma

$$2\Xi_{AA'BB'} = \kappa \left(T_{AA'BB'} - \frac{1}{4} T M_{AB} M_{A'B'} \right). \tag{3.52}$$

Se considerarmos as equações de campo gravitacionais para o espaço vazio com uma constante cosmológica não nula, as equações (3.51) e (3.52) nos fornecerão, respectivamente,

$$\Lambda = \frac{1}{6}\lambda, \tag{3.53}$$

e

$$\Xi_{AA'BB'} = 0. \tag{3.54}$$

Nota-se aqui que $\Lambda = 0$ implica, a partir de (3.40), que

$$X_{A[B|C|D]} = 0, \tag{3.55}$$

tal que, neste caso, (3.29) nos leva à relação

$$X_{ABCD} = X_{(ABCD).} \tag{3.56}$$

3.5 O Espinor de Weyl

Vamos assumir que $\Lambda \neq 0$ e, então, usar as fórmulas de redução dadas na Ref. [8] para decompor o espinor de curvatura X_{ABCD}. Assim, levando em consideração as simetrias (3.29) e (3.31), as quais implicam em

$$X_{[ABCD]} = 0, \tag{3.57}$$

e

$$X_{(ABCD)} = X_{A(BCD)} = X_{(ABC)D}. \tag{3.58}$$

podemos decompor X_{ABCD} na expressão

$$X_{ABCD} = X_{A(BCD)} + \frac{1}{3}\left(X_{ABCD} - X_{ACBD}\right) + \frac{1}{3}\left(X_{ABCD} - X_{ADCB}\right). \tag{3.59}$$

Agora, contando com o auxílio da relação (2.34), podemos reescrever (3.59) na forma

$$X_{ABCD} = X_{A(BCD)} + \frac{1}{3} M_{BC} X_{AE}{}^{E}{}_{D} + \frac{1}{3} M_{BD} X_{AEC}{}^{E}, \tag{3.60}$$

tal que, com a relação (3.40), obtemos finalmente

$$X_{ABCD} = \Psi_{ABCD} - 2\Lambda M_{A(C} M_{D)B}, \tag{3.61}$$

com a definição
$$\Psi_{ABCD} \doteqdot X_{A(BCD)} = X_{(ABCD)}. \tag{3.62}$$

Em ambos os formalismos, o objeto Ψ que aparece em (3.62) é conhecido como o espinor de Weyl ou, simplesmente, como o espinor gravitacional. Claramente, como o espinor de Weyl é totalmente simétrico, ele possui cinco componentes complexas independentes, ou seja, dez componentes reais independentes, de modo que podemos interpretá-lo como uma função de onda para grávitons (partículas sem massa, sem carga e com espin ± 2) que representa em cada ponto de $\mathcal{M}$ os graus de liberdade de g_{ab}. Algumas vezes, convenciona-se [8] que grávitons de "mão-esquerda"e de "mão-direita"são representados por funções de onda não-linhadas e linhadas tais como Ψ_{ABCD} e $\Psi_{A'B'C'D'}$, respectivamente.

Com os espinores Ψ acima definidos, tem-se uma maneira simples de expressar R_{abcd} em suas partes irredutíveis [8], de modo que pode-se reexpressar o lado direito de (3.19) como

$$(M_{A'B'}M_{C'D'}\Psi_{ABCD} + M_{AB}M_{C'D'}\Xi_{A'B'CD} - 2\Lambda M_{A(C}M_{D)B}) + \text{c.c.}. \tag{3.63}$$

Como o espinor de curvatura $\Xi_{ABC'D'}$ possui três componentes complexas e três componentes reais, e Λ tem uma componente real, quando tomadas em conjunto com as cinco componentes complexas de Ψ_{ABCD}, concluimos que as vinte componentes reais do tensor de Riemann são preservadas sob transcrições espinoriais.[3]

3.6 Espinores de Curvatura Eletromagnéticos

As contribuições eletromagnéticas para os espinores de curvatura de cada formalismo entram na decomposição espinorial do respectivo $W_{abC}{}^{C}$, sendo dadas pelo par

$$\mathbf{E} = (\omega_{ABC}{}^{C},\ \omega_{A'B'C}{}^{C}). \tag{3.64}$$

As quantidades definidas por [3]

$$\frac{i}{2}\omega_{ABC}{}^{C} \doteqdot \phi_{AB} = \phi_{(AB)}, \tag{3.65}$$

e

$$\frac{i}{2}\omega_{A'B'C}{}^{C} \doteqdot \phi_{A'B'} = \phi_{(A'B')}, \tag{3.66}$$

são vistas localmente como funções de onda para fótons geométricos (partículas sem massa, sem carga e com espin ± 1), as quais estão profundamente envolvidas na estrutura de curvatura de $\mathcal{M}$.

[3]Esta contagem foi originalmente realizada por Witten [20].

A relação entre as funções de onda para fótons definidas acima e o potencial eletromagnético afim pode ser obtida realizando-se a decomposição de bivetor para o espinor de Maxwell, isto é,

$$S^a_{AA'} S^b_{BB'} F_{ab} \doteqdot 2 S^a_{AA'} S^b_{BB'} \nabla_{[a} \Phi_{b]} = M_{A'B'} \phi_{AB} + M_{AB} \phi_{A'B'}, \tag{3.67}$$

onde, então, encontramos

$$\phi_{AB} = -\nabla^{C'}_{(A} \Phi_{B)C'}, \; \phi_{A'B'} = -\nabla^{C}_{(A'} \Phi_{B')C}. \tag{3.68}$$

A versão espinorial das equações de Maxwell sem fontes externas é escrita em ambos os formalismos como [3]

$$\nabla^{AA'} \left(M_{A'B'} \phi_{AB} \right) = 0, \tag{3.69}$$

e

$$\nabla^{AA'} \left(M_{AB} \phi_{A'B'} \right) = 0. \tag{3.70}$$

No formalismo γ, como os espinores métricos não são geralmente covariantemente constantes, (3.69) e (3.70) passam a ser escritas como as seguintes equações de autovalores:

$$\nabla^{AB'} \phi_{AB} = i \beta^{AB'} \phi_{AB} \Leftrightarrow \nabla_{AB'} \phi^{AB} = (-i) \, \beta_{AB'} \phi^{AB}, \tag{3.71}$$

e

$$\nabla^{BA'} \phi_{A'B'} = (-i) \, \beta^{BA'} \phi_{A'B'} \Leftrightarrow \nabla_{BA'} \phi^{A'B'} = i \beta_{BA'} \phi^{A'B'}. \tag{3.72}$$

No formalismo ε, (3.69) e (3.70) se reduzem às equações de campo de massa de repouso nula invariantes de calibre

$$\nabla^{AB'} \phi_{AB} = 0 \Leftrightarrow \nabla_{AB'} \phi^{AB} = 0, \tag{3.73}$$

e

$$\nabla^{BA'} \phi_{A'B'} = 0 \Leftrightarrow \nabla_{BA'} \phi^{A'B'} = 0. \tag{3.74}$$

Capítulo 4

Equações de Campo e de Onda Gravitacionais

As equações de onda sem fontes para grávitons que deveriam pegar lugar no contexto dos formalimos $\gamma\varepsilon$ de Infeld e van der Waerden, foram deduzidas na Ref. [3] utilizando-se como base a combinação da versão espinorial da identidade de Bianchi gravitacional com certas técnicas calculacionais. Falando a grosso modo, tais técnicas envolvem comutadores entre operadores derivadas covariantes sem torção adequadamente contraídos, e fornecem uma especificação geométrica da ação dos comutadores sobre tensores e densidades de espin. Mais recentemente [12], foram estabelecidas as equações de onda para grávitons na presença de fontes generalizadas.

Neste capítulo, utilizaremos a metodologia referida acima para obter as equações de campo e de onda gravitacionais com fontes generalizadas no contexto de ambos os formalismos, tal como apresentado na Ref. [12]. Vale a pena notar que, durante o procedimento calculacional no formalismo γ, surgem acoplamentos entre funções de onda para grávitons e fótons [3, 7, 12]. Contudo, estas contribuições se cancelam quando os cálculos são completados. No formalismo ε, devido geralmente à natureza de densidade de espin das funções de onda pertinentes, os correspondentes acoplamentos são cancelados desde o início.

4.1 Equações de Campo

A versão mundo da identidade de Bianchi gravitacional [21-27] pode ser elegantemente escrita [8] em termos da divergência covariante do primeiro dual a esquerda do tensor de Riemann, isto é,

$$\nabla^{a*} R_{abcd} = 0. \tag{4.1}$$

A forma espinorial de (4.1) é dada em ambos os formalismos por

$$\nabla^{AA'*}R_{AA'BB'CC'DD'} = 0, \tag{4.2}$$

tal que, inserindo a expressão (3.35) em (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} &- \nabla^{AA'}\left(M_{A'B'}M_{C'D'}X_{ABCD}\right) - \nabla^{AA'}\left(M_{A'B'}M_{CD}\Xi_{ABC'D'}\right) \\ &\qquad + \nabla^{AA'}\left(M_{AB}M_{CD}X_{A'B'C'D'}\right) + \nabla^{AA'}\left(M_{AB}M_{C'D'}\Xi_{A'B'CD}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora, acoplando a Eq. (4.3) com $M^{DE}M^{C'D'}$, podemos escrever a versão espinorial da identidade de Bianchi na forma compacta

$$\nabla^{AA'}(X_{ABC}{}^{D}M_{A'B'}) = \nabla^{AA'}(\Xi_{A'B'C}{}^{D}M_{AB}), \tag{4.4}$$

juntamente com o complexo conjugado de (4.4).

4.1.1 Equações de Campo para o Formalismo γ

Como observado anteriormente, devido ao fato que os espinores métricos do formalismo γ não são geralmente covariantemente constantes, torna-se necessário avaliar as derivadas covariantes envolvidas na identidade de Bianchi espinorial correspondente. Deste modo, a partir da versão para o formalismo γ de (4.4), a qual é expressa por

$$\nabla^{AA'}(X_{ABC}{}^{D}\gamma_{A'B'}) = \nabla^{AA'}(\Xi_{A'B'C}{}^{D}\gamma_{AB}), \tag{4.5}$$

ou, alternativamente, por

$$\nabla^{AA'}(\gamma^{DE}\gamma_{A'B'}X_{ABCE}) = \nabla^{AA'}(\gamma^{DE}\gamma_{AB}\Xi_{A'B'CE}), \tag{4.6}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} &\gamma^{DE}(\nabla^{AA'}\gamma_{A'B'})X_{ABCE} + \gamma_{A'B'}(\nabla^{AA'}\gamma^{DE})X_{ABCE} + \gamma^{DE}\nabla^{A}_{B'}X_{ABCE} \\ &\qquad = \gamma^{DE}\gamma_{AB}\nabla^{AA'}\Xi_{A'B'CE}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para se chegar ao lado esquerdo de (4.7), considerou-se a aplicabilidade da regra de Leibniz para as derivadas covariantes, e para o lado direito, o fato peculiar de que $\nabla^{AA'}\left(\gamma^{DE}\gamma_{BC}\right) = 0$ (vide Ref. [3]). Então, utilizando as equações de autovalores (2.60) e (2.61) juntamente com suas conjugadas complexas, podemos reexpressar (4.7) como

$$\nabla^{A}_{B'}X_{ABCD} - 2i\beta^{A}_{B'}X_{ABCD} = \nabla^{A'}_{B}\Xi_{CDA'B'}, \tag{4.8}$$

a qual é a versão usual da identidade de Bianchi espinorial para o formalismo γ.

Realizando uma simetrização nos índices B, C e D da Eq. (4.8)

$$\nabla^A_{B'} X_{A(BCD)} - 2i\beta^A_{B'} X_{A(BCD)} = \nabla^{A'}_{(B} \Xi_{CD)A'B'}, \tag{4.9}$$

e utilizando a propriedade

$$X_{A(BCD)} = X_{(ABCD)} = \Psi_{ABCD}, \tag{4.10}$$

conseguimos introduzir a função de onda Ψ_{ABCD} em (4.8). Com efeito,

$$\nabla^A_{B'} \Psi_{ABCD} - 2i\beta^A_{B'} \Psi_{ABCD} = \nabla^{A'}_{(B} \Xi_{CD)A'B'}. \tag{4.11}$$

Consequentemente, com o auxílio das equações de Einstein, as quais no formalismo γ tem a forma

$$2\Xi_{AA'BB'} = \kappa \left(T_{AA'BB'} - \frac{1}{4} T \gamma_{AB} \gamma_{A'B'} \right), \tag{4.12}$$

obtemos a equação de campo para Ψ_{ABCD} na presença de fontes[1]

$$\nabla^A_{B'} \Psi_{ABCD} - 2i\beta^A_{B'} \Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{2} \nabla^{A'}_{(B} T_{CD)A'B'}. \tag{4.13}$$

As equações de campo para Ψ^{ABCD} e $\Psi_{AB}{}^{CD}$ podem ser obtidas diretamente da Eq. (4.13), conforme realizado na Ref. [12], tal que

$$\nabla_{AB'} \Psi^{ABCD} + 2i\beta_{AB'} \Psi^{ABCD} = -\frac{\kappa}{2} \left(\nabla^{A'(B} T^{CD)}{}_{A'B'} + 2i\beta^{A'(B} T^{CD)}{}_{A'B'} \right), \tag{4.14}$$

e

$$\nabla^A_{B'} \Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{2} \gamma^{CM} \gamma^{DN} \nabla^{A'}_{(B} T_{MN)A'B'}. \tag{4.15}$$

Deve ser enfatizado que a configuração indicial de $\Psi_{AB}{}^{CD}$ produz particularmente uma função de onda *tensorial* invariante de calibre em ambos os formalismos. Outro modo de escrever a Eq. (4.15) consiste em considerar a expansão

$$T_{CDA'B'} = T_{(CD)(A'B')} + \frac{1}{4} T \gamma_{CD} \gamma_{A'B'}, \tag{4.16}$$

de modo que obtemos

$$\nabla^A_{B'} \Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{6} \gamma^{CM} \gamma^{DN} \left(\nabla^{A'}_B T_{(MN)A'B'} + \nabla^{A'}_M T_{(BN)A'B'} + \nabla^{A'}_N T_{(BM)A'B'} \right), \tag{4.17}$$

já que a simetria de T_{ab} implica que $T_{(CD)A'B'} = T_{(CD)(A'B')}$.

[1] Nota-se que a simetrização envolvida em (4.11) aniquila a parte do traço T que aparece nas equações de Einstein.

4.1.2 Equações de Campo para o Formalismo ε

O procedimento para se obter as equações de campo no formalismo ε é formalmente o mesmo que o do formalismo γ, com a diferença computacional de que os espinores métricos ε são covariantemente constantes, o que facilita considerávelmente a obtenção das expressões correspondentes. Assim, partindo da identidade de Bianchi espinorial no formalismo ε

$$\nabla^{AA'}(X_{ABC}{}^{D}\varepsilon_{A'B'}) = \nabla^{AA'}(\Xi_{A'B'C}{}^{D}\varepsilon_{AB}), \tag{4.18}$$

obtém-se

$$\nabla^{A}_{B'}X_{ABCD} = \nabla^{A'}_{B}\Xi_{A'B'CD}, \tag{4.19}$$

tal que, realizando uma simetrização nos índices B, C e D

$$\nabla^{A}_{B'}X_{A(BCD)} = \nabla^{A'}_{(B}\Xi_{CD)A'B'}, \tag{4.20}$$

e utilizando a versão no formalismo ε das propriedades de simetria dos espinores X deduzidas anteriormente, obtemos

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \nabla^{A'}_{(B}\Xi_{CD)A'B'}. \tag{4.21}$$

Com o auxílio das equações de Einstein neste formalismo,

$$2\Xi_{AA'BB'} = \kappa\left(T_{AA'BB'} - \frac{1}{4}T\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}\right), \tag{4.22}$$

obtemos a equação de campo para Ψ_{ABCD}

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{2}\nabla^{A'}_{(B}T_{CD)A'B'}. \tag{4.23}$$

Para obter-se as equações de campo de Ψ^{ABCD} e $\Psi_{AB}{}^{CD}$, basta rearranjar adequadamente índices espinoriais como antes. Assim,

$$\nabla_{AB'}\Psi^{ABCD} = -\frac{\kappa}{2}\nabla^{A'(B}T^{CD)}{}_{A'B'}, \tag{4.24}$$

e

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{CM}\varepsilon^{DN}\nabla^{A'}_{(B}T_{MN)A'B'}, \tag{4.25}$$

onde, com o auxílio da versão para o formalismo ε da expansão (4.16), podemos reescrever esta última equação como

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{6}\left(\nabla^{A'}_{B}T^{(CD)}{}_{(A'B')} + 2\nabla^{A'(C}T_{B}{}^{D)}{}_{(A'B')}\right). \tag{4.26}$$

4.2 Equações de Onda

De fato, para estabelecer as equações de onda para os campos Ψ, necessitamos utilizar as técnicas calculacionais referidas anteriormente, as quais serão discutidas na próxima subseção. Com o uso destas técnicas, obteremos as equações de onda para o campo da Eq. (4.15) no contexto do formalismo γ. Utilizando os mecanismos fornecidos nas Refs. [3, 7] para mudar as valências dos campos do formalismo γ, obteremos as equações de onda para os campos de (4.13) e (4.14). Para as equações de onda no formalismo ε, utilizaremos o fato particular de que $\Psi_{AB}{}^{CD}$ é um tensor de espin em ambos os formalismos [3]. Assim sendo, a equação de onda para esta função de onda é formalmente a mesma que a correspondente do formalismo γ. As demais equações de onda serão obtidas a partir da propriedade geral de covariância constante dos espinores métricos ε.

4.2.1 Técnicas Calculacionais

O procedimento básico para se obter as equações de onda em cada formalismo consiste em escrever o comutador entre derivadas covariantes como a seguinte expansão de bivetor:

$$S^a_{AA'}S^b_{BB'}[\nabla_a, \nabla_b] = M_{A'B'}\Delta_{AB} + M_{AB}\Delta_{A'B'}, \tag{4.27}$$

onde cada um dos Δ's envolvidos são operadores diferenciais de segunda ordem simétricos que possuem a propriedade de linearidade e satisfazem a regra de Leibniz [3]. No formalismo γ, tanto Δ_{AB} quanto $\Delta_{A'B'}$ comportam-se sob transformações de calibre como tensores de espin covariantes, de modo que temos as respectivas expressões

$$\Delta_{AB} = \nabla_{C'(A}\nabla^{C'}_{B)} - i\beta_{C'(A}\nabla^{C'}_{B)} = \Delta_{(AB)}, \tag{4.28}$$

e

$$\Delta_{A'B'} = \nabla_{C(A'}\nabla^{C}_{B')} + i\beta_{C(A'}\nabla^{C}_{B')} = \Delta_{(A'B')}. \tag{4.29}$$

Vale a pena notar que também podemos expressar (4.28) e (4.29) de um modo formalmente mais simples alterando suas configurações indiciais, tal que

$$\Delta_{AB} = -\nabla^{C'}_{(A}\nabla_{B)C'}, \tag{4.30}$$

e

$$\Delta_{A'B'} = -\nabla^{C}_{(A'}\nabla_{B')C}. \tag{4.31}$$

No formalismo ε, ambos Δ_{AB} e $\Delta_{A'B'}$ se comportam como densidades espinoriais invariantes de calibre de peso -1 e anti-peso -1, respectivamente, e constituem as seguintes configurações:

$$\Delta_{AB} = \nabla_{C'(A}\nabla^{C'}_{B)} = -\nabla^{C'}_{(A}\nabla_{B)C'}, \tag{4.32}$$

e

$$\Delta_{A'B'} = \nabla_{C(A'}\nabla^{C}_{B')} = -\nabla^{C}_{(A'}\nabla_{B')C}. \tag{4.33}$$

A forma contravariante dos operadores Δ em ambos os formalismos, é fornecida utilizando-se a seguinte expressão:

$$\Delta^{AB} \doteqdot M^{AC}M^{BD}\Delta_{CD}, \tag{4.34}$$

a qual produz para o formalismo γ e para o formalismo ε, respectivamente, as seguintes configurações:

$$\Delta^{AB} = -(\nabla^{C'(A}\nabla^{B)}_{C'} + i\beta^{C'(A}\nabla^{B)}_{C'}) = \nabla^{(A}_{C'}\nabla^{B)C'}, \tag{4.35}$$

e

$$\Delta^{AB} = -\nabla^{C'(A}\nabla^{B)}_{C'} = \nabla^{(A}_{C'}\nabla^{B)C'}, \tag{4.36}$$

juntamente com os complexos conjugados de (4.35) e (4.36).

As derivadas Δ de vetores de espin ξ^A e η_A são dadas por [3]

$$\Delta_{AB}\xi^{C} = \omega_{ABM}{}^{C}\xi^{M}, \tag{4.37}$$

$$\Delta_{A'B'}\xi^{C} = \omega_{A'B'M}{}^{C}\xi^{M}, \tag{4.38}$$

e

$$\Delta_{AB}\eta_{C} = -\omega_{ABC}{}^{M}\eta_{M}, \tag{4.39}$$

$$\Delta_{A'B'}\eta_{C} = -\omega_{A'B'C}{}^{M}\eta_{M}, \tag{4.40}$$

juntamente com os (algebricamente independentes) complexos conjugados de (4.37-4.40). Quando escritas em termos dos espinores $X\Xi$, as derivadas acima aparecem como

$$\Delta_{AB}\xi^{C} = X_{ABD}{}^{C}\xi^{D} + \frac{1}{2}\omega_{ABD}{}^{D}\xi^{C}, \tag{4.41}$$

$$\Delta_{A'B'}\xi^{C} = \Xi_{A'B'D}{}^{C}\xi^{D} + \frac{1}{2}\omega_{A'B'D}{}^{D}\xi^{C}, \tag{4.42}$$

e

$$\Delta_{AB}\eta_{C} = -\left(X_{ABC}{}^{D}\eta_{D} + \frac{1}{2}\omega_{ABD}{}^{D}\eta_{C}\right), \tag{4.43}$$

$$\Delta_{A'B'}\eta_{C} = -\left(\Xi_{A'B'C}{}^{D}\eta_{D} + \frac{1}{2}\omega_{A'B'D}{}^{D}\eta_{C}\right). \tag{4.44}$$

Para uma densidade de espin escalar τ de peso w, temos as seguintes derivadas [3]

$$\Delta_{AB}\tau = -w\tau\omega_{ABC}{}^{C}, \tag{4.45}$$

e

$$\Delta_{A'B'}\tau = -w\tau\omega_{A'B'C}{}^{C}. \tag{4.46}$$

De fato, como no caso de derivadas covariantes, para densidades tensoriais de espin de valência arbitrária, obtemos as derivadas Δ considerando as expansões de Leibniz para produtos externos entre densidades de espin escalares e tensores de espin. Por exemplo, se $T_{C...D}$ é um tensor de espin, tem-se

$$\Delta_{AB}\left(\tau T_{C...D}\right) = \left(\Delta_{AB}\tau\right)T_{C...D} + \tau\Delta_{AB}T_{C...D}. \tag{4.47}$$

Muitos dos cálculos que foram efetuados na Ref. [12] utilizam procedimentos baseados no uso das seguintes regras algébricas [3]:

$$2\nabla^{A'}_{[C}\nabla_{A]A'} = M_{AC}\Box = \nabla^{A'}_{D}\left(M_{CA}\nabla^{D}_{A'}\right), \tag{4.48}$$

e

$$2\nabla^{[C}_{A'}\nabla^{A]A'} = M^{CA}\Box = \nabla^{D}_{A'}\left(M^{AC}\nabla^{A'}_{D}\right), \tag{4.49}$$

onde $\Box$ é o operador d'Alembertiano definido por

$$\Box \doteqdot S^{a}_{AA'}S^{bBB'}\nabla_a\nabla_b = \nabla_{DD'}\nabla^{DD'} = \nabla^{DD'}\nabla_{DD'}, \tag{4.50}$$

o qual é invariante de calibre. Torna-se necessário, também, utilizar as seguintes configurações que envolvem desdobramentos de operadores derivadas covariantes contraídas de segunda ordem [3]:

$$\nabla^{C}_{A'}\nabla^{AA'} = \Delta^{AC} - \frac{1}{2}M^{AC}\Box, \tag{4.51}$$

e

$$\nabla^{A'}_{C}\nabla_{AA'} = -\Delta_{AC} + \frac{1}{2}M_{AC}\Box, \tag{4.52}$$

juntamente com a regra de deslocamento indicial

$$\nabla^{L(A'}\nabla^{B')S} = \nabla^{S(A'}\nabla^{B')L} + M^{LS}\Delta^{A'B'}, \tag{4.53}$$

e a versão covariante de (4.53).

4.2.2 Equações de Onda no Formalismo γ

Para obter as equações de onda no formalismo γ, é necessário reescrever a Eq. (4.15) do seguinte modo:

$$\nabla^{AB'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{S(B}\nabla^{SA'}T_{MN)A'B'}. \tag{4.54}$$

Operando sobre (4.54) com $\nabla^{L}_{B'}$

$$\nabla^{L}_{B'}\nabla^{AB'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{2}\nabla^{L}_{B'}\left(\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{S(B}\nabla^{SA'}T_{MN)A'B'}\right), \tag{4.55}$$

e levando em conta que

$$\nabla^{L}_{B'}\left(\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{SB}\right)=0, \tag{4.56}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\nabla^{L}_{B'}\nabla^{AB'}\Psi_{AB}{}^{CD} &= \frac{\kappa}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma^{B'D'}\gamma_{S(B}\nabla^{L}_{B'}\nabla^{SA'}T_{MN)A'B'}\\ &= -\frac{\kappa}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{S(B}\nabla^{LB'}\nabla^{SA'}T_{MN)A'B'}\\ &= -\frac{\kappa}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{S(B}\nabla^{L(A'}\nabla^{B')S}T_{MN)A'B'}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Utilizando as regras (4.51)-(4.53), podemos escrever (4.57) como

$$\begin{aligned}&\left(\Delta^{LA}+\frac{1}{2}\gamma^{LA}\Box\right)\Psi_{AB}{}^{CD}\\ &\qquad = -\frac{\kappa}{2}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{S(B}\left(\nabla^{L(A'}\nabla^{B')S}+\gamma^{LS}\Delta^{A'B'}\right)T_{MN)A'B'}.\end{aligned} \tag{4.58}$$

Agora, precisamos avaliar as duas derivadas Δ envolvidas em (4.58). A do termo a esquerda é dada em [3], e seu resultado é

$$\Delta^{LA}\Psi_{AB}{}^{CD}=\frac{R}{4}\Psi^{CDL}{}_{B}-3\Psi_{MN}{}^{(CD}\Psi^{LG)MN}\gamma_{GB}. \tag{4.59}$$

A derivada Δ do termo do lado direito da equação (4.58) é calculada na Ref. [12], e nos fornece

$$\Delta^{A'B'}T_{MNA'B'}=-2\Xi^{A'B'G}{}_{(M}T_{N)GA'B'}, \tag{4.60}$$

a qual, com o auxílio das equações de Einstein (3.52), aparece como

$$\Delta^{A'B'}T_{MNA'B'}=-\kappa T^{A'B'G}{}_{(M}T_{N)GA'B'}=0, \tag{4.61}$$

onde a última igualdade de (4.61) é devida ao fato que T_{ab} possui componentes numéricas e o número de índices contraídos é ímpar. Levando em consideração (4.59) e (4.61), vemos que a Eq. (4.58) pode ser escrita como

$$\left(\Box+\frac{R}{2}\right)\Psi_{AB}{}^{CD}-6\Psi_{MN}{}^{(CD}\Psi^{GH)MN}\gamma_{GA}\gamma_{HB}=S_{AB}{}^{CD}, \tag{4.62}$$

com a definição[2]

$$S_{AB}{}^{CD}\doteqdot-\kappa\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{LA}\nabla^{(A'}_{(B}\nabla^{B')L}T_{MN)A'B'}. \tag{4.63}$$

A configuração de (4.63) é simétrica nos índices C e D. A simetria em A e B, imposta por (4.62), é facilmente verificada pela computação

$$\begin{aligned}&\gamma_{L[A}\left(\nabla^{(A'}_{B]}\nabla^{B')L}T_{MNA'B'}+\nabla^{(A'}_{|M|}\nabla^{B')L}T_{B]NA'B'}+\nabla^{(A'}_{|N|}\nabla^{B')L}T_{B]NA'B'}\right)\\ &\qquad = \gamma_{BA}\nabla^{(A'}_{(M}\nabla^{B')L}T_{N)LA'B'}=0,\end{aligned} \tag{4.64}$$

[2]Na referência [12] há um fator 2 "perdido"na expressão para $S_{AB}{}^{CD}$.

onde o último estágio é devido à (4.61) e ao fato que T_{ab} tem divergência covariante nula. É um tanto evidente que a propriedade de simetria deduzida acima também é válida para os índices A, N e A, M, de modo que S_{ABCD} é totalmente simétrico.

Para se obter as equações de onda para Ψ_{ABCD} e Ψ^{ABCD}, podemos utilizar o procedimento desenvolvido em [3], o qual implementa as seguintes correlações para a dedução da equação de onda para Ψ_{ABCD}:

$$\Box\Psi_{ABCD} = \Box\left(\Psi_{AB}{}^{LM}\gamma_{LC}\gamma_{MD}\right), \tag{4.65}$$

e

$$\Box\left(\gamma_{LC}\gamma_{MD}\right) = -\overline{\Upsilon}_{(G)}\gamma_{LC}\gamma_{MD}, \tag{4.66}$$

juntamente com

$$2\left(\nabla_h\Psi_{AB}{}^{LM}\right)\nabla^h\left(\gamma_{LC}\gamma_{MD}\right) = 4\left(2\beta^h\beta_h + i\beta^h\nabla_h\right)\Psi_{ABCD}, \tag{4.67}$$

onde

$$\Upsilon_{(G)} \doteqdot 4\beta^h\beta_h + 2i\left(\Box\Phi + 2\nabla_h\Phi^h\right). \tag{4.68}$$

De modo similar, para o caso de Ψ^{ABCD}, tem-se

$$\Box\Psi^{ABCD} = \Box\left(\gamma^{AL}\gamma^{BM}\Psi_{LM}{}^{CD}\right), \tag{4.69}$$

e

$$\Box\left(\gamma^{AL}\gamma^{BM}\right) = -\Upsilon_{(G)}\gamma^{AL}\gamma^{BM}, \tag{4.70}$$

juntamente com

$$2\nabla^h\left(\gamma^{AL}\gamma^{BM}\right)\left(\nabla_h\Psi_{LM}{}^{CD}\right) = 4\left(2\beta^h\beta_h - i\beta^h\nabla_h\right)\Psi^{ABCD}. \tag{4.71}$$

Assim, após a realização das manipulações pertinentes, obtem-se

$$\left(\Box - 4i\beta^h\nabla_h - \Upsilon_{(G)} + \frac{R}{2}\right)\Psi_{ABCD} - 6\Psi_{MN(AB}\Psi_{CD)}{}^{MN} = S_{ABCD}, \tag{4.72}$$

onde

$$S_{ABCD} = -\kappa\gamma_{L(A}\nabla_B^{(A'}\nabla^{B')L}T_{CD)A'B'}, \tag{4.73}$$

e

$$\left(\Box + 4i\beta^h\nabla_h - \overline{\Upsilon}_{(G)} + \frac{R}{2}\right)\Psi^{ABCD} - 6\Psi_{MN}{}^{(AB}\Psi^{CD)MN} = S^{ABCD}, \tag{4.74}$$

com

$$S^{ABCD} = -\kappa\gamma^{AR}\gamma^{BV}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{L(R}\nabla_V^{(A'}\nabla^{B')L}T_{MN)A'B'}, \tag{4.75}$$

e os complexos conjugados de (4.72) e (4.74). É estabelecido na Ref. [3] que os lados esquerdos das equações de onda para Ψ_{ABCD} e Ψ^{ABCD} podem ser obtidos um do outro com base no uso das regras

$$i\beta^h \nabla_h \leftrightarrow (-i)\, \beta^h \nabla_h, \tag{4.76}$$

e

$$\Upsilon_{(G)} = \overline{\Upsilon}_{(G)}. \tag{4.77}$$

4.2.3 Equações de Onda no Formalismo ε

As equações de onda para o formalismo ε podem ser facilmente obtidas se levarmos em consideração o fato que $\Psi_{AB}{}^{CD}$ é um tensor de espin em ambos os formalismos. Assim, $\Delta^{LG}\Psi_{GB}{}^{CD}$ possui a mesma forma puramente gravitacional da Eq. (4.59). Desde que $T_{ABA'B'}$ aparece no formalismo ε como uma densidade de espin Hermitiana de peso absoluto -2, a derivada (4.60) também se anula aqui de modo que a Eq. (4.62) é formalmente válida em ambos os formalismos. Assim, a equação de onda para $\Psi_{AB}{}^{CD}$ é dada por

$$\left(\Box + \frac{R}{2}\right) \Psi_{AB}{}^{CD} - 6\Psi_{MN}{}^{CD}\Psi_{AB}{}^{MN} = s_{AB}{}^{CD}, \tag{4.78}$$

com a definição

$$s_{AB}{}^{CD} \doteqdot -\kappa \varepsilon^{CM} \varepsilon^{DN} \nabla^{(A'}_{(A} \nabla^{B')}_{B} T_{MN)A'B'}. \tag{4.79}$$

As equações de onda para Ψ_{ABCD} e Ψ^{ABCD} podem ser obtidas gerenciando-se adequadamente os índices de (4.78). Posto que os espinores métricos do formalismo ε são covariantemente constantes, temos[3]

$$\left(\Box + \frac{R}{2}\right) \Psi_{ABCD} - 6\Psi_{MN(AB}\Psi_{CD)}{}^{MN} = s_{ABCD}, \tag{4.80}$$

com

$$s_{ABCD} = -\kappa \nabla^{(A'}_{(A} \nabla^{B')}_{B} T_{CD)A'B'}, \tag{4.81}$$

e

$$\left(\Box + \frac{R}{2}\right) \Psi^{ABCD} - 6\Psi_{MN}{}^{(AB}\Psi^{CD)MN} = s^{ABCD}, \tag{4.82}$$

onde

$$s^{ABCD} = -\kappa \nabla^{(A(A'} \nabla^{B')B} T^{CD)}{}_{A'B'}. \tag{4.83}$$

[3] Na Ref. [12], há um fator 2 "perdido"também nas equações de onda para o formalismo ε.

Capítulo 5

Equações de Campo e de Onda Gravitacionais com Fontes Eletromagnéticas

Uma aplicação direta das equações de campo e de onda para grávitons obtidas no capítulo anterior, consiste em implementar fontes eletromagnéticas com um tensor energia momento tal como aquele dado nas Refs. [6, 8, 9, 10, 11, 28]. No formalismo ε, a forma destas equações já tinha sido fixada anteriormente nas Refs. [6, 8] com campos eletromagnéticos *externos* (não-geométricos). Porém, o caráter de densidade de espin intrinsicamente portado pelo formalismo ε foi lá ignorado. A situação para o formalismo γ ainda não tinha sido estabelecida. Assim, neste capítulo, completaremos o cenário para ambos os formalismos das equações de campo e de onda gravitacionais com fontes eletromagnéticas oriundas de curvaturas. No formalismo γ, aparecerá um novo termo de fonte, o qual pode ser associado à uma densidade de corrente eletromagnética que está intimamente ligada com a estrutura de curvatura de $\mathcal{M}$.

5.1 Tensor Energia Momento Eletromagnético

A versão mundo do tensor energia-momento eletromagnético [8, 10, 26] adotado neste trabalho, tem a forma

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} - F_{ac}F_b{}^c\right), \tag{5.1}$$

com F_{ab} efetivamente constituindo a parte contraída $W_{abC}{}^C$. Por transcrição direta, T_{ab} tem sua versão espinorial dada por

$$T_{AA'BB'} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}M_{AB}M_{A'B'}F_{CC'DD'}F^{CC'DD'} - F_{AA'CC'}F_{BB'}{}^{CC'}\right). \tag{5.2}$$

Os dois termos quadráticos que aparecem na Eq. (5.2) podem ser trabalhados usando-se a relação (3.67). Tem-se

$$F_{CC'DD'}F^{CC'DD'} = 2\left(\phi_{CD}\phi^{CD} + \phi_{C'D'}\phi^{C'D'}\right), \tag{5.3}$$

e

$$F_{AA'CC'}F_{BB'}{}^{CC'} = -2\phi_{AB}\phi_{A'B'} + M_{AB}\phi_{A'C'}\phi_{B'}{}^{C'} + \phi_{AC}\phi_{B}{}^{C}M_{A'B'}. \tag{5.4}$$

Assim, a Eq. (5.2) pode ser reescrita concisamente como

$$T_{AA'BB'} = \frac{1}{2\pi}\phi_{AB}\phi_{A'B'}. \tag{5.5}$$

É óbvio que, em concordância com a situação mundo, o tensor energia-momento eletromagnético tem traço nulo em ambos os formalismos, isto é

$$T_a{}^a = M^{AB}M^{A'B'}T_{AA'BB'} = \frac{1}{2\pi}M^{AB}M^{A'B'}\phi_{AB}\phi_{A'B'} = 0. \tag{5.6}$$

A propriedade de divergência nula de todo tensor energia-momento também pode ser verificada como segue

$$\begin{aligned}\nabla^{AA'}T_{AA'BB'} &= \frac{1}{2\pi}\nabla^{AA'}\left(\phi_{AB}\phi_{A'B'}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\nabla^{AA'}\phi_{AB}\right)\phi_{A'B'} + \phi_{AB}\left(\nabla^{AA'}\phi_{A'B'}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde, para o formalismo γ, com o auxílio das equações de Maxwell (3.71-3.72), obtemos

$$\nabla^{AA'}T_{AA'BB'} = \frac{1}{2\pi}\left(i\beta^{AA'} - i\beta^{AA'}\right)\phi_{AB}\phi_{A'B'} = 0. \tag{5.8}$$

Para o formalismo ε, com o auxílio das equações de Maxwell (3.73-3.74), similarmente obtemos

$$\nabla^{AA'}T_{AA'BB'} = 0. \tag{5.9}$$

5.2 Equações de Campo

As equações de campo para grávitons na presença de fontes eletromagnéticas geométricas são obtidas diretamente a partir das equações de campo para fontes generalizadas apresentadas no capítulo anterior. Para o formalismo γ, obteremos explìcitamente as equações de campo para Ψ_{ABCD}, Ψ^{ABCD} e $\Psi_{AB}{}^{CD}$, enquanto que para o formalismo ε, obteremos inicialmente a equação para Ψ_{ABCD} e, então, realizando alterações apropriadas nas configurações indiciais pertinentes, obteremos as demais.

5.2.1 Equações de Campo no Formalismo γ

No formalismo γ, para se obter as equações de campo para Ψ_{ABCD} partirmos da Eq. (4.13) com o tensor energia-momento eletromagnético dado pela Eq. (5.5). Deste modo,

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} - 2i\beta^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{4\pi}\nabla^{A'}_{(B}\left(\phi_{CD)}\phi_{A'B'}\right). \tag{5.10}$$

Expandindo em Leibniz o lado direito da equação acima, nos leva a

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} - 2i\beta^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{4\pi}\left[\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{CD)}\right)\phi_{A'B'} + \phi_{(CD}\left(\nabla^{A'}_{B)}\phi_{A'B'}\right)\right], \tag{5.11}$$

tal que, utilizando as equações de Maxwell (3.71), obtemos a equação de campo para Ψ_{ABCD}

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} - 2i\beta^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{4\pi}\left[\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{CD)}\right)\phi_{A'B'} - i\beta^{A'}_{(B}\phi_{CD)}\phi_{A'B'}\right]. \tag{5.12}$$

De fato, a teoria de Maxwell no formalismo γ sugere interpretar estruturas da forma $-i\beta^{A'}_{A}\phi_{A'B'}$, bem como o complexo conjugado disto, como densidades geométricas de corrente eletromagnética.

Para as equações de campo que envolvem as funções de onda Ψ^{ABCD} e $\Psi_{AB}{}^{CD}$, partimos das Eqs. (4.14) e (4.15) com o tensor energia-momento eletromagnético. Desta forma, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\nabla_{AB'}\Psi^{ABCD} + 2i\beta_{AB'}\Psi^{ABCD} \\
&= -\frac{\kappa}{4\pi}[\nabla^{A'(B}\left(\phi^{CD)}\phi_{A'B'}\right) + 2i\beta^{A'(B}\phi^{CD)}\phi_{A'B'}] \\
&= -\frac{\kappa}{4\pi}[\left(\nabla^{A'(B}\phi^{CD)}\right)\phi_{A'B'} - i\beta^{A'(B}\phi^{CD)}\phi_{A'B'} + 2i\beta^{A'(B}\phi^{CD)}\phi_{A'B'}] \\
&= -\frac{\kappa}{4\pi}\left[\left(\nabla^{A'(B}\phi^{CD)}\right)\phi_{A'B'} + i\beta^{A'(B}\phi^{CD)}\phi_{A'B'}\right],
\end{aligned} \tag{5.13}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla^{A}_{B'}\Psi_{AB}{}^{CD} &= \frac{\kappa}{4\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\nabla^{A'}_{(B}\left(\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right) \\
&= \frac{\kappa}{4\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\left[\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} + \phi_{(MN}\left(\nabla^{A'}_{B)}\phi_{A'B'}\right)\right] \\
&= \frac{\kappa}{4\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\left[\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - i\beta^{A'}_{(B}\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right].
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.2.2 Equações de Campo no Formalismo ε

As equações de campo para Ψ_{ABCD} no formalismo ε podem ser obtidas a partir da Eq. (4.23) com o tensor energia-momento eletromagnético. Assim,

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{4\pi}\nabla^{A'}_{(B}\left(\phi_{CD)}\phi_{A'B'}\right). \tag{5.15}$$

Portanto, expandindo o lado direito de (5.15) em Leibniz

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{4\pi}\left[\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{CD)}\right)\phi_{A'B'} + \phi_{(CD}\left(\nabla^{A'}_{B)}\phi_{A'B'}\right)\right], \tag{5.16}$$

e observando que o último termo da direita de (5.16) se anula devido as equações de Maxwell no formalismo ε, obtemos

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{ABCD} = \frac{\kappa}{4\pi}\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{CD)}\right)\phi_{A'B'}. \tag{5.17}$$

Podemos obter as equações de campo para Ψ^{ABCD} e $\Psi_{AB}{}^{CD}$ diretamente alterando a valência de (5.17), e considerando mais uma vez a constância covariante dos espinores métricos do formalismo ε. Deste modo, obtemos

$$\nabla_{AB'}\Psi^{ABCD} = -\frac{\kappa}{4\pi}\left(\nabla^{A'(B}\phi^{CD)}\right)\phi_{A'B'}, \tag{5.18}$$

e

$$\nabla^{A}_{B'}\Psi_{AB}{}^{CD} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{CM}\varepsilon^{DN}\left(\nabla^{A'}_{(B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'}. \tag{5.19}$$

5.3 Equações de Onda

As equações de onda para grávitons na presença de fontes generalizadas foram apresentadas no capítulo anterior. Para particularizarmos para fontes eletromagnéticas geométricas, basta calcularmos os objetos S totalmente simétricos no caso do tensor energia-momento dado por (5.5).

5.3.1 Equações de Onda no Formalismo γ

As equações de onda para o formalismo γ são dadas por (4.62), (4.72) e (4.75), com os respectivos objetos S sendo dados por (4.63), (4.73) e (4.74), os quais são escritos na situação sob consideração como

$$S_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{L(A}\nabla^{(A'}_{B}\nabla^{B')L}\left(\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right), \tag{5.20}$$

$$S_{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma_{L(A}\nabla^{(A'}_{B}\nabla^{B')L}\left(\phi_{CD)}\phi_{A'B'}\right), \tag{5.21}$$

e

$$S^{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{AR}\gamma^{BV}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\gamma_{L(R}\nabla^{(A'}_{V}\nabla^{B')L}\left(\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right). \tag{5.22}$$

Vamos inicialmente expandir as derivadas covariantes envolvidas em (5.20). Deste modo, ao introduzir γ_{LA} para dentro da primeira derivada covariante, obtemos

$$S_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\left[\nabla^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\left(\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right) - i\beta^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\left(\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right)\right]. \tag{5.23}$$

Então, utilizando as equações de autovalores mostradas na subseção 2.5, podemos escrever

$$S_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}\nabla^{(A'}_{(A}\left[\left(\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - i\beta^{B')}_{B}\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right] - i\beta^{(A'}_{(A}\left[\left(\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - i\beta^{B')}_{B}\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right], \quad (5.24)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} S_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}[& \left(\nabla^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - i\beta^{(A'}_{(A}\left(\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} \\ & - i\left(\nabla^{(A'}_{(A}\phi_{MN}\right)\beta^{B')}_{B)}\phi_{A'B'} - i\left(\nabla^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\right)\phi_{MN)}\phi_{A'B'} - \beta^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\phi_{MN)}\phi_{A'B'} \\ & - i\beta^{(A'}_{(A}\left(\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - \beta^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\phi_{MN)}\phi_{A'B'}]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Portanto, se levarmos em conta as simetrias pertinentes, podemos simplificar a configuração (5.25) para

$$\begin{aligned} S_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{CM}\gamma^{DN}[& \left(\nabla^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - 3i\beta^{(A'}_{(A}\left(\nabla^{B')}_{B}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} \\ & - i\left(\nabla^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\right)\phi_{MN)}\phi_{A'B'} - 2\beta^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\phi_{MN)}\phi_{A'B'}]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

As expressões para S_{ABCD} e S^{ABCD} podem ser obtidas acoplando-se adequadamente os espinores métricos apropriados à expressão (5.26). Assim, temos

$$\begin{aligned} S_{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi}[& \left(\nabla^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\phi_{CD)}\right)\phi_{A'B'} - 3i\beta^{(A'}_{(A}\left(\nabla^{B')}_{B}\phi_{CD)}\right)\phi_{A'B'} \\ & - i\left(\nabla^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\right)\phi_{CD)}\phi_{A'B'} - 2\beta^{(A'}_{(A}\beta^{B')}_{B}\phi_{CD)}\phi_{A'B'}], \end{aligned} \quad (5.27)$$

e

$$\begin{aligned} S^{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\gamma^{AR}\gamma^{BV}\gamma^{CM}\gamma^{DN}[& \left(\nabla^{(A'}_{(R}\nabla^{B')}_{V}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} \\ & - 3i\beta^{(A'}_{(R}\left(\nabla^{B')}_{V}\phi_{MN)}\right)\phi_{A'B'} - i\left(\nabla^{(A'}_{(R}\beta^{B')}_{V}\right)\phi_{MN)}\phi_{A'B'} \\ & - 2\beta^{(A'}_{(R}\beta^{B')}_{V}\phi_{MN)}\phi_{A'B'}]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.3.2 Equações de Onda no Formalismo ε

No formalismo ε, as equações de onda são dadas por (4.78), (4.80) e (4.82), com as respectivas estruturas de fontes sendo expressas por (4.79), (4.81) e (4.83). Assim, tem-se

$$s_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{CM}\varepsilon^{DN}\nabla^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\left(\phi_{MN)}\phi_{A'B'}\right), \quad (5.29)$$

$$s_{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi}\nabla^{(A'}_{(A}\nabla^{B')}_{B}\left(\phi_{CD)}\phi_{A'B'}\right), \quad (5.30)$$

e

$$s^{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \nabla^{(A(A'} \nabla^{B')B} \left(\phi^{CD)} \phi_{A'B'} \right). \tag{5.31}$$

Para avaliarmos as derivadas covariantes envolvidas nestas últimas configurações, basta trabalharmos com (5.29), já que podemos facilmente obter os correspondentes resultados para (5.30) e (5.31) simplesmente alterando configurações indiciais com base na constância covariante dos espinores métricos ε. Deste modo, obtemos

$$s_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{CM} \varepsilon^{DN} \nabla^{(A'}_{(A} \nabla^{B')}_{B} \left(\phi_{MN)} \phi_{A'B'} \right), \tag{5.32}$$

isto é,

$$s_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{CM} \varepsilon^{DN} \nabla^{(A'}_{(A} \left[\left(\nabla^{B')}_{B} \phi_{MN)} \right) \phi_{A'B'} + \phi_{MN} \left(\nabla^{B')}_{B)} \phi_{A'B'} \right) \right], \tag{5.33}$$

onde, devido a (3.74), o último termo de (5.33) se anula. Consequentemente, expandindo a outra derivada covariante de (5.33), obtém-se a estrutura

$$s_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{CM} \varepsilon^{DN} \left[\left(\nabla^{(A'}_{(A} \nabla^{B')}_{B} \phi_{MN)} \right) \phi_{A'B'} + \left(\nabla^{(B'}_{(B} \phi_{MN} \right) \left(\nabla^{A')}_{A)} \phi_{A'B'} \right) \right], \tag{5.34}$$

com o último termo da qual também se anulando devido a (3.74). Desta forma, conseguimos

$$s_{AB}{}^{CD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{CM} \varepsilon^{DN} \left(\nabla^{(A'}_{(A} \nabla^{B')}_{B} \phi_{MN)} \right) \phi_{A'B'}, \tag{5.35}$$

a qual, concordantemente, pode ter sua configuração indicial imediatamente modificada para

$$s_{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \left(\nabla^{(A'}_{(A} \nabla^{B')}_{B} \phi_{CD)} \right) \phi_{A'B'}, \tag{5.36}$$

e

$$s^{ABCD} = -\frac{\kappa}{2\pi} \left(\nabla^{(A(A'} \nabla^{B')B} \phi^{CD)} \right) \phi_{A'B'}. \tag{5.37}$$

Capítulo 6

Conclusões

A introdução de estruturas espinoriais no contexto da Relatividade Geral nos permite obter resultados que não podem ser obtidos no contexto tradicional, puramente mundo, da teoria. Com o uso dos formalismos $\gamma\varepsilon$, consegue-se visualizar curvaturas espaço-temporais como desdobramentos que envolvem contribuições gravitacionais e eletromagnéticas. Além disso, neste cenário, ocorrem naturalmente funções de onda para fótons que são intrínsecas à geometria, mas há também a possibilidade de descrever-se a propagação de campos externos de espins semi-inteiros, em contraposição ao formalismo puramente mundo que descreve somente partículas com espins inteiros.

Os procedimentos que conduziram às estruturas apresentadas neste trabalho propiciaram a obtenção de algumas configurações diferenciais novas, identificadas com fontes para grávitons. É digno de ser enfatizado que nas equações de campo e de onda para o formalismo γ consideradas aqui, aparecem termos de fonte que podem ser associados à densidades de corrente eletromagnética.

Referências Bibliográficas

[1] Infeld, L., Waerden, B.L.: Sitzber. Akad. Wiss., Physik-math. K1. **9**, 380 (1933)

[2] Van der Waerden; R., B.L.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Physics. K1., 100 (1929)

[3] Cardoso, J.G.: Czech Journal of Physics **4**, 401 (2005)

[4] Weyl, H.: Z. Physik **56**, 330 (1929)

[5] Infeld, L.: Physik ZS. **33,** 475 (1932)

[6] Penrose, R.: Ann. Phys (N.Y.) **10,** 171 (1960)

[7] Cardoso, J.G.: Acta Phys. Polon. B **8**, 1001 (2007)

[8] Penrose; R., Rindler; W.: Spinors and Space-Time Vol 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984)

[9] O'Donnell; P.: Introduction to 2-Spinors in General Relativity, Word Sci., Cambridge (2003)

[10] Carmeli, M., Malin, S.: Theory of Spinors, An Introduction, Word Sci., Singapore (2000)

[11] Carmeli; M.: Group Theory and General Relativity, McGraw-Hill, New York (1977)

[12] Cardoso, J.G.: II Nuovo Cimento B **6**, 631 (2009)

[13] Bach, R.: Zeitschr. **9**, 110 (1921)

[14] Bade, W. L., Jehle, H.: Rev. Mod. Phys. **3**, 714 (1953)

[15] Bergmann, P.G.: Phys. Rev. **2,** 624 (1957)

[16] Corson: E. M.: Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-equations, Blackie, London (1953)

[17] Schouten, J. A.: Journ. of Math. and Phys. **10**, 239 (1931)

[18] Schouten, J. A.: Z. Physik. **84**, 92 (1933)

[19] Schouten, J.A.: Ricci Calculus, Springer, Heidelberg (1954)

[20] Witten, L.: Phys. Rev. **1**, 357 (1959)

[21] Schrödinger, E. Space-Time Structure, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1963)

[22] Pauli, W.: Relativity Theory, Dover Publication, London (1981)

[23] Sachs; M.: General Relativity and Matter, D. Reidel P. C., Dordrecht, (1982)

[24] Stewart; J.: Advanced General Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991)

[25] Misner; C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: Gravitation, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1971)

[26] Weinberg, S.: Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons, New York (1972)

[27] Anderson; L. A.: Principles of Relativity Physics, Academic Press, New York (1967)

[28] Cardoso, J.G.: Acta Phys. Polon. B **9**, 907 (1992).