ESTUDO DA APLICAÇÃO DE DERIVADA FRACIONÁRIA EM PROBLEMA DE ENGENHARIA

Fernanda Teresinha da Silva[1], Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse,[2] Prof. Dr. Pablo Andreas Munoz Rojas[3]

[1] Acadêmico(a) do Curso de Engenharia Mecânica - CCT - bolsista PIBIC/CNPq ou PIBIC-Af/CNPq ou PROBIC/UDESC, PROBIC-Af/UDESC ou PIBITI/CNPq ou PROBITI/UDESC ou PROIP/UDESC ou PIBIC-EM ou PIVIC/UDESC – sfernandat@yahoo.com.
[2] Co-orientador, Departamento de Matemática - CCT – fernandodeeke@gmail.com.
[3] Orientador, Departamento de Engenharia Mecânica – CCT – pablo@joinville.udesc.br.

Palavras-chave: Derivadas Francionárias. Viscoelasticiade. Otimização.

Devido sua estrutura molecular, os polímeros apresentam comportamento combinando características viscosas, típicas de fluidos, e comportamento elástico, típico de sólido, fenômeno conhecido por viscoelasticidade.

Elementos de molas e amortecedores podem ser combinados numa variedade de arranjos para simular uma resposta viscoelástica. Modificações nesses modelos podem ser obtidas utilizando derivadas fracionárias, conforme

$$\sigma = \rho D^{\alpha} \varepsilon \tag{1}$$

onde ρ é uma constante de proporcionalidade. Se $\alpha = 0$ na equação, tem-se o comportamento elástico de uma mola. Se $\alpha = 1$, tem-se o comportamento viscoso de um amortecedor. Disso, entende-se que quando a ordem da derivada estiver compreendida no intervalo contínuo [0,1], a equação representa um elemento com comportamento parcialmente elástico e parcialmente viscoso. Existem várias definições para derivadas fracionárias, não havendo equivalência entre elas, salvo em poucos casos. Neste trabalho, foi adotada a definição de Grünwald-Letnikov (GL)

O uso de modelos de viscoelasticidade fracionária permite bons ajustes de curvas experimentais de fluência e relaxação, com menos parâmetros a serem identificados do que nos métodos tradicionais. No entanto, após os parâmetros serem identificados, a aplicação da derivada fracionária exige a consideração de todo o tempo transcorrido desde a aplicação do carregamento até o instante de interesse, levando a um grande custo computacional. Assim, alguns algoritmos foram estudados objetivando economia computacional, são eles: G1 de Oldham e Spanier (1974), P2 de Padovan (1987) e SG de Schimidt e Gaul (2002).

A definição da derivada de GL considera um somatório com incrementos infinitesimalmente próximos no tempo. Nos algoritmos G1, P2 e SG os incrementos infinitesimais são substituídos por incrementos finitos. Enquanto esta é a única diferença do algoritmo G1 com a definição da derivada GL, o algoritmo P2 propõe que não seja contabilizado o tempo transcorrido além de um tempo de corte (ou truncamento), t_c. Por sua vez, o algoritmo SG propõe reduzir o esforço numérico utilizando o algoritmo G1 até um tempo de corte (como o P2), mas incluindo o histórico prévio através de um procedimento de interpolação.

Com o presente estudo, pode-se concluir que o custo computacional está diretamente relacionado ao incremento imposto para o intervalo de tempo considerado. Entre os três algoritmos, SG mostrou-se o mais vantajoso, pois aproxima as informações distantes desconsideradas em P2, além de exigir menor custo computacional do que o algorítimo G1.

A fim de verificar e comparar os algoritmos, foi considerada a derivada fracionária da função $f(t)$ = sen (t) com ordem $\alpha = 0.99$, aproximadamente $\alpha = 1$, cuja derivada é conhecida e tem valor igual a $\frac{d}{dt}f(t) = \cos(t)$ e ordem $\alpha = 0.6$.

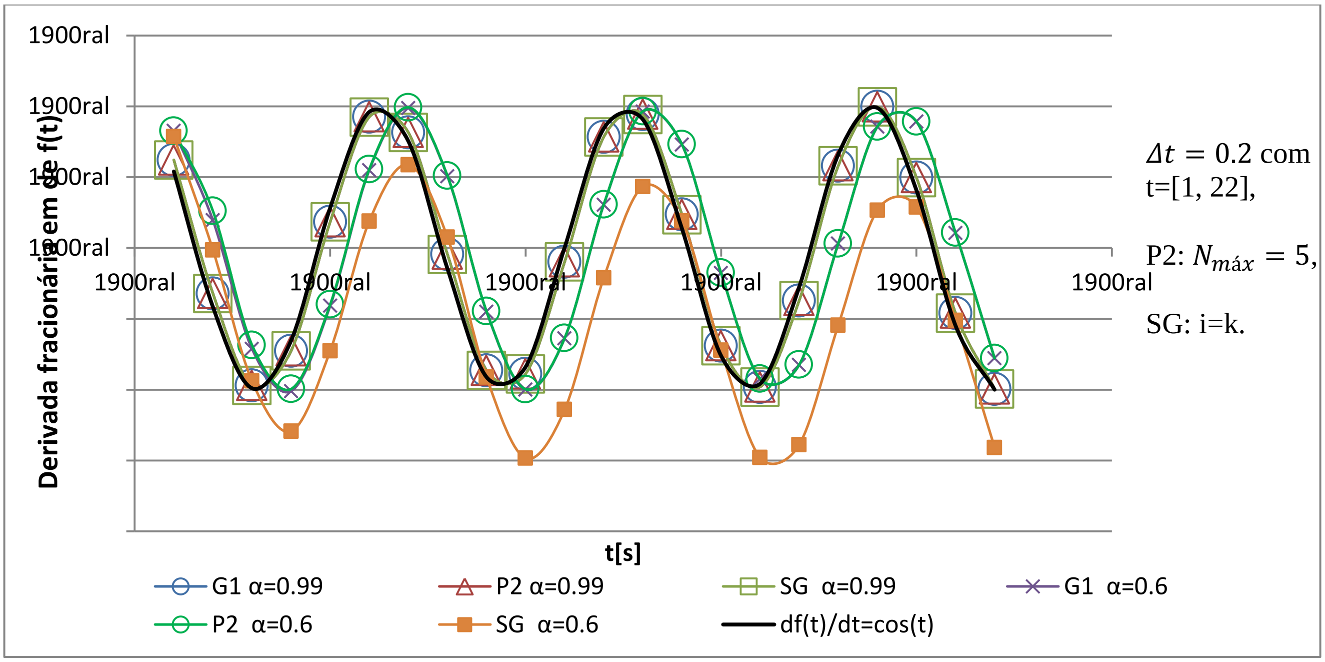

Fig. 1 *Gráfico da derivada fracionária de* $f(t)$ = sen (t) *de ordem* $\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.6$ c*alculada a partir dos algoritmos G1, P2 e SG em comparação com a derivada inteira de ordem 1.*

Observa-se acurácia satisfatória entre os resultados apresentados para $\alpha = 0.99$ em relação ao esperado em comparação com a derivada de ordem inteira, cujos valores são conhecidos. A mesma qualidade não foi observada para ordem de 0.6, para a qual se esperava maior precisão do algoritmo SG em relação à G1 do que P2. Tal fato pode ser atribuído ao incremento, uma vez que, o intervalo é dividido pela metade no algorítimo SG, sendo o número de termos menor do que àquele relacionado ao algoritmo G1, por exemplo. Fica a indicação para trabalhos futuros quanto à otimização do algoritmo nesse sentido para uma melhor comparação.

OLDHAM, K B.; SPANIER, J. The fractional calculus. *New York-London: Academic Press, 1974.*

PADOVAN, J. Computational algorithms for formulations involving fractional operators. *Comp Mech,, 1987.*

SCHMIDT, A.; GAUL, L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional ties derivatives. *Nonlinear Dynamics, 2002.*