

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA-UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS-CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RAIMUNDA ANTONINA LOPES FIGUEREDO

PLANO DE PARÂMETROS PARA A RESPOSTA NÃO LINEAR
DE UM MODELO DE SEMICONDUTOR

JOINVILLE

2026

RAIMUNDA ANTONINA LOPES FIGUEREDO

**PLANO DE PARÂMETROS PARA A RESPOSTA NÃO LINEAR
DE UM MODELO DE SEMICONDUTOR**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Física
pelo Programa de Pós-Graduação em Física
(PPGF) do Centro de Ciências Tecnológicas da
Universidade do Estado de Santa Catarina.
Orientador: Prof. Dr. Holokx A. Albuquerque.

JOINVILLE

2026

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária UDESC,
com os dados fornecidos pela autora**

Lopes Figueredo, Raimunda Antonina

Plano de parâmetros para a resposta não linear de um modelo de
semicondutor / Raimunda Antonina Lopes Figueredo. -- 2026.
61 p.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2026.

1. caos. 2. expoentes de Lyapunov. 3. modelo de
semicondutor. 4. simulações computacionais. I. Abreu Albuquerque,
Holokx. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

RAIMUNDA ANTONINA LOPES FIGUEREDO

**PLANO DE PARÂMETROS PARA A RESPOSTA NÃO LINEAR
DE UM MODELO DE SEMICONDUTOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, na área de concentração em Física.

Orientador: Prof. Dr. Holokx A. Albuquerque.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque.

Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC/CCT

(Orientador/Presidente)

Membros:

Prof. Dr. Paulo Cesar Rech

Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC/CCT

Dra. Adriane Reis Brugnago

Universidade Federal de São Paulo-UNIFESP

Joinville, 23 de julho de 2026

Dedico esse trabalho a Deus, pelo dom da vida e por iluminar meus passos a cada dia. À minha família, que sempre me apoiou e me incentivou na caminhada, em especial aos meus irmãos, irmãs e aos meus pais: Raimunda de Jesus e Pedro Catarino. Ao meu orientador, professor Dr. Holokx A. Albuquerque, pela orientação e pelo incentivo, fundamentais durante todo o processo do mestrado.

AGRADECIMENTO

A Deus, por me dar forças para alcançar cada degrau da jornada.

À minha mãe, Raimunda de Jesus, pelo incentivo nos meus estudos e por estar ao meu lado em todos os momentos, sendo um exemplo de vida para mim. Ao meu pai, Pedro Catarino, que sempre me deu forças e apoio, ajudando-me a construir os princípios fundamentais de um ser humano. Aos meus irmãos e irmãs, representados pela mais nova, Maria de Jesus, pelo apoio, pela contribuição e pelo carinho que compartilhamos durante a nossa vida.

Aos amigos que fazem parte da minha vida e torcem para que eu alcance meus objetivos, em especial à Sara R. S. Costa, pela parceria e pelo apoio neste período de estudos.

A todos os professores da minha vida estudantil, da Educação Infantil ao Ensino Superior, que com certeza compartilham da minha alegria em cada nova conquista acadêmica, pois represento o fruto do trabalho deles enquanto educadores. Neste momento, de modo particular, aos professores e funcionários da Universidade do Estado de Santa Catarina, à coordenação do PPGF, na pessoa dos professores Dr. Daniel Vieira e Dr. Edgard Pacheco M. Amorim, ao Téc. Universitário Sidnei da Costa Otero e aos colaboradores de todos os setores.

Aos colegas do mestrado pela parceria fundamental durante a jornada acadêmica, especialmente: Elian A. Pinheiro, Rodrigo Nascimento, Santiago R. Mogollón e Wallace Mielniczki. Ao grupo de pesquisa de Sistemas Dinâmicos Não Lineares, na pessoa do aluno Thainan Macedo Costa, do professor Dr. César Manchein e, em especial, ao professor Dr. Paulo Cesar Rech, por ser exemplo de dedicação para todos nós.

Aos colegas do coral da UDESC, na pessoa da Professora Regina Munhoz e do maestro Anderson Nascimento; à professora de pilates Deise Moser; ao grupo de Físicas da UDESC, juntamente com a professora Cintia Aguiar; e ao Grupo de Oração Universitário, sob a coordenação do aluno João Gabriel Borges; pois foram meu porto seguro nos momentos de integração na universidade, construindo momentos significativos que ajudaram a manter a saúde física e mental durante os desafios do dia a dia, deixando boas recordações.

Aos párocos (Padre Jonas Eduardo G. da Costa e Silva e Padre Fabiano Derenievicz) e colegas da Paróquia Nossa Senhora Aparecida, na pessoa da paroquiana Patrícia Bez Duarte, que foram minha família de fé nesta nova cidade.

À CAPES e à UDESC, pelo apoio financeiro, institucional e de infraestrutura.

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram ao longo de todo o percurso do mestrado, em especial ao professor Dr. Holokx Abreu Albuquerque, pelo direcionamento técnico e pela dedicação durante o desenvolvimento da pesquisa.

“É longo o caminho por meio de teoria, mas breve e eficaz por meio de exemplos.” (Sêneca)

RESUMO

As respostas não lineares observadas nas medições de corrente elétrica em dispositivos semicondutores têm sido amplamente estudadas desde a década de 1980. Esses fenômenos, particularmente, em materiais como o arseneto de gálio tipo-n semi-isolante (n-GaAs) e o germânio (Ge), revelaram um comportamento dinâmico complexo, incluindo caos e múltiplas rotas para o regime caótico. Investigações experimentais iniciais demonstraram que, quando esses materiais semicondutores são submetidos a condições externas específicas, como a aplicação de campos elétricos ou variações de temperatura, oscilações não lineares e bifurcações emergem em suas características de corrente-tensão. A abordagem de modelagem mais adotada consiste na formulação de equações de taxas que descrevem a dinâmica dos portadores de carga no material. Esses modelos tipicamente consistem em equações diferenciais ordinárias (EDOs) acopladas que governam a evolução temporal da densidade de portadores de carga, da distribuição de campo elétrico e da densidade de corrente elétrica. Um componente crítico desses modelos é a representação precisa dos processos de geração e recombinação (g-r) dos portadores de carga, que influenciam significativamente o comportamento desses portadores. Ao incorporar diferentes tipos de mecanismos de g-r, como a captura assistida por campo elétrico ou processos de ionização por impacto, esses modelos podem ser adaptados para reproduzir determinadas observações experimentais. No entanto, os recursos computacionais eram relativamente limitados quando esses modelos foram propostos pela primeira vez. Como resultado, as simulações numéricas muitas vezes careciam de resolução e profundidade necessárias para explorar plenamente o espaço de parâmetros ou revelar a estrutura fina da dinâmica do sistema. Neste trabalho, revisitamos um dos modelos fundamentais neste domínio, aproveitando as capacidades computacionais modernas para realizar simulações numéricas de alta resolução. Exploramos as respostas não lineares do sistema varrendo sistematicamente o espaço de parâmetros associado aos processos de g-r. Especificamente, analisamos fatias do espaço de parâmetros (plano de parâmetros) por meio do cálculo do espectro de expoentes de Lyapunov, um indicador quantitativo do caos e da dependência sensível às condições iniciais. No geral, nossos resultados contribuem para uma compreensão mais profunda da dinâmica não linear em modelos de semicondutores e demonstram como os avanços computacionais permitem a descoberta de estruturas intrincadas antes inacessíveis.

Palavras-chave: Caos; Expoentes de Lyapunov; Modelo de semicondutor; Simulações computacionais.

ABSTRACT

The nonlinear responses observed in electrical current measurements on semiconductor devices have been extensively studied since the 1980s. These phenomena, particularly in materials such as semi-insulating n-type Gallium Arsenide (n-GaAs) and Germanium (Ge), have revealed complex dynamical behavior, including chaos and multiple identifiable routes to chaotic regimes. Early experimental investigations showed that when these semiconductor materials are subjected to specific external conditions — such as applied electric fields or temperature variations — nonlinear oscillations and bifurcations emerge in their current-voltage characteristics. The most widely adopted modeling approach involves formulating rate equations that describe charge-carrier dynamics within the material. These models typically consist of coupled ordinary differential equations (ODEs) that govern the temporal evolution of charge-carrier density, electric-field distribution, and current density. A critical component of these models is an accurate representation of generation-recombination (g-r) processes, which strongly influence charge-carrier behavior. By incorporating different g-r mechanisms—such as field-enhanced trapping or impact ionization—these models can be tailored to replicate a wide range of experimental observations. However, computational resources were relatively limited when these models were first proposed. As a result, numerical simulations often lacked the resolution and depth required to fully explore the parameter space or reveal the fine structure of the system's dynamics. In this work, we revisit a foundational model in this domain, leveraging modern computational capabilities to perform high-resolution numerical simulations. We explore the system's nonlinear responses by systematically scanning the parameter space associated with the g-r processes. Specifically, we analyze slices of the parameter space (parameter plane) by computing the Lyapunov exponent spectrum, a quantitative indicator of chaos and sensitivity to initial conditions. Overall, our results contribute to a deeper understanding of nonlinear dynamics in semiconductor models and demonstrate how computational advances enable the discovery of intricate structures previously inaccessible.

Keywords: Chaos; Lyapunov exponents; Semiconductor model; Computer simulations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1. CAPÍTULO 1 - SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES.....	15
1.1 CARACTERIZAÇÃO GERAL	15
1.2 TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE FASES E ATRATORES	17
1.3 ESTABILIDADE LOCAL E LINEARIZAÇÃO	18
1.4 CAOS DETERMINÍSTICO	19
1.4.1 Dissipação e Contração de Volume.....	19
1.4.2 O Espectro de Expoentes de Lyapunov	19
1.5 PLANOS DE PARÂMETROS	21
1.5.1 Estruturas de Periodicidade.....	22
1.5.2 Multiestabilidade e Bacias de Atração.....	23
1.6- MÉTODOS NUMÉRICOS	24
1.6.1 Método de integração numérica.....	24
1.6.2 Método de Cálculo dos Expoentes de Lyapunov	25
1.6.3 A conjectura de Kaplan-Yorke	25
2. CAPÍTULO 2 - ESTABILIDADE E INSTABILIDADE NO TRANSPORTE DE CARGAS EM SEMICONDUTORES	28
2.1 SEMICONDUTORES	28
2.1.1 Estrutura de bandas dos semicondutores.....	29
2.1.2 Propriedades Elétricas e Sensibilidade a Impurezas	32
2.2 ESTABILIDADE E INSTABILIDADES EM SEMICONDUTORES	33
2.2.1 Condutividade Diferencial Negativa	33
2.2.2 Transporte de cargas em semicondutores.....	35
2.3 DINÂMICA NÃO-LINEAR E PROCESSOS DE GERAÇÃO E RECOMBINAÇÃO	

EM SEMICONDUTOR	37
2.3.1 Processos de Geração e Recombinação em Semicondutores	37
3. CAPÍTULO 3 - RESULTADOS.....	39
3.1 PRINCIPAIS ETAPAS DO PROCESSO DE ESTUDO	39
3.2 MODELO ESQUEMÁTICO DAS TRANSIÇÕES ELETRÔNICAS.....	40
3.3 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA ACOPLADO.....	42
3.4 ANÁLISE DOS PLANOS DE PARÂMETROS	43
3.4.1 Plano de parâmetro para a amplitude do campo elétrico de polarização alternada (E_{ac}) e a frequência do campo de polarização alternada (f_0)	44
3.4.2 Plano de parâmetro para a amplitude do campo de polarização alternada E_{ac} e campo de polarização contínua E_0	47
3.4.3 Plano de parâmetro para os parâmetros campo elétrico de polarização contínua E_0 e frequência do campo elétrico de polarização alternada f_0	50
3.4.4 Bacia de Atração	53
3.4.5 Planos de Parâmetros: uma análise utilizando a conjectura de Kaplan-Yorke.....	55
4. CAPÍTULO 4 – CONCLUSÃO	57
REFERÊNCIAS	59

INTRODUÇÃO

Para compreender e investigar diversos problemas, de modo particular nas ciências da natureza e nas engenharias, é necessário o conhecimento dos Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, pois para uma boa parte dos fenômenos estudados, estes são os que melhor lhes representam, fornecendo modelos de processos importantes para serem aplicados, por exemplo: vibrações mecânicas, lasers, ritmos biológicos, circuitos supercondutores, surtos de insetos, osciladores químicos, sistemas de controle genético, rodas d'água caóticas e até mesmo uma técnica para usar o caos para enviar mensagens secretas. Em cada exemplo, o embasamento científico é aplicado em nível elementar e integrado à teoria matemática [1].

O estudo da não linearidade exige que os princípios científicos fundamentais sejam incorporados à linguagem matemática, transformando variáveis físicas em operadores que descrevem a evolução temporal e a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Quando temos o conhecimento das variáveis de estado do sistema e das leis que o regem, sendo estas leis constantes ao longo do tempo, e identificamos quais dessas variáveis estão evoluindo, podemos facilmente determinar o seu comportamento e fazer previsões sobre o seu estado futuro e passado. Assim, os sistemas dinâmicos podem ser entendidos como um conjunto de elementos que se desenvolvem ao longo do tempo, caracterizando o estado do sistema [1,2,3]. Esse conceito nos leva a um modelo matemático determinístico capaz de prever a evolução do estado do sistema ao longo do tempo.

Esses sistemas podem ser abordados de duas maneiras: por meio de equações diferenciais ou de mapas. No caso das equações diferenciais, a evolução do sistema é representada no tempo contínuo. Por outro lado, os mapas iterados refletem uma dinâmica em que o tempo é discreto [1,2,3]. Além disso, os mapas podem ser úteis para ilustrar exemplos simples de caos e para mapear as soluções de equações diferenciais por meio de seções de Poincaré da evolução dessas soluções. [1-5].

Uma das características da modelagem matemática de sistemas físicos é buscar um modelo adequado que represente o comportamento dinâmico das variáveis de estado desses sistemas por meio de simulações computacionais. Nessa fase, os recursos computacionais são de extrema importância, pois possibilitam a obtenção de soluções numéricas dos modelos e o cálculo de medidas invariantes para caracterizar seus comportamentos dinâmicos [3,6].

Nesta dissertação, estudaremos um modelo matemático que descreve, por meio das equações de taxa dos portadores de carga em um material semiconductor, o comportamento

dinâmico de suas variáveis de estado. As equações de taxa descrevem os processos de geração e recombinação de elétrons nesses materiais [7-10].

Como será visto mais adiante, os semicondutores possuem uma estrutura de bandas de energia para a ocupação dos portadores de carga, composta pela banda de valência e pela banda de condução. Em semicondutores como o silício, à temperatura ambiente, devido à agitação térmica, alguns de seus elétrons adquirem energia suficiente para serem promovidos à banda de condução, gerando, em igual número, buracos na banda de valência. Os elétrons e os buracos, por sua vez, atuam como portadores de carga. A partir do momento em que o elétron da banda de condução preenche um buraco na banda de valência, chamamos esse fenômeno de recombinação [11-16]. A geração é o fenômeno inverso, no qual um elétron adquire energia e é promovido da banda de valência para a de condução [11-16].

Neste trabalho, foi realizado o estudo de um modelo de geração e recombinação em semicondutores, com caracterização, por meio de dinâmica não linear e teoria do caos, das oscilações espontâneas da densidade dos portadores de carga e do campo elétrico do sistema, quando se consideram determinados valores dos parâmetros de controle.

Na linguagem da dinâmica não linear e da teoria do caos, essas oscilações foram geradas, estudadas e representadas como ciclos limite, quase-periodicidade ou caos ao reconstruirmos o espaço de fase do sistema.

Para uma melhor compreensão de todo esse processo, este trabalho foi organizado em capítulos que seguem a seguinte estrutura: o capítulo 1, intitulado Sistemas Dinâmicos não Lineares, apresenta a fundamentação teórica sobre sistemas dinâmicos e caos determinístico aplicados a semicondutores. Nele, discutem-se os conceitos de espaço de fases, atratores, estabilidade local e bifurcações, além do mapeamento por planos de parâmetros, das bacias de atração e a conjectura de Kaplan-Yorke, conceitos essenciais deste estudo.

O Capítulo 2 estabelece os fundamentos do transporte de carga e das instabilidades em materiais semicondutores. Nele, examinam-se a estrutura de bandas de energia, os efeitos da dopagem e o conceito de condutividade diferencial negativa (NDC) nas formas NNDC (condutividade diferencial negativa do tipo N) e SNDC (condutividade diferencial negativa do tipo S). O texto detalha ainda as teorias de modelagem do transporte elétrico e descreve os mecanismos microscópicos não lineares de geração e recombinação de portadores, especificamente a ionização por impacto e a captura assistida por campo, responsáveis por conduzir o sistema a regimes caóticos.

O capítulo 3 apresenta os resultados obtidos para o sistema de transporte eletrônico fora do equilíbrio termodinâmico em semicondutores. É o capítulo mais importante da

dissertação, por reunir os resultados observados. Neste capítulo estão dispostas, de forma sistematizada, as etapas do processo, por meio do fluxograma metodológico e do modelo esquemático das transições eletrônicas no semicondutor, bem como do modelo matemático e do modelo esquemático das simulações, por meio dos planos de parâmetros apresentados, formalizando as equações não lineares das taxas de ionização por impacto e de recombinação. Concluindo, o capítulo apresenta o mapeamento global do sistema por meio de planos de parâmetros baseados nos expoentes de Lyapunov e na dimensão de Kaplan-Yorke, caracterizando os regimes periódicos, quase-periódicos e caóticos por meio de seus respectivos atratores.

O capítulo seguinte (capítulo 4) apresenta a conclusão do estudo, com as análises e considerações, encerrando este objeto de estudo e direcionando para novos objetivos.

CAPÍTULO 1 - SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

Este capítulo apresenta os conceitos e métodos da teoria dos sistemas dinâmicos e do caos determinístico que fundamentam a análise do comportamento não linear em dispositivos semicondutores. A seção 1.1 define os sistemas dinâmicos em tempo contínuo e discreto, enquanto a seção 1.2 aborda a topologia do espaço de fases e a caracterização dos atratores. A análise de estabilidade local por linearização jacobiana e as bifurcações são tratadas na seção 1.3. Em seguida, a seção 1.4 discute as propriedades do caos e da dissipação física. A classificação quantitativa por meio de expoentes de Lyapunov e o mapeamento global em planos de parâmetros, incluindo estruturas de periodicidade e multiestabilidade, são detalhados na seção 1.5. Por fim, a seção 1.6 apresenta os métodos numéricos empregados.

1.1 CARACTERIZAÇÃO GERAL

Um sistema pode ser definido como um grupo de elementos em interação ou interdependência, cujos fenômenos ocorridos nos componentes desse conjunto são regidos por relações de causa e efeito. A natureza desse sistema torna-se dinâmica quando alguma grandeza característica dos componentes que a constituem varia ao longo do tempo [3].

Sistemas dinâmicos são sistemas que evoluem ao longo do tempo e cujo comportamento pode ser descrito por equações diferenciais ou por equações de diferenças. Eles podem ser encontrados em uma ampla gama de campos, incluindo física, biologia, química e engenharia [1,17].

Determinar teoricamente a evolução temporal das grandezas que caracterizam um sistema, pode ser importante em algumas situações: Quando o sistema ainda não existe, por exemplo o projeto de um satélite artificial; para explicar o comportamento de sistemas já existentes, à exemplo, na Física, o objetivo é elucidar as leis que governam o funcionamento do universo, em escalas nucleares ou astronômicas; Se o teste experimental é muito caro ou perigoso: analisar a eficiência de diferentes estratégias de vacinação no combate de uma doença [3].

O objetivo desses estudos teóricos é alcançar previsibilidade do futuro (ou entender o passado) de forma científica. Sendo necessário, para isso, conhecer como os sistemas funcionam e compreender as regras que regem as mudanças a ocorrer. Do cálculo desenvolvido por Newton e, independentemente, por Leibniz, sabe-se que a variação de uma grandeza $x(t)$ no tempo t contínuo é expressa pela derivada $dx(t)/dt$ [3].

Assim, o estudo matemático dessas variações corresponde ao das equações diferenciais. Assumindo-se que o tempo evolui de forma discreta, ou melhor, que o sistema se altera apenas em determinados instantes, deve-se então estudar as equações de diferenças [3].

A teoria dos sistemas dinâmicos, fundamentada por Henri Poincaré, concentra-se na evolução temporal dos estados em um espaço de fases. Um sistema dinâmico pode ser definido por um conjunto de equações diferenciais das variáveis de estado do sistema, cujas soluções temporais, a partir de uma condição inicial $\vec{x}_0$, descrevem o comportamento dessas variáveis em função do tempo [1,2].

Essa abordagem teve origem no campo moderno da dinâmica, com aplicações que vão muito além da mecânica celeste. Poincaré foi possivelmente a primeira pessoa a identificar que um sistema determinístico pode apresentar um comportamento aperiódico sensivelmente dependente das condições iniciais, tornando, assim, impossível a previsão do comportamento dinâmico quando as condições iniciais se alteram [1,3].

A não linearidade é a essência da complexidade: ela impede que o sistema seja decomposto pela superposição linear de suas partes. Em modelos físicos, essa característica decorre de termos quadráticos, de funções trigonométricas ou de leis de potência. Nos dispositivos semicondutores, foco deste trabalho, a não linearidade emerge do acoplamento entre as equações de transporte e a equação do campo elétrico, especificamente nas taxas de ionização por impacto e na dependência do campo elétrico [3,4],

Os sistemas dinâmicos são classificados de diversas maneiras. Quanto à variável temporal, os sistemas podem ser abordados em dois domínios: 1) Tempo contínuo (Fluxos): Geralmente representados por equações diferenciais ordinárias (EDO) ou parciais (EDP). Um sistema é de tempo contínuo se o tempo t é um número real. De forma geral, considera-se $t \in \mathbb{R}_+$, ou seja, assume-se que t é um número real não negativo. A evolução de um sistema de tempo contínuo é governada por uma ou mais equações diferenciais, escritas em termos das derivadas da variável $x \in \mathbb{R}$ em relação ao tempo. 2) Tempo discreto (Mapas): Representados por equações de diferenças, em que o tempo é um inteiro não negativo, e o processo de obtenção das soluções é iterativo, a partir de um valor inicial para as variáveis [3,4,5].

Para modelos baseados em EDOs, como os aplicados nesta dissertação, os sistemas são descritos como:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}(t), \mu, t), \quad (1.1)$$

para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ representando o vetor de estado, e μ é um conjunto de parâmetros de controle [1,5].

1.2- TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE FASES E ATRATORES

O estudo não linear de um sistema dinâmico exige uma abordagem qualitativa baseada na organização do espaço de fases. O comportamento de longo prazo desses sistemas, o estado assintótico após o término dos transientes, é definido pelo conceito de atrator.

Um atrator é um conjunto invariante no espaço de fases para o qual as trajetórias de uma vizinhança convergem assintoticamente. Essa vizinhança é denominada bacia de atração. Ele representa a "assinatura" do equilíbrio dinâmico do sistema. Identificamos quatro tipos fundamentais de comportamento:

- Ponto Fixo (Equilíbrio): O sistema converge para um ponto estático em que todas as derivadas temporais se anulam ($\dot{x} = 0$). Em semicondutores, isso corresponde a um regime de corrente contínua estável.
- Ciclo limite: Representa uma oscilação periódica isolada. No espaço de fase, manifesta-se como uma órbita fechada para a qual as trajetórias vizinhas convergem ou divergem. É o modelo matemático dos osciladores eletrônicos estáveis.
- Quase-periodicidade: Corresponde ao atrator toro T^n ($2 \leq n < m$), em que n é o número de frequências fundamentais independentes. O espectro de Fourier é constituído por frequências expressas como combinações lineares inteiras das frequências fundamentais do sistema [2].
- Atrator Estranho: Associado exclusivamente ao regime caótico, apresenta dimensão fractal. Ele combina a propriedade de ser um "atrator" (atrair trajetórias próximas) com a instabilidade orbital (sensibilidade às condições iniciais) [2].

Na figura 1, mostramos três dos quatro tipos de comportamento descritos acima para ilustrar suas respectivas dinâmicas. Esses comportamentos são do modelo estudado no plano de parâmetros (f_0, E_0) , desta dissertação, para os valores de parâmetros $(0,86;14,52)$, $(1,09;14,88)$ e $(0,69;15,14)$, respectivamente.

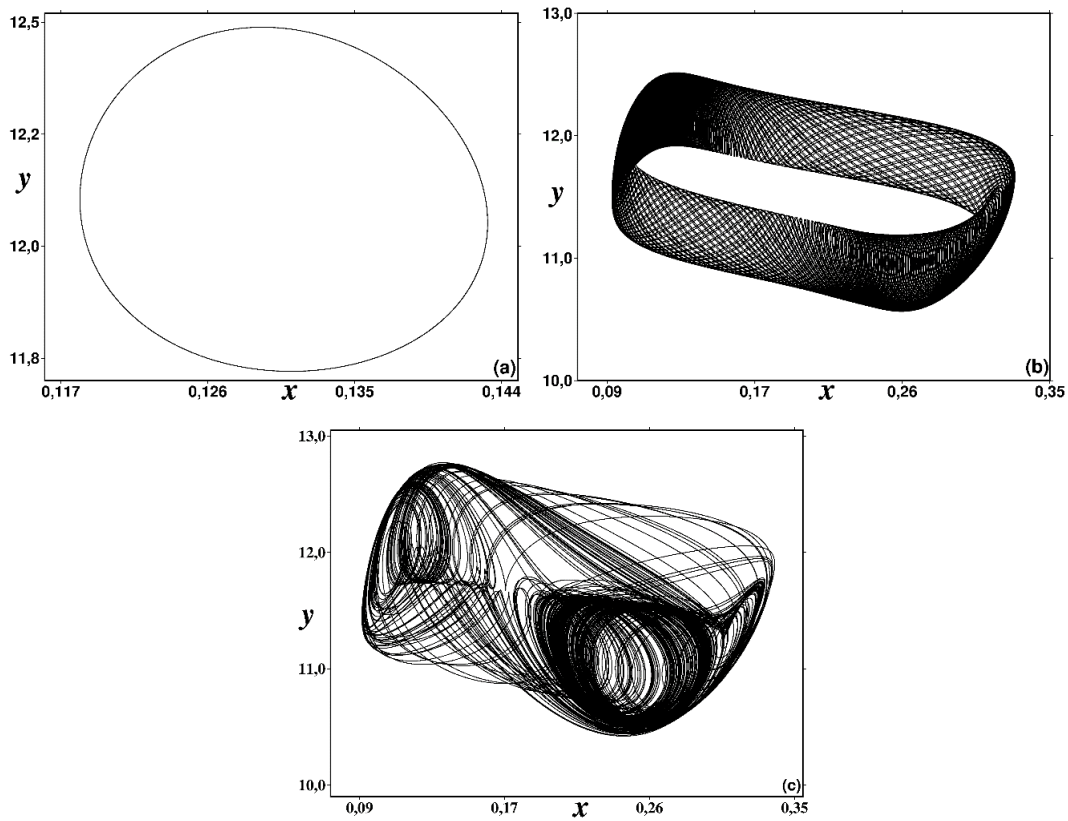


Figura 1 - Atratores caracterizando as dinâmicas: (a) Ciclo limite, (b) Quase-periódico e (c) atrator estranho ou caótico. Resultados obtidos do modelo de estudo desta dissertação, no plano de parâmetros (f_0, E_0) , para os valores de parâmetros $(0,86;14,52)$; $(1,09; 14,88)$ e $(0,69; 15,14)$, respectivamente. Fonte: elaborada pela autora (2025).

1.3- ESTABILIDADE LOCAL E LINEARIZAÇÃO

A estabilidade de um sistema determina como ele reage a pequenas perturbações externas ou flutuações térmicas. A análise de um ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ (onde $\vec{f}(\vec{x}^*, \mu) = 0$) é realizada através da linearização via matriz jacobiana, que aproxima o comportamento não linear por um sistema linear local:

$$J(\vec{x}^*) = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*}. \quad (1.2)$$

A natureza do equilíbrio é determinada pelos autovalores da matriz J . Se todos os autovalores tiverem parte real negativa, o ponto é um atrator estável. Mudanças qualitativas na dinâmica, conhecidas como bifurcações, ocorrem quando o parâmetro de controle μ atinge um valor crítico, fazendo com que a parte real de um autovalor passe a ser nula ou positiva.

Em semicondutores, uma bifurcação de Hopf é particularmente relevante, pois descreve o instante exato em que um dispositivo sob tensão contínua passa a apresentar oscilações espontâneas de corrente.

1.4- CAOS DETERMINÍSTICO

O caos é um comportamento aperiódico e limitado no espaço de fase em sistemas determinísticos altamente sensíveis às condições iniciais [2]. Esta sensibilidade implica que dois estados inicialmente vizinhos, separados por uma distância $\vec{\delta}_0$, divergirão exponencialmente com o tempo:

$$\|\vec{\delta}(t)\| \sim \|\vec{\delta}_0\| e^{\lambda t}. \quad (1.3)$$

Este fenômeno impossibilita previsões de longo prazo, transformando o sistema em um gerador de informação com período que tende ao infinito; ou seja, a informação não se repete no tempo. Em materiais como o arseneto de gálio (GaAs), o comportamento caótico decorre de múltiplas rotas de bifurcação, como a cascata de duplicação de período, na qual o período das oscilações dobra sucessivamente até se tornar infinito (regime caótico).

1.4.1- Dissipação e Contração de Volume

Sistemas físicos reais, como dispositivos semicondutores sob polarização, são, em sua maioria, dissipativos. Matematicamente, isso significa que o fluxo do sistema contrai o volume no espaço de fase ao longo do tempo. Esta contração é quantificada pelo divergente do campo vetorial ($\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$).

A dissipação é a razão pela qual os atratores existem; sem ela, as trajetórias não seriam "puxadas" para um conjunto estável. No regime caótico dissipativo, essa contração força as trajetórias a se organizarem em estruturas de volume zero no espaço de fase de n dimensões, resultando no atrator estranho. Este objeto possui uma geometria fractal, na qual o "estiramento" (causado pelo caos) e o "dobramento" (causado pela dissipação) criam uma estrutura de complexidade infinita [2,3].

1.4.2- O Espectro de Expoentes de Lyapunov

O espectro de expoentes de Lyapunov λ_i fornece a métrica quantitativa para classificar a dinâmica. Para um sistema de dimensão n , o espectro consiste em n valores que medem a taxa de divergência em diferentes direções do espaço de fase.

A interpretação do maior expoente (λ_{max}) define o regime:

- $\lambda_{max} > 0$: Caos. Indica a expansão exponencial das soluções na direção do fluxo.
- $\lambda_{max} = 0$: Periodicidade. Não há expansão nem contração das soluções na direção do fluxo.
- $\lambda_{max} < 0$: Estabilidade. As soluções convergem para um ponto de equilíbrio na direção do fluxo.

Além disso, a soma de todos os expoentes ($\sum \lambda_i$) deve ser negativa em sistemas dissipativos, o que indica que o sistema perde energia e converge para um atrator.

Nesta dissertação, trabalhamos com um modelo quadridimensional (4D); portanto, a interpretação do espectro dos expoentes de Lyapunov, conforme a dinâmica do sistema, é apresentada na tabela 1.

Tabela 1- Associação entre os sinais dos quatro expoentes de Lyapunov de um sistema 4D.

Espectro dos Expoentes de Lyapunov				
λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Comportamento
+	0	-	-	Caótico
0	-	-	-	Periódico
+	+	0	-	Hipercaos
0	0	-	-	Quase Periódico/Tórus 2
0	0	0	-	Quase Periódico/Tórus 3
-	-	-	-	Pontos de equilíbrio

Fonte: elaborada pela autora (2025).

Seguindo a associação entre os sinais dos quatro expoentes de Lyapunov (conforme tabela 1) para analisar a dinâmica, temos, para cada atrator da figura 1, a classificação de acordo com os seus respectivos expoentes, como mostra a tabela 2.

Tabela 2 - Espectro dos expoentes de Lyapunov para as dinâmicas associadas aos atratores da figura 1.

Figura	Parâmetros		Expoentes de Lyapunov				Comportamento
	f_0	E_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
(a)	0,86	14,52	0,000000	-0,350363	-0,350382	-0,669294	Periódico
(b)	1,09	14,88	0,000005	0,000000	-0,773711	-2,376677	Quase Periódico-Torus-2
(c)	0,69	15,14	0,293119	0,000000	-0,507236	-2,087209	Caótico

Fonte: elaborada pela autora (2026).

1.5- PLANOS DE PARÂMETROS

A análise de um sistema dinâmico torna-se significativamente mais robusta quando deixamos de observar apenas trajetórias individuais no espaço de fase e passamos a mapear o comportamento do sistema em função de seus parâmetros de controle. O plano de parâmetros é uma representação bidimensional em que cada ponto, correspondente ao par de parâmetros (μ_1, μ_2) , representa um regime dinâmico específico.

Ao discretizar esse plano em uma rede de alta resolução e calcular o espectro dos expoentes de Lyapunov para cada par de parâmetros, é possível construir mapas de cores desses expoentes que revelam a distribuição dos possíveis comportamentos dinâmicos do sistema. Na tabela 3, mostramos as associações de cores aos sinais dos expoentes de Lyapunov do espectro.

Tabela 3-Associação entre cores e expoentes de Lyapunov.

Cores para os sinais dos expoentes de Lyapunov	
+	
-	
0	

Fonte: elaborada pela autora (2025).

Na figura 2, mostramos dois planos de parâmetros característicos do modelo de semiconductor estudado nesta dissertação. Na figura 2(a), temos o plano para o maior expoente; na figura 2(b), o plano para o segundo maior expoente.

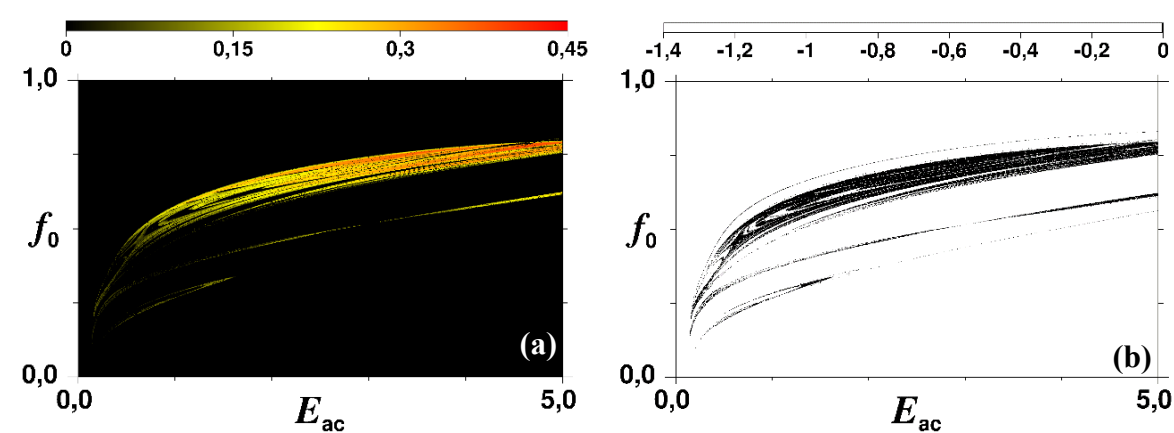


Figura 2 - Planos de parâmetros ilustrando as dinâmicas, conforme as associações de cores aos expoentes de Lyapunov, de acordo com a barra de cores sobre os diagramas. Esses planos referem-se ao sistema estudado nesta dissertação, para os parâmetros (f_0, E_{ac}) . (a) para o maior expoente de Lyapunov e (b) para o segundo maior expoente. As cores referem-se aos diferentes sinais dos expoentes de Lyapunov, conforme tabela 3. Fonte: elaborada pela autora (2025).

1.5.1- Estruturas de Periodicidade

Uma característica comum observada no plano de parâmetros de um sistema dinâmico é a presença de estruturas de periodicidade estáveis imersas em regiões caóticas. Essas estruturas podem assumir diversas formas, como as línguas de Arnold e os camarões [18]. Na figura 3, apresentamos um plano de parâmetros do mapa padrão mostrando as duas estruturas. Na caixa (1) destacamos o camarão e na caixa (2) destacamos as línguas de Arnold.

Estas estruturas possuem topologia específicas, como um corpo central (núcleo) composto por uma órbita estável de período κ . No caso dos camarões, deste corpo central partem "antenas" e "caudas" que seguem duas sequências de bifurcação por duplicação de período e duas outras por crise. No caso das línguas de Arnold, desse corpo central partem duas sequências de bifurcação por crise e uma por dobramento de período [18].

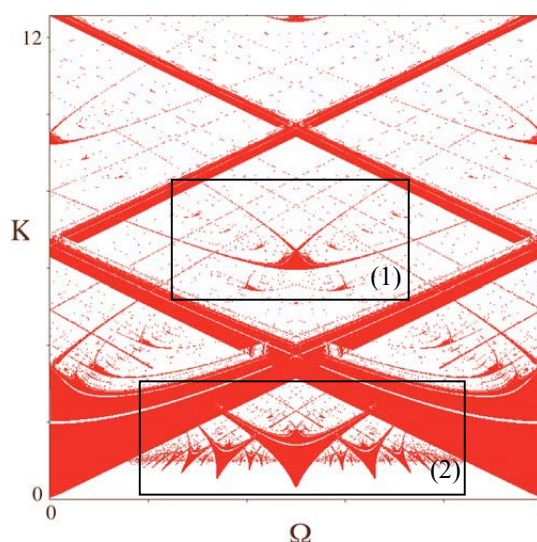


Figura 3 - Plano de parâmetros para o mapa padrão apresentando as estruturas características. As regiões destacadas correspondem às estruturas características em forma de: (1) camarão e (2) línguas de Arnold. Fonte: referência [18].

Do ponto de vista da física de semicondutores, o estudo dessas estruturas periódicas permite identificar "bolsões" de estabilidade em que o dispositivo pode operar de forma previsível, mesmo sob condições que, teoricamente, favoreceriam o comportamento caótico. A identificação dessas estruturas é um dos resultados numéricos apresentados nos capítulos subsequentes desta dissertação.

1.5.2- Multiestabilidade e bacias de atração

Muitos sistemas não lineares complexos apresentam a chamada multiestabilidade, que é a coexistência de dois ou mais atratores para o mesmo conjunto de parâmetros de controle. Nesse cenário, o estado final do sistema (se ele convergirá para um ponto de equilíbrio, um ciclo limite ou um atrator caótico) depende das condições iniciais.

O conjunto de todas as condições iniciais que levam a um determinado atrator é definido como sua bacia de atração [19]. A complexidade surge quando a fronteira entre essas bacias assume uma geometria fractal. Nestes casos, ocorre o fenômeno da "incerteza do estado final": uma flutuação infinitesimal na condição inicial, como um ruído eletrônico intrínseco, pode "empurrar" o sistema de uma bacia para outra.

Na figura 4, mostramos um exemplo de bacia de atração com os respectivos atratores. Em (a) é mostrado a bacia destacando as quatro dinâmicas diferentes: divergência, ponto de equilíbrio (EP), periódico e caos [20]. Foi utilizado o maior expoente de Lyapunov para caracterizar as dinâmicas dos atratores. Em (b) apresentamos os atratores com as respectivas cores de (a).

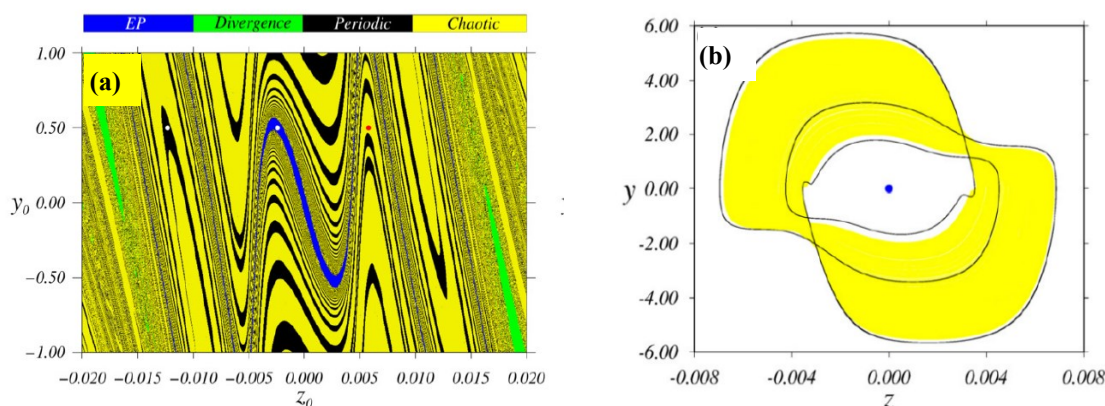


Figura 4 - (a) Bacia de atração para um modelo de armadilha magneto-óptica (MOT), mostrando as regiões de dinâmica estacionária (azul), divergente (verde), periódica (preta) e caótica (amarela). (b) Atratores que coexistem nos mesmos conjuntos de parâmetros. Fonte: referência [20].

Em semicondutores, isso significa que o dispositivo pode apresentar comportamento imprevisível no momento da ativação (*power-on*), operando ora em regime estável, ora em regime oscilatório, sem que haja mudança nos parâmetros externos [7,13,21]. O estudo dessas fronteiras é, portanto, importante para garantir a confiabilidade dos componentes eletrônicos em circuitos de alta precisão.

1.6- MÉTODOS NUMÉRICOS

A natureza não linear das equações que descrevem o transporte elétrico e os processos de geração-recombinação em semicondutores impossibilita, na maioria dos casos, a obtenção de soluções analíticas exatas. Por conseguinte, a investigação da dinâmica do sistema e a construção de planos de parâmetros baseiam-se na aplicação de métodos numéricos de integração de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e no cálculo dos espectros dos expoentes de Lyapunov.

Nestas técnicas, integram-se numericamente as EDOs, calculam-se os valores das variáveis dinâmicas a partir de uma condição inicial e, com as soluções, calculam-se os expoentes de Lyapunov [6].

1.6.1- Método de integração numérica

O estudo de sistemas dinâmicos não lineares foi revolucionado pela invenção dos computadores, em meados do século XX. A partir desta invenção, foi possível alcançar um avanço significativo no cálculo numérico e na solução de equações, dadas as condições iniciais e os valores dos parâmetros específicos. Esse panorama de resultados numéricos constitui um suporte fundamental para o desenvolvimento da análise dos comportamentos assintóticos e topológicos que tais equações descrevem [3].

No presente trabalho, para a simulação das trajetórias no espaço de fases e a consequente obtenção das séries temporais da densidade de portadores e do campo elétrico, emprega-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). A escolha desse integrador fundamenta-se na otimização que proporciona entre o custo computacional e a precisão local e global da solução [6].

As simulações numéricas são conduzidas com um determinado tempo de integração, descartando um número de passos e calculando o espectro de Lyapunov sobre os passos restantes, com o objetivo de eliminar os efeitos dos regimes transitórios e garantir a convergência das trajetórias para o atrator do sistema, conforme será apresentado com mais detalhes no capítulo 3. O passo de integração é definido de forma a respeitar as escalas de tempo rápidas dos processos de ionização por impacto e as escalas de tempo lentas de relaxação dos centros de armadilha, evitando instabilidades numéricas em regimes de acentuada não linearidade.

1.6.2- Método de cálculo dos expoentes de Lyapunov

A caracterização quantitativa do regime dinâmico e a distinção precisa entre comportamentos estáveis, quase-periódicos e caóticos exigem uma métrica robusta da sensibilidade às condições iniciais. Nesta dissertação, tal análise fundamenta-se na estimativa do espectro dos expoentes de Lyapunov (λ_i) por meio do método da ortonormalização de Gram–Schmidt, conforme descrito por Wolf *et al.* [6]. O procedimento baseia-se no acompanhamento da evolução temporal de um vetor de perturbação que une uma trajetória de referência a uma vizinha no espaço de fases.

A principal inovação deste algoritmo é o procedimento de reajuste. À medida que o sistema evolui, a distância entre as trajetórias tende a crescer exponencialmente, podendo atingir a escala do atrator e invalidar a aproximação linear. Para evitar essa saturação, o método de ortonormalização de Gram–Schmidt realiza reinicializações periódicas da trajetória vizinha: o vetor de perturbação é reduzido em magnitude, mas a orientação original da divergência é preservada ao máximo.

Esse processo de acúmulo das taxas de crescimento locais, ponderado pelo tempo total de integração, resulta no valor de λ_i . A aplicação sistemática desta metodologia permite a construção de planos de parâmetros, conforme apresentado na seção 1.6 acima, fornecendo uma base sólida para a análise das estruturas dinâmicas presentes no modelo de semicondutores abordado nos capítulos seguintes.

1.6.3- A conjectura de Kaplan-Yorke

Proposta em 1979 por James L. Kaplan e James A. Yorke [2], a conjectura analisa a relação entre os expoentes de Lyapunov e a dimensão de Hausdorff (uma estimativa da dimensão fractal) de um atrator estranho. Essa dimensão calculada a partir desses expoentes é conhecida como dimensão de Kaplan-Yorke (ou dimensão de Lyapunov) e é definida matematicamente por:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (1.4)$$

Onde temos que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_d$ são os expoentes de Lyapunov, ordenados de forma decrescente, e j é o maior inteiro tal que a soma dos j primeiros expoentes de Lyapunov ainda seja maior ou igual a zero. Logo:

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0. \quad (1.5)$$

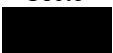
Ainda podemos escrever que $D_{KY} \approx D_0$, onde D_0 é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch ou dimensão fractal [2]. Logo, para duas dimensões de um sistema caótico e dissipativo, tem-se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ e, portanto:

$$D_{KY} = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \quad (1.6)$$

Dessa forma, a dimensão de Kaplan-Yorke fornece uma estimativa contínua da complexidade geométrica do atrator estranho, quantificando a estrutura fractal do sistema caótico. Esse formalismo fundamenta-se nas taxas assintóticas médias de expansão e contração de trajetórias vizinhas no espaço de fases, definidas no limite de tempo tendendo ao infinito e calculadas ao longo da evolução do sistema. Em sistemas caóticos, o comportamento assintótico refere-se ao comportamento observado após o sistema superar os transientes iniciais e se estabilizar no atrator [1,2,3].

Utilizando-se desse método, a Conjectura de Kaplan-Yorke é empregada na construção de planos de parâmetros, mapeando continuamente a complexidade geométrica do atrator do semiconductor. A variação das características dinâmicas é representada por um código de cores associado aos D_{KY} : preto para $D_{KY} \approx 1,0$ (periódico), ciano para $D_{KY} \approx 2,0$ (torus), amarelo para $D_{KY} > 2,0$ (caos), conforme a tabela 4.

Tabela 4- Correspondência entre a escala cromática dos diagramas e as propriedades quantitativas dos atratores do sistema com a dimensão de Kaplan-Yorke (D_{KY}).

Cor no Diagrama	Regime Dinâmico	Comportamento das Trajetórias	Dimensão de Kaplan-Yorke (D_{KY})
Preto 	Periódico	Janelas de estabilidade, regiões periódicas e órbitas complexas de alta periodicidade.	$\approx 1,000$
Amarelo 	Caótico	Atratores estranhos, sensíveis às condições iniciais e com divergência exponencial entre trajetórias vizinhas.	Valores fracionários elevados ($D_{KY} > 2,000$)
Ciano (Azul Claro) 	Quase-periódico	A trajetória não fecha sobre si mesma. Em vez disso, ela percorre continuamente uma superfície invariante denominada torus. Para duas frequências independentes, o atrator possui geometria toroidal. Com o passar do tempo, a órbita visita progressivamente diferentes regiões desse toro, preenchendo-o densamente, sem jamais se repetir exatamente.	$D_{KY} \approx 2,000$

Correspondência entre a escala cromática dos diagramas e as propriedades quantitativas dos atratores do sistema. Associam-se os regimes periódicos (preto), caóticos (amarelo) e quase-periódicos (ciano) aos respectivos intervalos numéricos da dimensão de Kaplan-Yorke (D_{KY}). Fonte: elaborada pela autora (2026).

A figura 5(a) e sua respectiva ampliação, figura 5(b), evidenciam a complexa topologia do plano de parâmetros utilizando a dimensão de Kaplan-Yorke, D_{KY} , como medida invariante, cuja análise detalhada será apresentada no capítulo de resultados.

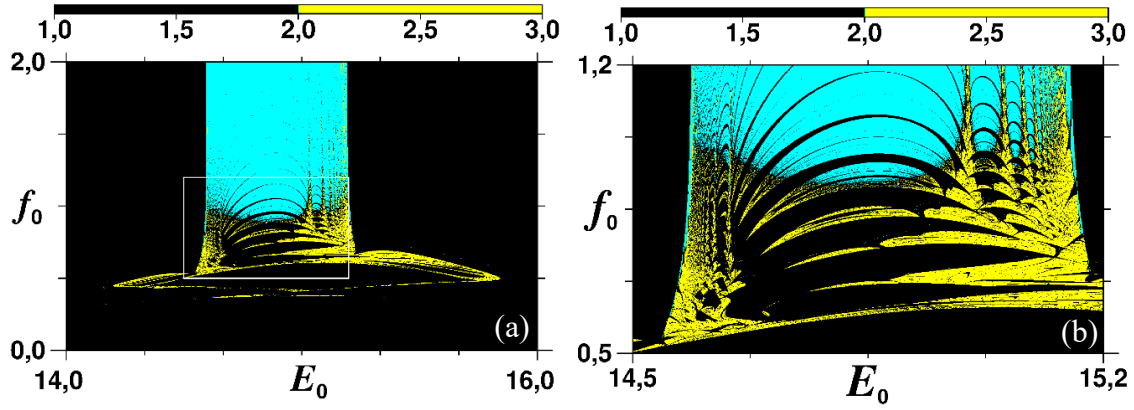


Figura 5 - Planos de parâmetros ilustrando as dinâmicas, conforme as associações de cores, com a conjectura de Kaplan-Yorke, de acordo com a barra de cores sobre os diagramas. Esses planos se referem ao sistema estudado nesta dissertação, para os parâmetros $(f_0; E_0)$. (a) Visão geral do plano de parâmetros. (b) mostra uma ampliação da área destacada por bordas brancas em (a). As cores referem-se aos valores de D_{KY} . Fonte: elaborada pela autora (2026).

CAPÍTULO 2 - ESTABILIDADE E INSTABILIDADE NO TRANSPORTE DE CARGAS EM SEMICONDUTORES

Este capítulo apresenta os fundamentos físicos que regem o transporte de portadores de carga e o surgimento de instabilidades em materiais semicondutores fora do equilíbrio termodinâmico. O objetivo é descrever os mecanismos microscópicos e as propriedades macroscópicas que originam o comportamento não linear e a dinâmica caótica no modelo estudado.

O conteúdo está organizado em três seções principais: A seção 2.1 classifica as propriedades elétricas dos sólidos com base na resistividade, coeficiente de temperatura e concentração de portadores, detalhando a estrutura de bandas de energia e o efeito da dopagem (tipo-*n* e tipo-*p*) na sensibilidade às impurezas. A seção 2.2 aborda os conceitos de estabilidade e instabilidade no transporte de cargas, formalizando a condutividade diferencial negativa (NDC) em suas vertentes controladas por tensão (NNDC) e por corrente (SNDC), além de apresentar as teorias de modelagem de transporte. E, na sequência, a seção 2.3 analisa a dinâmica não linear decorrente dos processos fora do equilíbrio, detalhando as transições eletrônicas intrabandas e interbandas por meio dos coeficientes de geração e recombinação, como a ionização por impacto e a captura assistida por campo elétrico, que atuam como fontes de aleatoriedade determinística.

2.1 – SEMICONDUTORES

De acordo com as especificidades elétricas, classificamos os sólidos com base em três propriedades básicas: a resistividade ρ , o coeficiente de temperatura da resistividade α e a concentração de portadores de carga n [22].

A resistividade ρ , medida em temperatura ambiente, tem como unidade no Sistema Internacional de Unidades (SI) o ohm-metro ($\Omega \cdot m$).

O coeficiente de temperatura da resistividade α , obedecendo a relação $\alpha = \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{d\rho}{dT}\right)$, e definida sua unidade no SI como o inverso do kelvin (K^{-1}). Este coeficiente indica como a resistividade do material se comporta com a temperatura. Experimentalmente, para determinar o α de um sólido, é necessário medir ρ em diferentes temperaturas.

A concentração de portadores de carga n , definida como o número de portadores de carga por unidade de volume, tem a unidade no SI de inverso de metro cúbico m^{-3} . Essa grandeza pode ser medida utilizando o método do efeito Hall; para mais informações sobre este

método, consultar a referência [22].

Medindo a resistividade de diferentes materiais à temperatura ambiente, constata-se a existência de isolantes, que, na prática, não conduzem eletricidade; ou seja, a resistividade elétrica é extremamente elevada, como é o caso do diamante, cuja resistividade é 10^{24} vezes maior que a do cobre. Assim, usando as medidas de ρ , α e n , podemos organizar os materiais que não são isolantes em duas categorias principais: metais e semicondutores [22].

Nos semicondutores, a resistividade é bem maior que a dos metais, e o coeficiente de temperatura da resistividade é negativo, ou seja, a resistividade diminui à medida que a temperatura aumenta. Isso ocorre porque o aumento da temperatura fornece energia para que mais elétrons saltem para a banda de condução, aumentando o número de portadores livres e fazendo com que a resistividade diminua rapidamente. Em contraste, nos metais, esse coeficiente é positivo, ou seja, a resistividade aumenta à medida que a temperatura sobe. Pois o calor intensifica a vibração dos íons na rede cristalina, dificultando a passagem de elétrons e fazendo com que a resistividade aumente lentamente. Quanto à concentração de portadores de carga, nos semicondutores esta é bem menor do que nos metais, onde a densidade de elétrons livres é naturalmente elevada [22].

2.1.1 – Estrutura de bandas dos semicondutores

Em substâncias gasosas, as moléculas estão dispersas, não tão próximas entre si. Em líquidos, as moléculas estão mais próximas umas das outras. Já nos sólidos, as moléculas estão agrupadas de forma compacta, fazendo com que os elétrons das moléculas tendam a ocupar os orbitais dos átomos vizinhos. Consequentemente, os orbitais eletrônicos se sobrepõem quando os átomos se aproximam

No estudo dos sólidos, vamos considerar os sólidos cristalinos, cujos átomos estão dispostos em uma estrutura periódica tridimensional, conhecida como rede cristalina. Os sólidos cristalinos podem ser classificados em isolantes, metais e semicondutores [22].

Nestes materiais, observa-se a formação de várias faixas de níveis de energia, devido à mistura de átomos. Esse conjunto de níveis de energia é chamado de bandas de energia. Os níveis de energia quantizados dos sólidos cristalinos formam as bandas permitidas (banda de valência e banda de condução), separadas por regiões proibidas (denominadas *gaps* ou lacunas) [22,23].

Portanto, a classificação dos sólidos cristalinos pode ser descrita com base nas configurações de suas bandas de energia. Na figura 6, apresentam-se três diagramas dessa classificação em termos de bandas de energia.

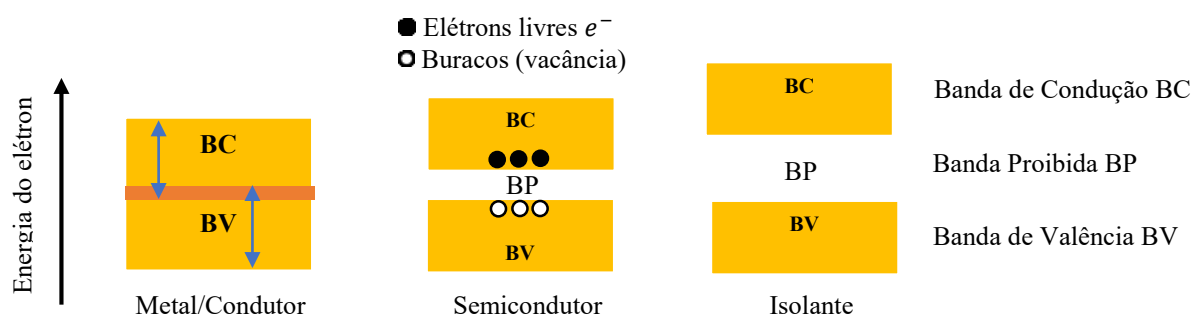


Figura 6 - Representação da classificação dos sólidos em termos das bandas de energia. Fonte: elaborada pela autora (2026).

Em um átomo isolado, os elétrons em cada orbital possuem energia definida. Mas, no caso de sólidos, o nível de energia dos elétrons da órbita mais externa é afetado pelos átomos vizinhos. Quando duas cargas isoladas são aproximadas, os elétrons na camada mais externa sofrem uma força atrativa exercida pelo núcleo atômico mais próximo. Por essa razão, as energias dos elétrons não permanecem no mesmo nível, podendo ser alteradas para valores maiores ou menores do que o nível de energia original do elétron.

Os elétrons no mesmo orbital apresentam diferentes níveis de energia. O agrupamento desses diferentes níveis de energia é conhecido como banda de energia. No entanto, a energia dos elétrons das órbitas internas não é muito afetada pela presença de átomos vizinhos. As bandas de energia são classificadas como:

- **Banda de valência:** Os elétrons nas camadas mais internas dos átomos da rede cristalina são chamados de elétrons de valência. Os orbitais desses elétrons são todos preenchidos, ocupando uma série de níveis de energia e compõem a banda de valência.
- **Banda de condução:** Os elétrons da banda de valência, nos níveis energéticos mais elevados dessa banda, não estão fortemente ligados ao núcleo, o que faz com que alguns deles deixem esses níveis, mesmo à temperatura ambiente, tornando-se elétrons livres. Os elétrons livres conduzem corrente elétrica em condutores e, portanto, são conhecidos como elétrons de condução. A banda de condução é a que contém esses elétrons de condução e situa-se no conjunto de níveis de energia imediatamente acima do gap.
- **Lacuna de energia proibida:** A lacuna entre as bandas de valência e de condução é chamada de lacuna proibida. Ela constitui uma região com estados eletrônicos proibidos. Quanto

maior for a lacuna de energia em um semiconductor, mais energia um elétron de valência precisará para ser promovido à banda de condução.

Os materiais condutores, como o ouro, o alumínio, a prata e o cobre, permitem a passagem de corrente elétrica. Não existe uma lacuna proibida entre a bandas de valência e de condução, o que resulta na sobreposição de ambas as bandas. O número de elétrons livres disponíveis à temperatura ambiente é elevado.

Os materiais isolantes, como o vidro e a madeira, são exemplos de isolantes. Essas substâncias impedem a passagem de eletricidade. Elas possuem alta resistividade e condutividade muito baixa. A diferença de energia entre as bandas de condução e valência no isolante é muito alta, chegando a 7 eV. O material não pode conduzir eletricidade porque o movimento de elétrons da banda de valência para a de condução não é possível.

Os materiais semicondutores, como o germânio e o silício, são os mais desejáveis, cujas propriedades elétricas situam-se entre as dos metais e das isolantes. O diagrama de bandas de energia dos semicondutores mostra a banda de condução vazia e a banda de valência completamente preenchida, mas a região proibida entre as duas bandas é muito pequena, da ordem de 1 eV. Para o germânio, o gap é de 0,72 eV e, para o silício, é de 1,1 eV.

No contexto dos semicondutores que fundamentam este trabalho, essa estrutura eletrônica determina o comportamento dinâmico do material. Nos semicondutores, a banda de valência encontra-se completamente preenchida por elétrons em baixas temperaturas, enquanto a banda de condução permanece vazia, ambas separadas por um *gap* de energia relativamente estreito. À medida que o sistema recebe estímulos térmicos ou elétricos, portadores de carga ganham energia suficiente para transpor essa barreira, gerando elétrons livres na banda de condução e lacunas na banda de valência, o que viabiliza o transporte eletrônico e determina os mecanismos de espalhamento na rede cristalina [10,11,12].

Em regimes de alta excitação, causados por campos elétricos intensos, os portadores de carga adquirem energia cinética elevada em suas respectivas bandas. Sob essas condições extremas, desvios ou modulações nas propriedades intrínsecas da estrutura cristalina e da dinâmica de bandas desencadeiam processos altamente fora do equilíbrio, tais como a ionização por impacto e as capturas cinéticas em centros de armadilha [10,11,12]. A dinâmica temporal dessas transições interbandas e intrabandas, governada por acoplamento não linear, constitui o objeto central de investigação desta dissertação.

2.1.2- Propriedades Elétricas e Sensibilidade a Impurezas

A condutividade elétrica dos semicondutores, embora inferior à dos metais, destaca-se pela extrema sensibilidade à presença de impurezas. Mesmo em concentrações mínimas e em regiões espaciais reduzidas, esses átomos externos permitem o controle preciso das propriedades elétricas do material [21].

Com base na origem de seu comportamento elétrico, os semicondutores são classificados em dois grupos: intrínsecos e extrínsecos.

Nos semicondutores intrínsecos, o comportamento elétrico é determinado pela estrutura do próprio material puro. Exemplos incluem compostos dos grupos III-V, como o arseneto de gálio (GaAs) e o antimoneto de índio (InSb) [21]. Neste grupo, a excitação de um elétron para a banda de condução gera, obrigatoriamente, um buraco (lacuna) na banda de valência. Assim, as concentrações de portadores mantêm-se iguais, definindo a concentração intrínseca de portadores n_i :

$$n = p = n_i$$

Os semicondutores extrínsecos têm suas características elétricas alteradas pela introdução controlada de impurezas, processo denominado dopagem. Ao contrário do caso intrínseco, a energia térmica à temperatura ambiente em materiais dopados é suficiente para excitar um número de portadores que garante uma condutividade significativamente maior.

Eles são classificados conforme o portador majoritário:

- Tipo n (Negativo): A dopagem aumenta a concentração de elétrons, tornando-os os portadores majoritários $n \gg p$;
- Tipo p (Positivo): A dopagem favorece a criação de buracos, que atuam como portadores majoritários $p \gg n$.

A figura 7 apresenta o processo de dopagem em materiais semicondutores. O silício possui uma estrutura cristalina do tipo cúbica de face centrada, com dois átomos por célula unitária (a mesma estrutura do diamante, com dois átomos na base). Nessa organização tridimensional, cada átomo de silício está posicionado de modo a ter exatamente quatro átomos vizinhos mais próximos [Figura 7(a)]. Como o silício pertence à família dos elementos tetravalentes, dispõe de quatro elétrons na camada de valência. Esses elétrons são compartilhados com os vizinhos por meio de ligações covalentes, que se repetem periodicamente, dando origem ao cristal. Serão desconsiderados os defeitos, as vacâncias e as impurezas, de modo que o cristal aqui será tratado como um cristal intrínseco perfeito [13,21].

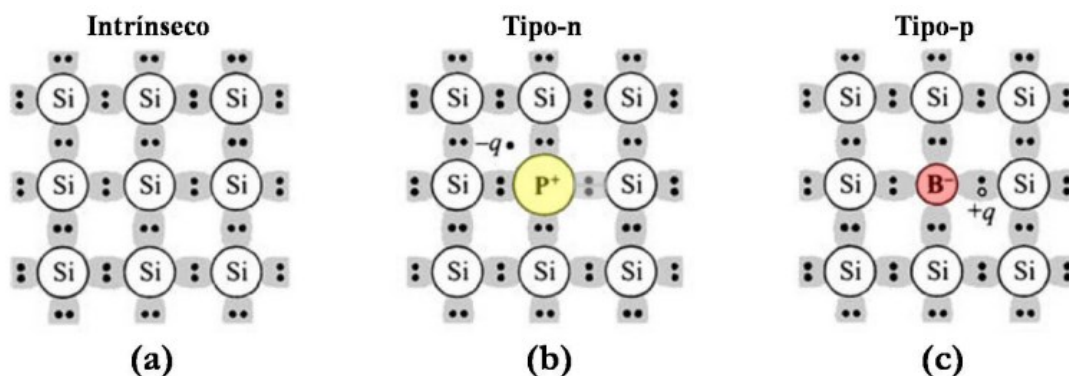


Figura 7 - Três tipos básicos de dopagem em semicondutores. (a) Silício não dopado. (b) Silício dopado tipo-n com doador de elétrons (fósforo). (c) Silício dopado tipo-p com aceitador de elétrons (boro). Fonte: referência [23].

2.2- ESTABILIDADE E INSTABILIDADES EM SEMICONDUCTORES

Materiais semicondutores podem exibir instabilidades não lineares, como oscilações temporais periódicas na corrente elétrica, quando submetidos a perturbações externas, tais como campos elétricos elevados, temperaturas elevadas ou iluminação. Modelos não lineares baseados em equações de taxa da densidade de portadores de carga tentam descrever essas instabilidades, incorporando processos de geração e recombinação desses portadores [7,12,16].

Tais instabilidades manifestam-se em uma ampla variedade de materiais, em diferentes faixas de temperatura e sob diversas condições de excitação. É importante notar que, embora essas instabilidades frequentemente comprometam o desempenho de dispositivos de estado sólido convencionais, têm sido exploradas intencionalmente no desenvolvimento de dispositivos semicondutores. Entre as aplicações de destaque, encontram-se a geração de energia de micro-ondas em frequências que abrangem de 0,1 a 1000 GHz, a amplificação em faixas de GHz em que transistores comuns operam de forma limitada, e a implementação de chaves eletrônicas de alta velocidade [12].

2.2.1 Condutividade Diferencial Negativa

As propriedades de transporte de um material semicondutor manifestam-se de forma mais direta em sua relação corrente-tensão sob condições independentes do tempo (corrente contínua). Ela é determinada de maneira complexa pelas propriedades microscópicas do sólido composto por material semicondutor, que fornecem a densidade de corrente j em função do campo elétrico local E , e pelos contatos [12-16].

Logo, a condutividade diferencial é definida por:

$$\sigma_{diff} \equiv \frac{dj}{dE},$$

onde j é o módulo da densidade de corrente elétrica $\vec{j}$ e E é o módulo do campo elétrico $\vec{E}$ aplicado à amostra.

Este é um conceito fundamental para a determinação do comportamento instável de um material semiconductor. Se a característica $j(E)$ possui um regime de condutividade diferencial negativa (NDC), ou seja, se a densidade de corrente diminui com o aumento do campo elétrico, então os estados correspondentes independentes do tempo são geralmente instáveis, e a resposta elétrica real depende, por exemplo, do circuito conectado que, em geral, contém, mesmo na ausência de resistores de carga externos, componentes resistivos e reativos inevitáveis, como resistências de fios de conexão, indutâncias de fios de conexão, indutâncias de encapsulamento e capacitâncias de encapsulamento, enfim depende do circuito elétrico ligado ao dispositivo em estudo [12].

A NDC pode ser classificada como do tipo N (NNDC) ou do tipo S (SNDC), dependendo do formato da curva característica $j(E)$, que pode se assemelhar às letras N ou S, respectivamente, como mostra a figura 8. As curvas NNDC estão associadas às instabilidades controladas por tensão, e as curvas SNDC, por corrente. No caso NNDC, a densidade de corrente é uma função de valor único do campo, mas o campo é de valores múltiplos: a relação $E(j)$ possui três ramos em uma certa faixa de j . O caso SNDC é complementar no sentido de que E e j são permutados.

Combinações de SNDC e NNDC também podem ocorrer: regimes de SNDC e NNDC podem se suceder na característica $j(E)$ estática à medida que o campo elétrico aumenta; a característica pode evoluir de SNDC para NNDC com o passar do tempo; ou a característica estática pode ter um formato mais complexo do que o simples N ou S, com vários valores tanto de j quanto de E .

A característica corrente-tensão de um semiconductor pode, em princípio, ser calculada a partir da relação $j(E)$ integrando a densidade de corrente j sobre a seção transversal do fluxo de corrente [12,13,16].

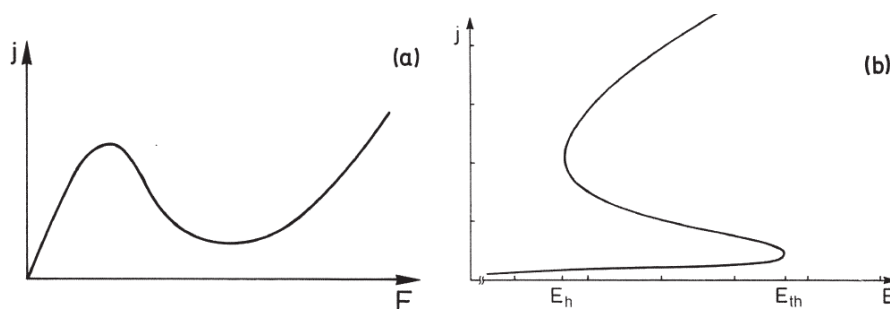


Figura 8 - Representação da densidade de corrente j em função do campo elétrico E para os dois tipos de condutividade diferencial negativa (NDC): (a) NNDC e (b) SNDC. Fonte: referência [12,13,16].

A importância da característica $i(V)$ ou $j(E)$ do semiconductor para os fenômenos de transporte eletrônico não linear observados em amostras de GaAs, por exemplo, reside nos processos de geração e recombinação de elétrons (portadores de carga) no material. A captura assistida por campo elétrico dos portadores de carga (processo de recombinação) reduz a corrente elétrica no material, como mostrado na figura 8(a), em campos elétricos intermediários. Para campos elétricos elevados, o processo de geração de portadores de carga responsável pelo aumento da corrente elétrica (um processo de avalanche) é a ionização por impacto. Para baixos valores de campo elétrico, observa-se o comportamento ôhmico do material, ou seja, uma relação linear entre a corrente e a tensão.

O modelamento dos dois processos de geração e recombinação acima descritos — ionização por impacto (geração) e captura assistida por campo elétrico (recombinação) — diferentemente do comportamento ôhmico, é descrito por relações não lineares entre j e E (ou i e V), como será apresentado no próximo capítulo [12,13,16].

2.2.2 – Transporte de cargas em semicondutores

A teoria do transporte eletrônico em semicondutores investiga a dinâmica dos portadores de carga quando submetidos a campos elétricos e magnéticos, bem como o movimento desses portadores sob essa influência externa. Assim, essa teoria pode ser utilizada para explicar quantitativamente a condutividade diferencial negativa [13].

Além disso, o transporte em semicondutores pode ser modelado por meio de várias teorias:

- (i) Equações diferenciais determinísticas clássicas para as densidades médias de portadores e campos;
- (ii) Equações de balanço semiclássicas para o número médio de partículas e para a energia e o momento médios dos portadores;
- (iii) Equação de Boltzmann para a função de distribuição clássica dos portadores, dependente do momento e da posição;
- (iv) Teoria do transporte quântico baseada na equação de von Neumann para a matriz de densidade;
- (v) Simulações de Monte Carlo da dinâmica dos portadores individuais.

As equações determinísticas clássicas de semicondutores (i) têm sido amplamente utilizadas na modelagem de todos os tipos de dispositivos semicondutores [12,13,16], sendo a

aproximação adotada para o desenvolvimento deste trabalho. Destaca-se, no entanto, que os limites de validade dessa abordagem negligenciam tanto as flutuações estatísticas quanto os efeitos quânticos.

Com o desenvolvimento dos circuitos integrados, tornou-se necessário recorrer a uma das teorias mais detalhadas, especialmente quando se envolvem escalas de tempo muito baixas (abaixo de picosegundos) e comprimentos da ordem de micron. Todas essas teorias são não lineares no regime de campos elétricos elevados, no qual ocorrem instabilidades e condutividade diferencial negativa. As demais teorias podem ser consultadas nas referências [13].

Vários tipos de transições de fase ocorrem fora do equilíbrio e podem ser classificados como de primeira ou de segunda ordem. Em uma transição de fase de primeira ordem, a variável física (variável de estado) apresenta uma transição descontínua quando o parâmetro de controle é variado continuamente, enquanto, em uma transição de fase de segunda ordem, a variável de estado é contínua, mas sua derivada apresenta uma descontinuidade no ponto de transição. No transporte de portadores em semicondutores, pode-se observar a transição de fase de primeira ordem fora do equilíbrio. A solução de estado estacionário da densidade de corrente J em um campo elétrico E é dada pela relação

$$J = \sigma E.$$

Aqui, a condutividade elétrica σ é dada por

$$\sigma = \begin{cases} en\mu_e & \text{para semicondutores do tipo n;} \\ ep\mu_h & \text{para semicondutores do tipo p;} \end{cases}$$

onde n (p) é a densidade de elétrons livres (buracos livres), μ_e (μ_h) é a mobilidade dos elétrons (buracos) e e é a magnitude de carga elétrica elementar.

De forma geral, o semicondutor é um sólido covalente que pode ser considerado um "isolante" no zero absoluto, pois sua banda de valência está completamente cheia e a de condução está vazia. A principal diferença entre semicondutores e isolantes reside na largura da banda proibida (*gap* de energia): nos semicondutores, esse intervalo entre as bandas de condução e valência é tipicamente inferior a 2 eV [21].

A compreensão desses mecanismos de condução exige a aplicação da física quântica a um sistema macroscópico no qual um grande número de partículas, concentradas em um pequeno volume, interagem de forma complexa. Embora o desafio teórico seja vasto, o domínio dessas propriedades permitiu o surgimento da microeletrônica e dos circuitos integrados, revolucionando a indústria tecnológica e a sociedade moderna [21].

2.3- DINÂMICA NÃO-LINEAR E PROCESSOS DE GERAÇÃO E RECOMBINAÇÃO EM SEMICONDUTOR

O ponto de partida para o entendimento dos processos de geração e recombinação dos portadores de carga em semicondutores é considerar que esse fenômeno ocorre em resposta a estímulos externos, o que, inclusive, coloca o sistema fora do equilíbrio termodinâmico e influencia o comportamento dos elétrons e dos buracos livres.

Estudando a densidade de carga livre sob a influência destes processos, a partir de uma visão da dinâmica não-linear, é possível prever, em alguns casos, a ocorrência de transições de fase e a formação de padrões.

O objetivo desses estudos é caracterizar dinamicamente o sistema, evidenciando as características que o definem como caótico em um modelo de oscilações espontâneas dos portadores de carga e apresentar explicações para o surgimento de oscilações espontâneas da corrente elétrica em materiais semicondutores [4,5,15].

A ideia intuitiva de não linearidade pode ser desenvolvida em um sistema, caracterizando seu comportamento com base nos estímulos e nas respostas. Para um sistema físico real, composto de um circuito elétrico com dispositivo eletrônico ôhmico (regido pela Lei de Ohm) e uma fonte de voltagem, ao aplicarmos uma voltagem V (estímulo) e medirmos a corrente I (resposta) que passa por um determinado dispositivo, podemos escrever essa relação da seguinte forma

$$V = RI,$$

para R , a resistência do dispositivo, que representa a constante de proporcionalidade do sistema. Neste caso, é válido afirmar que, se a razão entre o estímulo e a resposta for constante, a Lei de Ohm se aplica. Partindo desta análise, um sistema semicondutor é dito não-linear quando o dispositivo apresenta um comportamento não-ôhmico, ou seja, o comportamento entre V e I é não-linear, conforme a figura 8.

2.3.1- Processos de Geração e Recombinação em Semicondutores

Um modelo microscópico genérico de portadores de carga em materiais semicondutores é constituído pelas bandas de condução e valência e por um nível de impureza, considerando-se os elétrons como os únicos portadores de carga [15].

Os coeficientes de geração e recombinação são responsáveis pelas características não

lineares presentes na amostra, em particular, os coeficientes de ionização por impacto e de captura assistida por campo elétrico, por apresentarem dependência não linear do campo elétrico. Os principais mecanismos de geração e recombinação de portadores, que envolvem a banda de condução, a banda de valência e os níveis de impurezas, são ilustrados no diagrama da figura 9.

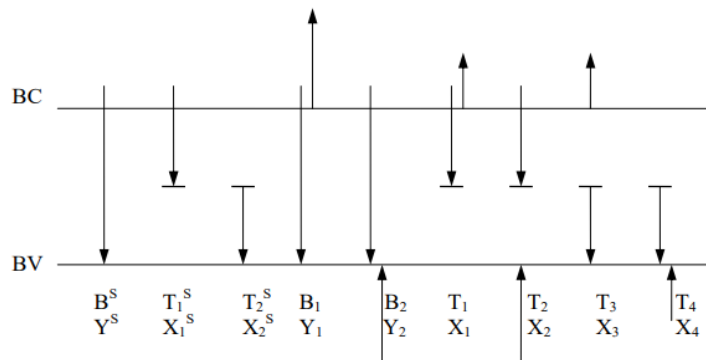


Figura 9 - Processos de geração e recombinação em semicondutores. As setas representam transições que envolvem elétrons. As letras B^S , T_1^S , T_2^S representam processos de recombinação envolvendo 1 elétron e B_1 , B_2 e T_1 a T_4 processos envolvendo 2 elétrons. As setas do diagrama referem-se a processos de recombinação (os seus inversos, processos de geração, não são mostrados no diagrama), e os símbolos correspondentes (na linha inferior) são os coeficientes de geração. Fonte: referência [7].

No diagrama da figura 9, as setas representam as transições eletrônicas (de elétrons), e o movimento dos buracos (T_2^S , B_2 , T_2 , T_3 , T_4) ocorre na direção oposta à indicada pelas setas. Os fenômenos que envolvem um elétron abrangem os três primeiros mecanismos representados: a recombinação direta banda-banda (B^S) e os processos de captura associados aos defeitos cristalinos (banda-defeito) (T_1^S e T_2^S). Os processos inversos de geração banda-banda (Y^S) estimulados por fatores térmicos, ópticos ou induzidos por campo, atuam em conjunto com a liberação de elétrons retidos em armadilhas (X_1^S) ou de buracos (X_2^S). Por fim, as transições que demandam a interação de dois elétrons englobam a recombinação, que se processa tanto entre duas bandas (B_1 , B_2) quanto por meio da mediação de um nível de captura (T_1 , T_2 , T_3 , T_4), tendo como contrapartida os fenômenos de ionização por impacto (Y_1 , Y_2 ; X_1 , X_2 , X_3 , X_4). Para mais detalhes, recomenda-se consultar as referências [7,10,15], bem como as respectivas referências.

Neste trabalho, considera-se o estudo de uma amostra semicondutora constituída pelas bandas de condução e valência e por um nível de impureza, pois esses componentes participam dos processos de geração e recombinação dos portadores de carga, e o sistema contempla apenas a presença de elétrons, como será apresentado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3 -RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para o sistema de transporte eletrônico fora do equilíbrio termodinâmico em semicondutores. O conteúdo está estruturado em quatro seções principais. A seção 3.1 descreve as etapas do processo de estudo de sistemas dinâmicos e sua caracterização numérica, por meio de um fluxograma. Na seção 3.2, apresenta-se o modelo esquemático das transições eletrônicas de um material semicondutor. A seção 3.3 detalha o modelo matemático, composto por equações não lineares de taxas que descrevem a ionização por impacto e a recombinação de portadores de carga. A seção 3.4 apresenta a análise dos planos de parâmetros, baseada no cálculo dos expoentes de Lyapunov e da dimensão de Kaplan-Yorke, para identificar os regimes periódicos, quase-periódicos e caóticos. Por fim, são apresentados os atratores no plano das variáveis para ilustrar os respectivos regimes.

3.1- PRINCIPAIS ETAPAS DO PROCESSO DE ESTUDO

O processo de estudo e de caracterização da dinâmica não-linear do sistema é representado no fluxograma da figura 10 e consiste na transição da modelagem física para a caracterização numérica dos regimes de transporte eletrônico. Inicialmente, o sistema físico-real é modelado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não-lineares acopladas, que descrevem as taxas de variação temporal das variáveis de estado sob parâmetros de controle específicos. As soluções são obtidas numericamente pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), com passo de integração fixo, a partir de condições iniciais e parâmetros predefinidos, gerando as séries temporais das variáveis do sistema.

A partir das séries temporais, realiza-se a representação das variáveis no espaço de fases para identificação geométrica dos atratores, discriminando comportamentos periódicos de atratores estranhos. Simultaneamente, os dados da integração numérica alimentam o cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov. A presença de um expoente positivo quantifica a divergência exponencial entre trajetórias vizinhas, estabelecendo o critério para a caracterização do caos e da sensibilidade às condições iniciais, conforme discutido no capítulo 1. Assim, essas ferramentas geram o plano de parâmetros, que delimita as fronteiras dos regimes dinâmicos em função dos parâmetros de controle, e a bacia de atração, que define as regiões de convergência assintótica no espaço das condições iniciais.

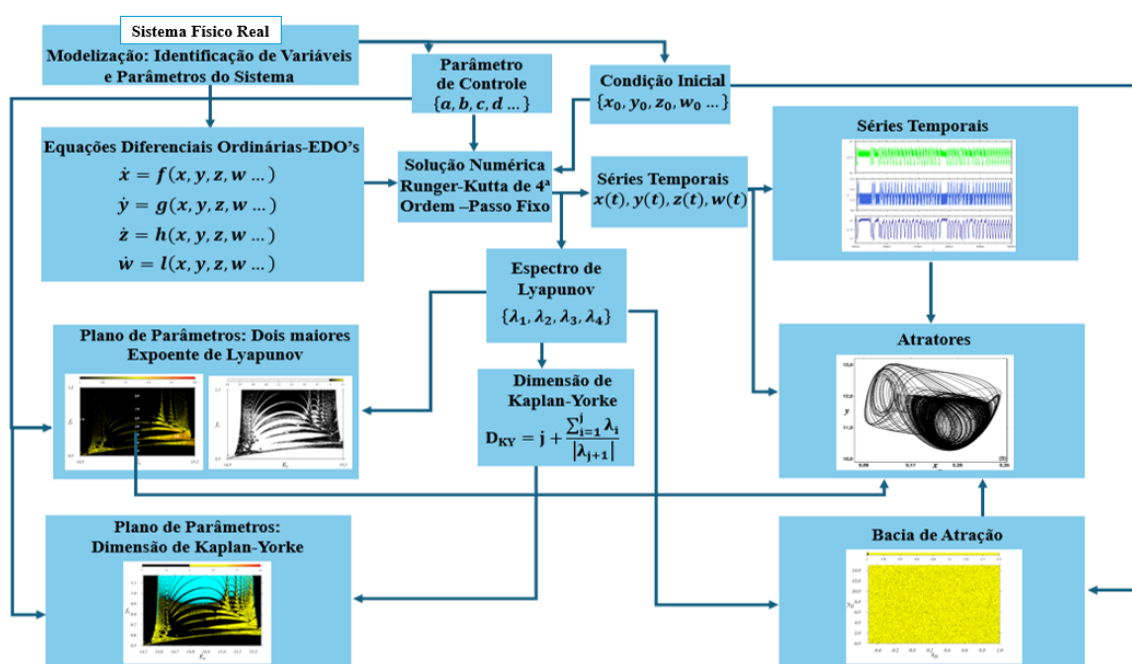


Figura 10 - Fluxograma das etapas de modelagem e de análise numérica do sistema dinâmico. O diagrama indica o fluxo de processamento desde a conversão do sistema físico-real em equações diferenciais ordinárias (EDOs) não-lineares até a geração de séries temporais por integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4). Estão representados os métodos de caracterização dinâmica: reconstrução do espaço de fases (atratores), cálculo do espectro de expoentes de Lyapunov, mapeamento em planos de parâmetros e delimitação de bacias de atração. Fonte: elaborada pela autora (2026).

3.2- MODELO ESQUEMÁTICO DAS TRANSIÇÕES ELETRÔNICAS

O modelo de transições eletrônicas representado na figura 11 baseia-se nos processos de geração e recombinação de portadores de carga entre os níveis de defeito (ND) e as bandas de condução (BC) e de valência (BV). O portador de carga considerado é o elétron livre (e^-), representado pela densidade eletrônica x . Os processos de geração possuem sinal positivo (+) e indicam o aumento (injeção) de elétrons na BC, enquanto os de recombinação possuem sinal negativo (-) e indicam a captura de portadores da BC para a BV ou para os ND.

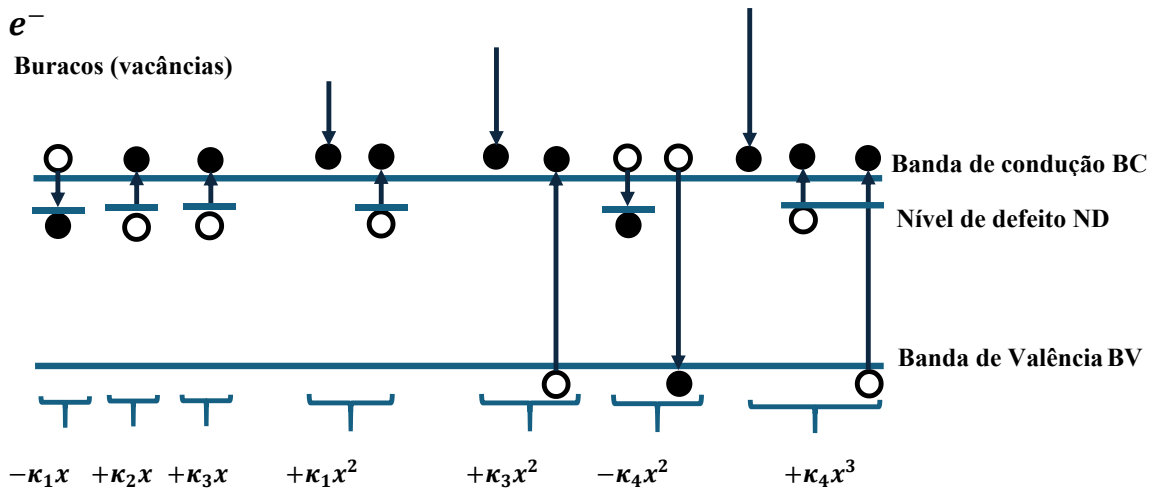
Os mecanismos de geração na banda de condução ocorrem por ionização por impacto ou por ionização térmica. Os mecanismos de recombinação da banda de condução ocorrem por captura assistida por campo elétrico ou por temperatura. Os mecanismos de geração e recombinação podem envolver um ou mais portadores de carga. Na figura 11, as setas simples representam processos térmicos de geração ou de recombinação que envolvem um único elétron. Os pares de setas representam processos envolvendo dois elétrons, e o trio de setas, processos envolvendo três elétrons.

Modelo esquemático Semicondutor

(x) Densidade de elétrons e^-

● e^-

○ Buracos (vacâncias)



$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\gamma_1 [\kappa_4 x^3 + (\kappa_1 + \kappa_3 - \kappa_4) x^2 + (-\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) x - \kappa_2]$$

Figura 11 - Modelo esquemático das transições eletrônicas dos portadores de carga no semicondutor. O diagrama detalha os processos de geração (indicados com o sinal +) e recombinação (indicados com o sinal -) de elétrons livres (e^-) entre o nível de defeito (ND) e as bandas de condução (BC) e de valência (BV), explicitando o comportamento não-linear da taxa $\dot{x}$ em função dos coeficientes de geração e recombinação (k_1, k_2, k_3, k_4) e do coeficiente de amortecimento γ_1 . Fonte: elaborada pela autora (2026).

As transições que envolvem um único elétron são lineares em x . O termo $-\kappa_1 x$ representa a taxa de captura dos portadores da banda de condução para o nível de defeito, a qual varia diretamente com a densidade de elétrons. Os termos $+\kappa_2 x$ e $+\kappa_3 x$ representam as taxas de geração de portadores do ND para a BC, decorrentes, por exemplo, da ionização térmica.

As transições que envolvem dois elétrons são quadráticas em x . O termo $+\kappa_1 x^2$ envolve um elétron “quente” (elétron com elevada energia cinética) da BC que ioniza um defeito da ND, assim como o termo $+\kappa_3 x^2$ envolve outro elétron “quente” da BC que promove um elétron da BV para a BC. O termo $-\kappa_4 x^2$ envolve a captura de dois elétrons pela BC: um para o ND e outro para a BV.

Por fim, temos as transições que envolvem três elétrons, com o termo $+\kappa_4 x^3$. Um elétron “quente” da BC promove um elétron do ND e outro da BV. Na próxima subseção, apresentamos o modelo completo de EDOs, com a equação diferencial para a densidade de portadores x , relacionada aos processos descritos acima e ao diagrama da figura 11.

3.3- MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA ACOPLADO

O modelo matemático do sistema de transporte eletrônico de um semicondutor estudado nesta dissertação é composto por quatro equações diferenciais ordinárias acopladas e não lineares. O sistema governa a evolução temporal da densidade de elétrons livres (x) da amostra semicondutora (conforme figura 11), do campo elétrico interno (y) e da densidade de corrente elétrica (z) das cargas injetadas através dos contatos, que representa o excesso de corrente próximo ao contato negativo da amostra. O modelo foi originalmente proposto por Aoki *et al.* [7-10].

As taxas de variação temporal das variáveis de estado são expressas pelo seguinte conjunto de equações,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\gamma_1 [\kappa_4 x^3 + (\kappa_1 + \kappa_3 - \kappa_4) x^2 + (-\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) x - \kappa_2], \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\gamma_2 [y - (E_0 + E_{ac} \sin(w) + C_1 xy + z)], \quad (3.2)$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = -\gamma_3 z + C_2 xy, \quad (3.3)$$

$$\dot{w} = 2\pi f_0. \quad (3.4)$$

Na equação para a densidade de portadores ($\dot{x}$), eq. (3.1), a taxa de ionização a partir do nível do defeito (ND) depende do coeficiente κ_1 . Este coeficiente varia em função do campo elétrico (y) segundo a relação,

$$\kappa_1 = \frac{1}{4} e^{-6/y}. \quad (3.5)$$

Os demais coeficientes são constantes.

As equações são acopladas por termos não lineares de produto cruzado (xy), que representam a interação entre a densidade de portadores e o campo elétrico. Na equação do campo elétrico ($\dot{y}$), eq. (3.2), a força de excitação externa é composta por uma componente de tensão contínua (E_0) e por uma componente alternada, definida pela amplitude (E_{ac}) e pela frequência (f_0). O termo de fase varia no tempo de acordo com $\dot{w} = 2\pi f_0$. O amortecimento do campo é regulado por C_1 , enquanto a variação temporal da densidade de corrente elétrica injetada ($\dot{z}$), eq. (3.3), depende do coeficiente γ_3 e do termo de geração $C_2 xy$.

As variáveis e os parâmetros que determinam o comportamento do modelo estão descritos nas tabelas 5 e 6.

Tabela 5 - Variáveis de estado do sistema.

Variáveis do Sistema	
x	Densidade reduzida de portadores.
y	Campo elétrico interno.
z	Densidade de corrente elétrica.

Fonte: elaborada pela autora (2025).

Tabela 6 - Parâmetros e coeficientes do modelo.

Parâmetros do sistema	Interpretação física
Fixos	
$\gamma_1 = 250,0$	Coeficientes de amortecimento.
$\gamma_2 = 1,0$	
$\gamma_3 = 0,2$	
$k_2 = 0,0055$	Coeficientes de geração e recombinação.
$k_3 = 0,25$	
$k_4 = 1,0$	
$C_1 = 0,78$	Constantes de acoplamento.
$C_2 = 0,15$	
Variáveis	
$E_0=?$	Campo elétrico de polarização contínua.
$f_0=?$	Frequência do campo elétrico de polarização alternada.
$E_{ac}=?$	Amplitude do campo de polarização alternada.

Fonte: elaborada pela autora (2025).

A relação entre os parâmetros de controle variáveis (E_0, f_0, E_{ac}) determina a estabilidade do sistema e delimita as condições de bifurcação nos planos de parâmetros que serão apresentados a seguir.

3.4- ANÁLISE DOS PLANOS DE PARÂMETROS

Nesta seção, será realizada a análise dos planos de parâmetros obtidos neste estudo. Os parâmetros fixos do modelo (1)-(4) estão descritos na tabela 6. As condições iniciais utilizadas para a obtenção dos resultados foram $(x_0; y_0; z_0; w_0) = (0,1; 12,0; 1,3; 0,0)$. O tamanho do passo de integração foi de $1,0 \times 10^{-2}$, para um tempo total de integração de $1,0 \times 10^7$. Foi descartado um transiente de $8,0 \times 10^6$ para o cálculo dos expoentes de Lyapunov e de $9,95 \times 10^6$ para a obtenção dos atratores.

3.4.1 Plano de parâmetro para a frequência do campo de polarização alternada (f_0) e a amplitude do campo elétrico de polarização alternada (E_{ac})

O plano de parâmetros obtido pela variação simultânea da frequência f_0 e do campo E_{ac} do modelo (1) – (4) delimita as regiões de resposta do transporte eletrônico sob excitação dependente do tempo. A figura 12 apresenta os planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e o segundo maior, com $E_0 = 15,4$. O mapeamento numérico desses parâmetros, em uma malha 1000×1000 , revela extensões de comportamento periódico ($\lambda_{max} = 0$), intercaladas por estruturas periódicas estáveis, imersas numa região caótica que se estende ao longo dos parâmetros E_{ac} e f_0 .

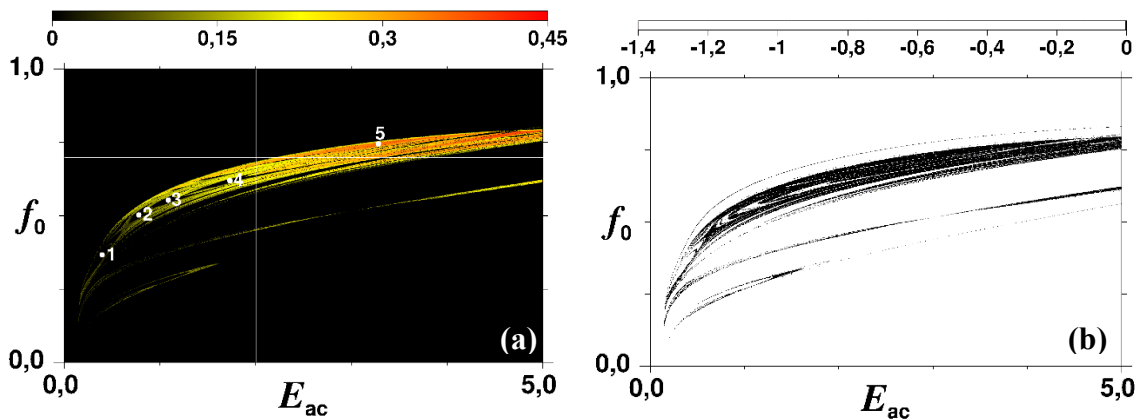


Figura 12. Planos de parâmetros $f_0 \times E_{ac}$ para o modelo (1)-(4) com o parâmetro E_0 fixado em 15,4. (a) O maior expoente de Lyapunov e (b) o segundo maior expoente de Lyapunov. As cores referem-se aos diferentes sinais dos expoentes de Lyapunov, conforme tabela 3 do capítulo 1 e seus respectivos valores conforme a barra de cores sobre os diagramas. Os pontos brancos numerados referem-se aos atratores da figura 13. As linhas brancas horizontal e vertical em (a) referem-se aos valores fixos dos respectivos parâmetros nos demais planos de parâmetros. Fonte: elaborada pela autora (2025).

Na figura 12(a), observamos que as regiões coloridas em amarelo–vermelho correspondem a valores positivos de λ_1 , o que caracteriza um comportamento caótico. As regiões pretas indicam $\lambda_1 \approx 0$, associadas a dinâmicas periódicas ou quase periódicas. Observa-se que o caos não está distribuído uniformemente no espaço de parâmetros. Pelo contrário, ele se concentra em uma estreita faixa curva que emerge para baixos valores de E_{ac} e se expande gradualmente à medida que E_{ac} e f_0 aumentam. Essa estrutura evidencia a região em que a combinação entre o parâmetro f_0 e a amplitude do forçamento E_{ac} favorece o surgimento de instabilidades dinâmicas.

Outro aspecto relevante é que os maiores valores de λ_1 (tons alaranjados e vermelhos) ocorrem próximos ao limite superior dessa faixa, indicando que o maior expoente de Lyapunov

aumenta progressivamente ao longo da estrutura principal. Isso sugere que o aumento de f_0 e E_{ac} não apenas preserva a dinâmica caótica, mas também reforça a divergência exponencial entre trajetórias próximas.

A figura 12(b) apresenta o plano de parâmetros para o segundo maior expoente de Lyapunov, λ_2 , cujo comportamento fornece informações adicionais sobre a natureza dos atratores, pois, conforme visto no capítulo 1, o λ_2 pode ser usado para diferenciar a dinâmica periódica de quase-periódica e caótica de hipercaótica. Logo, observamos que, na combinação de parâmetros mostrada nos diagramas, a dinâmica do modelo (1)-(4) restringe-se a soluções periódicas e caóticas.

Na análise dos dois diagramas, nota-se também a existência de estruturas periódicas (em preto e em branco nos diagramas (a) e (b), respectivamente) imersas na região de caos (em amarelo-vermelho e em preto nos diagramas (a) e (b), respectivamente), que se assemelham a camarões e línguas de Arnold. Os pontos numerados em branco no diagrama da figura 12(a) indicam a posição dos pares de parâmetros dos atratores correspondentes, apresentados na figura 13. Os valores dos pares de parâmetros $f_0 \times E_{ac}$, bem como o espectro dos expoentes de Lyapunov de cada atrator, são apresentados na tabela 7.

Os atratores 1 a 4 da figura 13 são periódicos, o que confirma que as estruturas em preto (ou em branco) na figura 12(a) (ou na figura 12(b)) também são periódicas. O atrator 5 é caótico, uma vez que foi obtido no ponto 5 da região amarelo-vermelho da figura 12(a).

Na tabela 7, apresentamos os respectivos expoentes de Lyapunov dos atratores da figura 13. É pertinente, neste momento, comentar sobre a precisão do cálculo dos expoentes de Lyapunov. A rotina Fortran que implementa o algoritmo de Wolf para este cálculo utiliza precisão dupla nas variáveis do código e, como veremos nos demais planos de parâmetros, estamos com precisão na sexta casa decimal para diferenciar as dinâmicas periódicas de quase-periódicas. Como observado nos diagramas na figura 12, o plano $f_0 \times E_{ac}$ não apresenta dinâmica quase-periódica e nem hipercaótica.

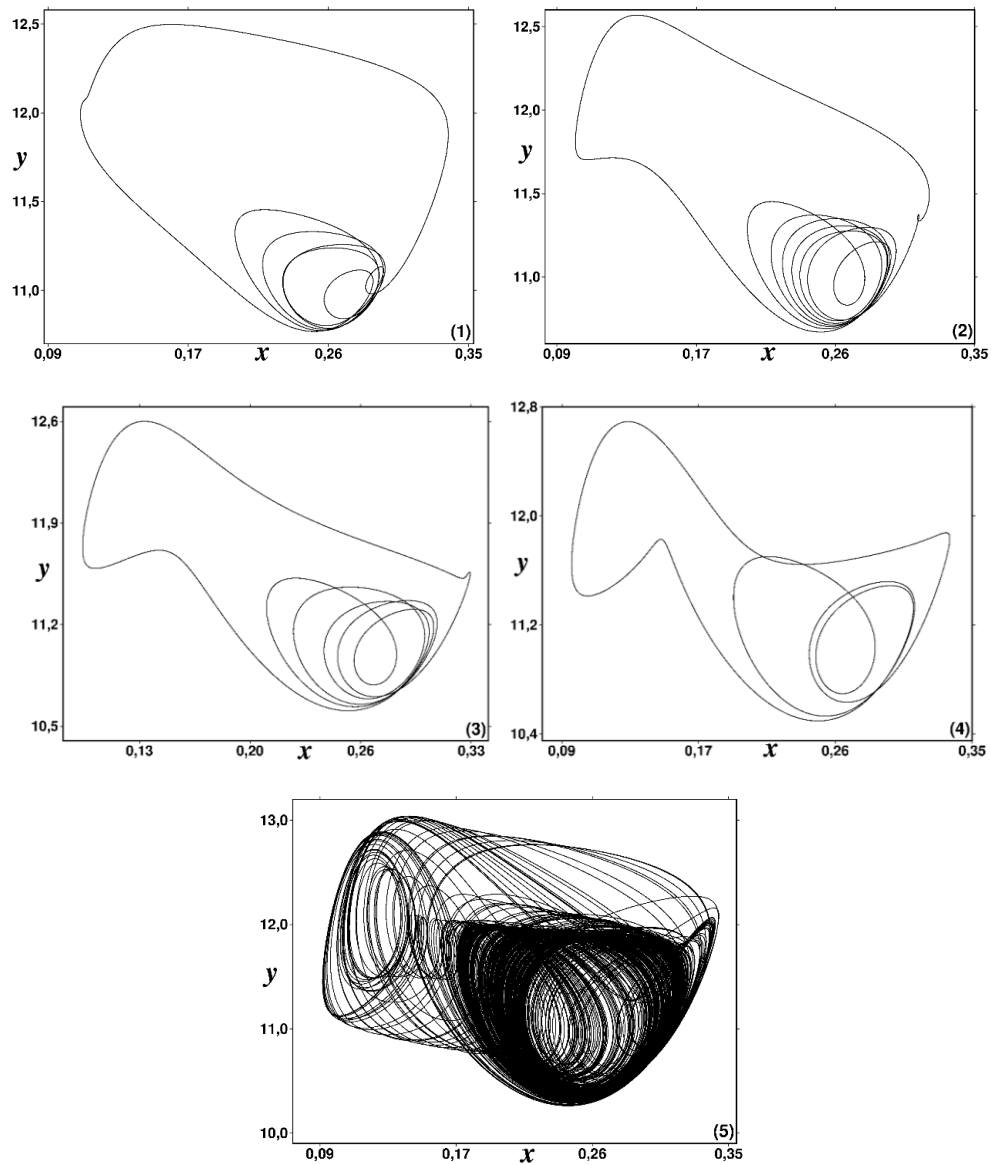


Figura 13 - Atratores dos pontos brancos do plano de parâmetro $f_0 \times E_{ac}$ da figura 12. Fonte: elaborada pela autora (2025).

Tabela 7 - Espectro dos expoentes de Lyapunov para as dinâmicas referentes aos pontos de 1 a 5, localizados no plano de parâmetros $f_0 \times E_{ac}$.

Ponto	Parâmetro		Expoentes de Lyapunov				Comportamento
	f_0	E_{ac}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
1	0,366873	0,394565	0,000000	-0,190095	-0,566752	-2,448312	Periódico
2	0,503377	0,777669	0,000000	-0,030886	-0,536845	-2,616377	Periódico
3	0,554039	1,08546	0,000000	-0,050214	-0,523922	-2,867660	Periódico
4	0,620180	1,73052	0,000000	-0,058791	-0,487612	-3,199672	Periódico
5	0,745426	3,28258	0,444349	0,000000	-0,544005	-2,319594	Caótico

Fonte: elaborada pela autora.

3.4.2- Plano de parâmetro para o campo de polarização contínua E_0 e a amplitude do campo de polarização alternada E_{ac}

O plano de parâmetros do modelo (1)-(4) obtido pela variação do campo de polarização contínua (E_0) em função da amplitude do campo de polarização alternada (E_{ac}) mostrado na figura 14, mapeia a correlação entre as componentes de corrente contínua (DC) e corrente alternada (AC) aplicadas ao semiconductor, com o parâmetro de controle f_0 fixado em 0,7. Observamos na primeira linha, figuras (a) e (b), os planos para o maior expoente de Lyapunov e na linha de baixo (figuras (c) e (d)) os respectivos planos para o segundo maior expoente. As condições iniciais e demais parâmetros da integração são os mesmos da figura 12.

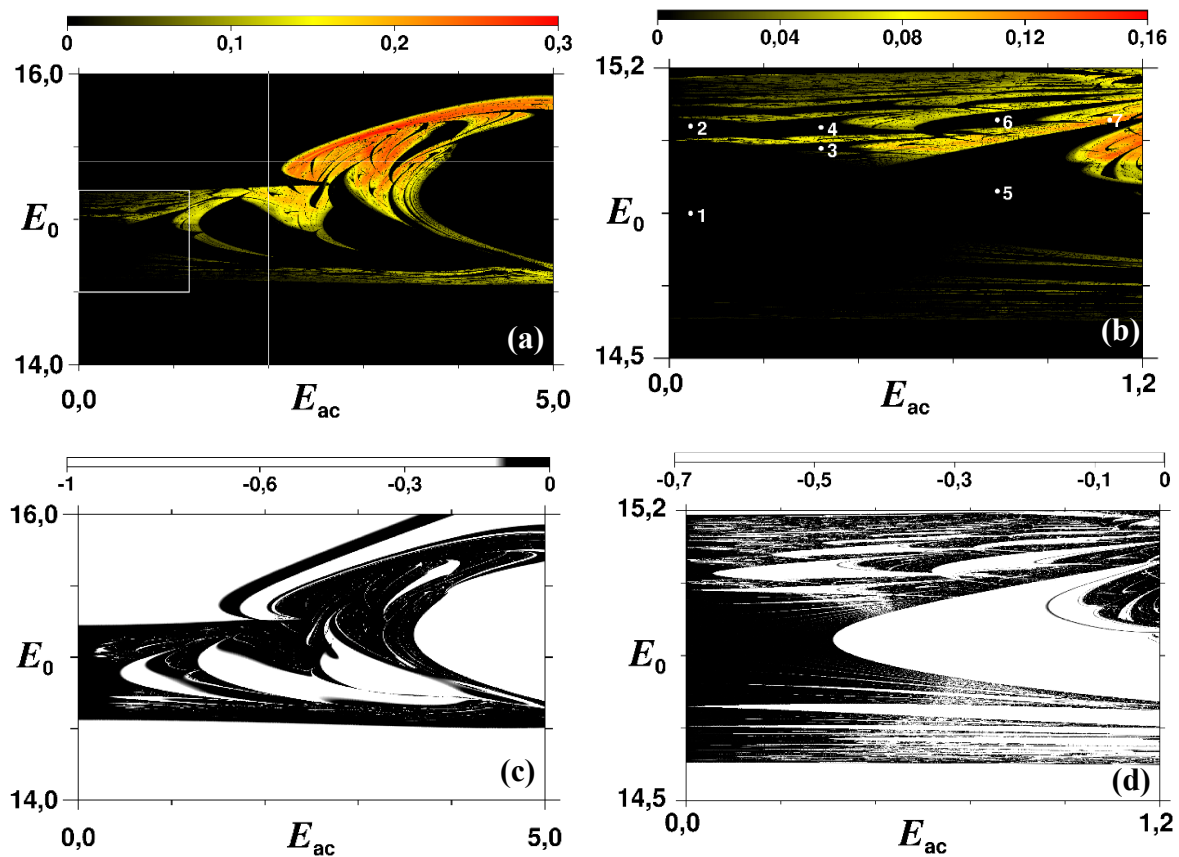


Figura 14 - Planos de parâmetros do sistema (1)-(4), para o par de parâmetros $E_0 \times E_{ac}$, para $f_0 = 0,7$, em malhas de 1000×1000 . (a) e (b) são para o maior expoente de Lyapunov, e (c) e (d) são para o segundo maior expoente. Em (b), é mostrada a ampliação da caixa branca em (a). As barras de cores nos diagramas codificam os valores dos respectivos expoentes de Lyapunov. As linhas brancas horizontal e vertical em (a) referem-se aos valores fixos dos respectivos parâmetros nos demais planos de parâmetros. Os marcadores brancos numerados em (b) indicam as localizações dos pares de parâmetros (E_0, E_{ac}) dos atratores da figura 15. Fonte: elaborada pela autora (2025).

Podemos observar na figura 14 um aumento na complexidade da organização das estruturas e regiões periódicas (preto em (a) e branco em (c)), bem como da região de caos

(amarelo-vermelho em (a) e preto em (c)), quando comparados com o plano de parâmetros da figura 12 para o par (f_0, E_{ac}) . Estruturas periódicas imersas na região de caos estão mais destacadas; também podemos notar muitas outras estruturas menores nesta faixa de parâmetros. Um comportamento não observado no plano da figura 12 e visível na figura 14 é uma região de quase-periodicidade próxima a $E_{ac} = 0,0$ em (a) e (c). Observamos que esta região se apresenta na cor preta em (a) e (c), o que indica que os dois maiores expoentes de Lyapunov são próximos a zero. Ou seja, conforme discutido no capítulo 1, temos uma região de comportamento quase periódico.

Para evidenciar melhor esta região de quase-periodicidade, ampliamos a região delimitada pela caixa branca da figura 14(a) e apresentamos, na figura 14(b), o maior expoente de Lyapunov e, na figura 14(d), o segundo maior expoente. Podemos observar agora, com mais detalhes, a região de quase-periodicidade (em preto em (b) e (d)) e as estruturas periódicas encrustadas nela (em preto em (b) e em branco em (d)). Nesta ampliação, percebemos a complexidade na forma e na distribuição das estruturas periódicas ao longo da região de quase-periodicidade e imersas na região de caos.

Para ilustrar a dinâmica de algumas das estruturas periódicas, da região de quase-periodicidade e de caos da figura 14(b), foram elaborados os retratos de fase correspondentes aos pares de parâmetros dos marcadores numerados neste plano de parâmetros. A figura 15 mostra os atratores de cada uma das dinâmicas marcadas na figura 14(b).

Na primeira linha da figura 15, mostramos dois atratores quase-periódicos que ilustram a dinâmica das regiões de quase-periodicidade da figura 14(b). Na segunda e na terceira linha, mostramos os atratores periódicos de quatro estruturas periódicas da figura 14(b), e na quarta linha da figura 15, temos um atrator caótico do marcador 7 na região caótica da figura 14(b). Os valores dos pares de parâmetros, bem como o espectro dos expoentes de Lyapunov de cada atrator, são apresentados na tabela 8.

É importante observar a precisão dos expoentes de Lyapunov com os quais classificamos as dinâmicas, como periódicas, quase-periódicas e caóticas. Para a quase periodicidade, consideramos o zero na sexta casa decimal; portanto, para classificar as demais dinâmicas, utilizamos expoentes até a sexta casa decimal.

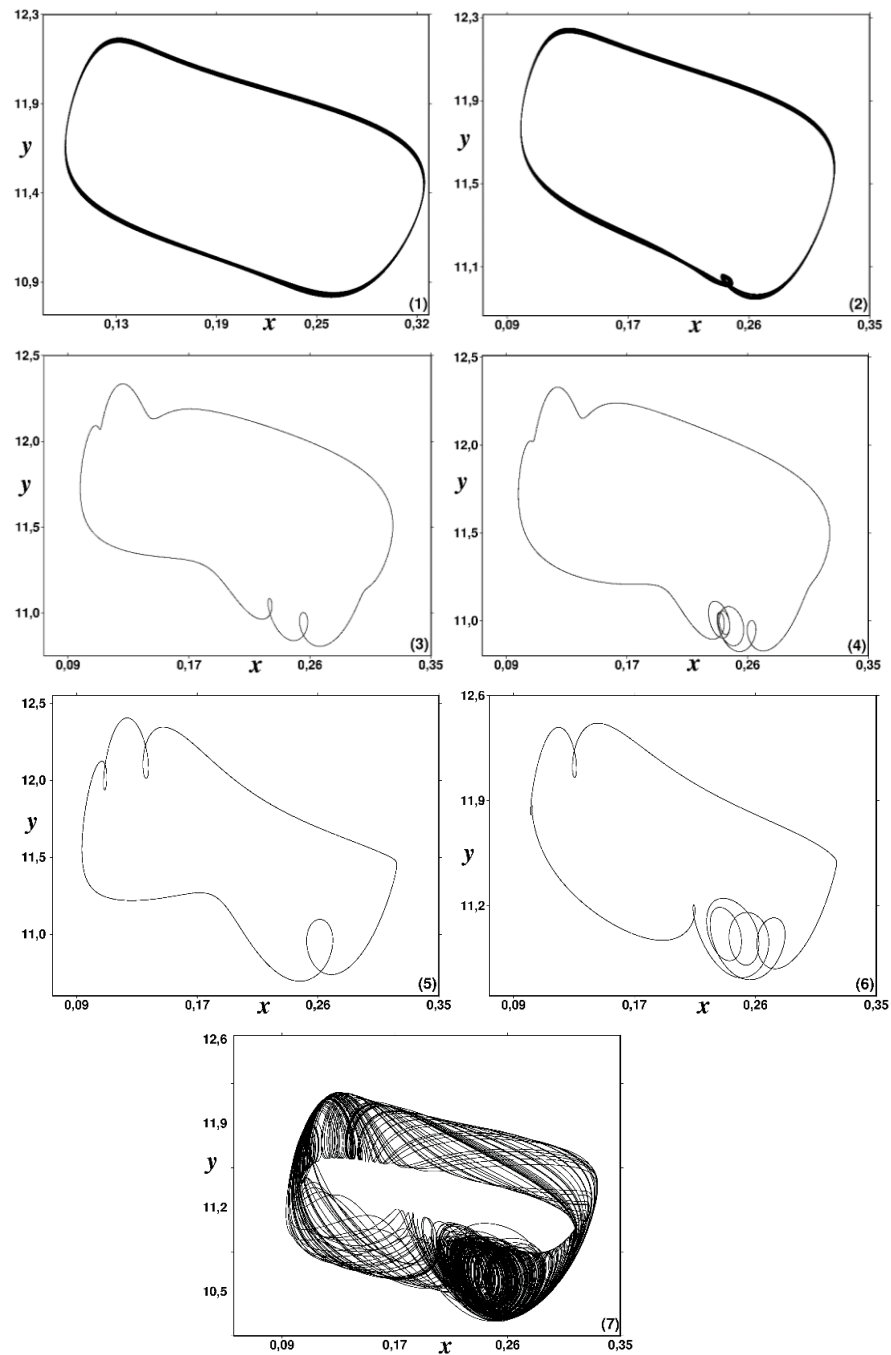


Figura 15 - Atratores dos pontos brancos no plano de parâmetros $E_0 \times E_{ac}$. Fonte: elaborada pela autora (2025).

Tabela 8 - Espectro dos expoentes de Lyapunov para as dinâmicas referentes aos pontos de 1 a 7 localizados no plano de parâmetro $E_0 \times E_{ac}$.

Ponto	Parâmetros		Expoentes de Lyapunov				Comportamento
	E_0	E_{ac}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
1	14,85	0,052	0,000003	0,000000	-0,786843	-2,388269	Quase periódico-torus-2
2	15,06	0,052	0,000000	-0,000088	-0,361168	-1,603942	Quase periódico-torus-2
3	15,0063	0,372126	0,000000	-0,009847	-0,825273	-1,765876	Periódico
4	15,0576	0,372126	0,000000	-0,042102	-0,510569	-1,455041	Periódico
5	14,9037	0,804565	0,000000	-0,156640	-0,612964	-2,488420	Periódico
6	15,0751	0,804565	0,000000	-0,044373	-0,467904	-1,844141	Periódico
7	15,075	1,08	0,200603	0,000000	-0,508341	-1,874700	Caótico

Fonte: elaborada pela autora.

3.4.3 - Plano de parâmetro para os parâmetros frequência do campo elétrico de polarização alternada f_0 e campo elétrico de polarização contínua E_0

Na figura 16 temos o plano de parâmetros definido pela variação da frequência do campo alternado (f_0) e do campo de polarização contínua (E_0) em uma malha 1000×1000 , com E_{ac} fixado em 2,0. Na primeira linha, (a) e (b), temos os planos para o maior expoente de Lyapunov, e na linha debaixo, (c) e (d), os planos para o segundo maior expoente. Em (a) temos uma visão ampla do comportamento dinâmico com o seu respectivo plano de parâmetros para o segundo maior expoente em (c). Em (b) mostramos uma ampliação da caixa branca em (a) e o seu respectivo plano de parâmetros para o segundo expoente em (d).

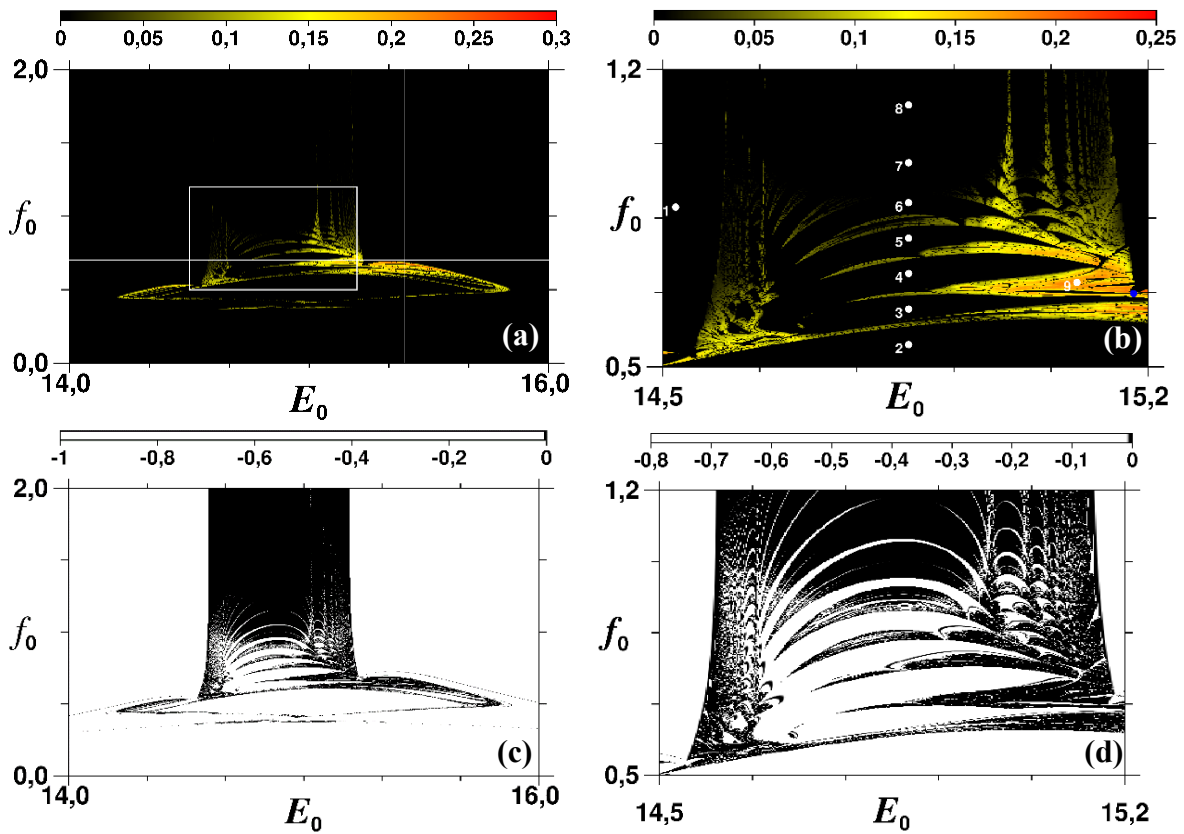


Figura 16 - Planos de parâmetros do modelo (1)-(4), para o par de parâmetros $f_0 \times E_0$, com $E_{ac} = 2,0$. (a) e (b) referem-se ao maior expoente de Lyapunov. (c) e (d) são para o segundo maior expoente. Em (b), é mostrada a ampliação da caixa branca em (a). As barras de cores nos diagramas codificam os valores dos respectivos expoentes de Lyapunov. As linhas brancas horizontal e vertical em (a) referem-se aos valores fixos dos respectivos parâmetros nos demais planos de parâmetros. Os marcadores brancos numerados em (b) indicam as localizações dos atratores da figura 17 e o marcador azul mostra a localização da bacia de atração analisada na seção 3.4.4.

Fonte: elaborada pela autora (2025).

Neste corte do espaço de parâmetros (E_{ac}, f_0, E_0) , observamos também maior complexidade na dinâmica do modelo (1)-(4) em relação ao plano apresentado na figura 12. Como também observado no plano da figura 14. Na figura 16 temos as dinâmicas periódicas (preto em (a) e (b) e branco em (c) e (d)), quase-periódicas (preto em (a) e (b) e preto em (c) e (d)) e caóticas (amarelo-vermelho em (a) e (b) e preto em (c) e (d)).

Podemos observar também uma organização complexa das estruturas periódicas em torno das regiões de quase-periodicidade que se estendem à medida que f_0 aumenta. Por exemplo, na região central do plano, vemos algumas estruturas periódicas imergindo na quase-periodicidade pelo centro e sendo dobradas até a sua ruptura nas estruturas periódicas superiores. Essa auto-organização das estruturas periódicas centrais também apresenta autossimilaridade no plano dos parâmetros. Observa-se a mesma hierarquia de formação à direita e à esquerda, com tamanhos reduzidos, e todas essas estruturas auto-organizadas se acumulam em faixas estreitas de quase-periodicidade e, em seguida, de periodicidade.

Na figura 17, apresentamos os atratores correspondentes aos pares de parâmetros (f_0, E_0) marcados por pontos brancos numerados na figura 16 (b). Os valores dos pares de parâmetros, bem como o espectro dos expoentes de Lyapunov de cada atrator, são apresentados na tabela 9. Mais uma vez, observamos a precisão dos valores dos expoentes de Lyapunov para distinguir as periodicidades (atratores de 1 a 7) da quase-periodicidade (atrator 8) e do caos (atrator 9).

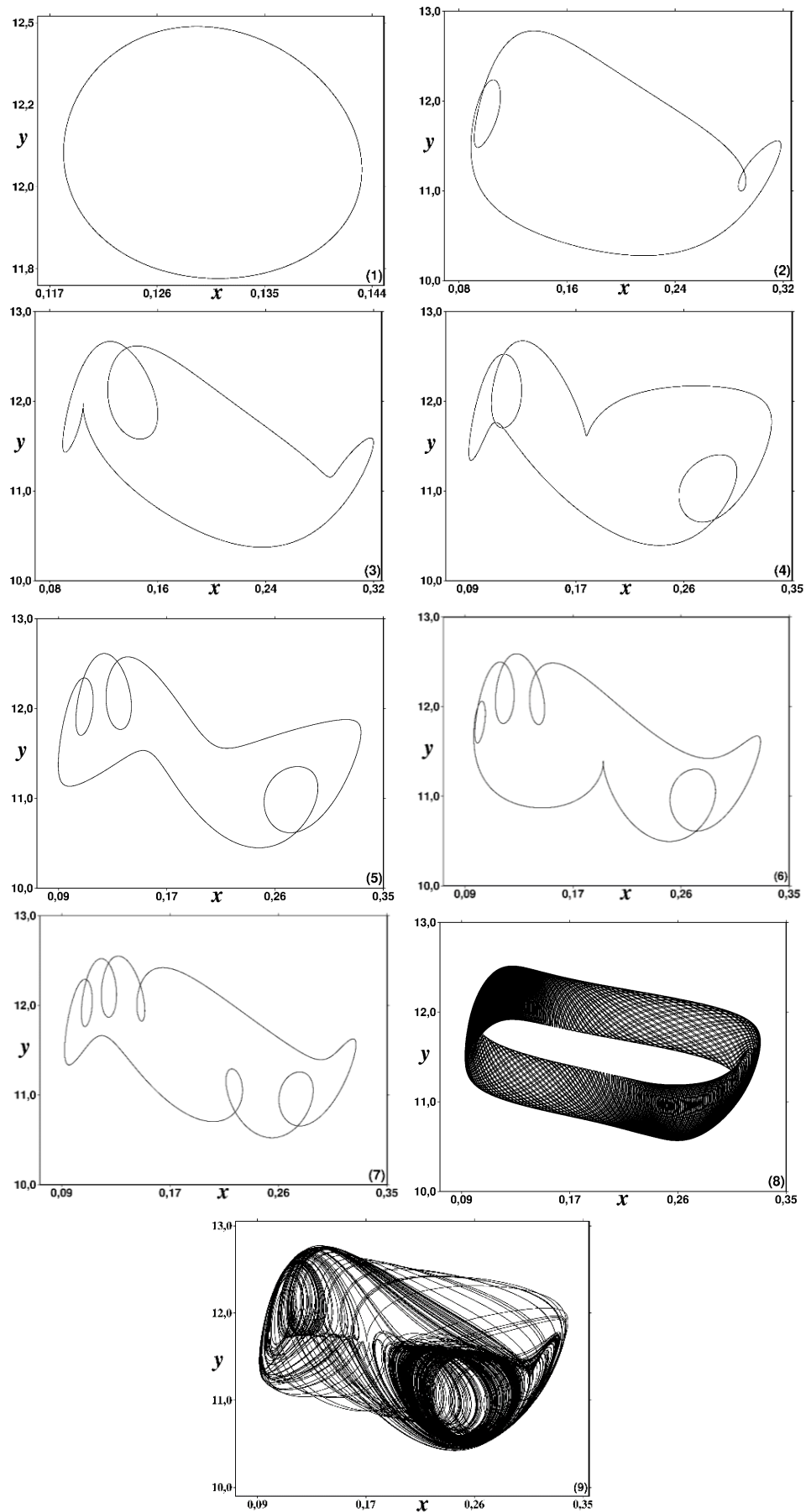


Figura 17-Atratores dos pontos brancos do plano de parâmetro $f_0 \times E_0$ (de 1 a 9). Fonte: elaborada pela Autora (2025).

Tabela 9 - Espectro dos expoentes de Lyapunov para as dinâmicas referentes aos pontos de 1 a 9 localizados no plano de parâmetros $f_0 \times E_0$.

Ponto	Parâmetros		Expoentes de Lyapunov				Comportamento
	f_0	E_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
1	0,86	14,52	0,000000	-0,350363	-0,350382	-0,669294	Periódico
2	0,55	14,88	0,000000	-0,575773	-1,168688	-4,014106	Periódico
3	0,63	14,88	0,000000	-0,366447	-0,366505	-3,298113	Periódico
4	0,71	14,88	0,000000	-0,308662	-0,865658	-2,822060	Periódico
5	0,79	14,88	0,000000	-0,177042	-0,646665	-2,750834	Periódico
6	0,87	14,88	0,000000	-0,302047	-0,547597	-2,457473	Periódico
7	0,96	14,88	0,000000	-0,102579	-0,910514	-2,204156	Periódico
8	1,09	14,88	0,000005	0,000000	-0,773711	-2,376677	Quase periódico-torus-2
9	0,69	15,14	0,293119	0,000000	-0,507236	-2,087209	Caótico

Fonte: elaborada pela autora.

3.4.4- Bacia de Atração

Considere um sistema dinâmico com dois ou mais atratores coexistentes; cada atrator possui sua respectiva bacia de atração, isto é, o conjunto de condições iniciais que convergem para ele. Dizemos que uma bacia de atração é aleatoriamente distribuída quando qualquer vizinhança arbitrariamente pequena de um ponto pertencente a essa bacia contém pontos pertencentes à bacia de outro atrator. Em outras palavras, por mais precisamente que se conheça uma condição inicial, sempre existirão condições iniciais arbitrariamente próximas que evoluirão para atratores diferentes, como mostrado na figura 18.

No sistema semiconductor analisado neste trabalho, modelo (1)-(4), constata-se a ocorrência de bacias aleatoriamente distribuídas, para as quais não se identificam regiões definidas de regularidade, como observado nas figuras 18(a) e 18(b), em contraponto à figura 4(a) do capítulo 1, na qual observamos uma bacia com fronteiras regulares.

A bacia de atração do modelo (1)-(4), mostrada na figura 18, mapeia o domínio de convergência para condições iniciais distintas, representadas no plano $x_0 \times y_0$, mantendo fixos os parâmetros de controle $(E_{ac}; f_0; E_0) = (2,00000000; 0,6652310; 15,2275000)$, localizado na posição do marcador azul na figura 16, e as demais condições iniciais $(z_0; w_0) = (1,30; 0,0)$. Este plano delimita a região do espaço de estados que converge para cada atrator estável coexistente, caracterizando o regime de multiestabilidade do semiconductor.

Em (a), temos a bacia do maior expoente de Lyapunov e, em (b), a do segundo maior. Os pontos pretos (ou amarelos) em (a), relacionados a atratores periódicos (ou caóticos), são brancos (ou pretos) em (b). Em (c) e (d), mostramos os atratores periódicos e caóticos correspondentes. Os espectros dos expoentes de Lyapunov das dinâmicas associadas aos atratores são apresentados na tabela 10.

A caracterização de bacias aleatoriamente distribuídas corrobora a não-linearidade do

modelo de transporte eletrônico e estabelece a imprevisibilidade do estado assintótico do sistema sob flutuações físicas locais, visto que perturbações na densidade inicial de portadores ou no campo elétrico desviam a trajetória em direção a um atrator distinto.

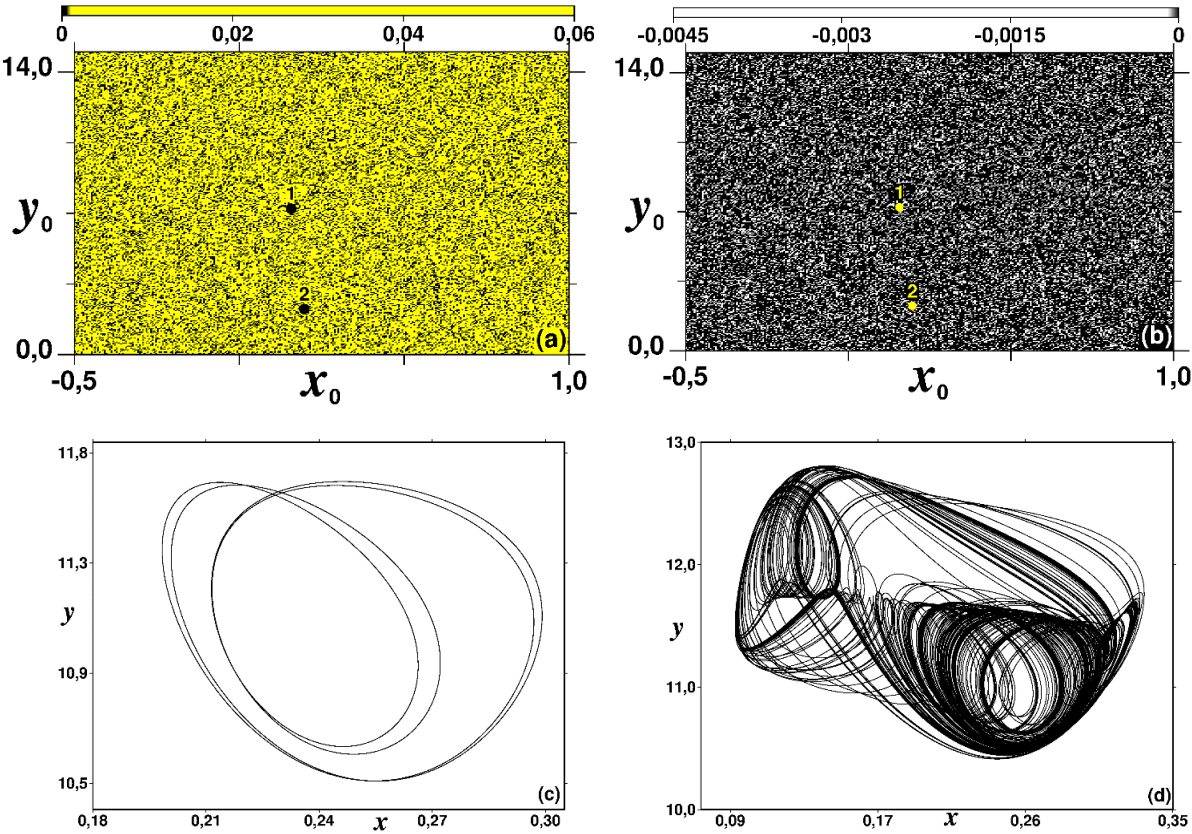


Figura 18 - Bacia de atração, em uma malha 300×300 , localizada no plano $(f_0; E_0) = (0,6652310; 15,2275000)$ da figura 16 (ponto azul) e seus respectivos atratores. (a) para o maior expoente de Lyapunov e (b) para o segundo maior expoente de Lyapunov. A bacia é aleatoriamente distribuída. Pontos pretos (ou amarelos) em (a), relacionados a atratores periódicos (ou caóticos), são brancos (ou pretos) em (b). Os marcadores 1 e 2 indicam a localização das condições iniciais dos respectivos atratores. Em (c), apresenta-se o atrator do marcador 1 e, em (d), o atrator do marcador 2, ambos associados aos comportamentos observados na bacia. Fonte: elaborada pela autora (2026).

Tabela 10 - Espectro dos expoentes de Lyapunov dos atratores localizados na bacia.

Pontos	Condições iniciais		Expoentes de Lyapunov				Comportamento
	x_0	y_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
1 (c)	0,157191	7,224080	0,000000	-0,004465	-0,004508	-0,100268	Periódico
2 (d)	0,197324	2,257525	0,040063	0,000000	-0,120081	-0,523053	Caótico

Fonte: elaborada pela autora (2026).

3.4.5 Planos de Parâmetros: uma análise utilizando a conjectura de Kaplan-Yorke

Nesta seção, os planos de parâmetros do sistema (1)-(4) são analisados sob a ótica da dimensão de Kaplan-Yorke (D_{KY}), conforme discutido no capítulo 1, utilizando os expoentes de Lyapunov para quantificar a complexidade dos atratores. A figura 19 mapeia essas dinâmicas, em que a escala de cores da barra superior de cada diagrama traduz os valores de (D_{KY}) em diferentes regiões dinâmicas, conforme sintetizado na tabela 4 do capítulo 1.

No plano $f_0 \times E_0$, a figura 19(a) revela uma base de estabilidade (em preto) da qual emerge uma coluna ciano entre $14,6 \leq E_0 \leq 15,2$. Esta região representa o domínio do comportamento quase-periódico, com dimensão $D_{KY} \approx 2,00$. A ampliação em (b) detalha a transição na borda dessa coluna: a passagem da quase-periodicidade (em ciano) para o caos ocorre por meio de estruturas pretas, conhecidas como janelas de estabilidade ou estruturas periódicas estáveis. Nessas regiões, o sistema atravessa sucessivas bifurcações de duplicação de período antes do desenvolvimento pleno do atrator estranho, fenômeno capturado pela transição entre o preto e o amarelo.

A influência do parâmetro E_{ac} é observada nos seguintes planos. No diagrama em (c), observamos que a região de maior complexidade (em amarelo e ciano) está restrita a uma faixa de E_0 , aproximadamente entre 14,55 e 15,20, e de E_{ac} , aproximadamente entre 0,00 e 2,10. Para E_{ac} maior que 2,10, a região de caos se estende de E_0 entre 15,20 a 16,00. Em (d) apresenta-se uma ampliação deste cenário, evidenciando a autossimilaridade do sistema. No diagrama (e), como já observado, não se observa a dinâmica de quase-periodicidade com os parâmetros utilizados.

Esta análise corrobora a sensibilidade do modelo aos parâmetros de controle e valida a aplicação da conjectura de Kaplan-Yorke como ferramenta quantitativa para delimitar as fronteiras dinâmicas do sistema estudado (figura 19). Planos de parâmetros ilustrando as dinâmicas, com associações de cores à dimensão de Kaplan-Yorke, conforme a barra de cores dos diagramas. Esses planos referem-se ao sistema estudado nesta dissertação, para os parâmetros $f_0 \times E_0$, $E_0 \times E_{ac}$ e $f_0 \times E_{ac}$. (b) e (d) mostram, respectivamente, uma ampliação de (a) e (c). Na figura (e), temos o diagrama do plano $f_0 \times E_{ac}$. Nota-se que este não apresenta a cor ciano por não apresentar quase-periodicidade. As linhas em branco em (a), (c) e (e) representam, respectivamente, os parâmetros fixados em cada caso ($E_{ac}; f_0; E_0$).

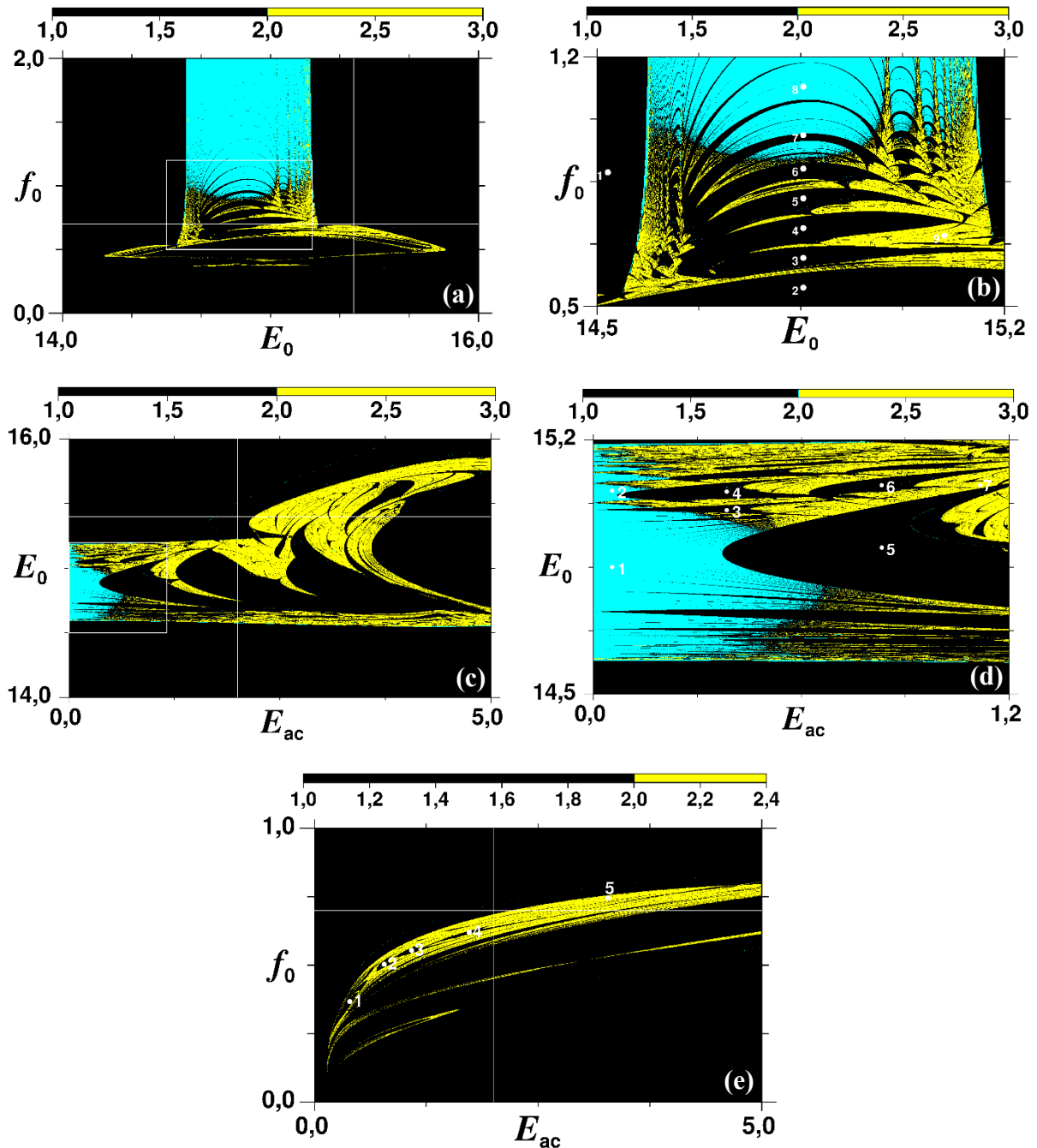


Figura 19. Planos de parâmetros ilustrando as dinâmicas, conforme as associações de cores à dimensão de Kaplan-Yorke, de acordo com a barra de cores sobre os diagramas. Esses planos se referem ao sistema estudado nesta dissertação, para os parâmetros $f_0 \times E_0$, $E_0 \times E_{ac}$ e $f_0 \times E_{ac}$. (b) e (d) mostram uma ampliação de (a) e (c), respectivamente. Na figura (e) temos o diagrama para o plano $E_{ac} \times f_0$. Nota-se que este não apresenta a cor ciano por não conter quase-periodicidade. Fonte: elaborada pela autora (2026).

CAPÍTULO 4 – CONCLUSÃO

Os materiais semicondutores constituem uma importante classe de sistemas físicos capazes de apresentar comportamentos dinâmicos complexos quando submetidos a condições externas específicas. Em particular, os processos de geração e recombinação de portadores de carga podem conduzir o sistema a regimes oscilatórios, quase-periódicos e caóticos, tornando a teoria dos sistemas dinâmicos não lineares uma ferramenta fundamental para sua compreensão.

Nesta dissertação foi realizado o estudo numérico de um modelo de semicondutor baseado em equações de taxa para os processos de geração e recombinação de portadores de carga, originalmente proposto por Aoki *et al.* [7-10]. O principal objetivo consistiu em investigar, por meio da teoria do caos e de ferramentas modernas de análise não linear, a organização global do espaço de parâmetros do sistema e os mecanismos responsáveis pelas diferentes respostas dinâmicas observadas.

Para isso, foram construídos planos de parâmetros de alta resolução utilizando o espectro dos expoentes de Lyapunov como critério de classificação dinâmica. Os resultados permitiram identificar regiões de estabilidade, periodicidade, quase-periodicidade e caos, evidenciando a rica estrutura do espaço de parâmetros do modelo. Em particular, observou-se a coexistência de extensas regiões caóticas com estruturas periódicas organizadas, indicando que pequenas variações nos parâmetros de controle podem produzir mudanças qualitativas significativas na dinâmica do sistema.

A análise dos atratores associados aos diferentes pontos dos planos de parâmetros confirmou a presença de ciclos limite, toros invariantes e atratores estranhos, permitindo caracterizar geometricamente os regimes dinâmicos observados. Os espectros de Lyapunov mostraram-se ferramentas eficientes para distinguir quantitativamente esses comportamentos, enquanto a aplicação da conjectura de Kaplan-Yorke permitiu estimar a complexidade geométrica dos atratores por meio de sua dimensão fractal.

Outro resultado relevante foi a identificação de estruturas de periodicidade imersas em regiões caóticas, semelhantes às estruturas conhecidas na literatura como camarões e línguas de Arnold. Por exemplo, na figura 14, os pontos 4 e 6 pertencem a duas estruturas do tipo camarão, enquanto o ponto 5 pertence a uma estrutura do tipo língua de Arnold. A presença dessas estruturas reforça a universalidade dos mecanismos de organização observados em sistemas não lineares dissipativos e demonstra que os modelos de semicondutores compartilham propriedades fundamentais com diversos sistemas físicos, químicos e biológicos.

Finalmente, os resultados apresentados nesta dissertação demonstram que a teoria dos sistemas dinâmicos não lineares constitui uma ferramenta poderosa para a compreensão de fenômenos complexos em materiais semicondutores. A identificação das regiões de estabilidade, quase-periodicidade e caos fornece informações relevantes sobre os limites operacionais desses dispositivos e sobre os mecanismos físicos responsáveis pelas instabilidades observadas. Dessa forma, o presente trabalho contribui não apenas para o avanço do conhecimento fundamental em dinâmica não linear aplicada à física da matéria condensada, mas também para futuras aplicações em dispositivos eletrônicos, sistemas de sensoriamento e tecnologias baseadas em materiais semicondutores.

Como perspectivas futuras, destacam-se a incorporação de mecanismos adicionais de geração e recombinação, especialmente processos de captura assistida por campo elétrico, a investigação de outros parâmetros físicos do modelo, a realização de análises de bifurcação mais detalhadas e a comparação direta entre resultados numéricos e experimentais. Essas extensões poderão contribuir para uma descrição mais completa da dinâmica dos semicondutores e para o desenvolvimento de estratégias de controle de regimes oscilatórios e caóticos em dispositivos eletrônicos reais.

REFERÊNCIAS

- [1] STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. 3. ed., CRC Press, 2024.
- [2] FERRARA, N.; FERRARA, P. C. **Caos: Uma Introdução**. São Paulo, 1995.
- [3] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2026.
- [4] SIDERIS, T. C. **Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems**. Atlantis Studies in Differential Equations. Paris: Atlantis Press, 2013.
- [5] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. 3. ed. Boston: Academic Press, 2013.
- [6] WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 16, n. 3, p. 285–317, jul. 1985. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.
- [7] AOKI, K. **Nonlinear Dynamics and Chaos in Semiconductors**. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2001.
- [8] AOKI, K.; YAMAMOTO, K. Nonlinear Response and Chaos in Semiconductors Induced by Impact Ionization. **Applied Physics A**, v. 48, n. 3, p. 273-286, 1989.
- [9] AOKI, K.; MUGIBAYASHI, N.; YAMAMOTO, K. Chaotic Behavior of a Driven Current Filament Observed in High-Purity n-GaAs at 4.2 K. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 57, n. 1, p. 26-29, 1988.
- [10] AOKI, K.; MUGIBAYASHI, N.; YAMAMOTO, K. New Bifurcation Routes to Chaos of a Driven Current Filament in Semiconductors Simulated by Numerical Computation. **Physica Scripta**, v. T29, p. 215-219, 1989.

- [11] SHAW, M. P.; MITIN, V. V.; SCHÖLL, E.; GRUBIN, H. L. **The Physics of Instabilities in Solid State Electron Devices**. New York: Springer US, 1992.
- [12] ALBUQUERQUE, H. A. **Fenômenos não-lineares de transporte elétrico induzidos por geração-recombinação em semicondutores**. 2005. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005.
- [13] SCHÖLL, E. **Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors: Self-Organization Induced by Generation and Recombination Processes**. Berlin: Springer, 1987.
- [14] RUBINGER, R. M. **Auto-organização induzida por processos de geração e recombinação ativados por campo elétrico em semicondutores em regime de não equilíbrio termodinâmico**. 1999. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.
- [15] NIEDERNOSTHEIDE, F.-J. (ed.). **Nonlinear Dynamics and Pattern Formation in Semiconductors and Devices**. Berlin: Springer, 1995.
- [16] ALBUQUERQUE, H. A. **Processos não-lineares de geração e recombinação em semicondutores: simulação e dinâmica**. 2001. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.
- [17] PALIS JÚNIOR, J.; MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1978.
- [18] STOOP, R.; MARTIGNOLI, S.; BENNER, P.; STOOP, R. L.; UWATE, Y. Shrimps: Occurrence, scaling and relevance. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 22, n. 10, p. 1230032, 2012. DOI: 10.1142/S0218127412300327.
- [19] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. New York: Springer, 1996.
- [20] OLIVEIRA, A. L. de; CORRÊA, G. B.; ALBUQUERQUE, H. A.; FARIAS, K. M.;

RECH, P. C. Multistability and quint points in an intensity-modulated magneto-optical trap model. **Physics Letters Section A**, v. 562, p. 131023, dez. 2025. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.131023.

[21] SEEGER, K. **Semiconductor Physics: An Introduction**. 4. ed. Berlin: Springer, 1989.

[22] CALLISTER JÚNIOR, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

[23] CAMPOS, L. C. **Nanofios de óxido de zinco e nanofitas de grafeno: fabricação, estrutura e propriedades de transporte (opto)eletrônico**. 2010. 100 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.



JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS
TECNOLÓGICAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Holokx Abreu Albuquerque, professor do curso de Mestrado Acadêmico em Física, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação intitulada: **“PLANO DE PARÂMETROS PARA A RESPOSTA NÃO LINEAR DE UM MODELO DE SEMICONDUTOR”** de autoria da acadêmica Raimunda Antonina Lopes Figueredo.

Joinville, 18 de setembro de 2026.

Assinado digitalmente - SGPe

Holokx Abreu Albuquerque



Assinaturas do documento



Código para verificação: **8O15L8ZC**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:



HOLOKX ABREU ALBUQUERQUE (CPF: 024.XXX.916-XX) em 18/09/2026 às 14:04:10

Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:40:29 e válido até 30/03/2118 - 12:40:29.

(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link <https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTlwMjJfMDAwMzc2NjJfMzc2NzFfMjAyNI84TzE1TDhaQw==> ou o site

<https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo> e informe o processo **UDESC 00037662/2026** e o código **8O15L8ZC** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.