# LIMITE DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS: DELTA ALGÉBRICO X GEOMÉTRICO

Paulo André Muller [1], Elisandra Bar de Figueiredo [2]

[1] Acadêmico do Curso de licenciatura em matemática CCT - bolsista PROIP/UDESC.
[2] Orientador, Departamento de matemática CCT – elis.b.figueiredo@gmail.com

Palavras-chave: Limite de Funções de Duas Variáveis. GeoGebra. Cálculo.

O Cálculo Diferencial e Integral está presente em diversos cursos de graduação devido a sua importância na formação dos acadêmicos em suas respectivas áreas de conhecimento. Porém, Barreto (1995) cita que o estudo do Cálculo vem sendo debatido amplamente em virtude das dificuldades que os acadêmicos apresentam no decorrer da disciplina e pela alta evasão dos estudantes nos primeiros períodos dos cursos.

Quando se estuda Cálculo, o primeiro e o maior desafio que o estudante tende a enfrentar é, provavelmente, a introdução do estudo de Limites e sua definição em termos de épsilons e deltas. Weigand (2014) afirma ser notória a dificuldade dos alunos com as definições formais de limite e derivadas, ressalta que eles não conseguem utilizar essas definições, corretamente, em dado contexto ou não são capazes de resolver problemas formalmente, evidenciando uma falsa compreensão dos conceitos.

Nosso trabalho consiste na abordagem do limite de funções de duas variáveis. A mudança do estudo de limites de funções de uma para duas variáveis pode ser interpretada com dificuldade por alguns alunos, visto que a visualização geométrica de problemas envolvendo limites passa do plano $\mathbb{R}^2$ para o espaço $\mathbb{R}^3$. Portanto, a fim de proporcionar novas opções para o ensino e aprendizagem desse conteúdo, optamos por trabalhar, principalmente, com a visualização geométrica do conceito e, para isso, utilizamos o software GeoGebra para dinamizar a relação existe entre o épsilon e o delta da definição de limite, além de imprimir algumas representações na impressora 3D.

Neste trabalho, traremos a resolução algébrica do limite

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} 3x+2y=8$$

para que possamos compará-la com sua resolução geométrica feita no GeoGebra.

Da definição de limite, para qualquer $\varepsilon>0$, precisamos obter $\delta>0$ tal que

$$0<\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}<\delta \Rightarrow |3x+2y-8|<\varepsilon.$$

Trabalhando com a segunda desigualdade, obtemos:

$$|3x+2y-8|=|3x+2y-6-2|=|3(x-2)+2(y-1)|.$$

Da desigualdade triangular, temos que:

$$|3(x-2)+2(y-1)|\le 3|(x-2)|+2|y-1|=$$

$$=3\sqrt{(x-2)^2}+2\sqrt{(y-1)^2}\le 3\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}+2\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=$$

$$5\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}<5\delta=5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)=\varepsilon.$$

Assim, para $\delta = \varepsilon/5$, está provado que

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} 3x + 2y = 8.$$

Trabalhamos com o mesmo problema no GeoGebra, apesar de omitirmos os passos para a construção da representação desse limite, os resultados podem ser observados nas Figura 1 e 2.

**Fig. 1** *Representação no plano XY*

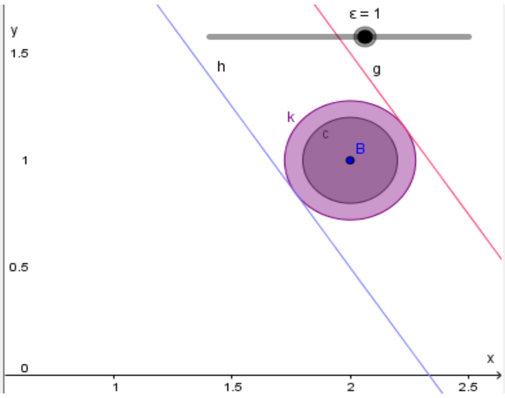
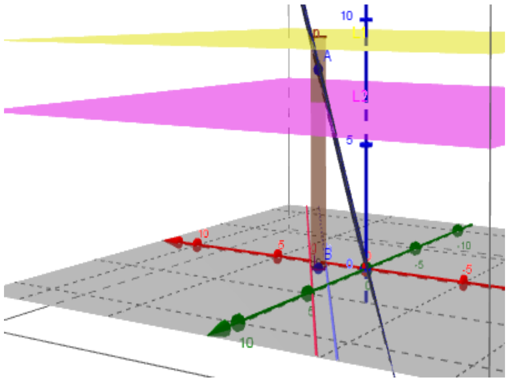



**Fig. 2** *Representação no espaço* $\mathbb{R}^3$



Na Figura 1, trazemos uma representação no plano XY com duas circunferências de raios diferentes. Elas representam o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a definição de limite para o épsilon dado (tornamos $\varepsilon$ como controle deslizante), em que a de raio menor é resultante do delta obtido algebricamente ($\delta = \varepsilon/5$) e a de raio maior é proveniente do delta geométrico. Na Figura 2, trazemos a representação espacial do problema. Nela, evidencia-se a própria definição de limite, ou seja, vê-se que a imagem dos pontos de $\mathbb{R}^2$ interiores às circunferências estão entre os planos $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$, resultado que pode não ser compreendido por estudantes sem o auxílio da visualização geométrica.

Referências:

Barreto, A. **O Ensino de Cálculo I nas universidades**. Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, (6), p. 4-5, 1995.

Weigand, H. G. **A discrete approach to the concept of derivative**. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, v. 46, n. 4, p. 603-619, ago. 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução: EZ2 Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.