

Sequência de atividades para volume

A sequência a seguir foi pensada para a formação (inicial ou continuada) de professores, ela propõe o uso de materiais concretos e aplicativos dinâmicos desenvolvidos no GeoGebra para o estudo de volumes, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) (Allevato; Onuchic, 2021).

Entendemos que ela também pode ser adaptada para aplicações no ensino básico, inclusive o trabalho de Colaço (2023) apresenta uma proposta para essa situação e o artigo de Colaço, Figueiredo e Azevedo (2023) relata uma experiência com alunos do ensino médio.

A sequência está dividida em momentos, seguindo o roteiro da MEAAMaRP e

Momento 1:

Apresentação e organização da sala:

- i) Explicar rapidamente sobre a metodologia de Resolução de Problemas e os materiais concretos e digitais que serão utilizados. Alertar que como algumas atividades serão experimentais, as respostas podem ser consideradas com aproximações.
- ii) Dividir a turma em grupos de 4 alunos e entregar para cada grupo os materiais feitos por impressão 3D e folhas A4 para as equipes registrarem as soluções.

Momento 2:

Usando o material ilustrado na Figura 1 composto por quatro prismas, dois cilindros, duas pirâmides e um cone, todos abertos com a possibilidade de serem preenchidos para comparar experimentalmente o volume entre eles.

Figura 1: Material concreto para simulação do volume



Fonte: Acervo do Fab3D.

Atividades:

1. Simulem o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz (ou outro material, não sugerimos água pois a impressão 3D em camadas pode fazer o líquido vazar).

i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

- a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?
- b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?
- c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meçam os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2. Caso percebam, sem realizar as medições, que alguns materiais possuem mesma base e/ou mesma altura, vocês poderão utilizar essa constatação para otimizar o tempo no preenchimento dos valores nos quadros.

Quadro 1 - Medidas do Cilindro e dos Prismas

	Prisma quadrangular		Prisma hexagonal		Cilindro	
	Menor	Maior	Menor	Maior	Menor	Maior
Aresta/raio da base						
Altura						
Área da base						
Volume						

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

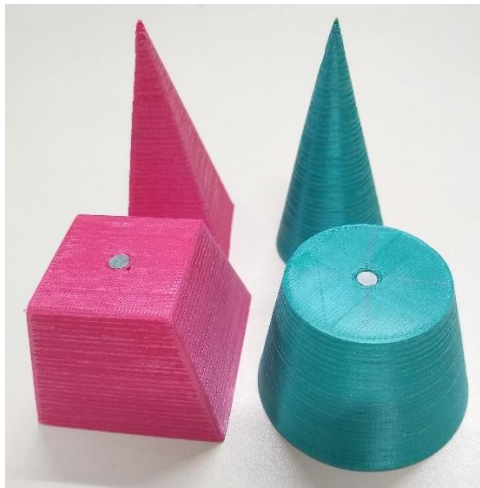
Quadro 2 - Medidas do Cone e das Pirâmides

	Cone	Pirâmide Quadrangular	Pirâmide hexagonal
Aresta/raio da base			
Altura			
Área da base			
Volume			

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?

2. Explore o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Pirâmide e cone truncados em material concreto



Fonte: Acervo do Fab3D.

i) Meçam os elementos do material concreto e preencham os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

	Cone	Pirâmide
Aresta/raio da base		
Altura total		
Área da base		
Aresta/raio da seção		
Altura da seção		
Área da seção		
Volume Total		

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) Explore o aplicativo do Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/tzhpxqb4> (observem que há várias perguntas para guiar a experiência). A partir das simulações realizadas, o que vocês podem concluir?

iii) Vocês observaram se existe alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

3. Com base no que vocês observaram nas Atividades 1 e 2, vocês conseguem pensar em um resultado que pode ser válido para se trabalhar com volumes? Expliquem.

4. a) Explore o aplicativo: <https://www.geogebra.org/m/esffe6wk> e respondam as perguntas a seguir.

i) Observem o valor obtido na relação das alturas das pirâmides, e na proporcionalidade entre as arestas da pirâmide maior e menor. O que se pode inferir ao comparar esses valores?

ii) Existe alguma relação entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$? Expliquem.

iii) Existe alguma relação entre a razão obtida na relação das alturas e a razão das áreas da seção ($\triangle EFG$) e da base ($\triangle ABC$) da pirâmide menor e maior? Caso afirmativo, qual é a relação observada?

b) O seguinte resultado é um Teorema importante de geometria:

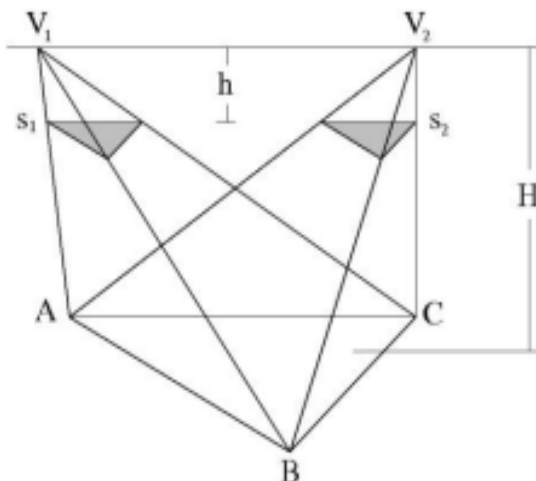
Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos que:

- As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
- A seção e a base são triângulos semelhantes.
- A razão entre as áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão das alturas dos tetraedros. (Dolce; Pompeo, 2013).

No aplicativo, escolham alguns valores para h para fazer simulações e observar o que acontece com as razões das alturas, das arestas e das áreas das faces. Após fazer essa observação, retorne ao teorema para investigar se os resultados da simulação e do teorema são os mesmos. Justifique a sua resposta.

5. Suponha duas pirâmides de base triangular ABC e altura H , sendo que seus vértices são V_1 e V_2 . Um plano paralelo à base ABC e que dista h dos vértices produz seções S_1 e S_2 de áreas A_1 e A_2 nas pirâmides de vértice V_1 e V_2 , respectivamente, como na Figura 3.

Figura 3: Plano seccionando duas pirâmides



Fonte: Pontes (2014).

Usando o Teorema da questão anterior determine e explique:

- a relação de S_1 com S_2 e cada uma delas com a área do triângulo ABC ;
- a relação entre os volumes das duas pirâmides triangulares originais ($ABCV_1$ e $ABCV_2$);
- a relação entre o volume de duas pirâmides triangulares quaisquer que possuem bases de áreas iguais e alturas iguais.

6. Observe e analise o material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. Identifique e compare as bases e as alturas dos tetraedros, ilustrado na Figura 4. O que vocês podem afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

Figura 4: Divisão do paralelepípedo



Fonte: Acervo do Fab3D.

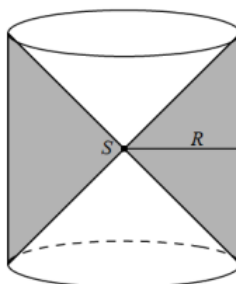
Momento 3: Compartilhamento de resultados pelas equipes e discussão (consenso).

Momento 4: Formalização do Princípio de Cavalieri, de modo a confirmar as suspeitas feitas pelos alunos sobre os volumes dos sólidos geométricos estudados no Momento 2. Nesse caso, sugere-se o uso do Geogebra 3D junto ao material concreto para verificar esse resultado matemático.

Momento 5 (Etapa de resolução de novos problemas e Formulação de Problemas):

1. Uma anticlépsidra é o sólido obtido retirando-se de um cilindro dois cones, conectados pelo vértice, com bases nas bases do cilindro e altura igual a metade da altura do cilindro (Figura 5).

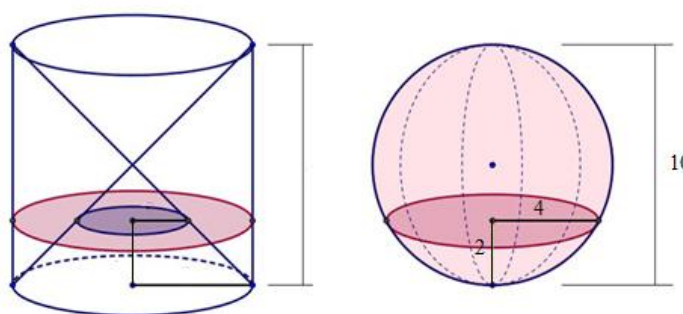
Figura 5: Anticlépsidra



Fonte: Benk (2017).

- a) O material concreto (da esfera e da anticlépsidra) recebido para essa questão é composto por várias partes com as quais é possível montar uma esfera, uma anticlépsidra seções desses dois sólidos. O que vocês podem observar sobre a altura da esfera e da anticlépsidra? Ao comparar as seções desses sólidos o que pode ser constatado sobre a altura e sobre as áreas dessas seções?
- b) No aplicativo <https://www.geogebra.org/m/b7jfenux> estão representadas uma esfera e uma anticlépsidra sendo possível manipular controles deslizantes que controlam o raio da esfera e a altura de um plano que seccionado esses dois objetos. Além disso, são propostas algumas reflexões (perguntas). O que vocês podem concluir ao manipular o aplicativo? Qual a relação entre a esfera e a anticlépsidra?
- c) Considerando o material concreto e o aplicativo de que forma pode ser obtido o volume de uma calota esférica? Considerem a anticlépsidra ilustrada na Figura 6 ao lado esquerdo da esfera, determinem suas medidas e relacionem-na com a calota esférica de raio 4 cm e altura 2 cm.

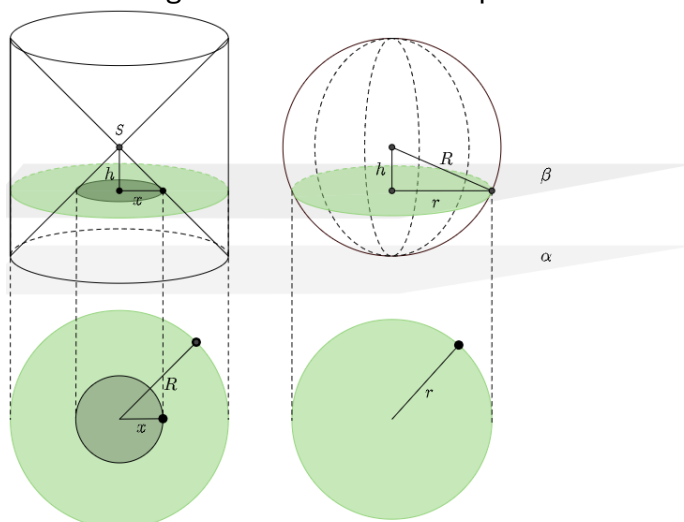
Figura 6: Calota da esfera e seção da anticlépsidra



Fonte: Adaptado de Benk et al. (2016).

- d) Considere uma esfera e uma anticlépsidra de mesma altura, apoiadas numa mesma base e seccionadas por um mesmo plano, como na Figura 7.

Figura 7: Esfera e anticlépsidra

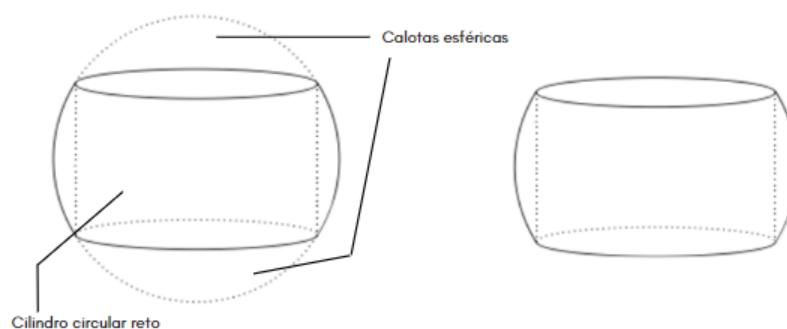


Fonte: Colaço (2023).

Expliquem como podem ser obtidos os raios do anel da seção da anticlépsidra e o raio do círculo da seção da esfera para determinar as áreas dessas seções a uma altura arbitrária h do plano em que ambas estão apoiadas.

2. O anel de guardanapo é considerado o sólido que resta de uma esfera quando é retirado dela um cilindro circular reto, como ilustra a Figura 8.

Figura 8: Volume do anel por meio das calotas esféricas e do cilindro circular reto



Fonte: Adaptado de UDESC (2019).

- a) Para ficar mais claro esse sólido, observem alguns diferentes tamanhos de anéis de guardanapo no material concreto recebido. O que vocês podem perceber sobre os raios das esferas e dos cilindros que os originaram e sobre as suas alturas?
- b) Explore o aplicativo <https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m> para construir diferentes anéis de guardanapo, reflita sobre os questionamentos deixados

no aplicativo. Que conclusões vocês chegaram?

- c) Considerem dois anéis de guardanapo A_1 e A_2 , sendo A_1 obtido pela retirada de um cilindro de raio 3 cm de uma esfera de raio 5 cm e A_2 obtido pela retirada de um cilindro de raio $\sqrt{20}$ cm de uma esfera de raio 6 cm. Utilizem o aplicativo <https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m> para fazer simulações e identificar relações entre esses anéis de guardanapo.
- i) Determinem a altura desses anéis;
 - ii) Determinem área das seções desses anéis obtidas a uma mesma altura;
 - iii) Determinem o volume desses anéis.
- d) Como pode ser calculado o volume de um anel de guardanapo?
3. Elaborem um problema matemático usando o Princípio de Cavalieri, o aplicativo do GeoGebra 3D <https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu> e a Figura 9.

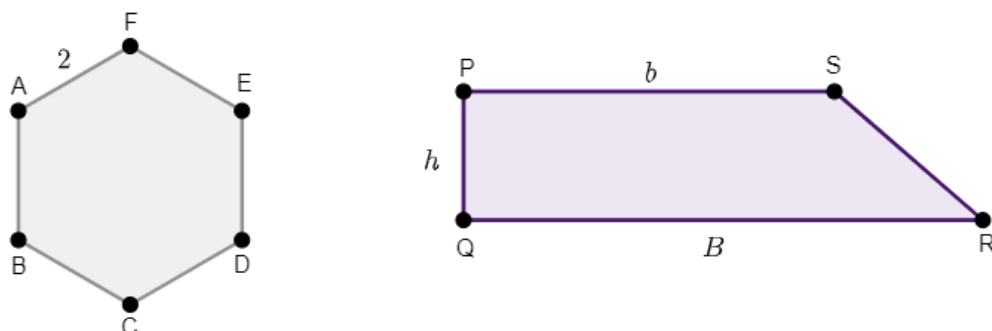
Figura 9: Materiais do cotidiano



Fonte: Colaço (2023).

4. Suponha que o hexágono regular e o trapézio retângulo da Figura 10 possam ser a base de dois sólidos geométricos. Com base nisso, elabore um problema matemático que envolva o Princípio de Cavalieri.

Figura 10: Hexágono regular e o trapézio retângulo



Fonte: Colaço (2023).

Autoria

Atividades propostas por Amanda Zanelato Colaço, em suas pesquisas de iniciação científica e trabalho de conclusão de curso.

Materiais concretos produzidos pelo Fab3D e disponíveis para empréstimo ou envio dos modelos para impressão 3D (entre em contato pelo e-mail fab3d.cct@udesc.br).

Sugestões

Aos que utilizarem as atividades por favor nos deem o retorno sobre a viabilidade e sugestões de alteração pelo e-mail fab3d.cct@udesc.br.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

BENK, Polyana. **O volume da esfera**: de Arquimedes ao cálculo diferencial e integral. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2017. Disponível em: <https://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/0000cc/0000ccf8.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2026.

BENK, Polyana; SILVA, Sérgio Marconi da; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; SIPLE, Ivanete Zuchi. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. II **Colóquio Luso-Brasileiro de Educação**, v. 1, p. 685-696, 2016.

COLAÇO, Amanda Zanelato. **O Princípio de Cavalieri por meio da resolução de problemas**: sequências de atividades para o estudo de volumes. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2023. Disponível em: <https://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/0000b5/0000b520.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2026.

COLACO, Amanda Zanelato; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de ; AZEVEDO, Eliane Bihuna de. Princípio de Cavalieri: uma experiência com alunos do Ensino Médio. In: Congresso Internacional Movimentos Docentes, 2023, On-line. **Anais do Congresso Internacional Movimentos Docentes**. Santo André/ SP: V&V Editora, 2023. v. 3. p. 1379-1389.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em:

http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 26 jan. 2023.

UDESC, Universidade do Estado de Santa Catarina. **Caderno de Prova:** vestibular 2019.2. Vestibular 2019.2. 2019.