

PROCESSO SELETIVO – 02/2024

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 1: (2,5 pontos) Disserte sobre produto misto enfatizando a definição, os procedimentos de cálculo, as propriedades e a interpretação geométrica.

Padrão de resposta: Nesta questão, é esperado que o candidato:

1. Defina produto misto como uma operação que envolve um produto vetorial seguido de um produto escalar;
2. Mostre que essa operação se reduz ao cálculo de um determinante;
3. Explique as condições para a nulidade do produto misto;
4. Explique a propriedade cíclica e o que ocorre na permuta dos símbolos \cdot (do produto escalar) e \times (do produto vetorial);
5. Mostre que o módulo do produto misto, geometricamente, representa o volume do paralelepípedo de arestas definidas por três vetores não coplanares.

Referências:

STEINBUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. Makron Books Editora. 2ª edição. 1987. Capítulo 3.

VENTURI, J.J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. Autores Paranaenses, 2009. Disponível em <https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-indice1>, sob licença do autor. Capítulo 5.

Membros da Banca:

Ligia Liani Barz (membro)

Débora Eloisa Nass Kieckhoefel (membro)

Eliane Bihuna de Azevedo (suplente)

Elisandra Bar de Figueiredo (presidente)

PROCESSO SELETIVO – 02/2024

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 2: (2,5 pontos) Discorra sobre planos no espaço, deduza sua equação explicando seus elementos e explique as posições relativas entre retas e planos apresentando as condições para que essas ocorram.

Padrão de resposta: Nesta questão, é esperado que o candidato:

1. Explícite a definição de plano, apresentando os elementos que a compõem;
2. Deduza a equação geral do plano;
3. Explique sobre os coeficientes da equação do plano;
4. Apresente as condições que tornam uma reta e um plano concorrentes, paralelos, ou que definam que a reta está contida no plano;
5. O candidato pode apresentar diferentes formas de determinar um plano, mas isso não é exigido na questão, de modo que não terá prejuízos se não o fizer.

Referências:

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. Makron Books Editora. 2ª edição. 1987. Capítulo 5.

VENTURI, J.J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. Autores Paranaenses, 2009. Disponível em <https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-indice1>, sob licença do autor. Capítulos 7 e 8.

Membros da Banca:

Ligia Liani Barz (membro)

Débora Eloisa Nass Kieckhoefel (membro)

Eliane Bihuna de Azevedo (suplente)

Elisandra Bar de Figueiredo (presidente)

QUESTÃO 3:

a) (1,25 ponto) Disserte sobre cálculo de volumes usando integrais duplas.

b) (1,25 ponto) Considere o sólido definido para $z \geq 0$, delimitado superiormente por $S_1: z = 6 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $S_2: x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Represente geometricamente e determine o volume desse sólido.

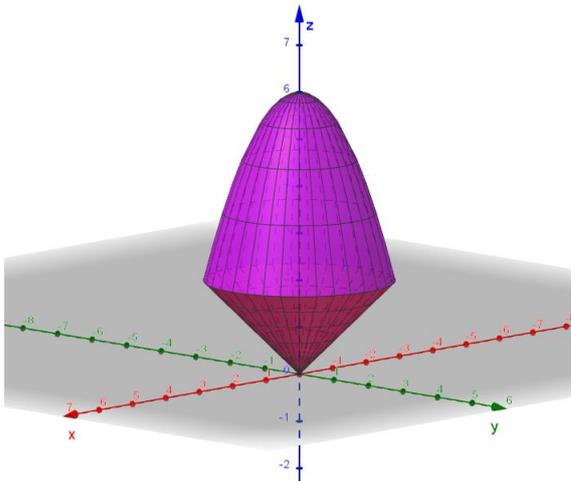
Padrão de resposta:

No item (a) da questão, é esperado que o candidato:

1. Apresente a ideia do cálculo de volumes utilizando a aproximação por somas de volumes de paralelepípedos;
2. Defina o volume como o limite de somas de Riemann;
3. Defina o limite dessas somas de Riemann como a integral dupla.

No item (b) da questão, é esperado que o candidato:

1. Represente geometricamente o sólido delimitado superiormente por S_1 e inferiormente por S_2 , para $z \geq 0$, como na figura a seguir;



2. Determine a curva de interseção das superfícies $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ resolvendo o sistema com as equações das duas superfícies;
3. Identifique a região de integração no plano XOY como sendo a circunferência $x^2 + y^2 = 4$;
4. Escreva a integral dupla (ou tripla) que calcula o volume do sólido usando qualquer um dos

sistemas (cartesiano, cilíndrico ou esférico):

- Cartesiano: $V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (6 - x^2 - y^2) dy dx - \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$
- Cilíndrico/polar: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6 - r^2) r dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^2 r r dr d\theta$
- Esférico: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\rho_1} \rho \sin^2 \phi \, d\rho d\phi d\theta$, sendo $\rho_1 = \frac{-\cos\phi + \sqrt{\cos^2 \phi + 24 \sin^2 \phi}}{2 \sin^2 \phi}$

5. Utilize o sistema de coordenadas cilíndricas/polares para efetuar o cálculo do volume. O candidato pode montar as integrais que calculam o volume usando outro sistema, mas precisa perceber que o cálculo será possível apenas no sistema cilíndrico.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6 - r^2) r dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^2 r r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} d\theta = \frac{32}{3} \pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Referências:

ANTON, H. **Cálculo**: um novo horizonte. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. Capítulo 14.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. Capítulo 15.

WEIR, M. D. et al. **Cálculo**: George B. Thomas. Volume 2. 11. ed. São Paulo: Pearson/Addison Wesley, 2009. Capítulo 15.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. Makron Books Editora. 2ª edição. 1987. Capítulo 8.

VENTURI, J.J. **Cônicas e Quádricas**. Autores Paranaenses, 2003. Disponível em <https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-av>, sob licença do autor. Capítulo 8.

Membros da Banca:

Ligia Liani Barz (membro)

Débora Eloisa Nass Kieckhoefel (membro)

Eliane Bihuna de Azevedo (suplente)

Elisandra Bar de Figueiredo (presidente)

QUESTÃO 4: (2,5 pontos) Disserte sobre séries de Taylor e Maclaurin (McLaurin). A seguir, use essa teoria para determinar uma aproximação para o número de Euler.

Padrão de resposta: Nesta questão, é esperado que o candidato:

1. Defina séries de Taylor, determinando os seus coeficientes como as derivadas enésimas da função no ponto de expansão;
2. Defina séries de Maclaurin, ou aplicando a série de Taylor em torno do ponto $x = 0$ ou fazendo toda a dedução novamente;
3. Determine a expansão em série de Maclaurin da função $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$
4. Use a expansão da função $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$ para determinar uma aproximação para e (podendo ser algumas das que seguem ou outra):
 - $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,7166666 \dots$
 - $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2,708333 \dots$

Referências:

ANTON, H. **Cálculo:** um novo horizonte. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. Capítulo 9.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume 2. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. Capítulo 11.

WEIR, M. D. et al. **Cálculo:** George B. Thomas. Volume 2. 11. ed. São Paulo: Pearson/Addison Wesley, 2009. Capítulo 10.

Membros da Banca:

Ligia Liani Barz (membro)

Débora Eloisa Nass Kieckhoefel (membro)

Eliane Bihuna de Azevedo (suplente)

Elisandra Bar de Figueiredo (presidente)



Assinaturas do documento



Código para verificação: **3S6DA46S**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:



ELISANDRA BAR DE FIGUEIREDO (CPF: 029.XXX.409-XX) em 05/02/2024 às 11:26:43

Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:09 e válido até 30/03/2118 - 12:44:09.

(Assinatura do sistema)



DÉBORA ELOÍSA NASS KIECKHOEFEL (CPF: 069.XXX.559-XX) em 05/02/2024 às 11:29:38

Emitido por: "SGP-e", emitido em 05/09/2019 - 11:11:03 e válido até 05/09/2119 - 11:11:03.

(Assinatura do sistema)



ELIANE BIHUNA DE AZEVEDO (CPF: 037.XXX.719-XX) em 05/02/2024 às 11:40:21

Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:38:45 e válido até 30/03/2118 - 12:38:45.

(Assinatura do sistema)



LIGIA LIANI BARZ (CPF: 389.XXX.781-XX) em 05/02/2024 às 11:45:11

Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:40:04 e válido até 30/03/2118 - 12:40:04.

(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link <https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTlwMjJfMDAwMDI2MTVfMjYxNi8yMDI0XzNTNkRBNDZT> ou o site

<https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo> e informe o processo **UDESC 00002615/2024** e o código **3S6DA46S** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.