UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 06/2024

Área de Conhecimento: Matemática Discreta

PROVA ESCRITA - PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 1

Um número natural a é divisível por 5 se, e somente se, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a = 5j$. Demonstrar-se-á por indução matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $l \in \mathbb{N}$ em que $7^n - 2^n = 5l$.

Base da indução: Prova-se para o caso em que $n = 0$.
Tem-se então que $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 5\,.0$. Logo $7^0 - 2^0$ é divisível por 5.

Hipótese de Indução (HI):
Dado $k \in \mathbb{N}$ qualquer, tem-se a hipótese de que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $7^k - 2^k = 5m$.

Passo de indução: Deve-se provar a propriedade para $k + 1$.
$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7\,.7^k - 2\,.2^k$.

Pela (HI), temos que $7^k - 2^k = 5m$, logo $7^k = 5m + 2^k$, portanto, $7\,.7^k - 2\,.2^k = 7\,.(5m + 2^k) - 2\,.2^k = 35m + 7\,.2^k - 2\,.2^k = 35m + 5\,.2^k = 5\,.(7 + 2^k)$.

Como $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $2^k \in \mathbb{N}$ e portanto $7 + 2^k \in \mathbb{N}$. Logo, $7^{k+1} - 2^{k+1}$ é divisível por 5.

Bibliografia de referência:

MENEZES, Paulo. B. Matemática discreta para computação e informática. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. (Capítulo 8)

MORGADO, A. C; CESAR, Paulo. Matemática discreta. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.(Capítulo 2)

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 06/2024

Área de Conhecimento: Matemática Discreta

PROVA ESCRITA - PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 2

Dados X e Y conjuntos quaisquer, tem-se que a diferença de conjuntos é definida por $X - Y = X \cap \overline{Y}$, onde $\overline{X}$ é a operação de complemento de conjuntos e $\mathcal{U}$ denota o conjunto universo. Logo,

$$\begin{aligned}
A \ominus B &= (A - B) \cup (B - A) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) \\
&= ((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)) \cap ((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \\
&= ((A \cup B) \cap \mathcal{U}) \cap (\mathcal{U} \cap (\overline{B} \cap \overline{A})) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\
&= (A \cup B) - (A \cap B)
\end{aligned}$$

Bibliografia de referência:

MENEZES, Paulo. B. Matemática discreta para computação e informática. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. (Capítulo 3)

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. (Sessão 2.2)

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 06/2024

Área de Conhecimento: Matemática Discreta

PROVA ESCRITA - PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 3

Supondo que $R \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem parcial, portanto R é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Por ser reflexiva, tem-se que $\forall a \in A.\langle a, a\rangle \in R$. Pela definição de R^{-1} tem-se que $\forall a \in A.\langle a, a\rangle \in R^{-1}$, portanto $\iota_A \subseteq R \cap R^{-1}$.

Seja $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$, logo $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$. Como $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, tem-se que $\langle y, x\rangle \in R$. Como R é uma relação antissimétrica, tem-se que $x = y$. Portanto, se $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$ então $x = y$, logo é um elemento de ι_A. Portanto $R \cap R^{-1} \subseteq \iota_A$.

Como $\iota_A \subseteq R \cap R^{-1}$ e $R \cap R^{-1} \subseteq \iota_A$, tem-se que $R \cap R^{-1} = \iota_A$, e como R é relação de ordem, R é transitiva.

Agora, supondo que $R \cap R^{-1} = \iota_A$ e R é transitiva.

Como $R \cap R^{-1} = \iota_A$ então, dado $a \in A$ qualquer, tem-se que $\langle a, a\rangle \in \iota_A$, logo $\langle a, a\rangle \in R \cap R^{-1}$. Pela definição de intersecção de conjuntos, temos que $\langle a, a\rangle \in R$ e $\langle a, a\rangle \in R^{-1}$. Logo, para todo $a \in A$, tem-se que $\langle a, a\rangle \in R$, ou seja, R é reflexiva.

Sejam $a, b \in A$ tais que $\langle a, b\rangle \in R$ e $\langle b, a\rangle \in R$. Pela definição de relação inversa, como $\langle b, a\rangle \in R$ então $\langle a, b\rangle \in R^{-1}$. Logo, tem-se que $\langle a, b\rangle \in R \cap R^{-1}$. Como $R \cap R^{-1} = \iota_A$, então $a = b$, o que demonstra que R é antissimétrica.

Como R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, tem-se que R é uma relação de ordem parcial.

Bibliografia de referência:

MENEZES, Paulo. B. Matemática discreta para computação e informática. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. (Capítulo 6)

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. (Capítulo 8)

PROCESSO SELETIVO 06/2024

Área de Conhecimento: Matemática Discreta

PROVA ESCRITA - PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 4

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, dados conjuntos X, Y e Z quaisquer, tem-se

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

Logo, $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$. Além disso,

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

Aplicando a última equação ao caso da questão, tem-se

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - (|A| + |B| - |A \cup B|) - (|A| + |C| - |A \cup C|) \\
&\quad -(|B| + |C| - |B \cup C|) + |A \cap B \cap C| \\
11 &= |A| + |B| + |C| - (|A| + |B| - 8) - (|A| + |C| - 9) - (|B| + |C| - 10) + 2 \\
11 &= 8 - |A| + 9 - |B| - |C| + 10 + 2 \\
11 &= 29 - |A| - |B| - |C| \\
|A| + |B| + |C| &= 29 - 11 = 18.
\end{aligned}$$

Bibliografia de referência:

GERSTING, Judith L. Fundamentos matemáticos para a ciência da computação. 5ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. (Capítulo 4)

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. (Sessão 7.5)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **O0XW19W7**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

ANDRE TAVARES DA SILVA (CPF: 908.XXX.020-XX) em 25/11/2024 às 07:44:55
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:17 e válido até 30/03/2118 - 12:44:17.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNTA4NDNfNTA4OTRfMjAyNF9PMFhXMTlXNw== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00050843/2024** e o código **O0XW19W7** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.