

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF**

**WILLIAN TIAGO PRANTS**

**DINÂMICA DO ACOPLAMENTO DE DOIS OSCILADORES CAÓTICOS DE  
RÖSSLER**

Joinville, SC

2012

**WILLIAN TIAGO PRANTS**

**DINÂMICA DO ACOPLAMENTO DE DOIS OSCILADORES CAÓTICOS DE  
RÖSSLER**

Dissertação apresentada para obtenção do título  
de mestre em Física da Universidade do Estado  
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnoló-  
gicas - CCT.

Orientador: Paulo Cesar Rech

Joinville, SC

2012

**WILLIAN TIAGO PRANTS**

**“ DINÂMICA DO ACOPLAMENTO DE DOIS OSCILADORES CAÓTICO DE  
RÖSSLER ”**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

área de concentração em “Dinâmica Não Linear” e aprovada em sua forma final pelo

**CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA**

**Banca Examinadora:**

Dr. Paulo Cesar Rech - CCT/UDESC (Presidente)

Dr. Holokx Abreu Albuquerque - CCT/UDESC

Dr. Antonio Endler - UFRGS

Dr. Marcus Werner Beims - UFPR (Suplente)

Joinville, 26/07/2012.

## FICHA CATALOGRÁFICA

P899d

Prants, Willian Tiago.

Dinâmica do acoplamento de dois osciladores caóticos  
de Rössler / Willian Tiago Prants; Orientador:  
Paulo Cesar Rech - Joinville-SC

46 f.: il ; 30cm

Incluem referências.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestra-  
do em Física, Joinville, 2012.

1. Modelo de Rössler. 2. Modelos Acoplados. 3. Não-linearidade.  
4. Hipercaos. 5. Supressão de caos. I. Rech, Paulo C.

CDD 531.1

*Aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

Cito aqui aqueles a quem devo os mais sinceros agradecimentos, pois sem eles esse trabalho não seria possível.

Ao CNPq e a CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao professor Dr. Paulo Cesar Rech, meu caro orientador, pelos conselhos e ensinamentos que carregarei comigo pelo resto de minha vida.

Aos meus amigos de ofício, pelos momentos engraçados e pelo companheirismo durante os dois longos anos desse trabalho.

Aos meus amigos em geral, por proporcionarem à minha mente os momentos de descontração e a possibilidade de respirar novos ares.

Aos meus pais, Raquel e Edson, e meus irmãos, Gabriela e Arthur, pelos inúmeros sacrifícios que fizeram, acreditando no caminho que escolhi seguir. E pelo imensurável amor que sempre demonstraram por mim.

À minha namorada Fabiola Grasnievicz, responsável por manter minha mente focada e um grande sorriso em meu rosto. Conhece-la e ama-la foram as melhores coisas que aconteceram na minha vida.

## RESUMO

Neste trabalho analisamos a dinâmica de dois modelos a tempo contínuo: (i) o modelo de Rössler, um modelo para o sistema de Lorenz, composto pelo conjunto de três equações diferenciais, de primeira ordem, autônomo e que apresenta apenas uma não-linearidade e (ii) o modelo de dois osciladores caóticos de Rössler acoplados, construído pelo acoplamento linear entre dois sistemas de Rössler e controlado por dois parâmetros de acoplamento  $\epsilon$  e  $\theta$ , que correspondem a intensidade e simetria de acoplamento. Para o primeiro modelo, encontramos analiticamente os pontos de equilíbrio e analisamos, através do método de Routh-Hurwitz, suas estabilidades. Construímos numericamente os espaços de parâmetros  $a \times b$ ,  $a \times c$  e  $c \times b$  identificando as regiões de regime caótico e detectamos estruturas periódicas típicas imersas nessas regiões. Para o segundo modelo, construímos numericamente o espaço de parâmetros para os parâmetros de acoplamento  $\epsilon$  e  $\theta$ , e encontramos uma região periódica imersa em caos, caracterizando o efeito de supressão de caos. Analisando o segundo maior expoente de Lyapunov detectamos uma larga região hipercaótica. Para ambos os modelos usamos diagramas de bifurcação para analisar as estruturas periódicas e determinar as rotas para o caos.

**Palavras-chave:** Modelo de Rössler. Modelos Acoplados. Não-linearidade. Hipercaos. Supressão de caos.

## ABSTRACT

In this work we analyze the dynamics of two continuous time models: (i) the Rössler model, a model for the Lorenz system, composed by a set of three differential equations of first order, autonomous, and has only one nonlinearity and (ii) the model of two coupled chaotic Rössler oscillators, built by the linear coupling between two Rössler systems and controlled by two coupling parameters  $\epsilon$  and  $\theta$ , which correspond to intensity and symmetry of the coupling. For the first model, we find analytically the equilibrium points and analyzed by the method of Routh-Hurwitz, their stability. We construct numerically the parameters space  $a \times b$ ,  $a \times c$  and  $c \times b$  identifying the regions of chaotic regime and detect typical periodic structures immersed in these regions. For the second model, we construct numerically the parameter space for the coupling parameters  $\epsilon$  and  $\theta$ , and we find a periodic region immersed in chaos characterizing the effect of suppression of chaos. By analyzing the second largest Lyapunov exponent we detect a hiperchaotic region. For both models we use bifurcation diagrams to analyze the periodic structures and to determine the routes to chaos.

**Key words:** Rössler model. Coupled model. Nonlinearity. Hiperchaos. Chaos Suppression.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Uma breve revisão sobre sistemas dinâmicos</b>	<b>3</b>
2.1	Sistemas dinâmicos . . . . .	3
2.2	Espaço de fases . . . . .	6
2.3	Atratores . . . . .	7
2.4	Diagrama de bifurcação . . . . .	7
2.5	Caos e expoente de Lyapunov . . . . .	9
2.6	Espaço de parâmetros . . . . .	11
2.7	Hipercaos . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Modelo de Rössler</b>	<b>14</b>
3.1	Resultados analíticos . . . . .	16
3.2	Resultados numéricos . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Modelo de osciladores acoplados</b>	<b>28</b>
4.1	Resultados numéricos . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Mesmo antes do invento da roda a mente humana procura explicações para os fenômenos que permeiam sua vida. O conjunto dessas explicações compõem o que conhecemos como verdade. Com o desenvolvimento do pensamento lógico surgiu a necessidade de expressar essa verdade em uma linguagem própria e universal, nasceu assim a matemática e passamos então a descrever nosso mundo modelando-o através dela. Mas foi apenas depois de Sir Isaac Newton (1642-1727) que os fenômenos naturais passaram a ser melhor descritos, com o uso de equações diferenciais.

Em 1886, J. H. Poincaré (1854-1912), ao estudar o problema de três corpos [1], percebeu que haviam métodos adequados para trata-lo que forneciam informações qualitativas sem a necessidade de solucionar um sistema de equações diferenciais. Poincaré iniciou ali seu estudo das estruturas topológicas no espaço de fases de trajetórias dinâmicas, identificando os componentes essenciais do caos determinístico e elaborando parte da matemática necessária para estudar caos [2]. No capítulo 2 apresentamos algumas técnicas do estudo qualitativo de sistemas dinâmicos, assim como alguns conceitos e definições inerentes ao estudo do sistema trabalhado.

Criar ou adequar um modelo para descrever um fenômeno observado é um trabalho complexo. O modelo mais completo não é, necessariamente, o melhor modelo para descrever qualquer situação. Vejamos, por exemplo, a foto de um homem, um manequim de plástico e um macaco. Cada um deles pode servir como modelo para representar um homem, porém, qual seria o modelo mais adequado? Para responder essa pergunta temos que considerar que uso daremos ao modelo, por exemplo, para um pintor a foto seria o modelo mais adequado, porém

para um alfaiate o manequim se torna a opção mais apropriada e para um biólogo, o macaco representaria o melhor modelo. Alguns modelos foram criados simplesmente para simplificar outros modelos, como a foto de um manequim. Esse é o caso do modelo de Rössler [3], que foi criado em 1976 com a proposta de fornecer resultados próximos do modelo de Lorenz [4], porém com uma dinâmica mais simples contendo apenas uma não-lineariedade. No capítulo 3 fazemos um estudo da dinâmica do modelo de Rössler. Determinamos analiticamente os pontos de equilíbrio e suas condições de estabilidade, e numericamente encontramos os locais no espaço de parâmetros que apresentam regime periódico e regiões com regime caótico.

No capítulo 4 apresentamos a proposta de trabalho, o estudo do acoplamento linear de dois osciladores de Rössler. Nesse capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos para o modelo acoplado, juntamente com sua análise qualitativa. Consta, finalmente, no capítulo 5 uma conclusão geral do trabalho.

# Capítulo 2

## Uma breve revisão sobre sistemas dinâmicos

A pequena revisão que faremos neste capítulo tem como objetivo apresentar ao leitor uma breve revisão dos conceitos de caracterização qualitativa de sistemas dinâmicos, necessária para garantir uma leitura contínua e mais enriquecedora dos capítulos posteriores. Obviamente os conceitos abordados aqui serão deliberadamente expostos, sem compromisso com demonstrações ou maiores aprofundamentos, tal como um guia. Se o texto apresentado aqui estimular a curiosidade do leitor, aconselho a leitura das Refs. [5–10] para um entendimento mais completo dos conceitos.

### 2.1 Sistemas dinâmicos

Por definição, um sistema dinâmico consiste em um conjunto de estados possíveis para um sistema mutável no tempo, juntamente com uma regra que determina o estado atual em termos dos estados passados [5]. O tempo em um sistema dinâmico pode ter uma evolução contínua, ou então assumir somente valores discretos inteiros. Sistemas dinâmicos com evolução discreta no tempo são chamados de mapas, o tempo pode assumir valores inteiros positivos ( $t =$

0, 1, 2, ...). Um exemplo de mapa pode ser descrito pelo conjunto de equações abaixo,

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(1)} &= M_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ x_{t+1}^{(2)} &= M_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ &\vdots \\ x_{t+1}^{(N)} &= M_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $x^{(i)}$  são as variáveis de estado do sistema e  $M_i$  são funções de  $x^{(i)}$ .

Sistemas dinâmicos com evolução contínua no tempo são chamados fluxos, um exemplo de conjunto de equações diferenciais ordinárias autônomas, que descreve um sistema  $N$ -dimensional contínuo, é representado abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= \dot{x}^{(1)} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= \dot{x}^{(2)} = F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(N)}}{dt} &= \dot{x}^{(N)} = F_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $x^{(i)}$  são as variáveis de estado do sistema e  $M_i$  são funções de  $x^{(i)}$ .

Para fins de redução de tempo computacional, é útil escrever um sistema de tempo contínuo como um mapa, um sistema a tempo discreto, através de uma secção de Poincaré. Usando uma secção de Poincaré podemos investigar a dinâmica de um sistema contínuo  $N$ -dimensional, investigando o respectivo mapa de dimensão  $N - 1$ . Uma secção de Poincaré de um fluxo tridimensional, por exemplo, pode ser construída plotando os pontos para os quais a trajetória  $C$  atravessa a superfície  $S$ , secção bidimensional, conforme mostrado na Fig. 2.1.

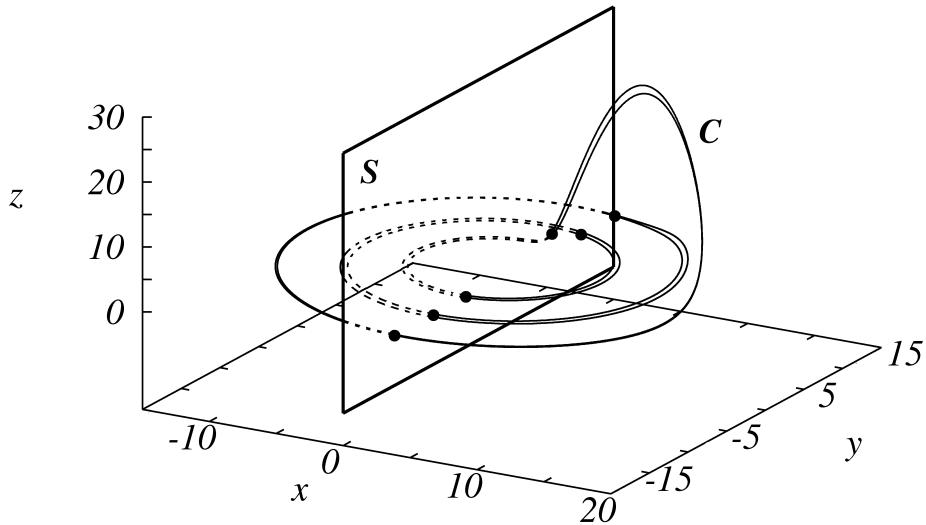


Figura 2.1: Esquema representativo da secção de Poincaré.

Observando duas intersecções sucessivas da trajetória seguida pelo sistema com a secção, a primeira resulta em um ponto com coordenadas  $(y_n, z_n)$  que determina a posição da segunda, com coordenadas  $(y_{n+1}, z_{n+1})$ , já que podemos usar o primeiro ponto como condição inicial nas Eq. (2.2) para obter o segundo. Assim, o mapa de Poincaré é a seqüência de pontos nos quais o fluxo intercepta a secção e transforma as coordenadas  $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N-1)})$  da  $i$ -ésima perfuração, nas coordenadas  $(x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)}, \dots, x_{n+1}^{(N-1)})$  da perfuração  $(i+1)$ .

O grande objetivo ao estudarmos sistemas dinâmicos é determinar o comportamento das soluções para os modelos matemáticos propostos, tendo eles interpretações físicas ou não. Basicamente, existem três técnicas para se investigar o comportamento de um sistema dinâmico:

- (i) *Técnica analítica*: integram-se analiticamente as equações, determinando a solução em termos de fórmulas gerais. Desse modo obtém-se soluções válidas para quaisquer condições iniciais e quaisquer conjunto de parâmetros de controle. No entanto, nem todo sistemas de equações pode ser integrado analiticamente;
- (ii) *Técnica numérica*: integram-se numericamente as equações, calculando valores para as

variáveis  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  para determinados valores da variável independente  $t$ . Usando esse método, todo trabalho de integração é realizado pelo computador, o conjunto de sistemas de equações solucionáveis é infinitamente maior que o da técnica analítica, porém as soluções são específicas para um conjunto de parâmetros e condições iniciais, sendo impossível generalizar tais soluções;

(iii) *Técnica qualitativa*: através de cálculos analíticos relativamente simples, temos pistas de como o sistema evolui. Basicamente determinam-se as soluções assintóticas, os possíveis comportamentos do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ , e a estabilidade dessas soluções, sem solucionar diretamente um sistema de equações diferenciais. Quando aplicamos essa técnica perdemos parte da informação, relativa ao comportamento do sistema antes de atingir o regime permanente.

Desse ponto em diante, essa revisão tem como foco os sistemas de tempo contínuo e a técnica qualitativa.

## 2.2 Espaço de fases

Um estado de um sistema dinâmico é composto pelo conjunto de coordenadas,  $n$ -variáveis de estado, determinadas em um tempo  $t$ . Essas coordenadas compõem um ponto em um espaço  $n$ -dimensional, denominado espaço de fases, ou espaço de estados.

Desse modo um estado é representado como um ponto com coordenadas  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  no espaço de fases  $n$ -dimensional e sua dinâmica é regida por um conjunto de equações diferenciais como na equação (2.2), as funções  $f_j$  representam as variações temporais das variáveis de estado  $x_j$ , e o conjunto das  $f_j$  compõem o campo de velocidades do sistema. A dimensão do espaço de fases é igual ao número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever-lo que é, por sua vez, igual ao número de variáveis de estado.

Pode-se dizer que uma solução  $\mathbf{x}(t)$  para um sistema, descreve no tempo um caminho, ou trajetória, no espaço de fases percorrido com velocidade  $d\mathbf{x}(t)/dt$ , que coincide, em cada ponto, com o campo de velocidades  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ .

## 2.3 Atratores

Analizando um fluxo no espaço de fases aos olhos do teorema de Liouville, podemos verificar se o sistema é conservativo, ou não, observando a evolução temporal de um hipervolume  $n$ -dimensional, definido pelo contorno de um conjunto de condições iniciais, sendo  $n$  a dimensão do espaço de fases [10]. Se o fluxo preservar o volume no espaço de fases, tal qual um sistema hamiltoniano [11] na ausência de forças dissipativas, o sistema é dito conservativo. Se o volume no espaço de fases diminui com o tempo, o sistema é dissipativo.

Uma forma mais prática de definir se um sistema é dissipativo é pelo cálculo e análise do divergente, pois se ele é negativo o sistema é dissipativo. O divergente do sistema é dado por,

$$\nabla \bullet F = \frac{\partial \dot{x}^{(1)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial \dot{x}^{(2)}}{\partial x^{(2)}} + \dots + \frac{\partial \dot{x}^{(n)}}{\partial x^{(n)}}. \quad (2.3)$$

Conhecer se seu modelo descreve um sistema dissipativo é um fator importante para o estudo de sistemas dinâmicos, pois apenas sistemas dissipativos podem apresentar atratores. Tal afirmação se torna mais plausível após definirmos o atrator.

Seja  $A$  um conjunto fechado de pontos no espaço de fases de um sistema dinâmico,  $A$  é um atrator se:

- (i)  $A$  é um conjunto invariante: ou seja, qualquer trajetória  $\mathbf{x}(t)$  que começa em  $A$ , permanece em  $A$  por todo o tempo;
- (ii)  $A$  atrai um conjunto aberto de condições iniciais: isso é, há um hipervolume  $B$ , que contém  $A$ , tal que para qualquer condição inicial  $\mathbf{x}(0)$  pertencente a  $B$ , então a distância entre a trajetória  $\mathbf{x}(t)$  e  $A$  tende a zero, quando  $t \rightarrow \infty$ . O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado *bacia de atração* de  $A$ ;
- (iii)  $A$  é mínimo: ou seja, não há subconjunto de  $A$  que satisfaça as duas condições anteriores.

## 2.4 Diagrama de bifurcação

O conceito de bifurcação está intimamente ligado ao conceito de estabilidade estrutural e consiste na variação no retrato de fases quando realizamos alguma mudança nos parâmetros de controle. Um sistema é estruturalmente estável se mantiver suas características topológicas imutáveis perante a variações em seus parâmetros de controle de tal modo que, se um parâmetro

assume um valor, conhecido como valor crítico e o sistema sofre mutação em seu retrato de fases, esse passa a ter um comportamento instável e nesse ponto ocorre a bifurcação, como ilustrado na Fig 2.2.

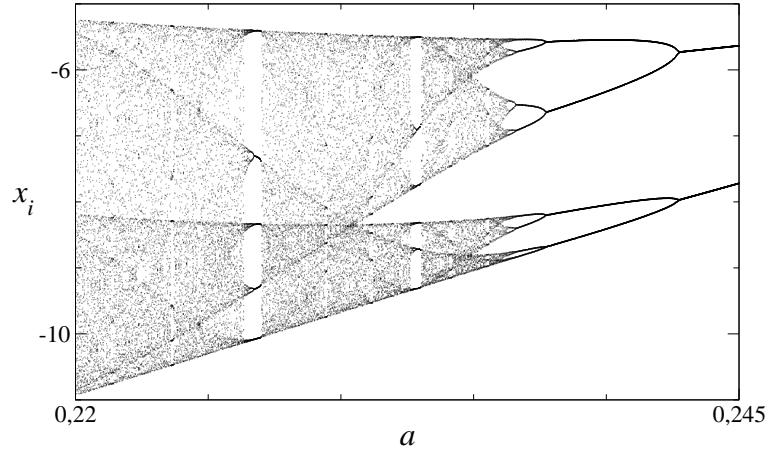


Figura 2.2: Exemplo genérico de diagrama de bifurcação para um sistema contínuo, construído para os máximos da variável  $x_i$  em relação ao parâmetro  $a$ .

Como visto na Fig 2.2, a estabilidade do sistema pode ser alterada enquanto variamos apenas um dos parâmetros de controle do sistema, isso caracteriza uma bifurcação de codimensão um. Em 1997, Ernest Barreto, Brian R. Hunt, Celso Grebogi e James A. Yorke [12] propôs uma relação direta entre o número de expoentes de Lyapunov positivos, dada uma determinada configuração do sistema, e o número mínimo de parâmetros que devem ser variados para que ocorra uma bifurcação.

Podemos classificar as bifurcações quanto a possibilidade, ou não, de prevê-las estudando os autovalores da matriz Jacobiana [6] do sistema. Quando há essa possibilidade estamos tratando de bifurcações ditas locais, como a sela-nó, a transcrítica, a de forquilha e a de Hopf. Quando não há, estamos tratando de bifurcações ditas globais, como as bifurcações homocíclicas e heterocíclicas. Não cabe a essa revisão detalhar os tipos de bifurcações, mas é interessante e altamente recomendado que o leitor observe o capítulo 8 da Ref. [10].

Para o caso de mapas, o diagrama de bifurcação pode ser construído apenas plotando o comportamento de uma variável de estado em função de um único parâmetro de controle. Para o caso de fluxos, o diagrama é construído plotando os máximos locais de uma variável de estado também em função de um único parâmetro.

## 2.5 Caos e expoente de Lyapunov

A definição precisa e definitiva para que um atrator seja classificado como caótico ainda não consta na bibliografia de sistemas dinâmicos, porém encontramos diversas tentativas. Aconselho a leitura do capítulo 10, subsecção 2 da Ref. [10]. Nessa revisão vamos simplificar esse trabalho analisando apenas um aspecto, comum a todas as definições já apresentadas. Um atrator, cuja dinâmica é caótica, apresenta dependência sensível nas condições iniciais, essa sendo a característica de sistemas caóticos mais conhecida. Num atrator caótico duas trajetórias vizinhas no espaço de fases divergem à medida que o sistema evolui no tempo, como mostra a Fig 2.3. Para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto, quantificar a dependência

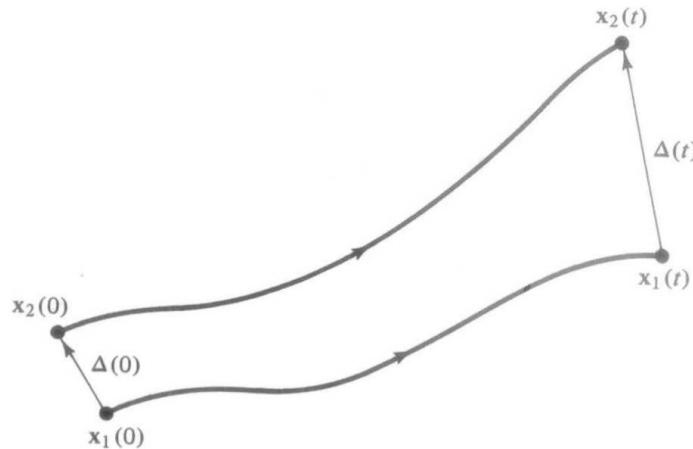


Figura 2.3: Esquema representativo para divergência de trajetórias no espaço de fases.

sensível nas condições iniciais calcula-se os expoentes de Lyapunov. Podemos deduzir o expoente de Lyapunov partindo da Fig 2.3 e generalizando a divergência em uma dimensão para um espaço  $n$ -dimensional, imaginemos uma hiperesfera de condições iniciais centrada em um ponto  $x(0)$ . Conforme o tempo evolui, o raio inicial dessa hiperesfera  $|d_j(0)|$ , definido em todas as direções do espaço de fases, varia exponencialmente no tempo, de modo que a relação entre  $|d_j(0)|$  e o valor correspondente ao tempo  $t$ , dado por  $|d_j(t)|$ , seja

$$|d_j(t)| = |d_j(0)|e^{\lambda_j(t)}.$$

Essa relação pode ser escrita como,

$$\lambda_j = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d_j(t)}{d_j(0)} \right|.$$

Os números  $\lambda_j$  são chamados de expoentes de Lyapunov e  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Observando que  $d_j(t) = f^t(x_0 + d_j(0)) - f^t(x_0)$ , o que resulta em

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{1}{t} \ln \left| \frac{f^t(x_0 + d_j(0)) - f^t(x_0)}{d_j(0)} \right| \\ \lambda_j &= \frac{1}{t} \ln |(f^t)'(x_0)|, \end{aligned}$$

onde fizemos o limite  $d_j(0) \rightarrow 0$  no último passo. O termo dentro do logaritmo pode ser expandido usando a regra da cadeia, resultando

$$(f^t)'(x_0) = \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i).$$

Teremos portanto o expoente de Lyapunov  $\lambda$  escrito como

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i) \right| \\ \lambda_j &= \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(x_i)|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Num instante  $t > t_0$ , o volume  $V(t)$  da hiperesfera deve ser proporcional ao produto das distâncias  $d_j(t)$  que o caracterizam logo,

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t) \propto V(t_0) e^{(t-t_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j}, \tag{2.5}$$

sendo  $V(t_0)$  o volume no instante inicial  $t_0$ .

Quando  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$ , temos  $V(t) = V(t_0)$  e o sistema é conservativo, quando  $\sum_{j=1}^n \lambda_j < 0$ , temos  $V(t) < V(t_0)$ , ocorre a contração da hiperesfera no espaço de fases e o sistema é dissipativo. Vamos considerar um sistema tridimensional, onde podemos encontrar quatro tipos de atratores. Para esses atratores temos três expoentes de Lyapunov  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  com as

seguintes possibilidades:

- (i) *ponto de equilíbrio*: neste caso os sinais dos expoentes são  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ . Com efeito, as trajetórias convergem para um único ponto, cessando qualquer deslocamento;
- (ii) *ciclo limite*: tem-se  $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0$  correspondendo o expoente nulo à direção ao longo da trajetória;
- (iii) *toros bidimensional*: tem-se  $\lambda_1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$  de modo que a trajetória atratora situa-se sobre uma superfície;
- (iv) *atrator caótico*: tem-se  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ , um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensível nas condições iniciais. Ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo e o terceiro deve ser negativo e, em módulo, maior que o primeiro, para que o sistema seja dissipativo, isto é,  $\sum_{j=1}^3 \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ .

## 2.6 Espaço de parâmetros

Quando usamos um diagrama de bifurcação para analisar qualitativamente um sistema, podemos observar seu comportamento em função de um único parâmetro. Porém não precisamos nos limitar a análise de apenas um parâmetro, podemos expandir esse método para dois parâmetros. Para tal basta incluir a característica do sistema a ser analisada em uma coluna de cores, uma representação da terceira dimensão.

Podemos atribuir para a coluna de cores a periodicidade do sistema, possibilitando-nos contar períodos usando um método seguro e simples. Outro uso é a análise do maior expoente de Lyapunov em função dos parâmetros do sistema, observamos assim as regiões de periodicidade e de caos. Esse método ainda nos possibilita observar regiões de hipercaos e torus 3, 4, 5 ..., analisando, em conjunto com o maior expoente de Lyapunov, todos os demais expoentes.

O amplo leque de aplicações faz desse um dos métodos mais importantes para o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos.

## 2.7 Hipercaos

Em 1979 O. E. Rössler propôs um modelo quadridimensional [13], uma variação de seu modelo tridimensional mais conhecido na literatura, seu objetivo era possibilitar a propagação

de instabilidade em duas dimensões do atrator. A modificação proposta foi a adição de uma quarta variável de estado de forma que seu modelo corresponde a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay + w, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \\ \dot{w} &= -0,5z + 0,05w,\end{aligned}\tag{2.6}$$

com  $x, y, z$  e  $w$  sendo as variáveis de estado e  $a = 0,25$ ,  $b = 3$  e  $c = 0$  como parâmetros de controle. Neste trabalho Rössler introduziu o termo hiperaços, nomeando assim a órbita caótica com dois ou mais expoentes de Lyapunov positivos. A adição da quarta dimensão foi necessária, pois sabia-se que para sistemas dissipativos deve-se ter, ao menos, uma direção do espaço de fases para qual a dimensão do atrator se contraia, e uma direção em que a dimensão do atrator permaneça imutável, sobrando livres, para expandir no tempo, duas direções, critério necessário, porém não suficiente, para ocorrência de hiperaços. Vamos considerar um sistema quadridimensional, onde podemos encontrar seis tipos de atratores. Para esses atratores temos quatro expoentes de Lyapunov ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ) com as seguintes possibilidades:

- (i) *ponto de equilíbrio*: neste caso os sinais dos expoentes são  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$  [14]. Com efeito, as trajetórias convergem para um único ponto, cessando qualquer deslocamento;
- (ii) *ciclo limite*: tem-se  $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ , correspondendo o expoente nulo à direção ao longo da trajetória;
- (iii) *toros bidimensional*: tem-se  $\lambda_1, \lambda_2 = 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ , de modo que a trajetória atratora situa-se sobre uma superfície;
- (iv) *toros tridimensional*: tem-se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ , de modo que a trajetória atratora situa-se sobre um volume;
- (v) *atrator caótico*: tem-se  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0$  ou  $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$  [15], um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensível nas condições iniciais, e para que o sistema seja dissipativo,  $\sum_{j=1}^4 \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 < 0$ ;
- (vi) *atrator hiperaótico*: tem-se  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$  [14], dois expoentes devem ser positivo. Ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo e o quarto expoente deve ser negativo.

Nas últimas décadas, devido aos grandes avanços na capacidade de processamento computacional, o interesse por sistemas de quatro ou mais dimensões, denominados sistemas de alta dimensionalidade, têm aumentado. Os sistemas hipercaóticos podem ser utilizados para descrever diversas dinâmicas, tanto na área da biologia, para descrever uma dinâmica simplificada de uma rede neural de quatro neurônios [16], como na química para descrever modelos de equilíbrio químico [17]. Na engenharia descrevem dois circuitos de Chua acoplados [18]. Na física descrevem sistemas meteorológicos, como o sistema de Lorenz modificado pela adição de uma quarta dimensão [19].

Essa tendência pela investigação da dinâmica de sistemas de alta dimensionalidade é previsível, pois se representamos a variação temporal de uma grandeza física por uma equação diferencial envolvendo uma variável de estado e tal equação representa uma dimensão do espaço de fases, então quanto mais dimensões um modelo apresenta, mais grandezas físicas são representadas e mais completo é o modelo.

# Capítulo 3

## Modelo de Rössler

O. E. Rössler, em 1976, propôs em seu artigo [3] um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e autônomas que gerava um atrator caótico tridimensional, muito semelhante ao atrator "borboleta" proposto anteriormente por E.N. Lorenz [4]. Seu sistema chamou a atenção por apresentar tal atrator, tendo apenas uma não-linearidade. Inicialmente o modelo foi apresentado com parâmetros fixos, como visto abaixo,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0,2y, \\ \dot{z} &= 0,2 + z(x - 5,7).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Rössler referia-se ao seu modelo como "um modelo de um modelo" e não tinha, ao menos no princípio de seu trabalho, o objetivo de modelar qualquer sistema físico real.

Ainda consta em sua publicação os atratores desse sistema, como reproduzidos a seguir:

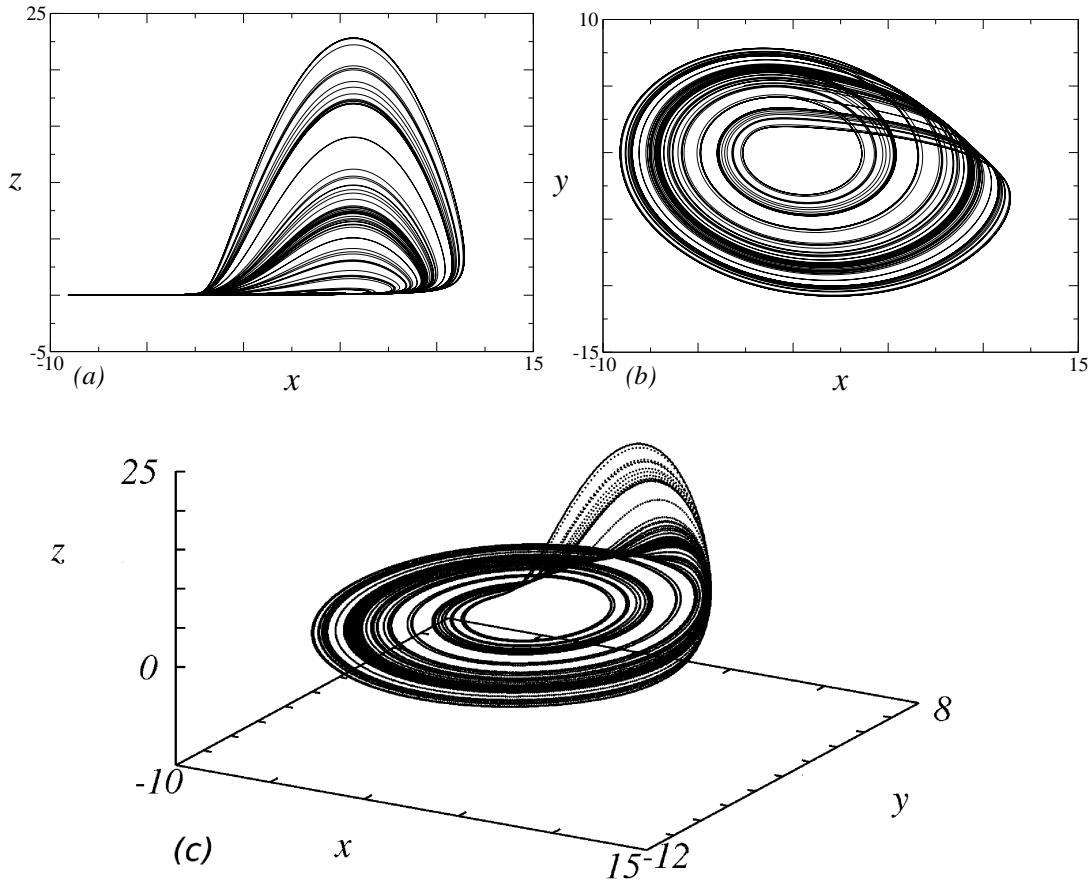


Figura 3.1: Projeções nos planos (a)  $zx$  e (b)  $yx$  do atrator de Rössler [3]. (c) Atrator tridimensional do modelo de Rössler.

Posteriormente o modelo de Rössler ficou mais conhecido na sua forma geral dada por,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y - z, \\
 \dot{y} &= x + ay, \\
 \dot{z} &= b + z(x - c).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  os parâmetros de controle do sistema que devem assumir valores obrigatoriamente positivos.

## 3.1 Resultados analíticos

Para obter os pontos de equilíbrio do sistema (3.2) fazemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z = 0, \\ \dot{y} &= x + ay = 0, \\ \dot{z} &= b + z(x - c) = 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Resolvendo o sistema (3.3), obtemos os pontos  $P_+ = (x_+, y_+, z_+)$  e  $P_- = (x_-, y_-, z_-)$  onde

$$\begin{aligned}x_{\pm} &= \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \\ y_{\pm} &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \\ z_{\pm} &= \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.\end{aligned}$$

A matriz Jacobiana para o sistema (3.2) é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, a equação característica, encontrada fazendo  $\det(J - \lambda I) = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade, é dada por

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,\tag{3.4}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= c - a - x, \\ B &= ax - ac + z + 1, \\ C &= -az - x + c.\end{aligned}$$

Algumas conclusões a respeito da estabilidade dos pontos de equilíbrio podem ser tiradas dos coeficientes do polinômio (3.4). Fazemos este estudo usando o critério de estabilidade de

Routh-Hurwitz [20]. O critério de Routh-Hurwitz é um método que serve para determinar a estabilidade de um sistema, apenas examinando os coeficientes da equação característica do sistema, calculada em cada um dos pontos de equilíbrio sem envolver o cálculo explícito das raízes.

Seja a equação característica

$$D(s) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (3.5)$$

Para determinar se o sistema é estável ou não, checamos duas condições:

1. Duas condições necessárias, mas não suficientes, para todas as raízes possuírem parte real negativa são:

- (i) Todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal;
- (ii) Todos os coeficientes do polinômio devem ser diferentes de zero.

Se a condição (1) for satisfeita, então calculamos a série de Routh-Hurwitz como segue

$\lambda^n$	$a_n$	$a_n - 2$	$a_n - 4$	$\dots$
$\lambda^{n-1}$	$a_n - 1$	$a_n - 3$	$a_n - 5$	$\dots$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$\lambda^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\lambda^{n-4}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$				
$\lambda^1$				
$\lambda^0$				

onde os  $a'_i$  são os coeficientes polinomiais e os coeficientes no restante da tabela são calculados de

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-3} - a_{n-2} a_{n-1}), \\
b_2 &= \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-5} - a_{n-4} a_{n-1}), \\
b_3 &= \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_{n-1}} (a_n a_{n-7} - a_{n-6} a_{n-1}), \\
c_1 &= \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_1} (b_2 a_{n-1} - a_{n-3} b_1), \\
c_2 &= \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_1} (b_3 a_{n-1} - a_{n-5} b_1).
\end{aligned}$$

2. A condição necessária para todas as raízes possuírem parte real negativa, é que todos os elementos da primeira coluna da série devem possuir o mesmo sinal. O número de mudanças de sinal é igual ao número de raízes com parte real positiva.

Para o ponto  $P_+ = (x_+, y_+, z_+)$  a equação (3.4) se transforma em

$$a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_3 &= 1, \\
a_2 &= \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a, \\
a_1 &= \frac{c(1 - a^2) - \sqrt{c^2 - 4ab}(a^2 + 1)}{2a} + 1, \\
a_0 &= \sqrt{c^2 - 4ab}.
\end{aligned}$$

As três raízes são expressões complicadas envolvendo os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  a partir das quais conclusões são difíceis de se tirar. Preferimos aqui, de maneira alternativa, aplicar o método de

Routh-Hurwitz. Para a condição 1. (i) ser satisfeita,

$$\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a > 0,$$

$$\frac{c(1 - a^2) - \sqrt{c^2 - 4ab}(a^2 + 1)}{2a} + 1 > 0,$$

$$\sqrt{c^2 - 4ab} > 0,$$

que resolvidas para  $b$  fornecem

$$b < c - a \quad (3.7)$$

e

$$\frac{c^2}{4a} - \frac{(c(a^2 - 1)^2 - 2a)^2}{4a(a^2 + 1)^2} < b < \frac{c^2}{4a}. \quad (3.8)$$

Para o caso presente, a condição 1. (a) sendo satisfeita, a condição 1. (b) é automaticamente satisfeita. Uma vez satisfeita a condição 1., calculamos os demais termos da série de Routh-Hurwitz,

$$\begin{aligned} b_1 &= a \left( \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \right) \left( 1 - c + \frac{c - a^2 - \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}}{a^3 \left( c - a - \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \right)} \right) \\ b_2 &= 0, \\ c_1 &= \sqrt{c^2 - 4ab}, \\ c_2 &= 0, \end{aligned}$$

que pode então ser construída, resultando

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & \frac{c(1 - a^2) - \sqrt{c^2 - 4ab}(a^2 + 1)}{2a} + 1 \\ \lambda^2 & \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a & \sqrt{c^2 - 4ab} \\ \lambda^1 & b_1 & 0 \\ \lambda^0 & \sqrt{c^2 - 4ab} & 0. \end{array}$$

Aplicando a condição 2. do critério de Routh-Hurwitz, encontramos uma nova condição para o parâmetro  $b$  que, juntamente com as equações (3.7) e (3.8) dão as condições de estabilidade do ponto  $P_+$ , em termos de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , dadas por

$$b < c - a$$

$$\frac{c^2}{4a} - \frac{(c(a^2 - 1)^2 - 2a)^2}{4a(a^2 + 1)^2} < b < -\frac{1}{4a} \left( \frac{2a^2 - c + a^3(c - 1)(c - 2a)}{a^3(c - 1) - 2} \right)^2 + \frac{c^2}{4a}.$$

Para o ponto  $P_- = (x_-, y_-, z_-)$  a equação (3.4) se transforma em

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \\ a_2 &= \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a, \\ a_1 &= \frac{c(1 - a^2) + \sqrt{c^2 - 4ab}(a^2 + 1)}{2a} + 1, \\ a_0 &= -\sqrt{c^2 - 4ab}. \end{aligned}$$

Para a condição 1. (i) ser satisfeita,

$$\begin{aligned} \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} - a &> 0, \\ \frac{c(1 - a^2) + \sqrt{c^2 - 4ab}(a^2 + 1)}{2a} + 1 &> 0, \\ -\sqrt{c^2 - 4ab} &> 0, \end{aligned}$$

que resolvidas para  $b$  fornecem

$$b > c - a \quad (3.10)$$

e

$$\frac{c^2}{4a} - \frac{(c(a^2 - 1)^2 - 2a)^2}{4a(a^2 + 1)^2} > b > \frac{c^2}{4a}. \quad (3.11)$$

Como os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  são positivos, a condição de estabilidade (3.11) é um absurdo matemático, dessa forma a condição 1.(a) não é satisfeita e como resultado não teremos todas as raízes do polinômio característico com parte real negativa. Determinamos assim que o ponto  $P_-$  é, obrigatoriamente, instável. Assim, como necessariamente ao menos um ponto de equilíbrio é instável, temos um indicador de que o sistema pode apresentar o comportamento caótico. Devido a dificuldade de determinar analiticamente o comportamento do sistema, devemos aplicar as técnicas de solução numérica.

## 3.2 Resultados numéricos

O objetivo dessa seção é investigar alguns aspectos numéricos e qualitativos do modelo de Rössler enquanto variamos os parâmetros de controle  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para isso usamos os espaços de parâmetros, mostrados na Fig. 3.2, tendo sido cada um deles obtido por meio do cálculo do maior expoente de Lyapunov, em uma malha de  $500 \times 500$  pontos. O sistema (3.2) foi

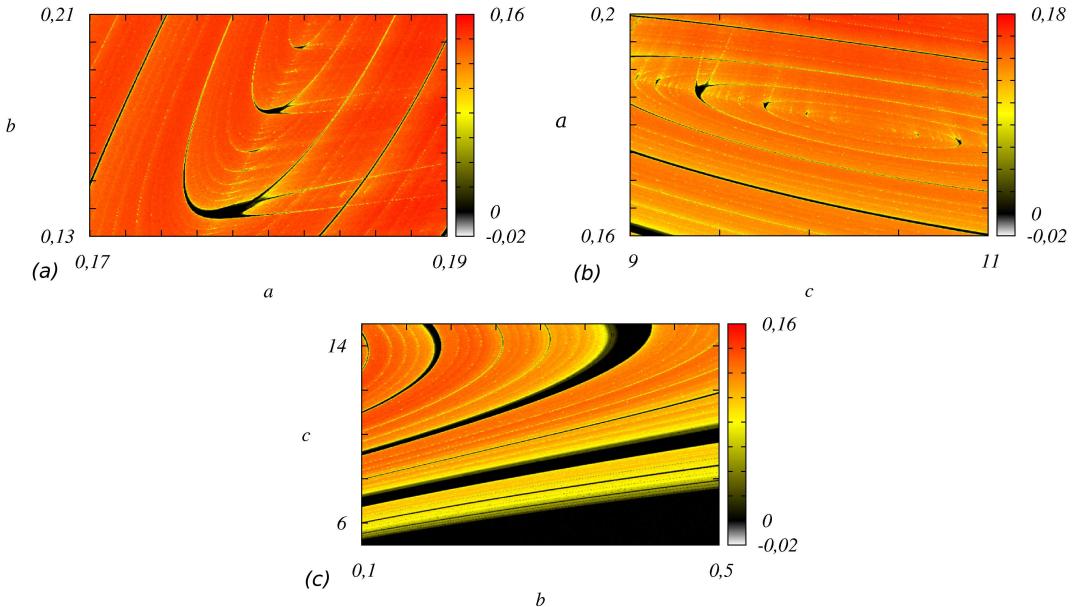


Figura 3.2: Espaços de parâmetros para o sistema (3.2) com (a)  $c = 10, 0$ , (b)  $b = 0, 2$  e (c)  $a = 0, 15$ .

integrado utilizando um integrador Runge-Kutta de quarta ordem com um passo fixo igual a  $10^{-2}$ , e considerando  $5 \times 10^5$  passos para calcular cada um dos expoentes. Em cada um dos espaços de parâmetros da Fig. 3.2, as cores estão associadas à magnitude do maior expoente de Lyapunov: branco para expoentes mais negativos, preto para expoentes nulos e vermelho para expoentes mais positivos. Usaremos também diagramas de bifurcação do sistema (3.2), utilizando como condição inicial ( $x = 2, 0$ ,  $y = 3, 5$ ,  $z = 4, 0$ ) e dividindo o eixo do parâmetro  $b$  em  $10^3$  intervalos iguais e plotando 60 pontos para cada valor dos parâmetros  $a$ ,  $b$  ou  $c$ .

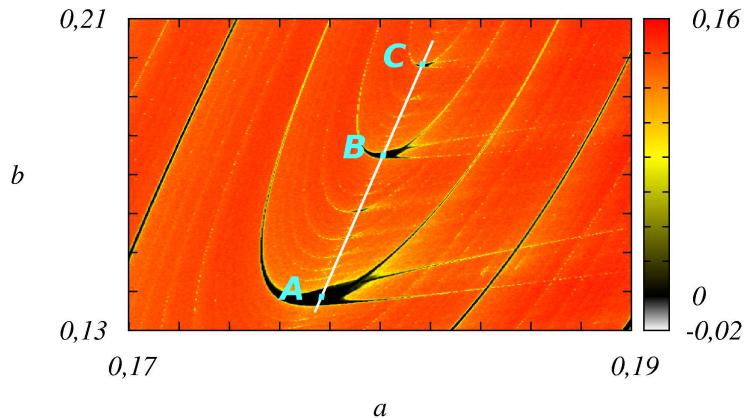


Figura 3.3: Espaço de parâmetros  $a \times b$  conforme a Fig. 3.2(a).

Na Fig 3.2(a) é mostrado o espaço de parâmetros  $a \times b$  com  $c = 10, 0$ ;  $0, 13 < b < 0, 21$  e  $0, 17 < a < 0, 19$ , observamos a ocorrência de estruturas periódicas típicas, comumente conhecidas como camarões, imersas em uma região caótica. Nos limitaremos a analisar as três maiores estruturas,  $A$ ,  $B$  e  $C$  como observamos na Fig. 3.3.

O diagrama de bifurcação do sistema, representado na Fig. 3.4, foi gerado considerando  $c = 10, 0$  e  $0, 1347 < b < 0, 2043$ , que corresponde aos pontos da reta presente na Fig. 3.3. Caminhando ao longo dessa reta no sentido do crescimento de  $b$ , encontramos a estrutura  $A$  que inicialmente tem período sete, com atrator representativo demonstrado na Fig. 3.5(a). Em  $b \approx 0, 140119$  ocorre uma bifurcação e a região passa a ter período quatorze até  $b \approx 0, 141093$  e rumo ao caos via dobramento de período. Aumentando ainda mais o valor do parâmetro  $b$  encontramos, em  $b \approx 0, 174257$ , a estrutura  $B$  com período oito e atrator representativo demonstrado na Fig. 3.5(b). Em  $b \approx 0, 175672$  ocorre uma bifurcação e, assim como em  $A$ ,

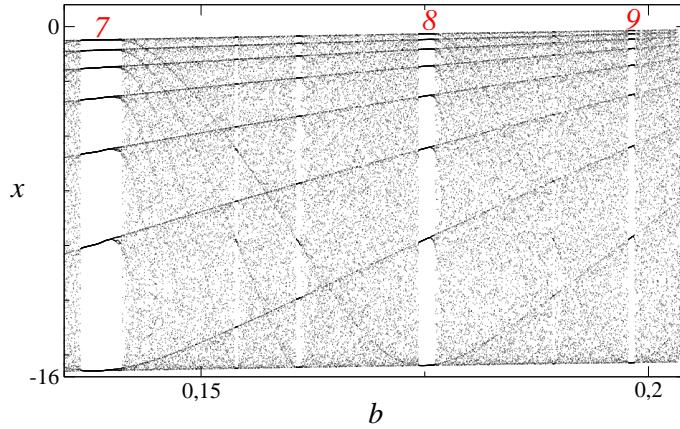


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação construído sobre a reta presente na Fig. 3.3.

através do dobramento de período o sistema retorna ao caos. Aumentando o valor do parâmetro para  $b \approx 0,197749$  encontramos a última estrutura periódica de interesse,  $C$ , com período nove e rota para o caos via dobramento de período como as estruturas  $A$  e  $B$ , e com atrator representativo demonstrado na Fig. 3.5(c).

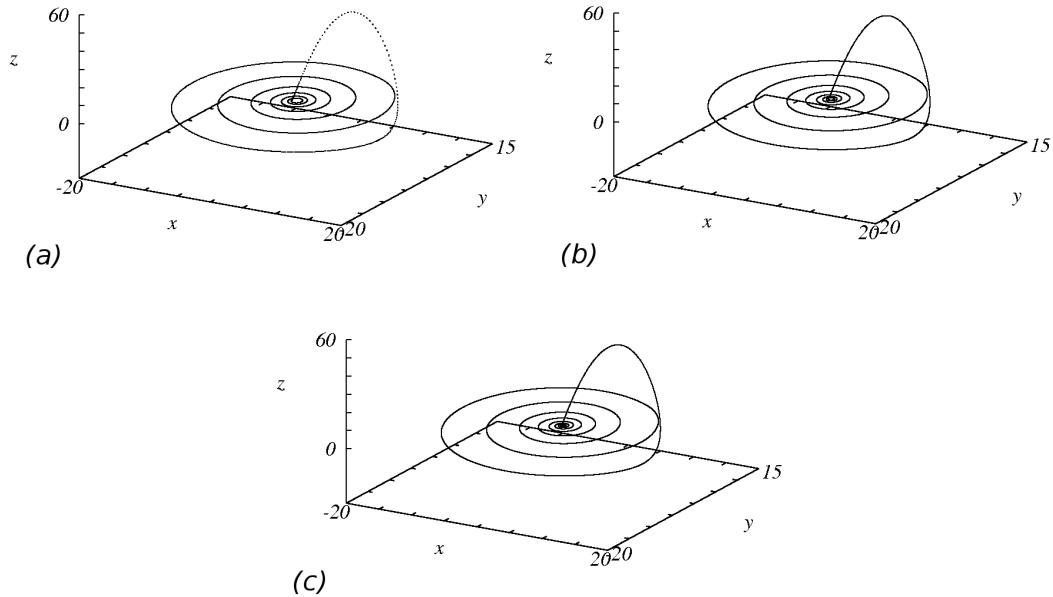


Figura 3.5: Atratores periódicos para os pontos (a)  $A$ ,  $a = 0,177660$ ,  $b = 0,138639$ , (b)  $B$ ,  $a = 0,180101$ ,  $b = 0,175188$  e (c)  $C$ ,  $a = 0,181686$ ,  $b = 0,198089$  da Fig. 3.3.

Na Fig. 3.6 é mostrado o espaço de parâmetros  $c \times a$  com  $b = 0,2$ ,  $0,1 < a < 0,2$  e  $9,0 < c < 11,0$ . Nela observamos a ocorrência de estruturas periódicas típicas imersas em uma região caótica, representadas pelos pontos A, B, C, D e E. O diagrama de bifurcação

representado na Fig. 3.7, foi gerado considerando  $b = 0,2$  e  $0,17605 < a < 0,18889$ , que corresponde aos pontos da reta presente na Fig. 3.6. Caminhando ao longo dessa reta, no sen-

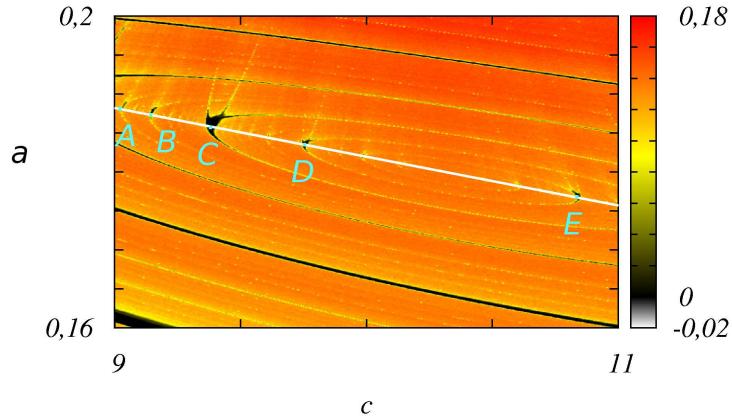


Figura 3.6: Espaço de parâmetros  $c \times a$  conforme a Fig. 3.2(b).

tido do crescimento de  $a$ , vemos que aumentando o valor do parâmetro  $a$  nos deparamos com a primeira estrutura periódica  $E$ , em  $a \approx 0,177045$ . Essa estrutura tem período oito e se estende até  $a \approx 0,177214$  evoluindo para o caos através do dobramento de período. Observamos que

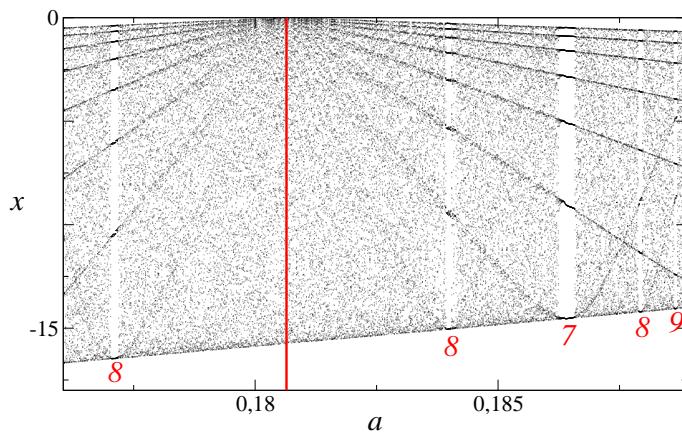


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação construído sobre a reta presente na Fig. 3.6.

as posições das estruturas periódicas, no espaço de parâmetros, descrevem uma espiral com centro em  $a \approx 0,18064$ . Como percebemos na Fig. 3.6, se aumentamos ainda mais o valor do parâmetro  $a$ , cruzando o centro da espiral, encontramos em  $a \approx 0,183896$  a estrutura  $D$ , com período oito e que se estende até  $a = 0,184065$  evoluindo para o caos através de bifurcações inversas. As estruturas  $C$ , entre  $0,186216 < a < 0,186585$ ,  $B$ , entre  $0,187885 < a < 0,187977$  e  $A$ , entre  $0,188626 < a < 0,188693$ , apresentam o mesmo comportamento e períodos sete,

oito e nove, respectivamente. Os atratores referentes a cada uma dessas estruturas são apresentados na Fig. 3.8.

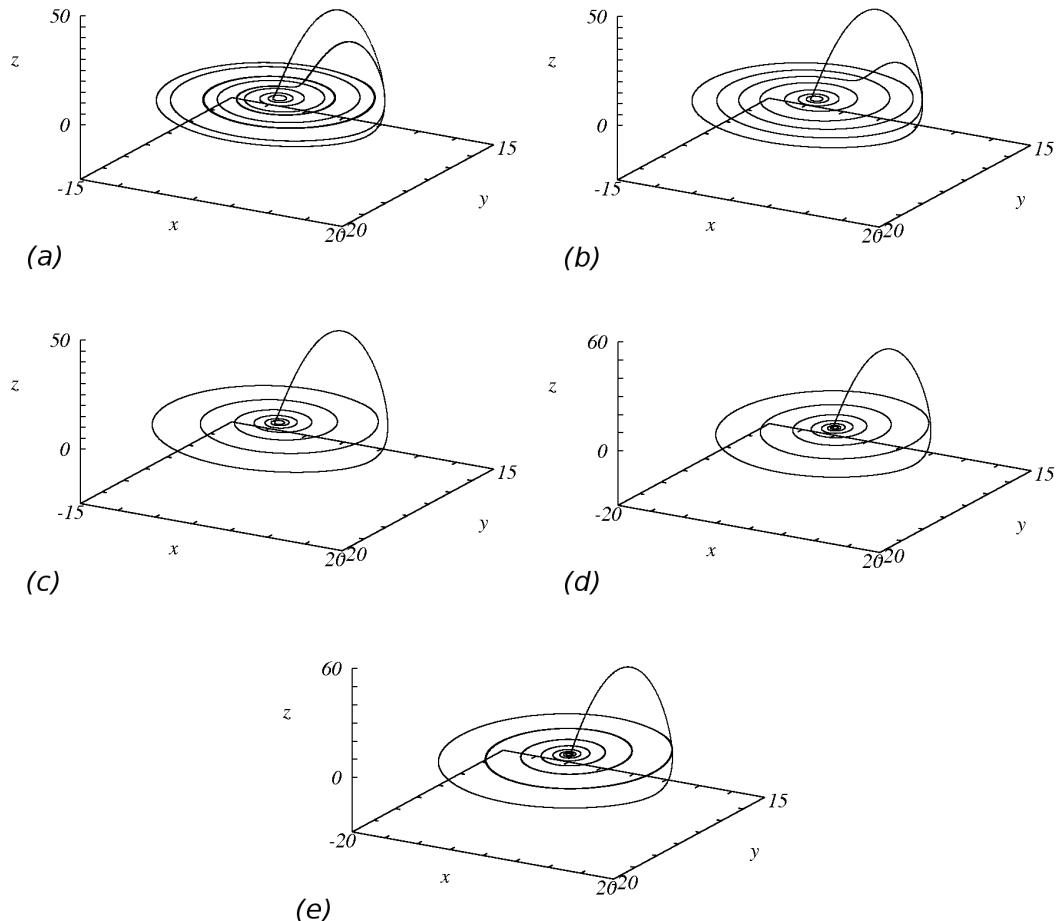


Figura 3.8: Atratores periódicos para os pontos (a)  $A$ ,  $a = 0,188669$ ,  $c = 9,03396$ , (b)  $B$ ,  $a = 0,187732$ ,  $c = 9,14468$ , (c)  $C$ ,  $a = 0,186070$ ,  $c = 9,37858$ , (d)  $D$   $a = 0,183706$ ,  $c = 9,75354$  e (e)  $E$   $a = 0,177081$ ,  $c = 10,8395$  da Fig. 3.6.

Por fim, analisaremos o espaço de parâmetros  $b \times c$  presente na Fig. 3.2(c) com  $a = 0,15$ ,  $5,0 < c < 15,0$  e  $0,1 < b < 0,5$ . Encontramos regiões caóticas e regiões periódicas, porém nenhuma estrutura típica em especial. Conforme feito anteriormente, o diagrama de bifurcação

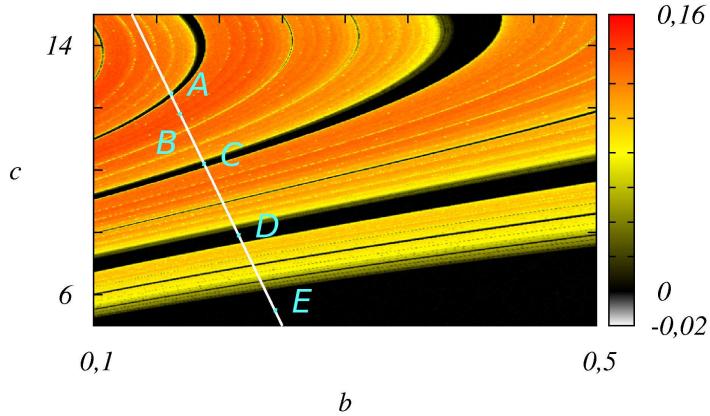


Figura 3.9: Espaço de parâmetros  $b \times c$  conforme a Fig. 3.2(c).

representado na Fig. 3.10, foi gerado considerando  $a = 0,15$  e  $0,130431 < b < 0,25$ , que corresponde aos pontos da reta presente na Fig. 3.9. Caminhando ao longo dessa reta, no sentido

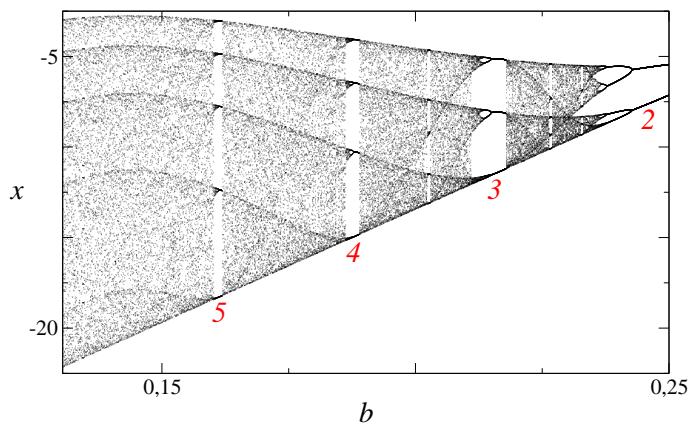


Figura 3.10: Diagrama de bifurcação construído sobre a reta presente na Fig. 3.9.

do crescimento de  $b$  encontramos os pontos  $A$ , em  $b \approx 0,161134$ ,  $C$  em  $b \approx 0,187807$ ,  $D$  em  $b \approx 0,214978$  e  $E$  em  $b \approx 0,242647$ , ambos apresentando atratores periódicos com períodos cinco, quatro, três e dois, respectivamente e  $B$  em  $b \approx 0,169693$ , apresentando atrator caótico, conforme a Fig. 3.11.

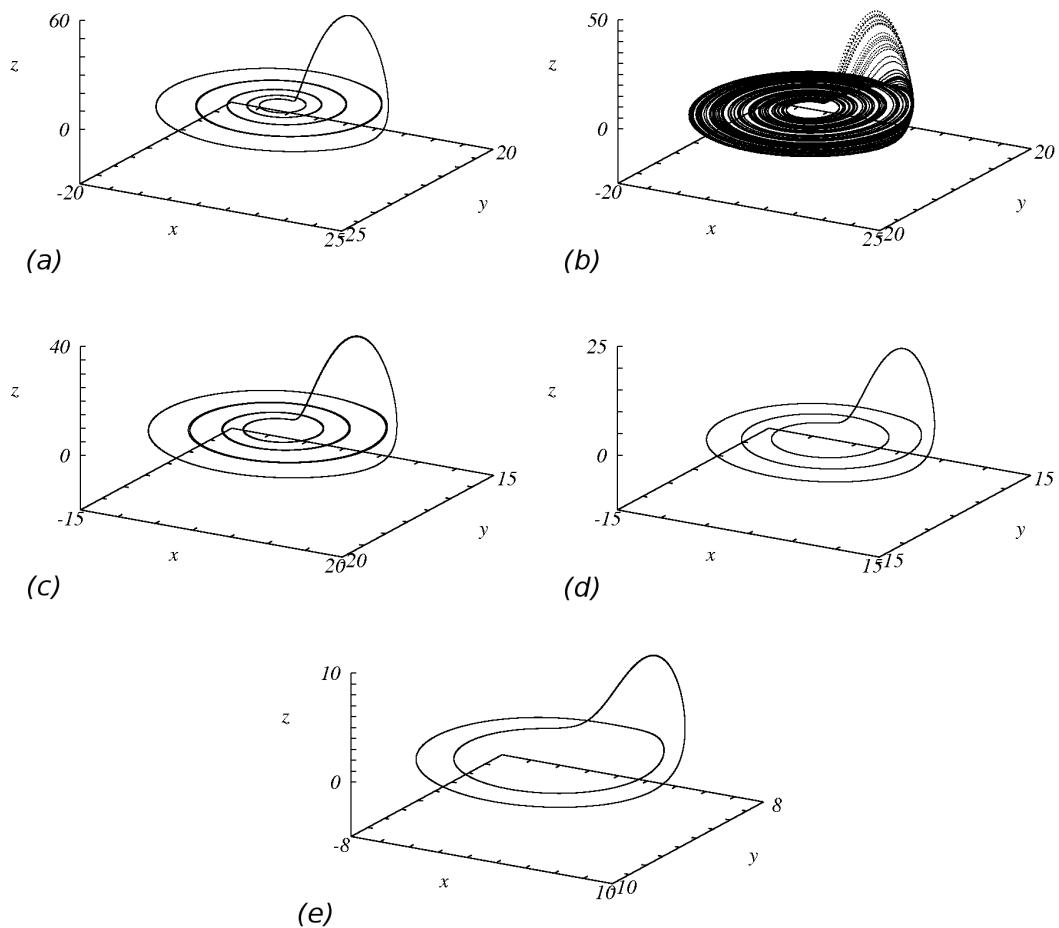


Figura 3.11: Atratores para os pontos (a)  $A$ ,  $c = 12,4462$ ,  $b = 0,161134$ , (b)  $B$ ,  $c = 11,7370$ ,  $b = 0,169693$ , (c)  $C$ ,  $c = 10,2226$ ,  $b = 0,187807$ , (d)  $D$   $c = 7,92652$ ,  $b = 0,214978$  e (e)  $E$   $c = 5,60703$ ,  $b = 0,242647$  da Fig. 3.9.

# Capítulo 4

## Modelo de osciladores acoplados

O interesse em compreender o comportamento do modelo de Rössler somado ao grande número de trabalhos publicados envolvendo sistemas de alta dimensionalidade, resultou na proposta de um novo modelo [21] construído através do acoplamento de dois osciladores de Rössler caóticos idênticos.

O acoplamento é realizado adicionando um componente linear às equações que descrevem a variação temporal da variável de estado  $x$  nos dois osciladores, dado por,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \epsilon(1 + \theta)(x_2 - x_1)/2, \\ \dot{y}_1 &= x_1 + ay_1, \\ \dot{z}_1 &= b + z_1(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2 + \epsilon(1 - \theta)(x_1 - x_2)/2, \\ \dot{y}_2 &= x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_2 &= b + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2$  e  $z_2$  as variáveis de estado e  $a, b$  e  $c$  os parâmetros. Foi necessário a adição dos parâmetros de acoplamento  $\epsilon$  e  $\theta$ , correspondentes a intensidade e simetria de acoplamento, respectivamente.

## 4.1 Resultados numéricos

O objetivo nesta seção é investigar numericamente o impacto da modificação nos parâmetros  $\epsilon$  e  $\theta$ , sobre a dinâmica do sistema (4.1) com parâmetros de controle,  $a = 0,15$ ,  $b = 0,2$  e  $c = 10,0$  a escolha dos valores para os parâmetros foi realizada de forma que o oscilador de Rössler apresente comportamento caótico. Para isto usamos os espaços de parâmetros, mostrados na Fig. 4.1, tendo sido cada um deles obtido por meio do cálculo dos expoente de Lyapunov, em uma malha de  $500 \times 500$  pontos. O sistema (4.1) foi integrado utilizando um integrador Runge-Kutta de quarta ordem com um passo fixo igual a  $10^{-2}$ , e considerando  $5 \times 10^5$  passos para calcular cada um dos expoentes. Em cada um dos espaços de parâmetros da Fig. 4.1, as cores estão associadas à magnitude do maior expoente de Lyapunov, branco para expoentes mais negativos, preto para expoentes nulos e vermelho para expoentes mais positivos. Usaremos também diagramas de bifurcação do sistema (4.1), utilizando como condição inicial ( $x_1 = 2,0$ ,  $y_1 = 3,5$ ,  $z_1 = 4,0$ ,  $x_2 = 5,0$ ,  $y_2 = 7,5$ ,  $z_2 = 6,0$ ), dividindo o eixo do parâmetro em  $10^3$  intervalos iguais e plotando 60 pontos para cada valor do parâmetro  $\theta$ . Observando os espaços de parâmetros na Fig. 4.1 percebemos regiões caóticas, com maior

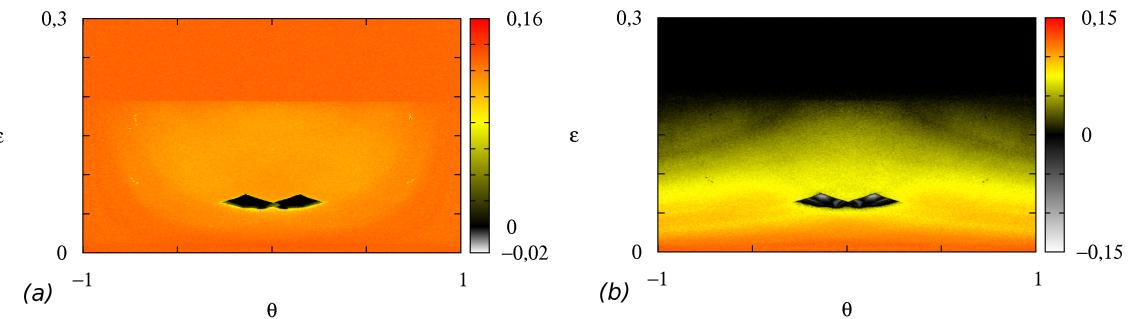


Figura 4.1: Espaços de parâmetros  $\theta \times \epsilon$  para o sistema (4.1) com  $a = 1,5$ ,  $b = 2,0$  e  $c = 10,0$ , relacionando a coluna de cores ao (a) maior expoente de Lyapunov, (b) segundo maior expoente de Lyapunov.

expoente de Lyapunov positivo, regiões periódicas, com maior expoente de Lyapunov nulo, e regiões hipercaóticas, com dois maiores expoentes de Lyapunov positivos. Representamos essas regiões, respectivamente, pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , dispostos sobre a reta presente na Fig. 4.2 e seus atratores representativos são demonstrados na Fig. 4.3.

As magnitudes dos dois maiores expoentes de Lyapunov,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e o tipo de dinâmica do sistema para esses pontos são mostrados na tabela a seguir,

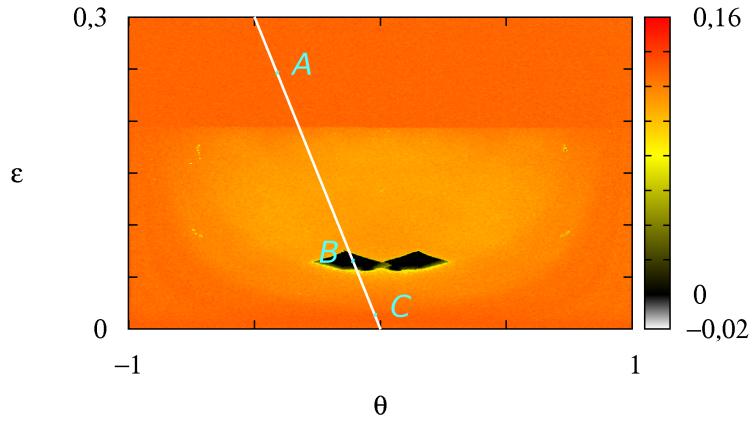


Figura 4.2: Espaço de parâmetros conforme Fig. 4.1(a), mostrando os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Ponto	$\lambda_1$	$\lambda_2$	Dinâmica do sistema
$A$	0,12615	0,00015	Caótica
$B$	-0,00011	-0,01497	Periódica
$C$	0,12694	0,11139	Hipercaótica.

Os pontos  $A$  e  $C$  apresentam maior expoente de Lyapunov positivo, propriedade característica de sistemas caóticos. Porém a magnitude do segundo maior expoente de Lyapunov diferencia esses pontos, sendo que  $A$  possui segundo maior expoente nulo e portanto, dinâmica caótica. O ponto  $C$  possui tanto o maior quanto o segundo maior expoentes de Lyapunov positivos, que caracteriza um sistema hipercaótico, comportamento comum a todos os pontos da região em amarelo ou vermelho da Fig. 4.1(b). A Fig. 4.3 mostra os atratores dos pontos A e C.

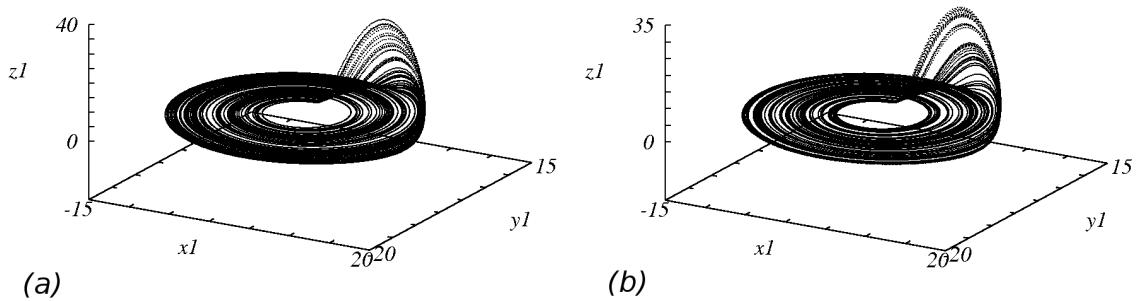


Figura 4.3: Atratores para os pontos (a)  $A$ ,  $\epsilon = 0,253227$ ,  $\theta = -0,425110$  e (b)  $C$ ,  $\epsilon = 0,022492$ ,  $\theta = -0,037700$  da Fig. 4.2.

A região que contém o ponto  $B$ , representada em preto na Fig. 4.4, têm comportamento per-

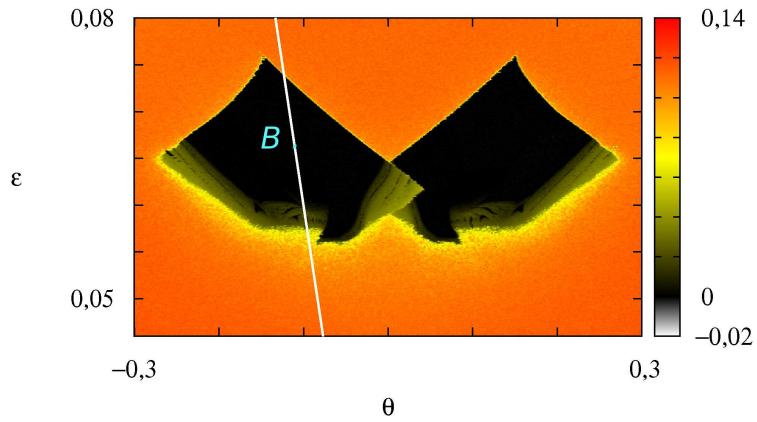


Figura 4.4: Ampliação do espaço de parâmetros da Fig. 4.2.

iódico, tal como o próprio ponto  $B$ . A ocorrência de regiões periódicas no espaço de parâmetros dos parâmetros de acoplamento  $\epsilon$  e  $\theta$ , para o sistema com parâmetros de controle  $a$ ,  $b$  e  $c$  fixos de forma que o sistema tenha comportamento caótico, caracteriza o efeito de supressão de caos [21]. A Fig. 4.4 apresenta a ampliação de uma região do espaço de parâmetros  $\epsilon \times \theta$  da Fig. 4.2, nela podemos observar uma pequena região com estruturas sem simetria em relação ao parâmetro  $\theta$ , nas proximidades de  $\theta = 0,0$ . O espaço de parâmetros para  $\theta = 0,0$  não apresenta qualquer região periódica, esse comportamento garante que a supressão de caos só pode existir se  $\theta \neq 0,0$ , tal condição garante que o acoplamento deve ser realizado de forma assimétrica [21]. A Fig. 4.5 ilustra esse efeito mostrando os atratores, em (a) para o oscilador do sistema

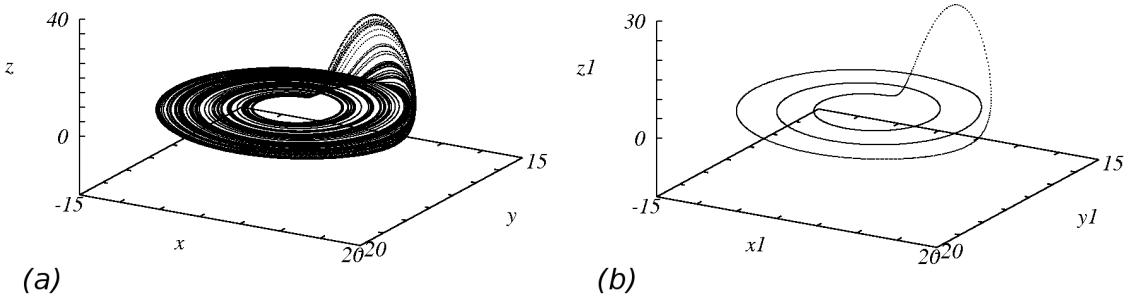


Figura 4.5: Atratores para (a) sistema de Rössler (3.2) com  $a = 0,15$ ,  $b = 0,2$  e  $c = 10,0$  e (b) modelo de osciladores de Rössler acoplados (4.1) com  $a = 0,15$ ,  $b = 0,2$ ,  $c = 10,0$  e  $\epsilon = 0,065815$ ,  $\theta = -0,110608$ , conforme ponto  $B$  na Fig. 4.4.

de Rössler (3.2) com  $a = 0,15$ ,  $b = 0,2$  e  $c = 10,0$ , e em (b) para o sistema de dois osciladores de Rössler acoplados (4.1), também com  $a = 0,15$ ,  $b = 0,2$  e  $c = 10,0$  e parâmetros

de acoplamento  $\epsilon$  e  $\theta$  de acordo com o ponto  $B$ . Para analisar mais cuidadosamente a região periódica  $B$ , construímos o diagrama de bifurcação para o sistema (4.1) caminhando ao longo da reta construída na Fig. 4.4, no sentido do crescimento de  $\theta$ , com  $-0,125 < \theta < -0,09$ . Vemos que inicialmente a região periódica tem período três cujo atrator aparece na Fig. 4.7(a).

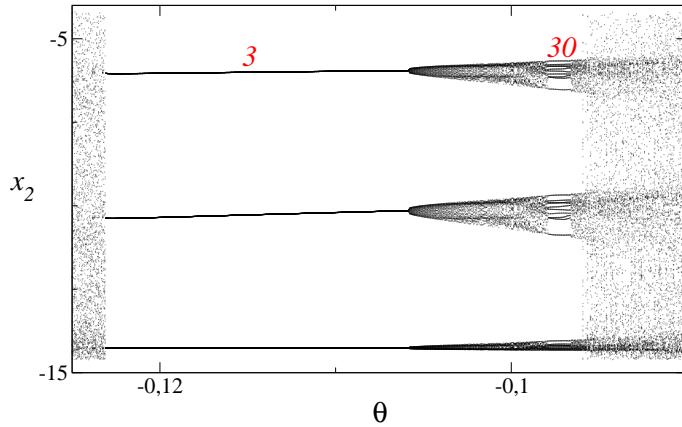


Figura 4.6: Diagrama de bifurcação construído sobre a reta presente na Fig. 4.4.

Em  $\theta \approx -0,1059$  o sistema assume uma dinâmica caótica retornando ao regime periódico em  $\theta \approx -0,09789$ . Aumentando o valor de  $\theta$  encontramos uma região periódica, agora com

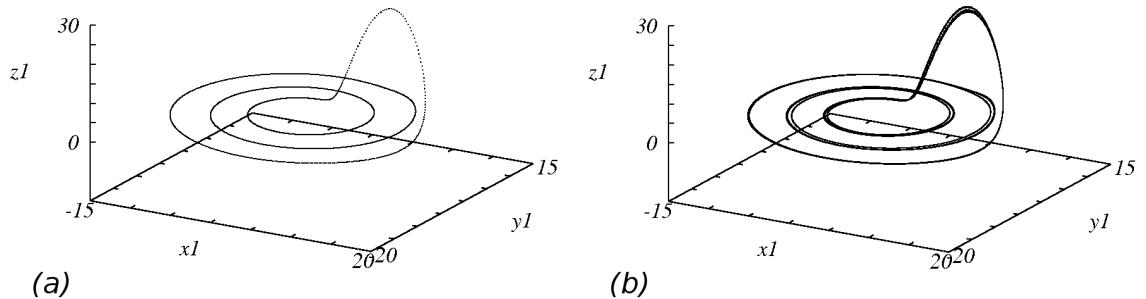


Figura 4.7: Atratores para os pontos (a)  $B$ ,  $\epsilon = 0,065815$ ,  $\theta = -0,110608$  e (b)  $\epsilon = 0,061435$ ,  $\theta = -0,102393$  da Fig. 4.2.

período trinta e atrator representado na Fig. 4.7(b).

Para observarmos melhor a região periódica, executamos uma ampliação no espaço de parâmetros na Fig 4.4, resultando no espaço de parâmetros nas Fig. 4.8. Observamos a ocorrência de estruturas periódicas típicas imersas em uma região caótica, porém com contornos levemente modificados, representadas pelos pontos  $B, C, D$  e a região  $E$  da Fig. 4.8, os pontos  $A$  e  $F$  pertencem a estrutura periódica maior, visualizada anteriormente. Os diagramas de bifur-

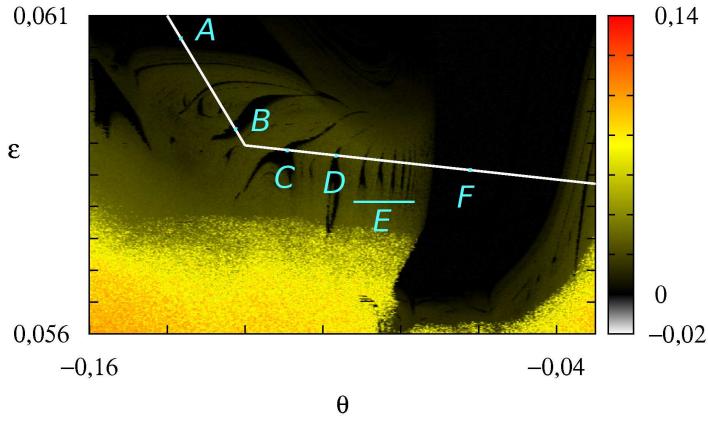


Figura 4.8: Ampliação das estruturas periódicas típicas da Fig 4.4, representando os pontos  $A, B, C, D, F$  e a região  $E$ .

cação representados na Fig. 4.9, foram gerados com  $-0,14 < \theta < -0,03$ , que corresponde aos pontos das retas presentes na Fig 4.8. Caminhando ao longo da reta entre  $-0,14 < \theta < -0,12$ , no sentido do crescimento de  $\theta$ , nos deparamos com duas estruturas periódicas,  $B$  e  $C$ , a primeira em  $\theta \approx -0,1234$ , com período dezoito e bifurcação em  $\theta \approx -0,1226$ , a região passa a ter período trinta e seis e rumo ao caos via dobramento de período. Encontramos a segunda estrutura em  $\theta \approx -0,1112$ , com período vinte e quatro e rota para o caos via dobramento de período. Aumentando ainda mais o valor do parâmetro  $\theta$  encontramos a estrutura  $D$

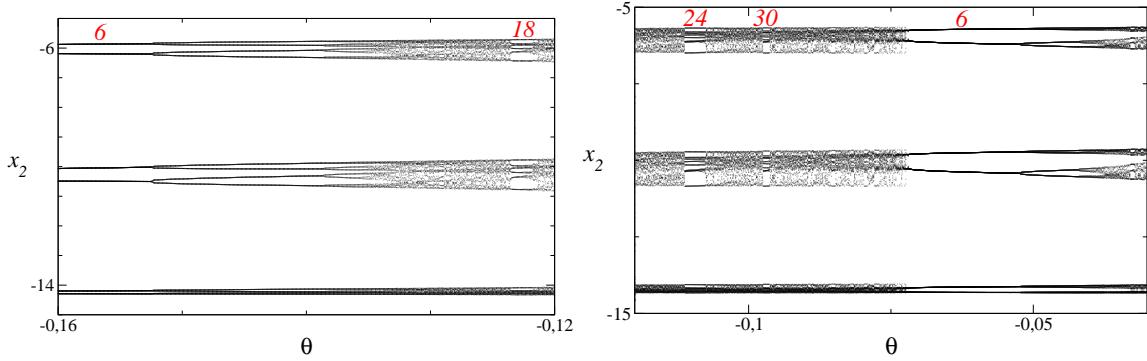


Figura 4.9: (a) Diagrama de bifurcação construído sobre a primeira reta presente na Fig 4.8 entre  $-0,14 < \theta < -0,12$ , (b) diagrama de bifurcação construído sobre a segunda reta presente na Fig 4.8 entre  $-0,12 < \theta < -0,03$ .

em  $\theta \approx -0,0973$ , com período trinta e bifurcação em  $\theta \approx -0,0966$  e posteriormente encontramos a primeira das cinco estruturas da região  $E$ , representada nos diagramas de bifurcação da Fig. 4.10 e que apresentam períodos trinta e seis, quarenta e dois, quarenta e oito, cinqüenta

e quatro e sessenta, ambas com rota para o caos via dobramento de período.

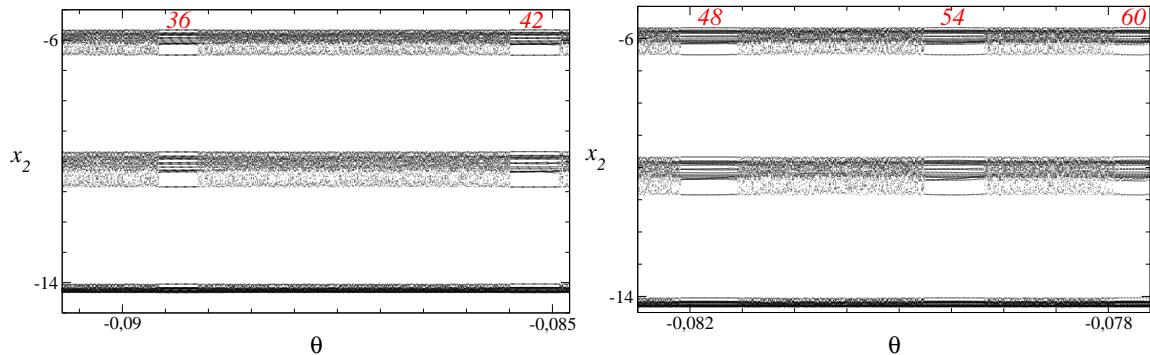


Figura 4.10: (a) e (b) Ampliações do diagrama de bifurcação da Fig 4.9, correspondentes as estruturas periódicas da região  $E$  da Fig. 4.8.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho fizemos a caracterização dos estados de dois sistemas dinâmicos a tempo contínuo. O primeiro tratou-se do sistema tridimensional obtido por Rössler [3] e que se considera um modelo para o modelo de Lorenz [4]. O segundo sistema é resultado do acoplamento linear entre dois sistemas caóticos de Rössler controlado por dois parâmetros,  $\epsilon$  e  $\theta$ , correspondendo a intensidade e simetria do acoplamento.

Para o sistema de Rössler encontramos as expressões analíticas para os pontos de equilíbrio e suas condições de estabilidade. Mostramos numericamente que quando um parâmetro é mantido fixo enquanto os outros dois são variados, o espaço de parâmetros bidimensional apresenta regiões periódicas e estruturas periódicas típicas, imersas na região caótica. Como um resultado de nossa investigação numérica, concluímos ainda que o sistema de Rössler (3.1) apresenta apenas um tipo de rota para o caos, via dobramento de período.

Numericamente observamos as variações na dinâmica dos osciladores de Rössler com relação a modificações nos parâmetros de acoplamento. Através do estudo do espaço de parâmetros  $\epsilon$  x  $\theta$ , com cores representando a magnitude do maior expoente de Lyapunov, observamos regiões periódicas, caracterizando o efeito de supressão de caos. Usando o mesmo espaço de parâmetros, e observando a magnitude do segundo maior expoente de Lyapunov, observamos uma larga região de hipercaos. Mostramos que o sistema acoplado mantém rotas para o caos via dobramento de período como encontrado no sistema de Rössler.

# Bibliografia

- [1] J. d'Alembert, *Opuscules Mathematiques*, **vol. 2**, Paris, 312, 1761.
- [2] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, **vol. 1-3**, Paris, 1899.
- [3] O. E. Rössler, *An equation for continuous chaos*, Physics Letters A **57**, 5, 1976.
- [4] E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences **20**, 130, 1963.
- [5] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [6] N. F. Ferrara, C. P. C. Prado, *Caos: Uma Introdução*, Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 1995.
- [7] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, Cambridge, 2000.
- [8] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1996.
- [9] H. G. Schuster, *Deterministic chaos. An introduction*, VCH, Weinheim, 2005.
- [10] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002.
- [11] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Classical Mechanics*, Pearson, New York, 2000.
- [12] E. Barreto, B. R. Hunt, C. Grebogi, J. A. Yorke, *From high dimensional chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space*, Physical Review Letters **78**, 24, 1997.
- [13] O. E. Rössler, *An equation for hyperchaos*, Physics Letters A **71**, 155, 1979.
- [14] W. Wu, Z. Chen, Z. Yuan, *The evolution of a novel four-dimensional autonomous system: Among 3-torus, limit cycle, 2-torus, chaos and hyperchaos*, Chaos, Solitons Fractals, 2007.
- [15] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D **16**, 285, 1985.
- [16] P. C. Rech, *Chaos and hyperchaos in a Hopfield neural network*, Neurocomputing **74**, 3361-3364, 2011.
- [17] H. Killory, O.E. Rössler, J.L. Hudson, *Higher chaos in a four-variable chemical reaction model*, Physics Letters A **122**, 341-345, 1987.
- [18] B. Cannas, S. Cincotti, *Hyperchaotic behaviour of two bi-directionally coupled Chua's circuits*, International Journal of Circuit Theory and Applications **30**, 625-637, 2002.
- [19] M. J. Correia, P. C. Rech, *Characterization of hyperchaotic states in the parameter-space of a modified Lorenz system*, Journal of Physics: Conference Series **285**, 012017, 2011.

- [20] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, New York, Springer-Verlag, 2003.
- [21] J. Bragard, G. Vidal, H. Mancini, C. Mendoza , S. Boccaletti , *Chaos suppression through asymmetric coupling* ,CHAOS **17**, 043107, 2007.