UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

PROVA ESCRITA

PROCESSO SELETIVO 001/2025 - UDESC

Área: Matemática

Número de inscrição: ____________________

QUESTÃO 1

a) (pontos: 1.5)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 1
2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 2

Modelo de Resposta:

A resposta deve conter pelo menos:

1. A definição precisa de limite, usando ϵ e δ.
2. A interpretação geométrica da definição de limite
3. A apresentação de algum resultado relavante acerca de limite. Por exemplo: a unicidade do limite, uma das propriedades aritméticas do limite, o teorema do confronto, etc
4. Exemplos.

b) (pontos: 1.0)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 1

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 2

Modelo de Resposta:

Como o limite dá informação sobre o comportamento da função nas proximidades do ponto, podemos considerar $f(x)$ apenas para valores $x \neq 3$. Neste caso $f(x) = (2x - 1)$ e $|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3|$. Logo, dado $\epsilon > 0$, para que $|f(x) - 5| < \epsilon$, basta tomar x tal que $0 < |x - 3| < \delta$ com $\delta = \epsilon/2$. Resumindo, dado $\epsilon > 0$ qualquer, tomando $\delta = \epsilon/2$, temos que,

$$x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - 3| < \delta \text{ implica que } |f(x) - 5| < \epsilon$$

QUESTÃO 2

a) (pontos: 1.5)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 4

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 4

Modelo de Resposta:

A resposta deve conter pelo menos:

1. A definição de valor máximo e valor mínimo local (ou relativo) e global (ou absoluto).

2. Uma interpretação geométrica de máximos e mínimos

3. A apresentação de algum resultado relavante acerca de máximos e mínimos. Por exemplo: o teorema do valor extremo, o teorema de Rolle, o teorema do valor médio, etc

4. Exemplos.

b) (pontos: 1.0)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 4

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 4

Modelo de Resposta:

Suponha que f tenha um máximo local em c. Neste caso $f(c) \geq f(x)$ para todo x suficientemente próximo de c. Assim, para h suficientemente pequeno temos que

$$f(c) \geq f(c+h) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0$$

Se $h > 0$ for suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

fazendo $h \to 0^+$, concluímos que $f'(c) \leq 0$.

Se $h < 0$ for suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

fazendo $h \to 0^-$, concluímos que $f'(c) \geq 0$.

Como f é derivável em c, ambas as desigualdades, $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, devem ser verdadeiras, ou seja, $f'(c) = 0$.

QUESTÃO 3

a) (pontos: 1.5)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2, Capítulo 13

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, Capítulo 14

Modelo de Resposta:

A resposta deve conter pelo menos:

1. As definições de derivadas parciais (de primeira ordem, é suficiente) e a definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis reais.

2. Uma interpretação geométrica de derivadas parciais e da diferenciabilidade de funções de duas variáveis

3. A apresentação de algum resultado relavante acerca de derivadas parciais e da diferenciabilidade de funções de duas variáveis. Por exemplo: o teorema de Clairaut, o teorema que relaciona derivadas parciais e diferenciabilidade, a regra da cadeia, o teorema que relaciona derivadas parciais e a derivada direcional, etc

4. Exemplos.

b) (pontos: 1.0)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2, Capítulo 13

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, Capítulo 14

Modelo de Resposta:

Para $f(x,y) = (x^2 - y^2)^5 + e^{3x^2+4y^2}$, têm-se, pela regra da cadeia, que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5(x^2 - y^2)^4 \cdot (2x) + e^{3x^2+4y^2} \cdot (6x) = 10x(x^2 - y^2)^4 + 6xe^{3x^2+4y^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5(x^2 - y^2)^4 \cdot (-2y) + e^{3x^2+4y^2} \cdot (8y) = -10y(x^2 - y^2)^4 + 8ye^{3x^2+4y^2}.$$

Derivando novamente, têm-se, pela regra do produto, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10(x^2 - y^2)^4 + 10x \cdot 4(x^2 - y^2)^3(2x) + 6e^{3x^2+4y^2} + 6xe^{3x^2+4y^2}.(6x)$$
$$= 10(x^2 - y^2)^4 + 80x^2(x^2 - y^2)^3 + 6e^{3x^2+4y^2} + 36x^2e^{3x^2+4y^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -10(x^2 - y^2)^4 - 10y \cdot 4(x^2 - y^2)^3(-2y) + 8e^{3x^2+4y^2} + 8ye^{3x^2+4y^2} \cdot (8y)$$
$$= -10(x^2 - y^2)^4 + 80y^2(x^2 - y^2)^3 + 8e^{3x^2+4y^2} + 64y^2e^{3x^2+4y^2}.$$

Tomando a diferença e fatorando os termos comuns, encontra-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20(x^2 - y^2)^4 + 80(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)^3 - 2e^{3x^2+4y^2} + 36x^2e^{3x^2+4y^2} - 64y^2e^{3x^2+4y^2}$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 100(x^2 - y^2)^4 + e^{3x^2+4y^2}[-2 + 36x^2 - 64y^2].$$

Portanto, para que a igualdade

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a(x^2 - y^2)^4 + e^{3x^2+4y^2} \cdot [b + cx^2 + dy^2]$$

seja válida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é necessário que

$$a = 100, \quad b = -2, \quad c = 36, \quad d = -64.$$

QUESTÃO 4

a) (pontos: 1.5)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2, Capítulo 14
2. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, Capítulo 15

Modelo de Resposta:

A resposta deve conter pelo menos:

1. A definição da integral múltipla para funções de duas variáveis.
2. Uma interpretação geométrica da integral múltipla para funções de duas variáveis
3. A apresentação de algum resultado relavante acerca da integral múltipla para funções de duas variáveis. Por exemplo: as propriedades da integral múltipla, o teorema de Fubini, regras para o cálculo de integrais múltiplas sobre regiões delimitadas pelo gráfico de funções, etc
4. Exemplos.

b) (pontos: 1.0)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2, Capítulo 14

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, Capítulo 15

Modelo de Resposta:

Resolvendo a integral em coordenadas cilíndricas, têm-se que o valor numérico da massa do sólido S é

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{4r}^{\sqrt{25-9r^2}} 8zr^5 dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4z^2r^5\Big|_{4r}^{\sqrt{25-9r^2}} drd\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 [(25-9r^2)r^5 - (4r)^2r^5]\, drd\theta = 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 (25r^5 - 9r^7 - 16r^7)\, drd\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 (25r^5 - 25r^7)\, drd\theta = 4\cdot 25\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8}\right)\Big|_0^1 d\theta = 100\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)d\theta$$

$$= 100\int_0^{2\pi}\frac{1}{24}d\theta = \frac{25}{6}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = \frac{25}{6}\cdot 2\pi = \frac{25\pi}{3}\ \textit{unidades de massa.}$$

Banca Examinadora

Sidnei Furtado Costa (Presidente)

Marnei Luis Mandler (Membro)

Milagros Noemi Quintana Castillo (Membro)

Eliane Bihuna de Azevedo (Suplente)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **3MR98B1I**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

SIDNEI FURTADO COSTA (CPF: 012.XXX.493-XX) em 24/02/2025 às 12:48:10
Emitido por: "SGP-e", emitido em 11/07/2019 - 13:45:55 e válido até 11/07/2119 - 13:45:55.
(Assinatura do sistema)

MARNEI LUIS MANDLER (CPF: 907.XXX.050-XX) em 24/02/2025 às 12:56:38
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:37:18 e válido até 30/03/2118 - 12:37:18.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMDE0MTdfMTQxOF8yMDI1XzNNUjk4QjFJ ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00001417/2025** e o código **3MR98B1I** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.