

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

TALINE SUELLEN KRÜGER

**ESTUDO DA DINÂMICA DE UM LASER DE FIBRA DE DOIS ANÉIS DOPADO A
ÉRBIO**

Joinville, SC

2012

TALINE SUELLEN KRÜGER

**ESTUDO DA DINÂMICA DE UM LASER DE FIBRA DE DOIS ANÉIS DOPADO A
ÉRBIO**

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, SC

2012

TALINE SUELLEN KRÜGER

**“ESTUDO DA DINÂMICA DE UM LASER DE FIBRA DE DOIS ANÉIS DOPADO A
ÉRBIO”**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

área de concentração em “Dinâmica Não Linear” e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Banca Examinadora:

Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC (Presidente)

Dr. Holokx Abreu Albuquerque - CCT/UDESC

Dr. Cristian Bonatto - UFRGS

Dr. Lucio Minoru Tozawa - CCT/UDESC (Suplente)

Joinville, 24/02/2012.

FICHA CATALOGRÁFICA

K877e

Krüger, Taline Suellen.

Estudo da dinâmica de um laser de fibra de dois anéis

dopado a érbio / Taline Suellen Krüger; Orientador:

Paulo Cesar Rech - Joinville-SC

50 f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestra-
do em Física, Joinville, 2012.

1. Laser de Fibra de Dois Anéis Dopado a Érbio.
2. Diagrama de Bifurcação.
3. Espaço de Parâmetros. I. Rech, Paulo C.

CDD 531.1

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A concretização desta dissertação só foi possível pelo apoio e contribuição de várias pessoas, sendo de fundamental importância o incentivo recebido por todos. Agradeço a todos aqueles que de alguma forma contribuíram na realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais Ademiro e Isolete e a minha irmã Andressa, pelo apoio e suporte incondicional em todos os momentos desta caminhada, pela motivação empenhada a todo momento e exemplo de vida, sendo os alicerces da minha vida e a quem eu devo tudo o que sou. A vocês, minha imensa gratidão e amor.

Ao Ricardo, por todo amor e carinho dedicado, pelo incentivo, paciência, compreensão, suporte, que foram imensuráveis para a realização desta etapa da minha vida e por acreditar na minha capacidade. Obrigada por ter iluminado minha vida em mais uma conquista.

Ao meu orientador, professor Paulo Cesar Rech, pelos valiosos ensinamentos, pelo incentivo e pela paciência durante este trabalho de mestrado. Meus sinceros agradecimentos, admiração e gratidão.

À todos os professores que de forma direta ou indireta participaram da minha formação, de modo especial aos professores do Programa de Pós Graduação em Física da UDESC e aos integrantes do Grupo de Dinâmica Não Linear.

À todos os meus amigos e colegas de mestrado, em especial a Anne, Claudia, Cristiane, Iara, Juliana e a Kelaine, pelos conselhos, ajuda e bom humor, principalmente nos momentos mais difíceis.

À todos os meus amigos que me apoiaram nestes dois anos para que eu alcançasse meu objetivo, em especial a Aline pelo companheirismo e a amizade, e ao Marcio.

À todos os meus familiares que de alguma forma contribuíram para a realização do mestrado, em especial ao meu tio Ilido(Nego), minha nona Serafina, Julia e Nildo.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina - FAPESC pelo apoio financeiro.

RESUMO

KRÜGER, Taline Suellen. **Estudo da dinâmica de um laser de fibra de dois anéis dopado a érbio.** 2012. 50f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2012.

O laser de fibra de dois anéis dopado a érbio é um sistema dinâmico quadridimensional a tempo contínuo, modelado por um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas, e tem sido investigado nos últimos anos devido as diversas aplicações, como por exemplo, controle de caos, sincronização de caos e sistemas de telecomunicações. Neste trabalho estudamos a dinâmica não linear do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio a partir de dois pontos de vista, analítico e numérico. A investigação analítica consiste em analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema, usando o critério de Routh-Hurwitz e alguns autovalores da matriz Jacobiana. A investigação numérica foi realizada em um espaço de parâmetros bidimensional de um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas com sete parâmetros, variando dois parâmetros que controlam a dinâmica. Usando o maior Expoente de Lyapunov como uma medida dos comportamentos caótico e periódico construímos diagramas do espaço de parâmetros para caracterizar a dinâmica do modelo. Estudamos as auto-organizações de estruturas periódicas imersas em uma região caótica usando diagramas de bifurcação, mostrando que existem direções específicas no espaço de parâmetros bidimensional em que tais estruturas periódicas são arranjadas em cascatas de bifurcação por adição de período.

Palavras-chave: Laser de fibra de dois anéis dopado a érbio. Diagrama de bifurcação. Espaço de Parâmetros.

ABSTRACT

KRÜGER, Taline Suellen. **Study of dynamics of an erbium-doped fiber dual-ring laser.** 2012. 50f. Dissertation (Mestrado em Física - Área: Dinâmica Não Linear) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2012.

The erbium-doped fiber dual-ring laser is a four-dimensional continuous-time dynamical system, modeled by a set of four autonomous, first-order ordinary differential equations, and has been investigated in the last years due to several applications, as an example, chaos control, chaos synchronization and telecommunications systems. In this work we study the nonlinear dynamics of an erbium-doped fiber dual-ring laser from two points of view, analytical and numerical. The analytical investigation consists in to analyse the stability of an equilibrium point, using the Routh-Hurwitz criterion and some eigenvalues of the Jacobian matrix. The numerical investigation was performed in a the two-dimensional parameter-space of a set autonomous, seven-parameter, four-dimensional first-order ordinary differential equation system, tuning two parameters that control the dynamics. By using the Lyapunov exponents spectrum as a measure of chaotic and periodic behaviors, we construct parameter-space diagrams to characterize the dynamics of the model. We study the self-organized periodic structures embedded in a chaotic region by means of bifurcation diagrams, showing that there are directions in two-dimensional parameter-spaces in which the periodic structures are arranged in period-adding bifurcation cascades.

Key words: Erbium-doped fiber dual-ring laser. Bifurcation diagram. Parameter-space.

Sumário

1	Introdução	10
2	O laser de fibra de dois anéis dopado a érbio	16
2.1	Breve introdução ao laser	16
2.2	Laser de fibra	17
2.3	Equação do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio	19
3	Resultados analíticos	20
3.1	Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio	20
4	Resultados Numéricos	27
4.1	Espaço de Parâmetros e diagramas de bifurcação	28
4.2	Lei de formação de estruturas periódicas	40
4.3	Outros espaços de parâmetros	41
5	Conclusões	45

Capítulo 1

Introdução

Uma rica gama de conhecimentos tem sido observada em uma enorme variedade de sistemas de lasers, sendo que tais conhecimentos sobre a dinâmica destes lasers é de grande importância para o entendimento do seu funcionamento e de características peculiares pertencentes a eles. Os estudos sobre lasers de fibra dopada com elementos Terras Raras realizados nos últimos anos são tópicos atraentes para serem investigados devido as suas inúmeras aplicações em vários campos da Física e outras áreas afins [1, 2].

Devido aos intensos estudos que tem sido feitos com relação a lasers de fibra, vários trabalhos foram publicados a respeito. Mais especificamente, lasers de fibra dopada com érbio são considerados instrumentos de investigação interessantes por que eles tem um grande potencial de aplicações em controle de caos [3], sincronização de caos [4, 5, 6] e sistemas de telecomunicações [7].

Os primeiros resultados observados experimentalmente de estados caóticos e bifurcação por duplicação de período nestes tipos de lasers foram reportados por Phillips em 1987 [8] para uma laser de fibra dopado com neodímio. Somente em 1996 estudos experimentais e teóricos foram relatados para um modelo de laser de fibra dopado a érbio [9].

O nosso objeto de estudo neste trabalho é um laser de fibra de dois anéis dopado a érbio, onde investigamos sua dinâmica no espaço de parâmetros por meio de estudos analíticos e numéricos do sistema, que é modelado por um conjunto de quatro equações diferenciais não-lineares ordinárias de primeira ordem. A maioria dos estudos envolvendo espaços de parâmetros de sistemas dinâmicos não-lineares abrangem um conjunto de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, sendo que a partir de 2005 foram relatados vários estudos de tais

sistemas que apresentam caos. Por exemplo, em 2005 o trabalho de Bonatto et al. [10], que trata de um modelo de laser de CO₂ de dois níveis com perdas moduladas, relata a existência de ilhas de estabilidade mergulhadas em regiões de caos, que surgem neste modelo organizadas em redes regulares de estruturas auto-similares chamadas de camarões.

Outro trabalho foi feito com um conjunto de três equações diferenciais de primeira ordem em 2007, de acordo com Rubinger et al. [11], foram realizadas análises de séries temporais experimentais de um circuito de Chua. Ainda, para um atrator de rolagem dupla os resultados indicaram um comportamento caótico caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo e com a dimensão Kaplan-Yorke de 2,14. Através de simulações numéricas foram investigadas a ocorrência de caos.

Neste mesmo ano, outro trabalho sobre este tema foi publicado [12], contudo com outro enfoque de investigação, sendo relatada uma análise de séries temporais não-lineares realizada com dados experimentais e teóricos de um pequeno indutor no circuito de Chua. Além disso, são utilizados espectros de expoentes de Lyapunov, a dimensão de Kaplan-Yorke e o diagrama de fase para mostrar as semelhanças entre os resultados experimentais e teóricos.

O estudo de multiestabilidade, diagramas de fase e intransitividade no modelo de circulação atmosférica de baixa ordem de Lorenz-84 [13], é outro exemplo de sistema dinâmico não-linear, que é caracterizado por um modelo de três equações diferenciais autônomas. Os autores apresentam diagramas de fase detalhando a intransitividade observada neste modelo, sendo também verificada a partir de análises de diagramas de bifurcação a coexistência de até quatro climas simultaneamente para uma grande região de parâmetros.

Investigações sobre centros de periodicidade e ninhos de espirais foram feitas em um simples circuito resistivo [14], e a descoberta destas estruturas neste modelo, que é descrito por um conjunto de três equações diferenciais autônomas. Aqui os autores descrevem uma organização em torno de um ponto no espaço de parâmetros, ou seja, uma organização central descoberta dentro de uma fase caótica, que inclui a existência de ninhos de espirais que emanam de um ponto focal ou centro.

Estudos foram realizados com o modelo de circuito de Chua [15] e investigações numéricas mostraram em um espaço de parâmetros bidimensional que existem estruturas estáveis auto-similares mergulhadas em um mar de caos, e que tais regiões periódicas se organizam em uma cascata de bifurcação por adição de período.

Investigações em modelos de lasers semicondutores monomodo com injeção óptica [16] mostraram uma estruturação hierárquica de ilhas de oscilações estáveis dentro de regiões caóticas. Por meio de diagramas de fase foram observados horizontes de acumulação e cascatas que seguem uma rota de adição de período específica.

Estudos do modelo do oscilador de Chua com uma não linearidade cúbica [17], modelado por três equações diferenciais autônomas, foram investigadas por meio de simulações numéricas. Resultados desta investigação foram obtidos através de um espaço de parâmetros, onde mostraram a presença de ilhas de estabilidade imersas em um mar de caos, sendo que tais ilhas são auto-similares e organizam-se em uma cascata de bifurcação por adição de período.

Na área da química também temos pesquisas sendo feitas a respeito de sistemas dinâmicos não-lineares modelados por três equações diferenciais autônomas. Por exemplo, o estudo das reações cinéticas não polinomiais de Belousov-Zhabotinsky [18], onde são relatadas investigações numéricas da relativa abundância de oscilações caóticas e periódicas no diagrama de fase. Ainda são encontradas estruturas de fases periódicas e caóticas para mostrar padrões globais incomuns.

Gallas [19], relatou estudos mais gerais a respeito de uma variedade de sistemas dinâmicos não-lineares, como por exemplo, equação de Rössler, circuito de Chua, modelo de Belousov-Zhabotinsky, modelo de Hindmarsh-Rose e modelo cúbico polinomial, com o objetivo de descrever auto organizações regulares quando se estuda problemas elementares. Em tais sistemas foram observadas cascatas centrais e centros periódicos.

Investigações em um modelo de circuito RLC com um dispositivo não-linear NDC [20], modelado por um conjunto de três equações diferenciais, foram realizadas e resultados interessantes foram encontrados, como por exemplo, a existência de estruturas periódicas complexas formando redes periódicas complicadas embutidas em uma região caótica e indicando a presença de transições topológicas no espaço de parâmetros.

Estudos foram feitos para dois modelos de lasers semicondutores [21], onde são mostrados diagramas de fase para caracterizar a extensão no espaço de parâmetros de fases pulsantes e indicar onde multi-estabilidade é esperada nos lasers.

Investigações foram feitas em um circuito de Chua comparando dois tipos de modelos, um cúbico e outro linear por partes, com o objetivo de verificar as similaridades entre eles [22]. Espaços de parâmetros são reportados para quantificar e contrastar a atuação dinâmica de um

círculo de Chua linear por partes e um círculo cúbico. Mostra-se que as estruturas microscópicas dos circuitos exibem uma infinidade de características intrínsecas bastante distintas tornando-as únicas. Cascatas infinitas de espirais e centros foram observados em ambos os circuitos.

Investigações numéricas foram feitas em um protótipo de oscilador eletroquímico [23]. Com o cálculo de expoentes de Lyapunov foram fornecidos detalhes de fases caóticas e periódicas. Tais fases revelaram a existência de uma complicada estrutura auto-organizada de periodicidade em uma região caótica e ainda foram observadas as regiões periódicas chamadas de camarões.

A investigação de um círculo caótico experimental em um espaço de parâmetros de alta resolução [24], mostrou que ocorre abundância de estruturas periódicas complexas, as quais se organizam em uma cascata de bifurcação por adição de período que se acumulam em uma região caótica. Além disso, foram feitas investigações numéricas para corroborar as novas características observadas no espaço de parâmetros de alta resolução experimental.

Investigações sobre o modelo do oscilador de Chua com uma não-linearidade cúbica [25], foram feitas com alguns espaços de parâmetros bidimensionais para um conjunto de três parâmetros. Estruturas periódicas embutidas em uma larga região caótica foram observadas, sendo que tais estruturas organizam-se em cascatas por adição de período.

Outros estudos com círculo de Chua foram realizados [26], como por exemplo, através de simulações numéricas construíram-se espaços de parâmetros e foram observadas estruturas auto-organizadas imersas em uma região caótica formando uma estrutura espiral disposta em torno de um ponto focal. Diagramas de bifurcação mostraram que tais estruturas são organizadas em uma cascata por adição de período.

A dinâmica de um caso particular do sistema de Lorenz [27], foi investigada e foram obtidos resultados analíticos com relação ao ponto de equilíbrio e análises da estabilidade do sistema. Resultados numéricos também foram apresentados com o estudo do espaço de parâmetros e diagrama de bifurcação.

O modelo de um processo de acoplamento ressonante não-linear [28] foi estudado com o objetivo de analisar a dinâmica do sistema a respeito da estabilidade, encontrando os pontos de equilíbrio, e do espaço de parâmetros, computando o maior expoente de Lyapunov. Mostraram que o espaço de parâmetros apresenta estruturas auto-similares periódicas organizadas em uma

cascata de bifurcação por adição de período.

Para o estudo da detecção de periodicidade em um espaço de parâmetros de um circuito de Chua [29], foi utilizado a implementação de um algoritmo no LabView. Os resultados mostraram regiões de estruturas periódicas organizadas em uma cascata de bifurcação por adição de período e uma nova sequência de acumulação de fronteira.

Na área biológica também temos investigações de sistemas de três equações diferenciais. Por exemplo, o estudo da dinâmica do modelo neural de multi-parâmetros de Hindmarsh-Rose [30], onde foram obtidos alguns espaços de parâmetros a partir de simulações numéricas e as análises mostraram que independentemente do par de parâmetros utilizado o espaço de parâmetros apresenta um cenário típico. Foram encontradas estruturas caóticas em forma de pente, imersas em uma larga região periódica.

Portanto, existe uma variedade enorme de estudos em sistemas modelados por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem. Estudos sobre a dinâmica de sistemas com quatro dimensões, que utilizam espaços de parâmetros, estão sendo realizados para verificar quais comportamentos tais sistemas podem apresentar. Quando estudamos sistemas com quatro dimensões ou mais podemos encontrar uma dinâmica muito rica e diversificada, sendo que o sistema pode apresentar equilíbrio, ciclo limite, torus bidimensional e/ou tridimensional, caos e hipercaos.

Neste trabalho será feito um estudo do sistema dinâmico de um laser de fibra de dois anéis dopado a érbio, que é modelado por um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, não-lineares. No Capítulo 2 traremos detalhes do funcionamento de um laser e uma breve introdução histórica de sua invenção, bem como expandiremos tais conhecimentos para um laser de fibra dopado a érbio, pontuando suas principais características. Mostraremos o conjunto de equações diferenciais que modelam o sistema dinâmico a ser estudado e explicaremos as variáveis e parâmetros envolvidos na modelagem. No Capítulo 3 realizamos um estudo analítico com o conjunto de equações diferenciais que modelam o laser de fibra de dois anéis dopado a érbio. Determinamos a divergência, os pontos fixos, a matriz Jacobiana e seus respectivos autovalores para analisar a estabilidade do sistema, sendo que utilizamos o critério de Routh-Hurwitz, pois alguns autovalores são complicados de se calcular analiticamente. No Capítulo 4 fazemos estudos numéricos do conjunto de equações que modelam o laser de dois anéis de fibra dopado a érbio, o qual acreditamos, baseado em pesquisas

bibliográficas, ser inédito na literatura. Tais estudos numéricos consistem em construir espaços de parâmetros bidimensionais para um par de parâmetros escolhido do sistema, e analisar a dinâmica presente. Observamos estruturas periódicas denominadas camarões, e estudamos a sua periodicidade e a lei de formação. Analisamos os diferentes períodos encontrados em um camarão isolado, dependendo do ponto escolhido ao longo de uma linha traçada na estrutura. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos as conclusões gerais do nosso trabalho.

Capítulo 2

O laser de fibra de dois anéis dopado a érbio

Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução sobre o laser, bem como seu funcionamento. Estenderemos tal conhecimento para uma laser de fibra dopado a érbio, descrevendo características peculiares deste modelo de laser. Por fim, mostramos o sistema de equações que modela o laser de fibra de dois anéis dopado a érbio, o qual consiste em um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, não-lineares.

2.1 Breve introdução ao laser

O laser é um instrumento muito utilizado atualmente em diversas áreas de aplicação, como por exemplo, na ótica, na astronomia, na medicina, na indústria, na comunicação, eletrônica, entre outras. O laser é um dispositivo que funciona como uma fonte de luz de características únicas.

Albert Einstein foi um dos cientistas pioneiros na descoberta do laser. Em 1917 seus estudos mostraram que o processo de emissão estimulada existe, mas somente em 1960 o primeiro laser foi construído por Maiman [2] utilizando os princípios fundamentais estudados por Einstein. A palavra LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) é uma sigla de sua denominação em inglês e significa amplificação da luz por emissão estimulada de radiação.

O laser apresenta três partes principais. O meio ativo que é a parte do laser onde estão

contidos os átomos com os elétrons que farão os saltos para os níveis mais baixos de energia. A bomba ou fonte de energia externa que tem a função de excitar os elétrons para níveis mais altos de energia. Por fim, o ressonador ou cavidade óptica que é formado por espelhos que são colocados nas extremidades desta cavidade e tem como função provocar a reflexão dos fótons de volta à amostra, para que ocorra cada vez mais emissão estimulada.

O laser gera luz a partir de um processo chamado de emissão estimulada. O processo de emissão estimulada ocorre quando um elétron que não esteja em seu estado mais fundamental (estado excitado) tende-la ir para um estado de mais baixa energia. Entretanto, espontaneamente este processo pode ser demorado, então é utilizado um agente externo, por exemplo, um fóton que faz com que o elétron salte para um nível mais baixo, consequentemente emitindo um fóton que emerge do sistema juntamente com o fóton que causou a transição.

O feixe de luz gerado pelo laser possui características interessantes e únicas, como por exemplo, a luz é monocromática, ou seja, tem apenas um comprimento de onda, que pode ser verificado pelo espectro da luz laser. Outras propriedades são o caráter direcional do feixe, onde todo o feixe propaga-se na mesma direção, e a coerência que significa que as ondas estão em fase, na mesma direção e com o mesmo comprimento de onda.

2.2 Laser de fibra

Com o avanço tecnológico ocorrido nos últimos anos, o laser evoluiu e seu aprimoramento foi feito, obtendo assim novas formas, tamanhos e uma variedade de aplicações. Um tipo de laser que está sendo estudado é o laser de fibra, que é basicamente o laser descrito acima, mas com a diferença que o meio ativo é constituído de uma fibra. O laser de fibra foi inventado por Snitzer e Koester [31] no ano de 1963 e somente em 1980 apareceu comercialmente.

Um laser de fibra basicamente é constituído de um meio ativo, que é uma fibra óptica, cujo núcleo é dopado com elementos terras raras que são um conjunto de 15 elementos químicos ocupando a penúltima linha da tabela periódica. A fibra óptica está localizada entre dois espelhos que formam a cavidade ressonante do laser. Ainda temos um laser de bombeio, que emite luz através da fibra, provocando a inversão de população. O laser de bombeio pode ser um laser de diodo semicondutor.

Podemos considerar um laser de fibra como um conversor de comprimento de onda,

pois fótons no comprimento de onda do feixe de bombeio são absorvidos produzindo a inversão de população, e a emissão estimulada é necessária para dar uma saída de luz do laser em um comprimento de onda característico do dopante na fibra. Ou seja, o comprimento de onda do laser é determinado pelo elemento dopante na fibra, sendo que regiões espectrais de $1.3\mu\text{m}$ e $1.55\mu\text{m}$ são consideradas janelas de baixa perda de transmissão [31].

A utilização de lasers de fibra, como já foi citado, apresenta diversas aplicações em vários ramos, principalmente na área de telecomunicações, devido ao fato da redução nas perdas de sinal. Outra característica interessante é que se acoplarmos várias fibras podemos obter lasers com potências mais elevadas.

Neste trabalho estudamos o modelo de um laser de fibra de dois anéis dopado a érbio, que pode ser visto como um acoplamento de dois lasers de fibra com um anel dopado a érbio, como mostrado na Fig. 2.1.

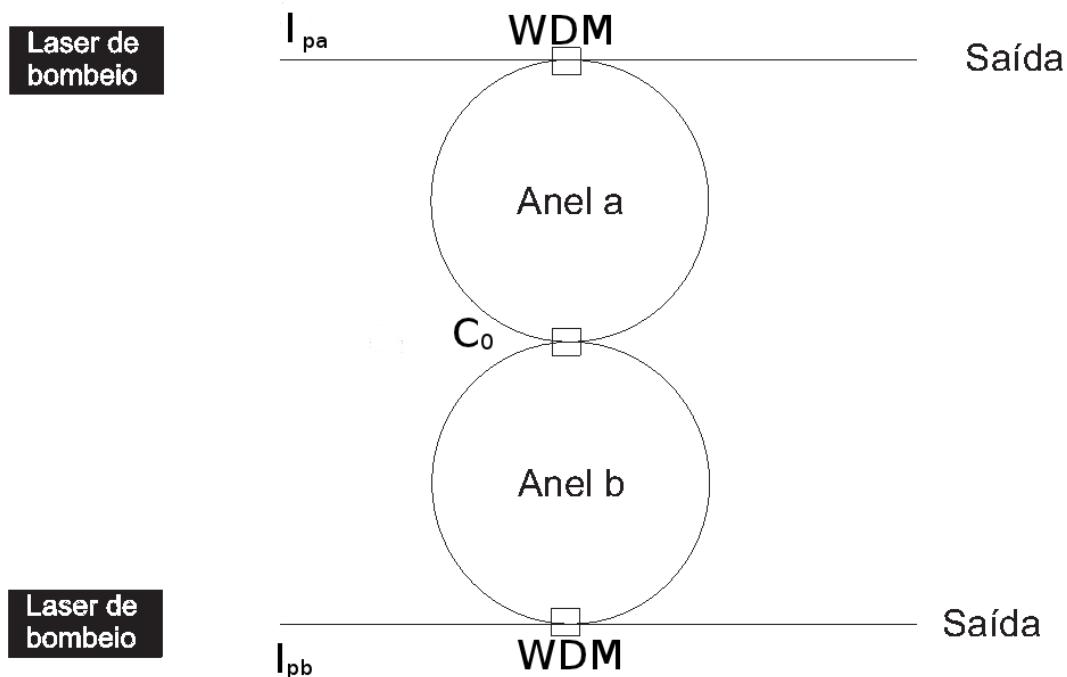


Figura 2.1: Esquema do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio. C_0 é o acoplador, WDM é o multiplexador por comprimento de onda, I_{pa} e I_{pb} são as intensidades de bombeamento.

O modelo é composto por dois lasers de bombeio, que geram dois campos elétricos que tem a frequência chaveada nos dois anéis através do acoplador C_0 , com uma mudança de fase de $\pi/2$ de um anel para o outro. O acoplador C_0 faz a ligação de uma fibra com a outra, tornado possível o acoplamento dos dois anéis de fibra dopado a érbio, a e b, formando a cavidade

ressonante do laser. Os WDM são os multiplexadores por comprimento de onda e tem a função de bombear o sinal de entrada e de saída nos dois anéis. Portanto os WDM selecionam um comprimento de onda, que é determinado pelo dopante da fibra, e emitem tal comprimento de onda [3].

Além de estudos com lasers de fibra dopado com érbio são constatados na literatura estudos com a dopagem de outros elementos Terras-raras, como por exemplo, o Itérbio, Túlio, Praseodímio e Neodímio, sendo observadas várias propriedades interessantes para cada tipo de dopante.

2.3 Equação do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio

Nesta seção apresentaremos as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares que descrevem teoricamente o comportamento dinâmico do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio [3, 32], e que podem ser escritas da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\frac{dE_a}{d\tau} &= -k_a(E_a + C_0 E_b) + g_a E_a D_a, \\ \frac{dE_b}{d\tau} &= -k_b(E_b - C_0 E_a) + g_b E_b D_b, \\ \frac{dD_a}{d\tau} &= -(1 + I_{pa} + E_a^2)D_a + I_{pa} - 1, \\ \frac{dD_b}{d\tau} &= -(1 + I_{pb} + E_b^2)D_b + I_{pb} - 1.\end{aligned}\quad (2.1)$$

onde E_a e E_b são os campos elétricos do laser, que são gerados por dois lasers de bombeio, de modo que os lasers de bombeio podem operar nos seguintes comprimentos de onda: 510, 532, 665, 810, 980 e $1480\mu\text{m}$ [33]. D_a e D_b são as inversões de população, respectivamente dos anéis a e b. k_a e k_b são as taxas de decaimento e g_a e g_b são os coeficientes de ganho dos campos elétricos, respectivamente dos anéis a e b. C_0 é o coeficiente de acoplamento do acoplador direcional entre os dois anéis e seu valor deve ser pequeno para um comprimento de onda de $1.55\mu\text{m}$ [34]. I_{pa} e I_{pb} são as intensidades de bombeamento nos anéis. τ é o tempo reescalado, sendo que $\tau = \gamma t$, onde γ é dado por $\gamma = 1/\tau_2$ e τ_2 é o tempo de decaimento de um nível mais alto do laser. Para um laser de fibra dopado a érbio $\tau_2 \sim 10ms$, cujo valor é característico para o elemento érbio e pode ser medido experimentalmente.

Capítulo 3

Resultados analíticos

Neste capítulo fazemos um estudo analítico do sistema (2.1). Determinamos analiticamente a divergência do sistema e os pontos de equilíbrio para discutir a estabilidade do sistema não-linear em estudo. Calculamos a matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio para posteriormente encontrarmos os autovalores associados a matriz e podermos tirar conclusões a respeito da estabilidade, sendo que para isto utilizamos o Critério de Routh-Hurwitz.

3.1 Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio

Um sistema dinâmico dissipativo é caracterizado por um determinado elemento de volume V limitado por uma superfície fechada S no espaço de fase, que contrai quando o sistema evolui no tempo. A partir de um campo vetorial bem definido podemos calcular a dissipação de um sistema com o cálculo da divergência do campo vetorial, sendo que a condição para o sistema ser dissipativo é o divergente ter um valor negativo. No sistema (2.1) fazemos uma mudança das variáveis do sistema, onde E_a , E_b , D_a e D_b são substituídos por x , y , z e w , respectivamente. Assim, o sistema de equações (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -k_a(x + C_0y) + g_axz, \\ \dot{y} &= -k_b(y - C_0x) + g_byw, \\ \dot{z} &= -(1 + I_{pa} + x^2)z + I_{pa} - 1, \\ \dot{w} &= -(1 + I_{pb} + y^2)w + I_{pb} - 1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Podemos determinar a região dissipativa do sistema (3.1) calculando o seu divergente a partir da seguinte expressão

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w},$$

que tem como resultado

$$-(k_a + k_b + I_{pa} + I_{pb} + 2) + (g_a z + g_b w) - (x^2 + y^2).$$

Concluímos então que o sistema (3.1) é dissipativo quando variáveis e parâmetros obedecem a seguinte condição

$$-(k_a + k_b + I_{pa} + I_{pb} + 2) + (g_a z + g_b w) - (x^2 + y^2) < 0,$$

significando então que, a condição de contração do volume no espaço de fase pode ser satisfeita conforme o tempo passa. Como consequência, muitas trajetórias do sistema finalmente convergem para um atrator, em um espaço de fase de quatro dimensões. Para o caso em estudo, podemos encontrar alguns tipos de atratores no espaço de fase, como por exemplo, ponto de equilíbrio, ciclo limite, torus-2, torus-3, caos ou hipercaos, dependendo do espectro dos expoentes de Lyapunov.

Para analisarmos a estabilidade do sistema (3.1), devemos encontrar os pontos de equilíbrio, que são obtidos fazendo $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$, $\dot{w} = 0$. Impondo estas condições, obtemos quatro equações algébricas dadas por

$$\begin{aligned} -k_a(x + C_0 y) + g_a x z &= 0, \\ -k_b(y - C_0 x) + g_b y w &= 0, \\ -(1 + I_{pa} + x^2)z + I_{pa} - 1 &= 0, \\ -(1 + I_{pb} + y^2)w + I_{pb} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

que resolvendo para x , y , z , e w , fornecem um ponto de equilíbrio

$$P_0 \equiv \left(0, 0, \frac{I_{pa}-1}{I_{pa}+1}, \frac{I_{pb}-1}{I_{pb}+1}\right),$$

o qual corresponde ao laser desligado. Outros pontos de equilíbrio podem existir, mas sua determinação envolve a computação das raízes ou zeros de um polinômio de grau 9 que não fatora. Como consequência, não existem soluções algébricas para os outros pontos de equilíbrio.

A matriz Jacobiana para o sistema (3.1) é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -k_a + g_a & -k_a C_0 & g_a x & 0 \\ k_b C_0 & -k_b + g_b w & 0 & g_b y \\ -2xz & 0 & -(1+I_{pa}+x^2) & 0 \\ 0 & -2yw & 0 & -(1+I_{pb}+y^2) \end{pmatrix},$$

a qual quando calculada no ponto P_0 transforma-se para

$$J_0 = \begin{pmatrix} -k_a + g_a \frac{I_{pa}-1}{I_{pa}+1} & -k_a C_0 & 0 & 0 \\ k_b C_0 & -k_b + g_b \frac{I_{pb}-1}{I_{pb}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+I_{pa}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+I_{pb}) \end{pmatrix}.$$

Conhecida a matriz Jacobiana do sistema, podemos encontrar seus autovalores e enfim analisar a estabilidade. Para encontrarmos os autovalores, utilizamos a equação característica que é dada por $\det(J_0 - \lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade 4×4 . Encontramos os autovalores correspondentes, sendo que dois deles são dados por $\lambda_1 = -(1 + I_{pa})$ e $\lambda_2 = -(1 + I_{pb})$. Ambos são reais e negativos, porque I_{pa} e I_{pb} são ambos positivos. Os outros dois autovalores são determinados a partir das raízes de uma polinômio de grau 2, ou seja, obtendo as raízes deste polinômio de grau 2 obteremos os outros dois autovalores de J_0 . Este polinômio de grau 2, $p(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$, é dado em função dos coeficientes α , β e γ , sendo cada coeficiente dado em função dos parâmetros g_a , g_b , k_a , k_b , C_0 , I_{pa} e I_{pb} por

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + I_{pa} + I_{pb} + I_{pa}I_{pb}, \\ \beta &= -(g_a + g_b + k_a + k_b) + (g_a - g_b - k_a - k_b)I_{pa} + \\ &\quad (-g_a + g_b - k_a - k_b)I_{pb} + (g_a + g_b - k_a - k_b)I_{pa}I_{pb}, \\ \gamma &= (g_a g_b + g_a k_b + g_b k_a + k_a k_b + k_a k_b C_0^2) + \\ &\quad (-g_a g_b - g_a k_b + g_b k_a + k_a k_b + k_a k_b C_0^2)I_{pa} + \\ &\quad (-g_a g_b + g_a k_b - g_b k_a + k_a k_b + k_a k_b C_0^2)I_{pb} + \\ &\quad (g_a g_b - g_a k_b - g_b k_a + k_a k_b + k_a k_b C_0^2)I_{pa}I_{pb}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Com os coeficientes do polinômio $p(\lambda)$ determinados, podemos tirar algumas conclusões a respeito da estabilidade do ponto de equilíbrio P_0 . Resolvendo a equação algébrica $p(\lambda) = 0$ obtemos os autovalores, porém devido a complexidade do resultado das expressões

muito longas para os autovalores, conclusões sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio P_0 são difíceis de se obter.

Um método alternativo que permite tirar conclusões sobre os autovalores, mas que não envolve a solução explícita da equação $p(\lambda) = 0$, é utilizar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz [35]. O critério de Routh-Hurwitz é um método utilizado para determinar se um ponto de equilíbrio é estável ou instável, apenas examinando os coeficientes da equação polinomial que caracteriza o sistema.

Para estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio a partir do critério de Routh-Hurwitz devemos verificar duas condições:

1. Para que todas as raízes possuam parte real negativa, duas condições são necessárias, mas não suficientes:
 - (a) Todos os coeficientes do polinômio devem ter mesmo sinal.
 - (b) Todos os coeficientes do polinômio devem ser diferentes de zero.

2. A condição necessária para que todas as raízes tenham parte real negativa é que todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh-Hurwitz devem possuir o mesmo sinal.
Além disso, temos que o número de mudanças de sinal é igual ao número de raízes com parte real positiva.

As condições acima listadas se referem a um ponto de equilíbrio estável. Caso alguma destas condições seja quebrada temos um ponto de equilíbrio instável. Dada a equação característica genérica

$$D(s) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Verificamos a estabilidade a partir da Tabela de Routh-Hurwitz, a qual analisa os coeficientes do polinômio, que é dada por

λ^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots
λ^{n-4}	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots				
λ^1				
λ^0				

onde os a'_i s são os coeficientes polinomiais e os outros coeficientes são calculados por

$$b_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-3} - a_{n-2} a_{n-1}), \quad (3.3)$$

$$b_2 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-5} - a_{n-4} a_{n-1}), \quad (3.4)$$

$$b_3 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-7} - a_{n-6} a_{n-1}), \quad (3.5)$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_1} (b_2 a_{n-1} - a_{n-3} b_1), \quad (3.6)$$

$$c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_1} (b_3 a_{n-1} - a_{n-5} b_1). \quad (3.7)$$

Para o nosso caso o polinômio é $p(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ e a tabela de Routh-Hurwitz é dada por

λ^2	a_2	a_0
λ^1	a_1	0
λ^0	b_1	0

onde $a_2 = \alpha$, $a_1 = \beta$, $a_0 = \gamma$. O valor de b_1 calculamos através de (3.3) e encontramos $b_1 = \gamma$. Portanto, reescrevendo

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^2 & \alpha & \gamma \\ \lambda^1 & \beta & 0 \\ \lambda^0 & \gamma & 0 \end{array}$$

A tabela de Routh-Hurwitz acima está associada com os outros dois autovalores da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio P_0 , portanto basta analisar a tabela de acordo com as condições possíveis para α , β e γ . O coeficiente α é sempre positivo, porque todos os parâmetros do sistema são positivos. Tal afirmação pode ser verificada observando (3.2).

Os coeficientes β e γ podem assumir sinais positivo ou negativo, dependendo dos parâmetros, que podem ser ajustados de acordo com o resultado que se deseja ter com o manuseio do laser. Devido a estas possibilidades, quatro situações podem ocorrer:

- (i) β e γ podem ter ambos sinais positivos. Neste caso, toda a primeira coluna da tabela de Routh-Hurwitz fica com o sinal positivo, sendo portanto satisfeitas as condições 1(a), 1(b) e 2. Consequentemente as raízes possuem parte real negativa, isto é, todos os autovalores tem parte real negativa e não ocorrem mudanças de sinal. Então, concluímos que o ponto de equilíbrio P_0 é estável.
- (ii) β é positivo e γ é negativo. Agora ocorre uma mudança de sinal ($+ \rightarrow + \rightarrow -$), e as condições 1 e 2 não são mais satisfeitas. Portanto, como ocorre uma mudança de sinal, temos uma raiz com parte real positiva ou um autovalor positivo, infringindo a condição de estabilidade. Sendo assim, o ponto de equilíbrio P_0 é instável.
- (iii) β é negativo e γ é positivo. Desta vez, existem duas mudanças de sinal ($+ \rightarrow - \rightarrow +$). Consequentemente duas raízes com parte real positiva, ou seja, dois autovalores positivos. Novamente, as condições 1. e 2. não são satisfeitas e o ponto de equilíbrio P_0 é instável.
- (iv) β e γ são ambos negativos. Ocorre uma mudança de sinal ($+ \rightarrow - \rightarrow -$), e portanto temos uma raiz com parte real positiva ou um autovalor positivo, e as condições 1 e 2 não são satisfeitas. Em consequência o ponto de equilíbrio P_0 é instável.

Com as análises realizadas acima, podemos concluir que o ponto de equilíbrio P_0 pode ser instável. A possibilidade do sistema (3.1) apresentar um ponto de equilíbrio instável nos leva a uma condição necessária, mas não suficiente, para a existência de atratores caóticos no espaço de fase. A existência de atratores caóticos indica que o sistema apresenta dependência sensível

as condições iniciais, ou seja, quando consideramos duas condições iniciais próximas e imaginamos sua evolução no tempo por um sistema a tempo contínuo, observamos que ocorre uma separação entre as trajetórias. Se a separação cresce exponencialmente com o tempo dizemos que o sistema apresenta dependência sensível nas condições iniciais.

Para quantificarmos a dependência sensível nas condições iniciais, ou medir a taxa de divergência de trajetórias, utilizamos o maior expoente de Lyapunov [35]. No próximo capítulo faremos estudos numéricos do sistema (3.1) e utilizaremos o conceito de expoente de Lyapunov para verificar a existência de regiões caóticas e periódicas.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

O estudo de um sistema dinâmico, representado por um conjunto de equações que mostram a evolução do sistema conforme o tempo passa, é muito importante devido ao fato de podemos verificar comportamentos característicos existentes nos mais variados sistemas físicos reais. Um sistema dinâmico é caracterizado pelo conhecimento de seu estado futuro $x(t)$ para $t > 0$ a partir de um estado inicial $x(0)$ do sistema, obtendo assim um conjunto de estados possíveis [36]. Em um sistema dinâmico o tempo pode ter uma variação contínua ou discreta, sendo que quando ocorre uma variação contínua o sistema é representado por equações diferenciais e na variação discreta por mapas. O sistema dinâmico em estudo neste trabalho é um sistema contínuo e, portanto, é representado por um conjunto de equações diferenciais.

Um sistema físico real pode ser descrito por um conjunto de equações, que geralmente depende de um ou mais parâmetros. Tais parâmetros são ditos parâmetros de controle do sistema, porque quando alteramos seus valores o comportamento dinâmico do sistema pode mudar. Um mecanismo que usamos para ilustrar como a dinâmica de um sistema muda com a variação do parâmetro é o diagrama de bifurcação. Um diagrama de bifurcação é construído plotando uma variável $x_{(i)}$ em função de um parâmetro do sistema. Após um tempo suficientemente longo podemos ver no diagrama de bifurcação os pontos para os quais o sistema converge, podendo ser órbitas periódicas, pontos fixos ou outro conjunto de pontos atrativos. Com o diagrama de bifurcação podemos estudar a periodicidade e os tipos de rotas para o caos.

Além do diagrama de bifurcação, temos outra maneira de estudarmos o comportamento dinâmico de um sistema, que é por meio do espaço de parâmetros. O espaço de parâmetros é representado pela variação de dois ou mais parâmetros, onde plotamos o expoente de Lyapunov

para diferentes valores dos vários parâmetros que controlam o sistema. No espaço de parâmetros podemos verificar a existência de caos, periodicidade e equilíbrio, mostrando portanto a rica dinâmica envolvida em um determinado sistema.

Diagramas de bifurcação e espaços de parâmetros são ferramentas da área da dinâmica não-linear que são utilizadas para analisar a dinâmica de um sistema, verificar o quão caótico é o sistema e como ocorrem as transições entre os regimes periódico-caótico e caótico-periódico. No estudo numérico feito do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio utilizamos destes recursos apresentados na literatura. Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos através de métodos computacionais para resolver o conjunto de equações diferenciais (3.1). Mostraremos espaços de parâmetros e diagramas de bifurcação construídos a partir de dados obtidos computacionalmente, assim elucidando a dinâmica caótica presente neste sistema.

4.1 Espaço de Parâmetros e diagramas de bifurcação

O espaço de parâmetros, como mencionado acima, é um recurso utilizado como uma medida para caracterizar o comportamento de um sistema, e para sua construção realizamos o cálculo do maior expoente de Lyapunov. A partir da solução numérica do sistema (3.1) construímos um espaço de parâmetros que mostra uma visão global do modelo de um laser de fibra de dois anéis dopado a érbio, usando como parâmetros de controle do sistema as intensidades de bombeamento I_{pa} e I_{pb} , sendo que para os outros parâmetros foram utilizados os seguintes valores: $k_a = k_b = 1000$, $g_a = 10500$, $g_b = 4700$, e $C_0 = 0,2$ [3]. Na Fig. 4.1 é mostrado uma visão geral do espaço de parâmetros para a variação dos parâmetros I_{pa} e I_{pb} para o maior expoente de Lyapunov.

A construção da Fig. 4.1 foi obtida por meio do cálculo do maior expoente de Lyapunov, discretizada em uma malha 500×500 pontos igualmente espaçados (I_{pa}, I_{pb}). O sistema (3.1) foi integrado utilizando o integrador numérico de Runge-Kutta de quarta ordem com um passo fixo igual a 10^{-4} , e considerando 5×10^5 passos para calcular cada um dos 250×10^3 expoentes de Lyapunov. As condições iniciais utilizadas na integração numérica foram $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (5,0; 5,0; 0,1; 0,1)$, e para cada incremento dos parâmetros I_{pa} e I_{pb} usamos o último valor obtido para (x, y, z, w) como as novas condições iniciais para o cálculo do próximo expoente de Lyapunov. Tal procedimento é conhecido como *seguindo o atrator*.

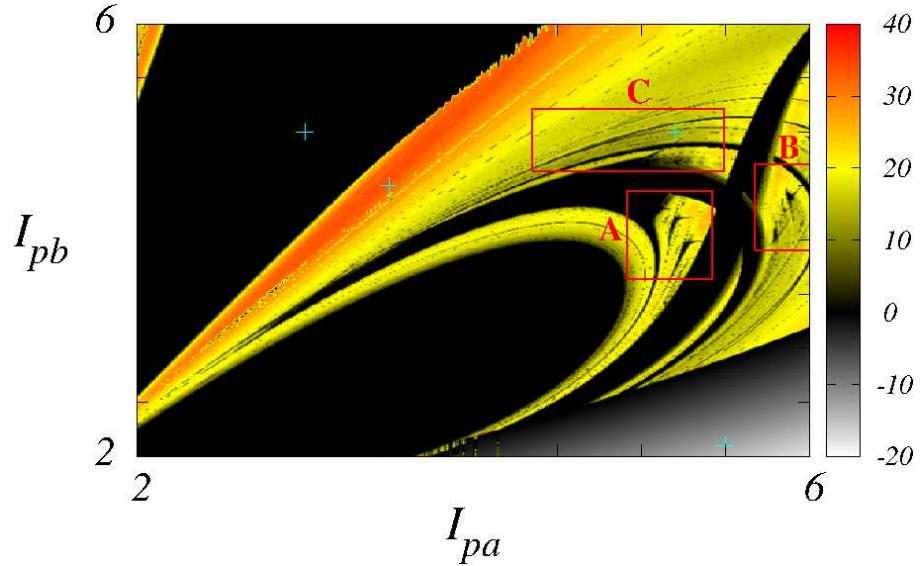


Figura 4.1: Espaço de parâmetros do sistema (3.1) para $k_a = k_b = 1000$, $g_a = 10500$, $g_b = 4700$, $C_0 = 0, 2$, $2 < I_{pa} < 6$, $2 < I_{pb} < 6$. As intensidades de cores diferentes estão associadas a diferentes valores do Exponente de Lyapunov.

No diagrama da Fig. 4.1 observamos um paleta de cores, sendo que tais cores estão associadas à magnitude do maior expoente de Lyapunov, a saber, branco para expoente mais negativo, preto para expoente nulo e vermelho para expoente mais positivo. Verificamos que neste sistema em estudo existem regiões que apresentam caos e podem ser observadas na mudança gradativa da cor amarela para o vermelho, regiões periódicas que podem ser observadas na cor preta e regiões de ponto de equilíbrio cuja tonalidade vai do branco para o cinza. Um sistema apresenta uma dinâmica caótica quando ele tem dependência sensível nas condições iniciais, que é resultado das não-linearidades do sistema. Uma maneira de quantificar tal dependência é calculando o expoente de Lyapunov que mede a taxa de divergência de duas trajetórias, ou seja, duas condições iniciais muito próximas no espaço de fase podem divergir exponencialmente uma da outra a medida que o sistema evolui no tempo, sendo que podemos calcular essa razão de afastamento das duas trajetórias, quantificada pelo expoente de Lyapunov [37]. Ainda na Fig. 4.1 podemos verificar a existência de regiões caóticas em amarelo-vermelho, que apresentam janelas de periodicidade em preto.

Sistemas dissipativos apresentam um conceito importante a ser estudado, que é definido como atrator. Quando analisamos as trajetórias no espaço de fase a medida que o tempo evolui, observamos a existência de atratores, que são conjuntos invariantes para o qual as trajetórias convergem depois de um tempo suficientemente longo. Os sistemas dinâmicos podem apre-

sentar vários atratores e estes estão associados à magnitude do maior expoente de Lyapunov. O maior expoente de Lyapunov negativo indica um ponto de equilíbrio, o maior expoente de Lyapunov nulo indica um atrator periódico ou quase periódico e o maior expoente de Lyapunov positivo indica um atrator caótico.

Na Fig. 4.2 podemos ver as projeções tridimensionais de quatro atratores típicos no espaço (x,y,z) , correspondentes a quatro pontos escolhidos da Fig. 4.1, que são localizados pelo sinal + na cor turquesa. Um ponto na região preta, um na região vermelha, um na região amarela e um na região cinza, sendo que tais pontos correspondem a parâmetros para os quais o sistema (3.1) apresenta um comportamento periódico, caótico, caótico e de equilíbrio, respectivamente. Para a construção de cada um dos atratores foram utilizado 20×10^3 pontos.

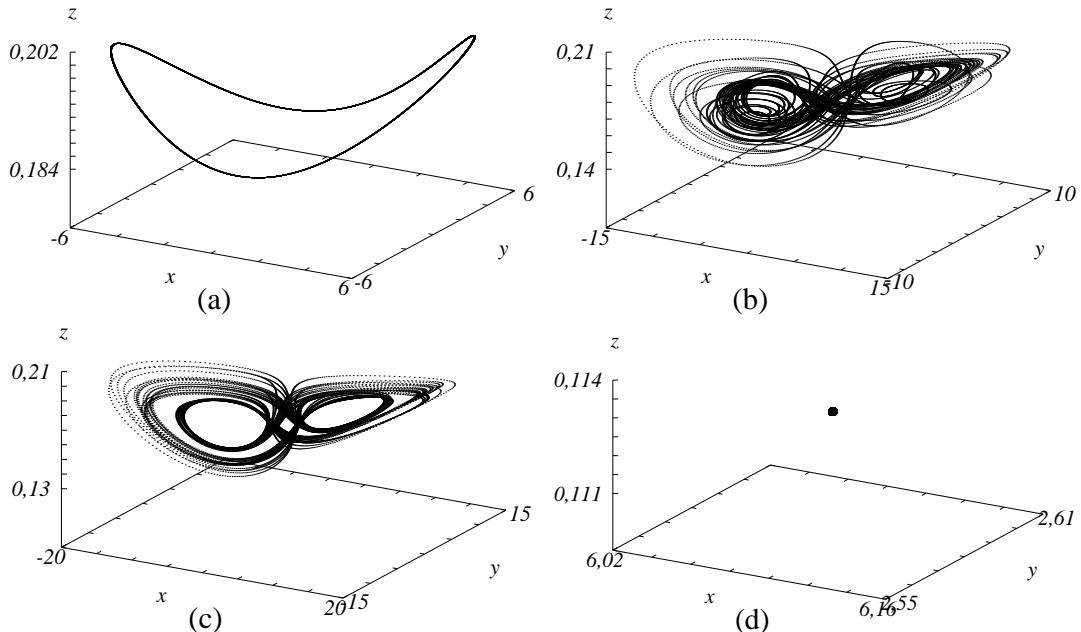


Figura 4.2: (a) Atrator periódico, com $(I_{pa}, I_{pb}) = (3, 0; 5, 0)$. (b) Atrator caótico, com $(I_{pa}, I_{pb}) = (3, 5; 4, 5)$. (c) Atrator caótico, com $(I_{pa}, I_{pb}) = (5, 2; 5, 0)$. (d) Ponto de equilíbrio, com $(I_{pa}, I_{pb}) = (5, 5; 2, 1)$.

Nas Figs. 4.2(a), 4.2(b), 4.2(c) e 4.2(d) os respectivos valores do par de parâmetros são $(I_{pa}, I_{pb}) = (3, 0; 5, 0)$, $(I_{pa}, I_{pb}) = (3, 5; 4, 5)$, $(I_{pa}, I_{pb}) = (5, 2; 5, 0)$ e $(I_{pa}, I_{pb}) = (5, 5; 2, 1)$.

Para analisarmos melhor o comportamento dinâmico do sistema apresentado na Fig. (4.1), onde podemos ver que existem estruturas periódicas imersas numa região caótica, vamos fazer ampliações de algumas regiões que tem uma dinâmica rica de informações. Além de analisar as estruturas periódicas, também estudaremos a sua organização. Assim, foram feitas três

ampliações da Fig. 4.1 aquelas das caixas **A**, **B** e **C**. A ampliação da caixa **A** é mostrada na Fig. 4.3(a) com o intervalo $4,91362 \leq I_{pa} \leq 5,42082$ e $3,63640 \leq I_{pb} \leq 4,45536$, a ampliação da caixa **B** é mostrada na Fig. 4.3(b) com o intervalo $5,67440 \leq I_{pa} \leq 6,07291$ e $3,90938 \leq I_{pb} \leq 4,69801$, e a ampliação da caixa **C** é mostrada na Fig. 4.3(c) com o intervalo $4,35209 \leq I_{pa} \leq 5,49326$ e $4,63735 \leq I_{pb} \leq 5,21365$.

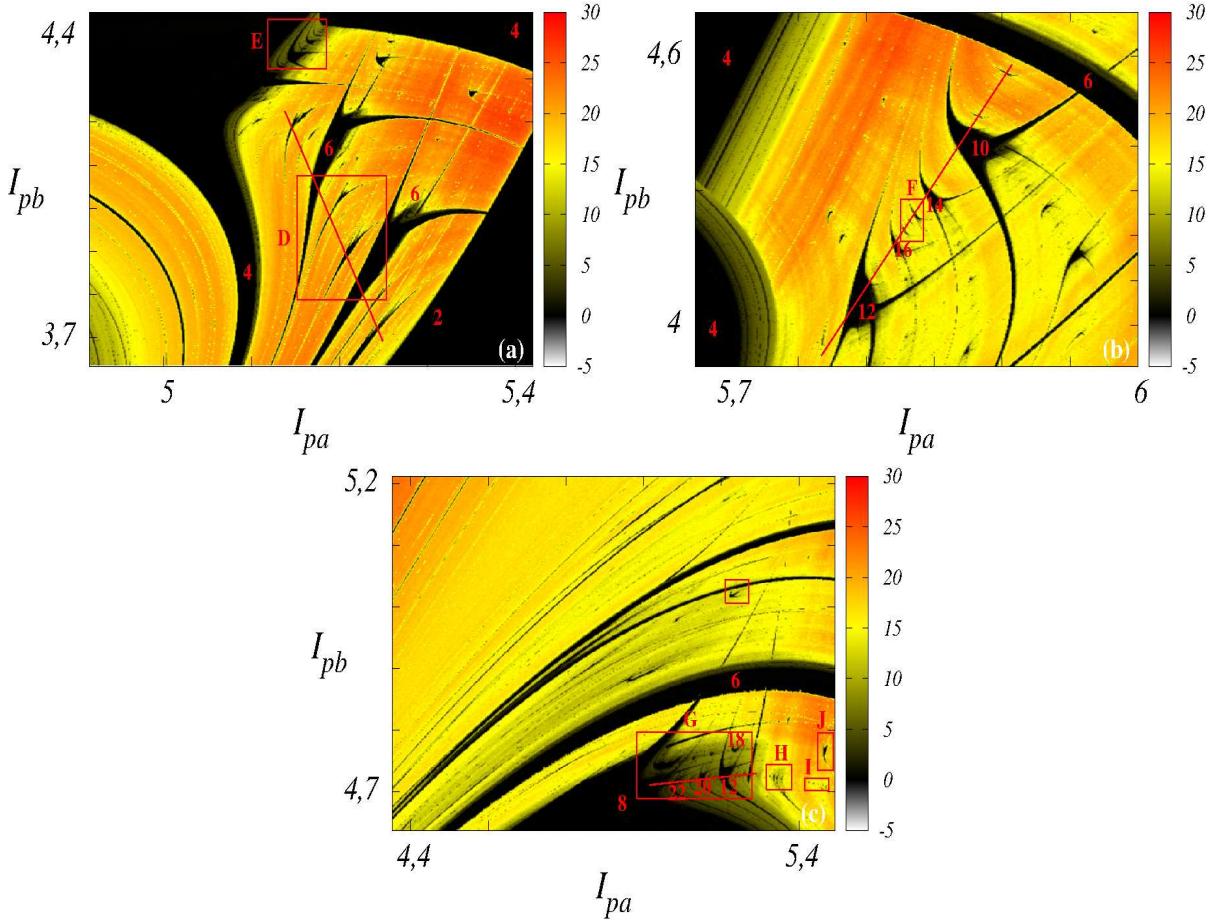


Figura 4.3: (a) Ampliação da caixa **A** na Fig. 4.1. (b) Ampliação da caixa **B** na Fig. 4.1. (c) Ampliação da caixa **C** na Fig. 4.1.

Nas Figs. 4.3(a), 4.3(b) e 4.3(c) observamos com maior clareza as estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, sendo que tais estruturas periódicas são conhecidas na literatura como “camarões” [38]. Como podemos observar os camarões possuem uma auto-organização estabelecida e para verificarmos a auto-organização utilizamos o diagrama de bifurcação para encontrarmos os períodos de cada um deles. A partir disto podemos analisar se estas estruturas periódicas possuem uma lei de formação que regula seus posicionamentos. Por meio do diagrama de bifurcação podemos mostrar o nascimento, a evolução e a morte do conjunto de

pontos para o qual o sistema é atraído como função de um dos parâmetros do sistema, bem como mostrar as rotas para o caos, ou seja, como o sistema passa de um estado periódico para caótico ou vice e versa.

Na Fig. 4.3(a) vemos que os dois camarões maiores possuem um período 6 e ainda temos regiões periódicas de períodos 4 e 2. Para conseguirmos contar os períodos das estruturas periódicas entre os camarões de período 6 faremos mais uma ampliação, a da mostrada pela caixa **D**. Também ampliaremos uma região da parte superior, aquela mostrada pela caixa **E**, onde estruturas periódicas podem ser visualizadas. Na Fig. 4.3(b) vemos uma sequência de camarões organizadas em uma direção específica de períodos 12, 16, 14, 10 e regiões periódicas de período 4 e 6. Faremos uma ampliação para investigarmos as estruturas entre as estruturas periódicas de período 16 e 14, correspondente a região mostrada na caixa **F**.

Na Fig. 4.3(c) observamos que no canto inferior direito existem diversas estruturas periódicas imersas em regiões caóticas, cujos períodos encontrados foram 12, 18, 20, 22 e temos regiões periódicas de períodos 8 e 6. Para visualizarmos melhor tais estruturas e contarmos os períodos de outras estruturas presentes nesta figura, faremos 4 ampliações, correspondentes às regiões mostradas nas caixas **G**, **H**, **I** e **J**.

Os valores para os períodos dos camarões nas Figs. 4.3(a), 4.3(b) e 4.3(c) foram encontrados a partir da construção de diagramas de bifurcação, onde consideramos o número de máximos locais da variável z em uma órbita completa sobre o atrator. Para obtermos o diagrama de bifurcação consideramos dois pontos no espaço de parâmetros e encontramos a equação da reta que os une e que atravessa as regiões periódicas, cujos períodos queremos determinar. Nas Figs. 4.4(a), 4.4(b) e 4.4(c) são mostrados diagramas de bifurcação correspondentes as Figs. 4.3(a), 4.3(b) e 4.3(c). Na Fig. 4.4(a) podemos observar que existem duas janelas de periodicidade maiores que correspondem aos períodos 6 descritos acima, também podemos ver outras janelas de periodicidade um pouco menores que são dos camarões próximos e para verificar os períodos são necessárias ampliações do diagrama para a sua contagem. O parâmetro I_{pa} localizado no eixo horizontal varia no intervalo $5,13768 \leq I_{pa} \leq 5,24923$ e $3,69236 \leq I_{pb} \leq 4,22574$. No eixo vertical temos número de máximos locais da variável z numa órbita completa.

Na Fig. 4.4(b) observamos a existência de duas janelas de periodicidade maiores que correspondem aos períodos 12 e 10 relatados acima. Entre estas janelas de periodicidade temos os

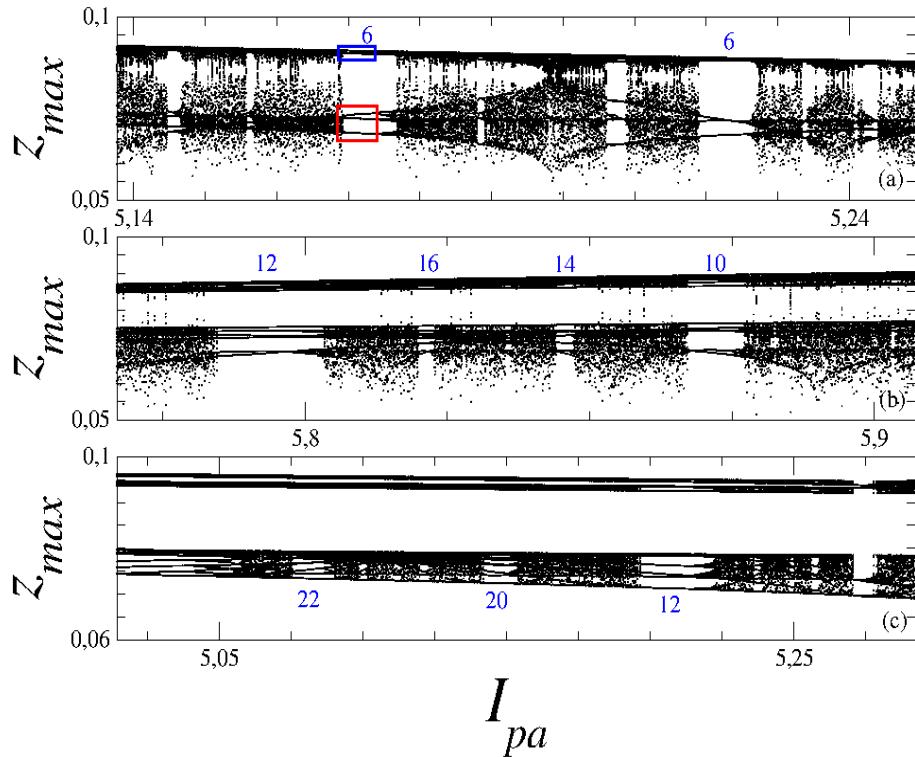


Figura 4.4: (a) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.3(a) na variável z , para $5,13768 \leq I_{pa} \leq 5,24923$ e $3,69236 \leq I_{pb} \leq 4,22574$. (b) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.3(b) na variável z , para $5,90722 \leq I_{pa} \leq 5,76697$ e $3,93293 \leq I_{pb} \leq 4,58058$. (c) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.3(c) na variável z , para $5,01454 \leq I_{pa} \leq 5,29226$ e $4,71082 \leq I_{pb} \leq 4,72960$.

períodos 16 e 14, e ainda conseguimos ver mais uma janela de periodicidade, a qual será contada com a ampliação desta região. O parâmetro I_{pa} varia no intervalo $5,90722 \leq I_{pa} \leq 5,76697$ e $3,93293 \leq I_{pb} \leq 4,58058$. Por fim, na Fig. 4.4(c) observamos no diagrama de bifurcação os períodos 22, 20 e 12, sendo que, além destes três períodos encontramos os períodos 18 e 8. No diagrama da Fig. 4.4(c) observamos três janelas de periodicidade maiores (22, 20, 12) e podemos ver que existem outras janelas de periodicidade entre estes períodos. O parâmetro I_{pa} varia no intervalo $5,01454 \leq I_{pa} \leq 5,29226$ e $4,71082 \leq I_{pb} \leq 4,72960$. As equações de reta utilizadas para fazer os diagramas de bifurcação da Fig. 4.4(a), 4.4(b) e 4.4(c) são $I_{pb} = -4,78153I_{pa} + 28,79171$, $I_{pb} = 4,61783I_{pa} - 22,69796$, e $I_{pb} = 0,06762I_{pa} + 4,37174$, respectivamente.

A Fig. 4.5 mostra as ampliações das caixas azul e vermelha na Fig. 4.4(a), para podemos ver com maior detalhe a contagem do período 6. Observamos que na parte superior, correspondente a caixa azul, obtemos três períodos e na parte inferior, correspondente a caixa vermelha, obtemos mais três períodos, totalizando portanto, um período 6 para esta estrutura

periódica.

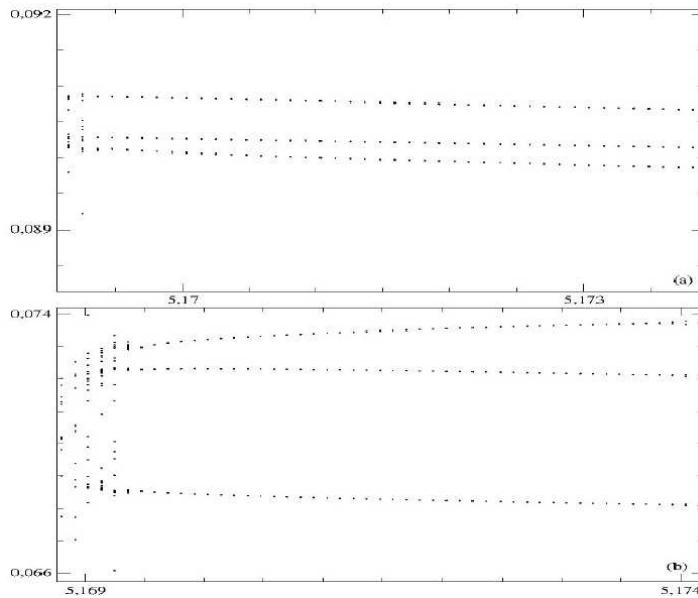


Figura 4.5: (a) Ampliação da caixa azul na Fig. 4.4(a). (b) Ampliação da caixa vermelha na Fig. 4.4(a).

Agora faremos algumas ampliações nos espaços de parâmetros apresentados para investigarmos algumas estruturas periódicas, as quais não conseguimos analisar os períodos com clareza, para depois inferirmos sobre possíveis leis de formação na sua organização. Na Fig. 4.3(a) faremos duas ampliações: caixas **D** e **E** que estão localizadas entre as janelas de periodicidade 6 e na parte superior, respectivamente. As ampliações das caixas **D** e **E** são mostradas na Fig. 4.6(a) com o intervalo $5,15163 \leq I_{pa} \leq 5,25329$ e $3,78839 \leq I_{pb} \leq 4,07617$, e na Fig. 4.6(b) com o intervalo $5,11802 \leq I_{pa} \leq 5,18525$ e $4,32395 \leq I_{pb} \leq 4,43772$.

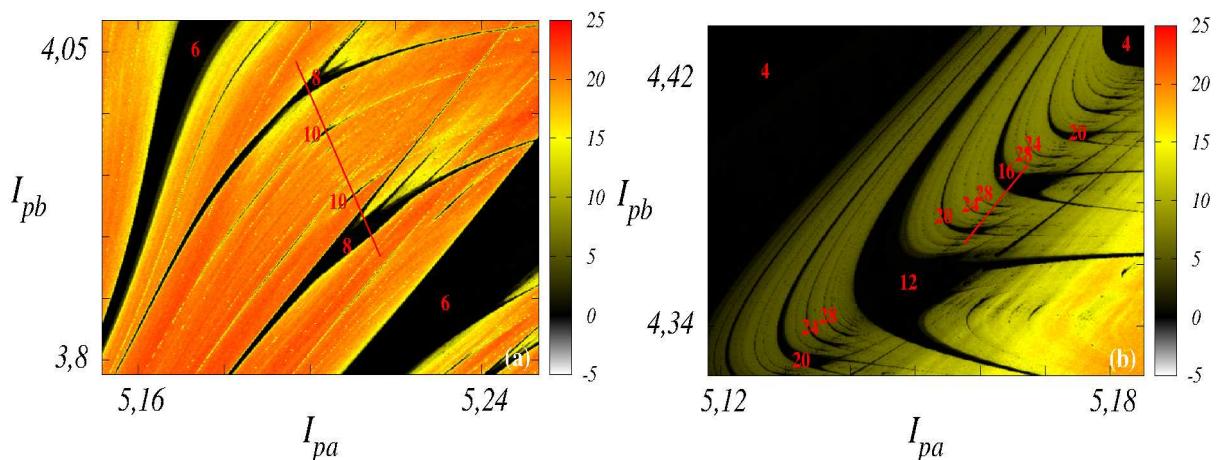


Figura 4.6: (a) Ampliação da caixa **D** da Fig. 4.3(a). (b) Ampliação da caixa **E** na Fig. 4.3(a).

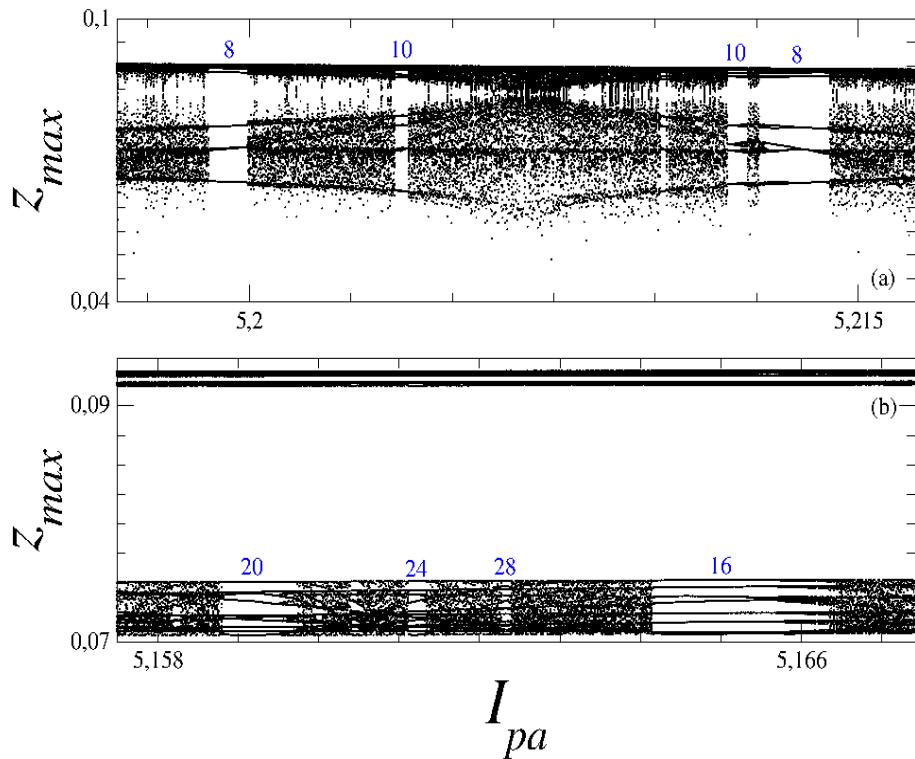


Figura 4.7: (a) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.6(a) na variável z , para $5,19674 \leq I_{pa} \leq 5,21641$ e $3,69236 \leq I_{pb} \leq 4,22574$. (b) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.6(b) na variável z , para $5,15749 \leq I_{pa} \leq 5,16742$ e $4,36668 \leq I_{pb} \leq 4,39264$.

Analisando os períodos na Fig. 4.6(a) encontramos, por meio do diagrama de bifurcação, os seguintes períodos 8, 10, 10, 8, sendo o intervalo do parâmetro variando de $5,19674 \leq I_{pa} \leq 5,21641$ e $3,69236 \leq I_{pb} \leq 4,22574$, mostrado na Fig. 4.7(a). Para a determinação dos períodos da Fig. 4.6(b) foram feitas várias retas afim de tornar a contagem com mais exatidão. Os períodos encontrados em torno do camarão de período 12 foram 20, 24, 28, 12, 20, 24, 28, enquanto que para o camarão de período 16 foram 20, 24, 28, 16, 28, 24, 20. Por exemplo, para encontrar os períodos 20, 24, 28, 16 o intervalo variou de $5,15749 \leq I_{pa} \leq 5,16742$ e $4,36668 \leq I_{pb} \leq 4,39264$, como mostrado na Fig. 4.7(b). As equações de reta utilizadas para fazer os diagramas de bifurcação das Figs. 4.6(a) e 4.6(b) foram $I_{pb} = -0,05491I_{pa} + 4,32806$ e $I_{pb} = 2,61430I_{pa} - 9,11655$.

Com os resultados obtidos do estudo da periodicidade das estruturas periódicas na Fig. 4.3(a), podemos concluir que neste espaço de parâmetros encontramos uma cascata de bifurcação por adição de período, sendo que o período é 2. A cascata envolve os seguintes períodos 6, 8, 10, 10, 8, 6, e é denominada de período 2, pois o valor que muda de um período para o outro

vai de dois em dois. Com relação a periodicidade da Fig. 4.6(b) observamos outras formas de organização das estruturas periódicas quando se aumenta ambos I_{pa} e I_{pb} . A estrutura maior de período 12 tem estruturas satélites organizadas como 20, 24, 28, 12, 20, 24, 28, enquanto que para a maior estrutura de período 16 a organização é do tipo 20, 24, 28, 16, 28, 24, 20.

Dando continuidade ao estudo da periodicidade, agora vamos analisar a ampliação da caixa **F**, localizada na Fig. 4.3(b), e que é mostrada na Fig. 4.8. Os intervalos dos parâmetros são $5,82517 \leq I_{pa} \leq 5,84211$ e $4,18810 \leq I_{pb} \leq 4,28038$ para a Fig. 4.8, onde encontramos os períodos 20, 24, 22, 18. O diagrama de bifurcação é mostrado na Fig. 4.9, cujas maiores janelas periódicas correspondem aos períodos 20, 18 e a equação da reta utilizada, para o intervalo $5,82623 \leq I_{pa} \leq 5,83578$ e $4,20696 \leq I_{pb} \leq 4,26240$, foi $I_{pb} = 5,80524I_{pa} - 29,61570$. Portanto, podemos concluir que através da análise da periodicidade na Fig. 4.3(b), que possui os seguintes períodos 12, 16, 20, 24, 22, 18, 14, 10, temos a ocorrência de uma cascata de bifurcação por adição de período, aumentando de um período 2.

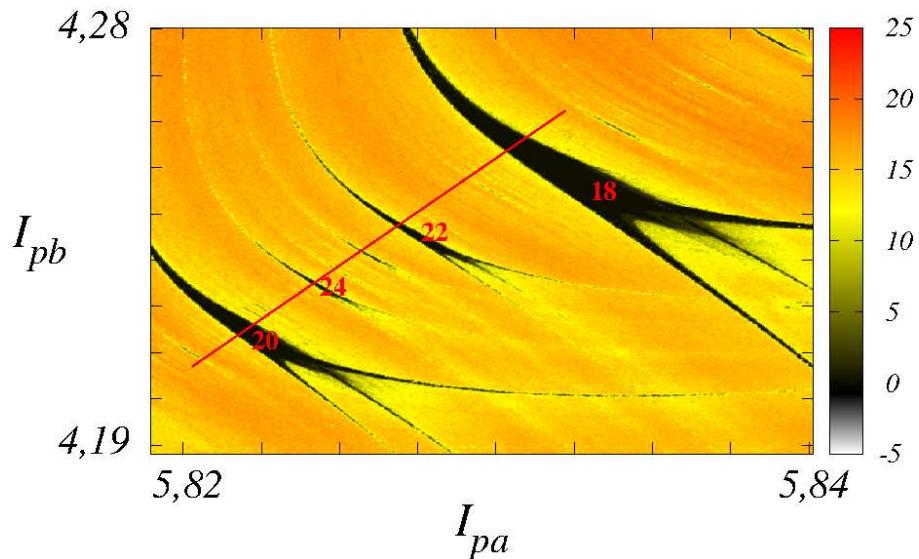


Figura 4.8: Ampliação da caixa **F**, para $5,82517 \leq I_{pa} \leq 5,84211$ e $4,18810 \leq I_{pb} \leq 4,28038$.

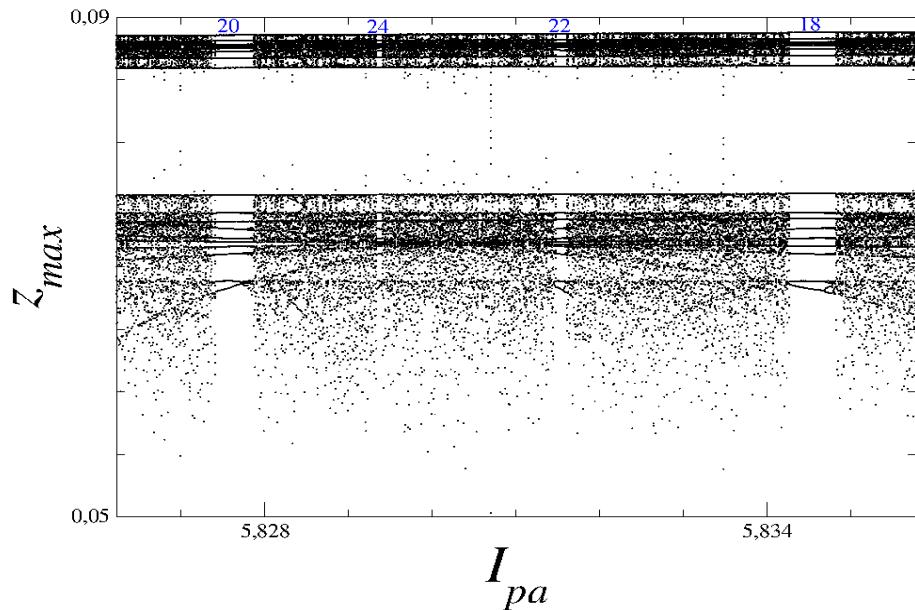


Figura 4.9: Diagrama de bifurcação da Fig. 4.8 na variável z , para $5,82623 \leq I_{pa} \leq 5,83578$ e $4,20696 \leq I_{pb} \leq 4,26240$.

Para visualizarmos melhor como ocorre a cascata de bifurcação por adição de período 2, mostramos na Fig. 4.10 a sua organização.

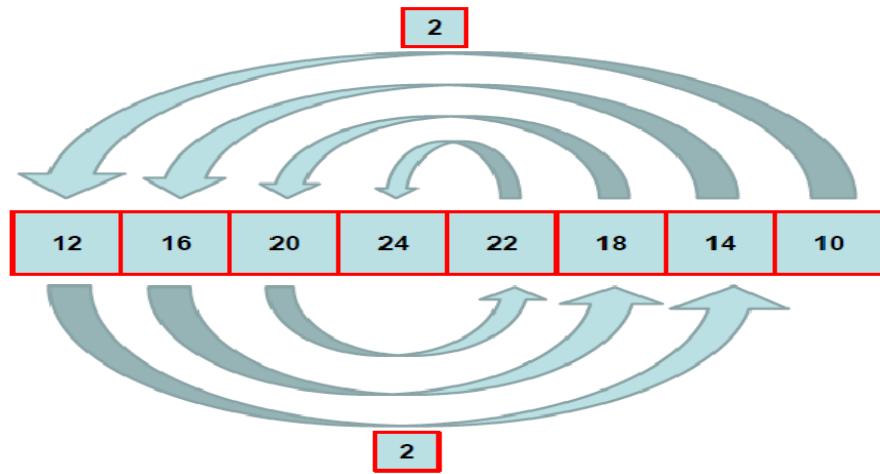


Figura 4.10: Cascata de bifurcação por adição de período 2 das estruturas periódicas de períodos 12, 16, 20, 24, 22, 18, 14, 10.

Na Fig. 4.3(c) fizemos 4 ampliações, caixas **G**, **H**, **I** e **J**, mostradas nas Figs. 4.11(a), 4.11(b), 4.11(c) e 4.11(d). Na Fig. 4.11(a) encontramos pedaços de três diferentes cascatas de bifurcação por adição de período, a saber $12 \rightarrow 18 \rightarrow \dots$, $20 \rightarrow 26 \rightarrow \dots$, $28 \rightarrow 34 \rightarrow \dots$ e $22 \rightarrow 28 \rightarrow \dots$ todos aumentando de um período 6 e convergindo para uma estrutura de

acumulação de período 6, visível na Fig. 4.3. Nas Figs. 4.11(b) e 4.11(c) encontramos os períodos 14, 18, 18, 14 que são arranjados em uma cascata de bifurcação por adição de período, onde o período é aumentado de 4. Além disso, encontramos os períodos entre os pares de camarões da Fig. 4.11(b) que são 14 20, 26, 18, 18, 26, 20, 14 e da Fig. 4.11(c) são 14, 22, 26, 18, 18, 26, 22, 14.

Na Fig. 4.11(d) analisamos o período de um único camarão e encontramos um período 10. Com relação a todos os estudos feitos sobre a periodicidade dos espaços de parâmetros, podemos concluir que as cascatas aumentam de período por um número inteiro n e se acumulam em uma larga região periódica com a mesma periodicidade n .

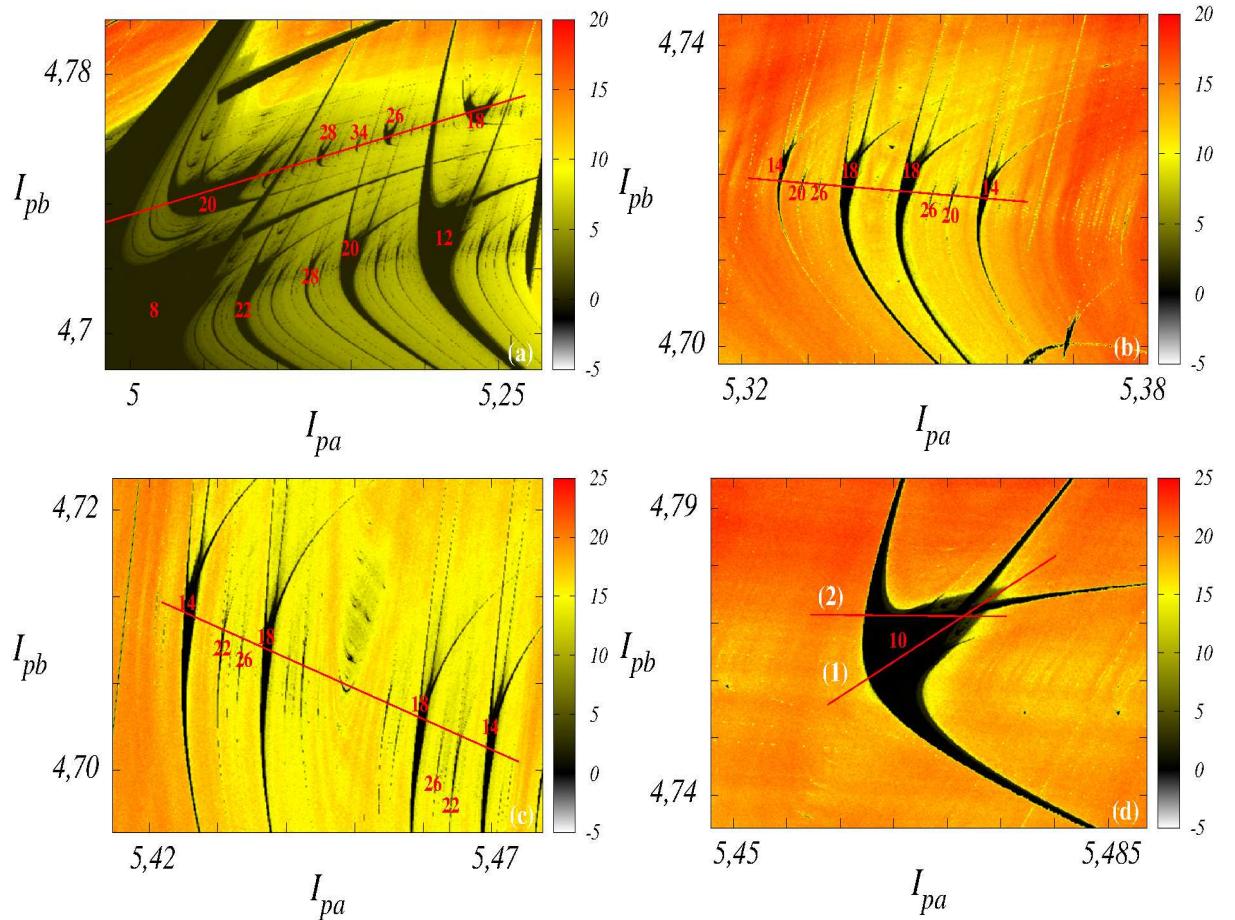


Figura 4.11: (a) Ampliação da caixa **G** na Fig. 4.3(c), para $4,98302 \leq I_{pa} \leq 5,27935$ e $4,68887 \leq I_{pb} \leq 4,79697$. (b) Ampliação da caixa **H** na Fig. 4.3(c), para $5,31642 \leq I_{pa} \leq 5,38126$ e $4,70295 \leq I_{pb} \leq 4,74368$. (c) Ampliação da caixa **I** na Fig. 4.3(c), para $5,41459 \leq I_{pa} \leq 5,47750$ e $4,70142 \leq I_{pb} \leq 4,72184$. (d) Ampliação da caixa **J** na Fig. 4.3(c), para $5,44792 \leq I_{pa} \leq 5,48861$ e $4,73429 \leq I_{pb} \leq 4,79533$.

Todos os períodos encontrados nas Figs. 4.11(a), 4.11(b), 4.11(c) e 4.11(d) foram obtidos analisando os diagramas de bifurcação mostrados nas Figs. 4.12(a), 4.12(b), 4.12(c) e 4.12(d). Na Fig. 4.12(a) encontramos os períodos 20, 28, 26, 18, que são obtidos da equação da reta $I_{pb} = 0,13745I_{pa} + 4,04937$. Os períodos do diagrama de bifurcação da Fig. 4.12(b) são 14, 18, 18, 14 e são obtidos pela equação da reta $I_{pb} = -0,06556I_{pa} + 5,07340$ e na Fig. 4.12(c) são 14, 18, 18, 14, obtidos pela equação da reta $I_{pb} = -0,12424I_{pa} + 5,38829$. Por fim, o diagrama com período 10 da Fig. 4.12(d), obtido pela reta (1), cuja equação da reta é $I_{pb} = 1,22128I_{pa} - 1,91100$.

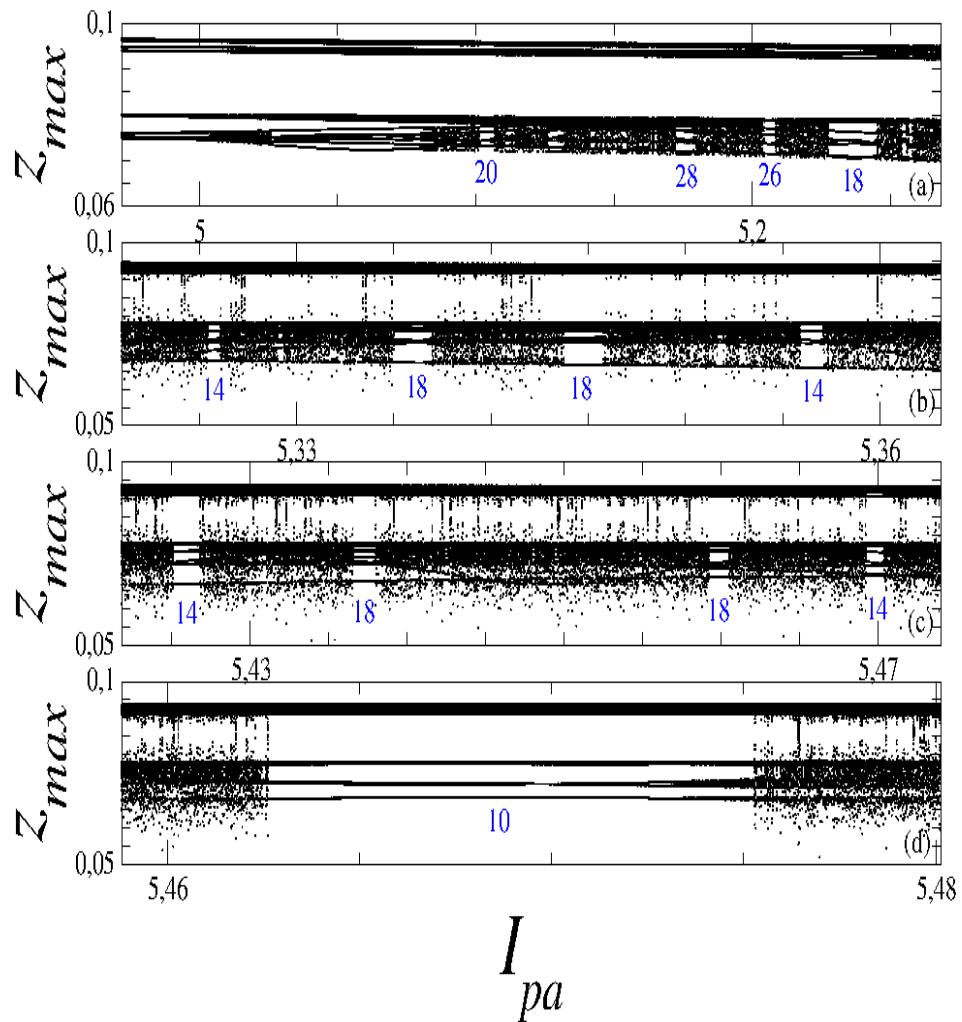


Figura 4.12: (a) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.11(a) na variável z , para $4,97191 \leq I_{pa} \leq 5,26824$ e $4,73276 \leq I_{pb} \leq 4,77349$. (b) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.11(b) na variável z , para $5,32102 \leq I_{pa} \leq 5,36312$ e $4,72179 \leq I_{pb} \leq 4,72455$. (c) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.11(c) na variável z , para $5,42180 \leq I_{pa} \leq 5,47400$ e $4,70548 \leq I_{pb} \leq 4,71469$. (d) Diagrama de bifurcação da Fig. 4.11(d) na variável z , para $5,45880 \leq I_{pa} \leq 5,48013$ e $4,75572 \leq I_{pb} \leq 4,78177$.

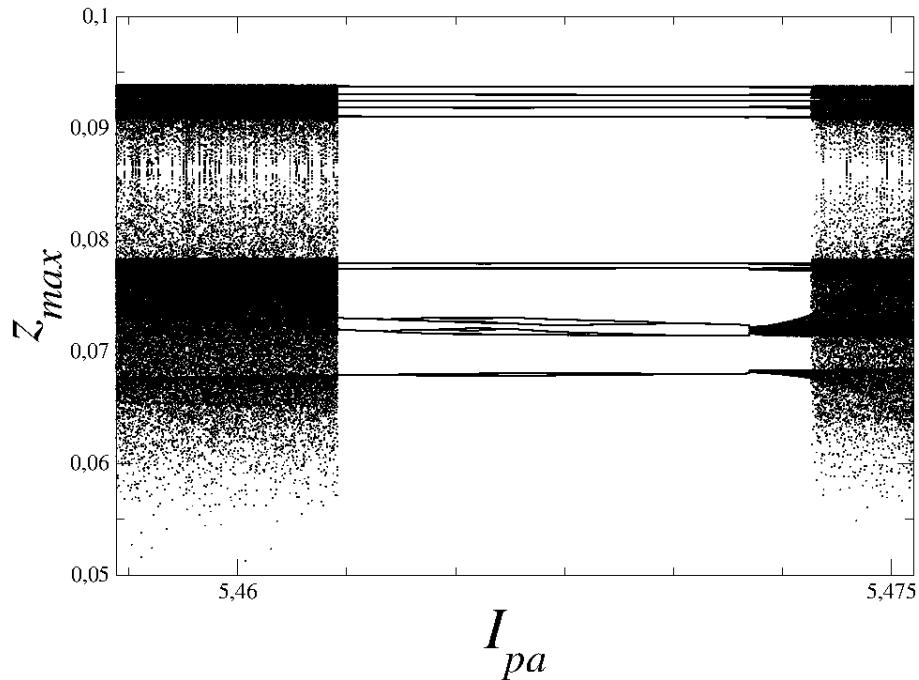


Figura 4.13: Diagrama de bifurcação da Fig. 4.11(d) na variável z . Vários períodos podem ser observados analisando pontos nas fronteiras e no interior do camarão.

Um fato interessante que podemos observar quando analisamos a periodicidade de uma estrutura periódica simples, como mostrado na Fig. 4.11(d), é que estas regiões não são caracterizadas pela existência de um único período. A existência de mais de um período em uma estrutura periódica pode ser conferida no diagrama de bifurcação da Fig. 4.13, que corresponde a reta (2) da Fig. 4.11(d). A equação da reta utilizada foi $I_{pb} = -0,01803I_{pa} + 4,86987$. Dependendo da região que olharmos no diagrama de bifurcação para a contagem dos períodos encontraremos vários períodos em um único camarão [39].

4.2 Lei de formação de estruturas periódicas

Conhecidos os períodos de algumas estruturas periódicas denominadas “camarões”, podemos agora analisar as regras de sua organização, buscando uma lei de formação para estas estruturas. A auto-organização predominante para o nosso sistema, que foi investigada através dos diagramas de bifurcação, é a cascata por adição de período. Neste tipo de cascata as estruturas se organizam de tal maneira que o período de cada estrutura aumenta de forma constante em direções específicas. Utilizando o software WolframAlpha disponível na página da internet

<http://www.wolframalpha.com>, verificamos a possibilidade das sequências de períodos encontradas terem uma lei de formação. Para a Fig. 4.3(a), que apresenta os seguintes períodos 6, 8, 10, 10, 8, 6, encontramos uma sequência que determina sua formação, sendo dada por

$$a_n = \frac{2(n^2 - 7n + 42)}{n^2 - 7n + 18},$$

onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. A Fig. 4.11(b) também tem uma sequência que determina a formação das estruturas periódicas de períodos 14, 20, 26, 18, 18, 26, 20, 14, a qual é dada por

$$a_n = \frac{-27n^4 + 486n^3 - 2531n^2 + 3096n + 3596}{29n^2 - 261n + 562},$$

onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Na Fig. 4.11(c), com períodos 14, 18, 18, 14, surgem estruturas organizadas de acordo com a sequência

$$a_n = -2(n^2 - 5n - 3),$$

onde $n = 1, 2, 3, 4$. Ou ainda temos outra possibilidade de períodos como 14, 22, 26, 18, 18, 26, 22, 14, sendo a sequência dada por

$$a_n = \frac{-17n^4 + 306n^3 - 1687n^2 + 2790n + 708}{6(2n^2 - 18n + 41)},$$

onde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Como podemos observar, para algumas sequências de períodos encontradas obtivemos uma relação que governa a organização das estruturas periódicas. Aparentemente, cada uma das relações são válidas apenas para os números de n informados, ou seja, extrapolações não são garantidas.

4.3 Outros espaços de parâmetros

Além da construção do espaço de parâmetros (I_{pa}, I_{pb}) fizemos a combinação de todos os espaços de parâmetros possíveis, sob as mesmas condições feitas para a Fig. 4.1, para verificarmos quais estruturas apareceriam. Os parâmetros foram fixados para os seguintes valores $k_a = k_b = 1000$, $g_a = 10500$, $g_b = 4700$, $C_0 = 0.2$, $I_{pa} = I_{pb} = 4$, de acordo com cada caso,

exceto para os dois parâmetros que estão sendo variados para a construção da figura. Excluindo o espaço de parâmetros (I_{pa}, I_{pb}) foram construídos 20 espaços de parâmetros, a saber, (I_{pa}, g_a) , (I_{pa}, g_b) , (I_{pa}, k_a) , (I_{pa}, k_b) , (I_{pa}, C_0) , (I_{pb}, g_a) , (I_{pb}, g_b) , (I_{pb}, k_a) , (I_{pb}, k_b) , (I_{pb}, C_0) que são mostrados nas Figs. 4.14(a), 4.14(b), 4.14(c), 4.14(d), 4.14(e), 4.14(f), 4.14(g), 4.14(h), 4.14(i), 4.14(j) e (g_a, g_b) , (g_a, k_a) , (g_a, k_b) , (g_a, C_0) , (g_b, k_a) , (g_b, k_b) , (g_b, C_0) , (k_a, k_b) , (k_a, C_0) , (k_b, C_0) , são mostrados nas Figs. 4.15(a), 4.15(b), 4.15(c), 4.15(d), 4.15(e), 4.15(f), 4.15(g), 4.15(h), 4.15(i), 4.15(j), respectivamente.

Observando os espaços de parâmetros das Figs. 4.14 e 4.15, parece um fato comum entre eles: independentemente dos dois parâmetros que estão simultaneamente variando, o cenário caracterizado pela presença de estruturas periódicas auto-organizadas imersas em uma região caótica é preservado. Neste trabalho escolhemos investigar detalhadamente o espaço bidimensional de parâmetros (I_{pa}, I_{pb}) , porque entendemos serem estes mais facilmente alteráveis no sistema, ou seja, possivelmente I_{pa} e I_{pb} sejam os parâmetros mais acessíveis para atividades experimentais.

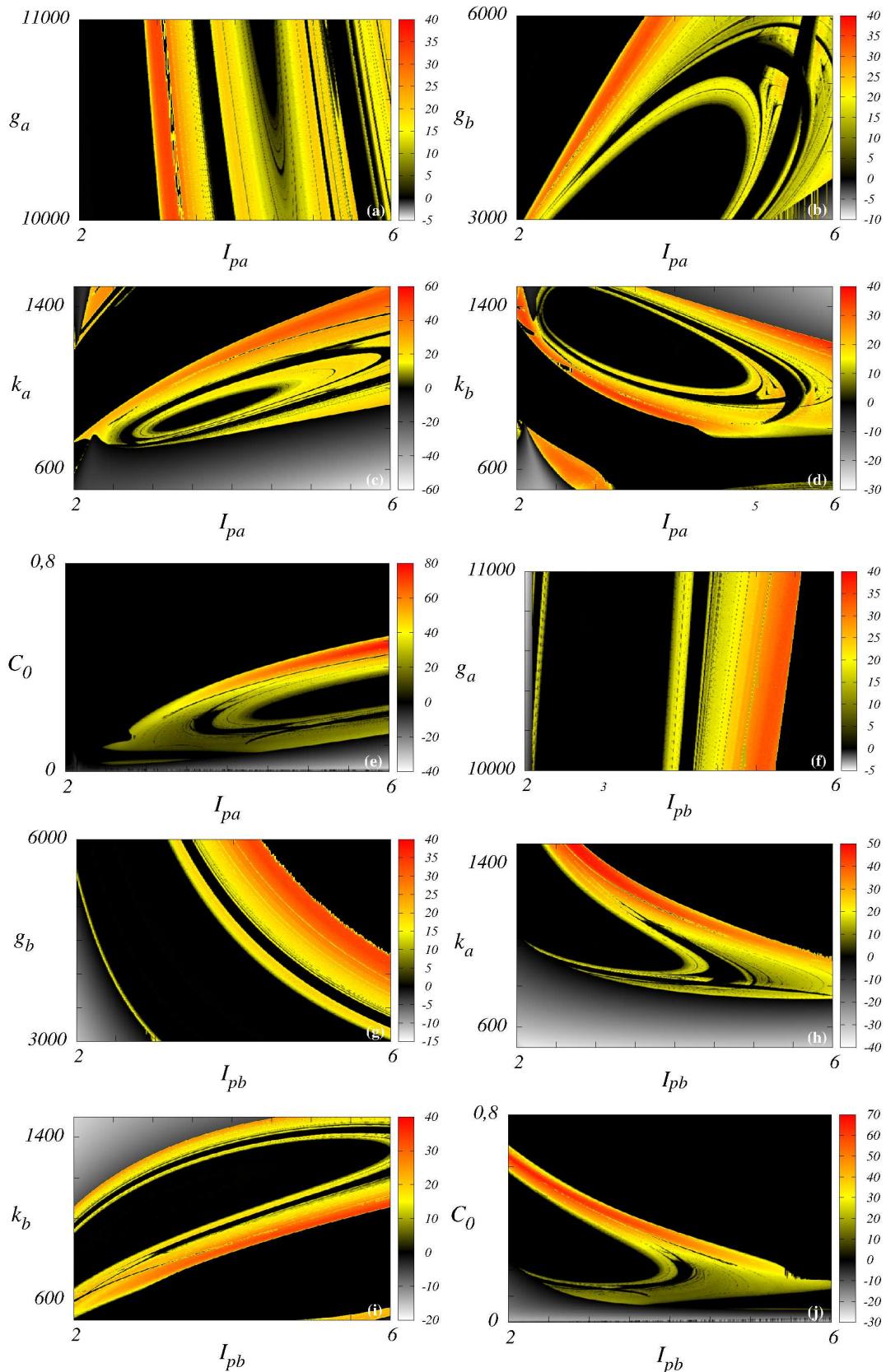


Figura 4.14: (a) (I_{pa}, g_a) . (b) (I_{pa}, g_b) . (c) (I_{pa}, k_a) . (d) (I_{pa}, k_b) . (e) (I_{pa}, C_0) . (f) (I_{pb}, g_a) . (g) (I_{pb}, g_b) . (h) (I_{pb}, k_a) . (i) (I_{pb}, k_b) . (j) (I_{pb}, C_0) .

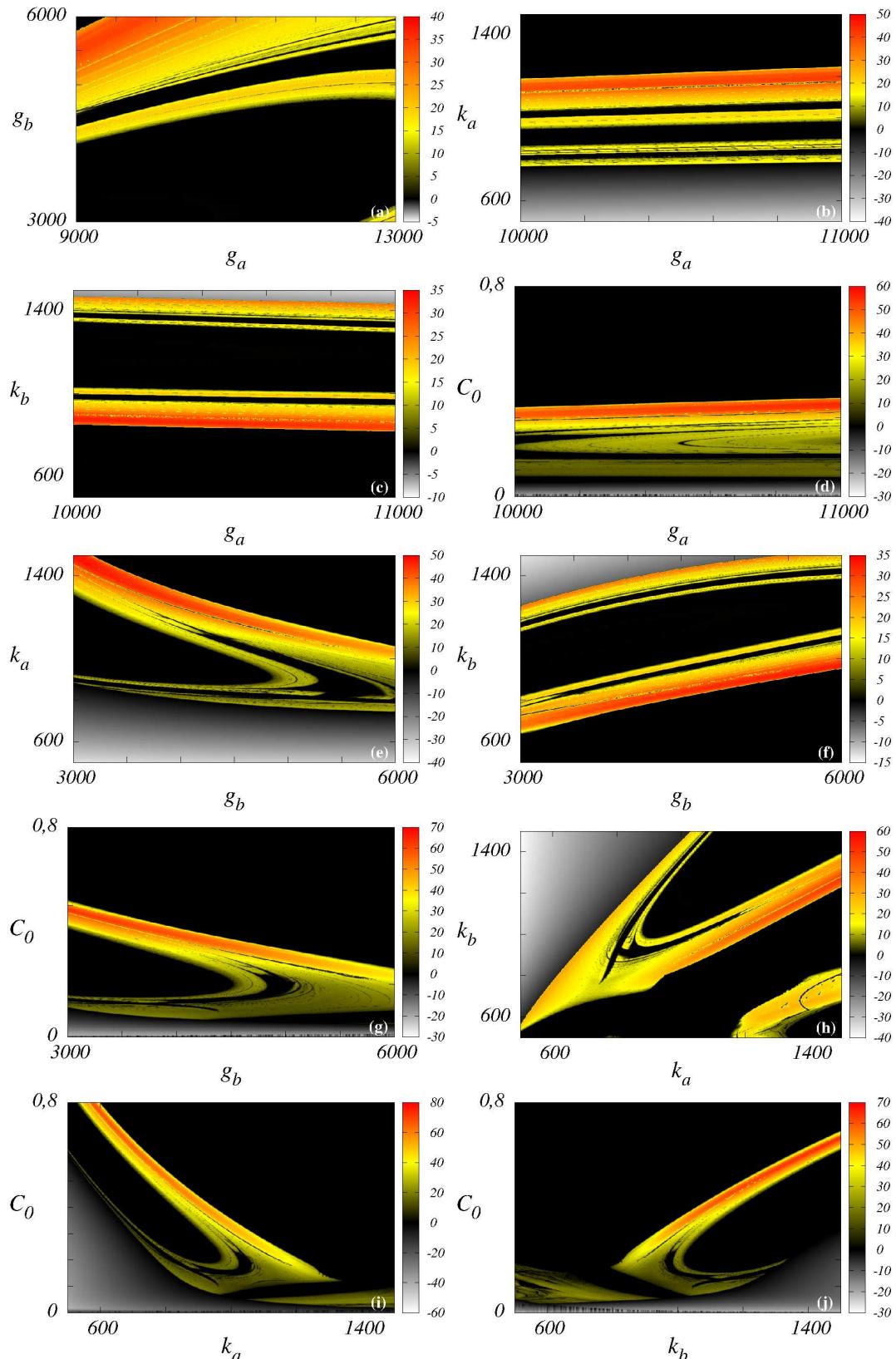


Figura 4.15: (a) (g_a, g_b) . (b) (g_a, k_a) . (c) (g_a, k_b) . (d) (g_a, C_0) . (e) (g_b, k_a) . (f) (g_b, k_b) . (g) (g_b, C_0) . (h) (k_a, k_b) . (i) (k_a, C_0) . (j) (k_b, C_0) .

Capítulo 5

Conclusões

O sistema dinâmico do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio, modelado pelo conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem, não-lineares (3.1), é caracterizado por um conjunto de sete parâmetros que controlam o seu comportamento e, consequentemente, dão origem a mudanças na dinâmica. Estudos com sistemas de quatro dimensões são de grande interesse devido a rica dinâmica apresentada e que pode levar a novas descobertas. Tais sistemas tem sido pouco investigados.

Neste trabalho estudamos analiticamente e numericamente a caracterização dos estados de um sistema dinâmico a tempo contínuo. A investigação analítica consistiu na análise da estabilidade do pontos de equilíbrio para o modelo do laser usando o critério de Routh-Hurwitz. Os resultados analíticos obtidos mostraram a existência de um ponto de equilíbrio para o sistema (3.1) e através do cálculo da matriz Jacobiana calculada no ponto verificamos que os autovalores encontrados eram muito complexos, sendo a análise da estabilidade de difícil conclusão. Então utilizamos o critério de Routh-Hurwitz e observamos que o ponto de equilíbrio é caracterizado com a possibilidade de ser instável. Concluindo então, que podem existir atratores caóticos, logo existem regiões caóticas na dinâmica do laser.

Simulações numéricas usando o maior expoente de Lyapunov, que mede o comportamento caótico de um sistema, foram realizadas incluindo a construção de diagramas em espaços de parâmetros bidimensionais, portanto variando dois parâmetros. O resultado das soluções numéricas para o laser de fibra de dois anéis dopado a érbio nos mostra a presença de estruturas periódicas típicas auto-organizadas, imersas em regiões caóticas. Importante é que todos os espaços de parâmetros bidimensionais apresentados neste trabalho, envolvendo as diversas

combinações possíveis dois a dois para os sete parâmetros, ao que parece tem preservado o cenário de estruturas periódicas auto-organizadas imersas em regiões caóticas.

Estudamos a periodicidade das estruturas periódicas imersas em uma região caótica e descobrimos algumas leis de formação para elas. Através do diagrama de bifurcação contamos os períodos das estruturas encontradas nos espaços de parâmetros e conseguimos verificar que certas sequências que descrevem a organização de alguns períodos obedecem uma lei de formação. O estudo da periodicidade nos mostrou que as estruturas periódicas estão auto-organizadas em direções específicas no espaço de parâmetros e são arranjadas em uma cascata de bifurcação por adição de período. As cascatas de bifurcação ocorreram na maioria das estruturas periódicas estudadas, o que pode ser observado com o auxílio dos diagramas de bifurcação. Além disto, outro tópico estudado foi a questão dos diversos períodos encontrados com o estudo de um único camarão, concluindo que dependendo do ponto onde é contado o período ele vai mudar. Portanto, existe mais de um período em um camarão.

Em resumo, espaços de parâmetros bidimensionais do laser de fibra de dois anéis dopado a érbio apresentam estruturas periódicas auto-organizadas, imersas em regiões caóticas. A organização de tais estruturas pode, em alguns casos, ser descrita por uma lei de formação específica. É comum encontrar nestes espaços bidimensionais de parâmetros as estruturas periódicas organizadas em cascata de bifurcação por adição de período.

Alguns dos resultados mostrados neste trabalho ajudaram a compor o artigo Dynamics of an erbium-doped dual-ring laser, Ref. [40].

Referências

- [1] M. Kimura, in *Fiber Lasers: Research, Technology and Applications*. Nova Science Publishers, New York, 2009.
- [2] H. Shalibeik, in *Rare-Earth-Doped Fiber Lasers and Amplifiers*. Cuvillier Verlag Göttingen, New York, 2007.
- [3] Y. Senlin, “Study on the method of controlling chaos in an er-doped fiber dual-ring laser via external optical injection and shifting optical feedback light,” *Chaos An interdisciplinary Journal of Nonlinear*, vol. 17, no. 1, p. 013106, 2007.
- [4] R. Wang and K. Shen, “Synchronization of chaotic erbium-doped fiber dual-ring lasers by using the method of another chaotic system to drive them,” *Physical Review E*, vol. 65, p. 016207, 2001.
- [5] R. Wang and K. Shen, “Inverse synchronization of chaotic systems in an erbium-doped fibre dual-ring laser using the mutual coupling method,” *Chinese Physics*, vol. 10, pp. 711–715, 2001.
- [6] S.-H. Zhang and K. Shen, “Generalized synchronization of chaos in erbium-doped dual-ring lasers,” *Chinese Physics*, vol. 11, pp. 894–899, 2002.
- [7] S.-H. Zhang and K. Shen, “Synchronization of chaotic erbium-doped fibre lasers and its application in secure communication,” *Chinese Physics*, vol. 18, pp. 1215–1220, 2004.
- [8] M. Phillips, H. Gong, A. Ferguson, and D. Hanna, “Optical chaos and hysteresis in a laser-diode pumped nd doped fibre laser,” *Optics Communications*, vol. 61, pp. 215–218, 1987.

- [9] F. Sanchez and G. Stephan, “General analysis of instabilities in erbium-doped fiber lasers,” *Physical Review E*, vol. 53, pp. 2110–2122, 1996.
- [10] C. Bonatto, J. C. Garreau, and J. A. C. Gallas, “Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO_2 laser,” *Physical Review Letters*, vol. 95, p. 143905, 2005.
- [11] R. M. Rubinger, W. M. Nascimento, L. F. Mello, C. P. L. Rubinger, N. M. Filho, and H. A. Albuquerque, “Inductorless chua’s circuit: experimental time series analysis,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2007.
- [12] H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, and P. C. Rech, “Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless chua’s circuit,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 233, no. 1, pp. 66–72, 2007.
- [13] J. G. Freire, C. Bonatto, C. C. DaCamara, and J. A. C. Gallas, “Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the lorenz-84 low-order atmospheric circulation model,” *Chaos An interdisciplinary Journal of Nonlinear*, vol. 18, p. 033121, 2008.
- [14] C. Bonatto and J. A. C. Gallas, “Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit,” *Physical Review Letters*, vol. 101, p. 054101, 2008.
- [15] H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger, and P. C. Rech, “Self-similar structures in a 2d parameter-space of an inductorless chua’s circuit,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 27–28, pp. 4793–4798, 2008.
- [16] C. Bonatto and J. A. C. Gallas, “Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers,” *Physical Review E*, vol. 75, p. 055204, 2007.
- [17] H. A. Albuquerque and P. C. Rech, “A parameter-space of a chua circuit system with a smooth nonlinearity,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 19, pp. 1351–1355, 2008.
- [18] J. G. Freire, R. J. Field, and J. A. C. Gallas, “Relative abundance and structure of chaotic behavior: The nonpolynomial belousov-zhabotinsky reaction kinetics,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 131, p. 044105, 2009.

- [19] J. A. C. Gallas, “The structure the infinite periodic and chaotic hub cascades in phase diagrams of simple autonomous flows,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, pp. 197–211, 2008.
- [20] J. C. Cardoso, H. A. Albuquerque, and R. M. Rubinger, “Complex periodic structures in bi-dimensional bifurcation diagrams of a rlc circuit model with a nonlinear ndc device,” *Physics Letters A*, vol. 373, no. 23-24, pp. 2050–2053, 2009.
- [21] V. Kovanis, A. Gavrielides, and J. A. C. Gallas, “Labyrinth bifurcations in optically injected diode lasers,” *The European Physical Journal D*, vol. 58, pp. 181–186, 2010.
- [22] G. M. Ramírez-Ávila and J. A. Gallas, “How similar is the performance of the cubic and the piecewise-linear circuits of chua?,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 2, pp. 143–148, 2010.
- [23] M. A. Nascimento, J. A. C. Gallas, and H. Varela, “Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator,” *Physical Chemistry Chemical Physics*, vol. 13, pp. 441–446, 2011.
- [24] E. R. V. Jr., R. M. Rubinger, H. A. Albuquerque, A. G. de Oliveira, and G. M. Ribeiro, “High-resolution parameter space of an experimental chaotic circuit,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, p. 023110, 2010.
- [25] C. Stegemann, H. A. Albuquerque, and P. C. Rech, “Some two-dimensional parameter spaces of a chua circuit with cubic nonlinearity,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, p. 023103, 2010.
- [26] H. A. Albuquerque and P. C. Rech, “Spiral periodic structure inside chaotic region in parameter-space of a chua circuit,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2010.
- [27] G. E. Testoni and P. C. Rech, “Dynamics of a particular lorenz type system,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 21, pp. 973–982, 2010.
- [28] P. C. Rech, “Self-similarities and period-adding in the parameter-space of a nonlinear resonant coupling process,” *The International Journal of Nonlinear Science*, vol. 10, pp. 179–185, 2010.

- [29] E. Viana, R. Rubinger, H. Albuquerque, F. Dias, A. de Oliveira, and G. Ribeiro, “Periodicity detection on the parameter–space of a forced chua’s circuit,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, pp. 385–392, 2012.
- [30] P. C. Rech, “Dynamics of a neuron model in different two-dimensional parameter-spaces,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 12, pp. 1461–1464, 2011.
- [31] P. Urquhart, “Review of rare earth doped fibre lasers and amplifiers,” *IEE Proceedings J Optoelectronics*, vol. 135, no. 6, pp. 385–407, 1988.
- [32] S.-H. Zhang and K. Shen, “Controlling hyperchaos in erbium-doped fiber laser,” *Chinese Physics*, vol. 12, no. 2, pp. 149–153, 2003.
- [33] C. Barnard, P. Myslinski, J. Chrostowski, and M. Kavehrad, “Analytical model for rare-earth-doped fiber amplifiers and lasers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 30, no. 8, pp. 1817–1830, 1994.
- [34] L. Liguo, T. J. Tee, and P. L. Chu, “Chaotic behavior in erbium-doped fiber-ring lasers,” *Journal Optical Society of America B*, vol. 15, no. 3, pp. 972–978, 1988.
- [35] S. Wiggins, in *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer–Verlag: Nova York, 1990.
- [36] E. Ott, in *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Nova York, 2000.
- [37] N. Ferrara and C. Prado, in *Caos, Uma Introdução*. Edgard Blöcher Ltda, São Paulo, 1995.
- [38] J. A. C. Gallas, “Structure of the parameter space of the hénon map,” *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 18, pp. 2714–2717, 1993.
- [39] M. A. Nascimento, J. A. C. Gallas, and H. Varela, “Self-organized distribution of periodicity and chaos in an electrochemical oscillator,” *Physical Chemistry Chemical Physics*, vol. 13, pp. 441–446, 2011.
- [40] T. S. Krüger and P. C. Rech, “Dynamics of an erbium-doped fiber dual-ring laser,” *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, vol. 66, pp. 12–17, 2012.