

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO VITOR CORDEIRO

**MELHORIA DA PROPAGAÇÃO DE ESTADOS DESLOCALIZADOS EM
CAMINHADAS QUÂNTICAS VIA PARADOXO DE PARRONDO**

JOINVILLE

2026

JOÃO VITOR CORDEIRO

**MELHORIA DA PROPAGAÇÃO DE ESTADOS DESLOCALIZADOS EM
CAMINHADAS QUÂNTICAS VIA PARADOXO DE PARRONDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim

JOINVILLE

2026

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Cordeiro, João Vitor

Melhoria da propagação de estados deslocalizados em
caminhadas quânticas via paradoxo de Parrondo / João Vitor
Cordeiro. -- 2026.

54 p.

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2026.

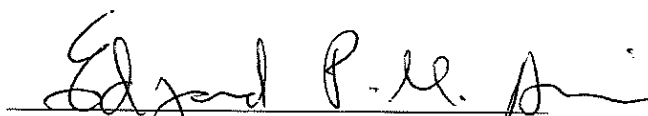
1. Caminhada quântica. 2. Transporte quântico. 3. Defeitos de
fase. 4. Protocolos temporais de alternância. 5. Paradoxo de
Parrondo. I. Amorim, Edgard Pacheco Moreira . II. Universidade do
Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Ata da reunião da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Física do CCT/UDESC para avaliar a dissertação do mestrando **João Vitor Cordeiro**.

Aos vinte e sete dias do mês de julho de dois mil e vinte e seis, às quinze horas e trinta minutos, reuniu-se a Banca Examinadora para a avaliação da dissertação do mestrando **João Vitor Cordeiro**, na sala B-08 do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, em conformidade com a Resolução nº 007/2026 do CONSUNI. Na presença do público interessado, estiveram presentes o aluno, e os examinadores: Professor Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim do CCT/UDESC (presidente/orientador), Dr. Jefferson José Ximenes da UFU, e Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima do CCT/UDESC. Aberta a sessão, o professor Edgard Pacheco Moreira Amorim cumprimentou a todos os presentes, apresentou o mestrando João Vitor Cordeiro e a Banca Examinadora. Após, chamou o candidato para fazer sua exposição. O mestrando apresentou os resultados de sua dissertação intitulada "**Melhoria da propagação de estados deslocalizados em caminhadas quânticas via paradoxo de Parrondo**". Em seguida, os membros da Banca fizeram comentários e arguições a respeito da dissertação. Após o mestrando terminar de responder a todos os questionamentos apresentados, a Banca deu-se por satisfeita. Os membros da Banca deliberaram sobre o resultado, e o presidente anunciou a todos o parecer da Banca considerando o mestrando (.....*aprovado*.....), e recomendando o grau de Mestre em Física, na área de Física, a **João Vitor Cordeiro**, após a entrega da versão definitiva do trabalho com as modificações sugeridas pela Banca. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo candidato.

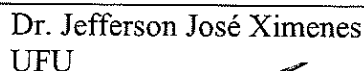
Joinville, 27 de julho de 2026.

Banca Examinadora:

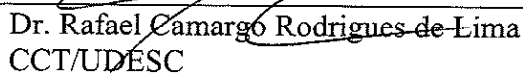


Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim
CCT/UDESC (presidente/orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br JEFFERSON JOSE XIMENES
Data: 27/07/2026 17:13:35-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

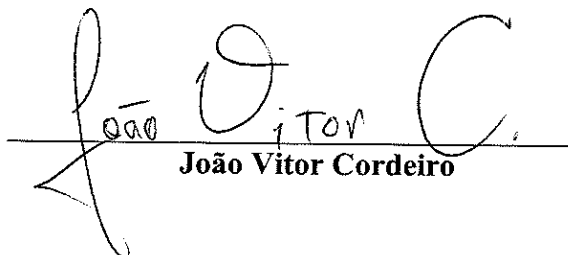


Dr. Jefferson José Ximenes
UFU



Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima
CCT/UDESC

Candidato:



João Vitor Cordeiro

Dedico este trabalho para a minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria, primeiramente, de agradecer aos meus pais, Daniela e Robertt, pela confiança, paciência e pelo apoio incondicional ao longo de minha trajetória acadêmica. Se não fosse por vocês, eu não estaria onde estou hoje.

Agradeço com todo meu carinho à minha mulher Fernanda por estar ao meu lado durante toda esta jornada. Obrigado pelo apoio, compreensão e paciência. Sua presença, mesmo distante, foi fundamental para a conclusão desta etapa da minha vida.

Expresso minha gratidão ao meu orientador, Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim, pela sua orientação, dedicação e pelos ensinamentos que contribuíram para o desenvolvimento de minha maturidade como pesquisador.

Agradeço ao Programa de Bolsas de Monitoria da Pós-Graduação (PROMOP) pelo suporte financeiro concedido durante o período do mestrado, fundamental para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos companheiros que conheci durante o mestrado, pelos momentos de convivência, pelas risadas, pelas discussões sobre física e por todas as experiências compartilhadas ao longo desta jornada.

Agradecemos ao Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho em São Paulo (CENAPAD-SP) pelo acesso aos recursos computacionais utilizados neste trabalho.

Meus agradecimentos ao secretário do Programa de Pós-Graduação em Física (PPGF), Sidnei da Costa Otero, pela atenção e auxílio prestados nas questões administrativas durante todo o período do curso.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e para a conclusão desta etapa, o meu mais sincero muito obrigado.

*“Se vi mais longe foi por estar sobre os ombros
de gigantes - Isaac Newton.”*

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o transporte quântico de estados deslocalizados em caminhadas quânticas contínuas no tempo (CQCT) em uma rede unidimensional contendo um único defeito local. O defeito é implementado por meio da introdução de amplitudes de transição complexas nas ligações que conectam o sítio correspondente à posição média do estado inicial deslocalizado aos seus vizinhos mais próximos. Considerando estados iniciais gaussianos, analisamos como a presença de defeitos complexos afeta a dinâmica de propagação do caminhante quântico e o espalhamento do pacote de onda sobre a rede. Os resultados obtidos mostram que um único defeito local é capaz de aumentar significativamente o espalhamento balístico do estado inicial, evidenciando que a engenharia de fases pode atuar como um mecanismo eficiente de controle do transporte quântico. Além disso, foi implementado um protocolo temporal de alternância entre duas configurações defectivas distintas, cada uma individualmente associada a regimes de baixa eficiência de propagação. De forma surpreendente, a alternância temporal entre essas configurações conduz a um aumento da eficiência do transporte do caminhante quântico, caracterizando uma manifestação do paradoxo de Parrondo em CTQWs com estados iniciais deslocalizados.

Palavras-chave: caminhadas quânticas. transporte quântico. defeitos de fase. protocolos temporais de alternância. paradoxo de Parrondo.

ABSTRACT

In this work, we investigate the quantum transport of delocalized states in continuous-time quantum walks (CTQWs) on a one-dimensional lattice containing a single local defect. The defect is implemented through the introduction of complex-valued hopping amplitudes on the edges connecting the site corresponding to the mean position of the delocalized initial state to its nearest neighbors. Considering Gaussian initial states, we analyze how the presence of complex defects affects the propagation dynamics of the quantum walker and the spreading of the wave packet along the lattice. The obtained results show that a single local defect is capable of significantly enhancing the ballistic spreading of the initial state, demonstrating that phase engineering can act as an efficient mechanism for controlling quantum transport. Furthermore, a time-dependent alternation protocol between two distinct defect configurations was implemented, each one individually associated with low transport efficiency. Surprisingly, the temporal alternation between these configurations leads to an enhancement of the transport efficiency of the quantum walker, characterizing a manifestation of Parrondo's paradox in CTQWs with delocalized initial states.

Keywords: quantum walks. quantum transport. phase defects. temporal alternation protocols. Parrondo's paradox.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Representação esquemática de caminhadas unidimensionais nos instantes $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Em (a), caminhada aleatória clássica (CAC): o caminhante ocupa deterministicamente um único sítio a cada passo temporal. Em (b), caminhada quântica (CQ): o estado evolui como uma superposição de trajetórias, produzindo uma distribuição de probabilidades com interferências quânticas. Em ambos os casos, o tamanho dos círculos é proporcional à probabilidade de ocupação em cada sítio da rede.	15
Figura 2	– Distribuições de probabilidade em função da posição para uma CQ (em azul) e quântica (em preto), evidenciando suas características distintas. Enquanto a distribuição clássica apresenta perfil aproximadamente gaussiano, associado a um processo difusivo, a distribuição quântica exibe estrutura marcada por interferências, que resulta em uma probabilidade maior nas regiões mais distantes do centro. O detalhe mostra como a dispersão aumenta com o tempo em ambos os casos: a caminhada clássica apresenta $\sigma(t) \propto t^{1/2}$, enquanto a CQ segue $\sigma(t) \propto t$, caracterizando um regime balístico.	17
Figura 3	– Diagrama dos jogos de Parrondo, indicando as probabilidades associadas a cada cenário. O jogo A apresenta caráter desfavorável, com probabilidade de perda de 51%, enquanto o jogo B é condicionado ao estado do capital, exibindo dois regimes distintos: um favorável, com probabilidade de ganho de 75%, e outro desfavorável, com probabilidade de perda de 90%.	19
Figura 4	– Evolução do capital médio obtido a partir de 100000 simulações, cada uma composta por 150 jogadas. As curvas em vermelho e preto correspondem, respectivamente, aos jogos A e B jogados individualmente, enquanto a curva em azul representa a estratégia combinada (AAABB), evidenciando o surgimento de um cenário favorável a partir da alternância entre estratégias individualmente perdedoras.	20
Figura 5	– (a) As sete pontes de Königsberg conectando as quatro porções de terra numeradas por 1, 2, 3 e 4. (b) Representação em grafo do problema das pontes de Königsberg, onde os vértices representam as regiões de terra e as arestas correspondem às pontes.	22
Figura 6	– Representação esquemática de uma CQCT em uma rede unidimensional infinita.	25
Figura 7	– Representação esquemática de uma CQCT em uma rede unidimensional contendo um defeito localizado no sítio d . As ligações entre o sítio defeituoso e seus vizinhos $d \pm 1$ possuem amplitudes de transição complexas, caracterizadas pelos parâmetros ξ e $\theta_{\pm}$, enquanto as demais conexões da rede permanecem homogêneas com $\gamma \in \mathbb{R}$	28

- Figura 8 – Distribuição Gaussiana discreta inicial $\phi(j)$ com diferentes dispersões iniciais $\sigma_0 = 3$, $\sigma_0 = 5$ e $\sigma_0 = 7$. O aumento de σ_0 produz estados progressivamente mais deslocalizados ao longo da rede unidimensional. 29
- Figura 9 – Taxa de espalhamento α em função da largura inicial σ_0 para CQCT em $\gamma t = 1000$. Os círculos azuis representam os resultados numéricos, enquanto as linhas preta e vermelha correspondem às Eqs. (34) e (35), respectivamente, para $\gamma = 1$ 32
- Figura 10 – Probabilidade P_0 no defeito em função de ξ para (a) $\theta_- = \theta_+ = 0$ e (b) $\theta_- = 0$, $\theta_+ = \pi$. Os painéis (c) e (d) apresentam a probabilidade reescalada $\gamma t P_0$ em função de θ para $\theta_- = \theta_+ = \theta$ e $\theta_- = -\theta_+ = \theta$, respectivamente, com $\xi = 1$. Linhas sólidas correspondem a $\gamma t = 1000$ e tracejadas a $\gamma t = 100$. O estado localizado corresponde a $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ (preto), enquanto os estados gaussianos possuem $\sigma_0 = 1$ (vermelho), 5 (azul) e 10 (verde). Os detalhes dos painéis (c) e (d) apresentam P_0 em função de γt para $\sigma_0 = 10$ e $\theta = \pi/4$ cujas curvas em laranja representam os ajustes obtidos para $\gamma t > 500$ evidenciando leis de potência. 34
- Figura 11 – Razão σ_d/σ entre as dispersões nas redes defeituosa e homogênea. Os painéis (a) e (b) mostram σ_d/σ em função de ξ para $\theta_- = \theta_+ = 0$ e $\theta_- = 0$, $\theta_+ = \pi$, respectivamente. Os painéis (c) e (d) apresentam σ_d/σ em função de θ para $\theta_- = \theta_+ = \theta$ e $\theta_- = -\theta_+ = \theta$, com $\xi = 1$. A curva preta corresponde ao estado localizado $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, enquanto os estados gaussianos possuem $\sigma_0 = 1$ (vermelho), 5 (azul) e 10 (verde). Em todos os casos, a evolução foi realizada até $\gamma t = 1000$ 35
- Figura 12 – (a) Mapa de contorno da razão σ_d/σ em função dos parâmetros do defeito ξ e θ . A simulação foi realizada para um estado inicial Gaussiano ($\sigma_0 = 1$) evoluído até $\gamma t = 1000$. (b) Razão σ_d/σ em função do parâmetro ω . Os valores de ω selecionados para cada protocolo de alternância estão indicados na figura. As simulações foram realizadas para um estado inicial Gaussiano ($\sigma_0 = 1$) evoluído até $\gamma t = 2000$ 37

Figura 13 – Distribuição de probabilidade P_j para as estratégias perdedoras A (vermelho), B (azul), C (verde) e D (laranja) nos painéis (a)–(c), e para os protocolos de alternância AB (roxo), CB (verde-azulado escuro) e CD (verde-limão) nos painéis (d)–(f). Os painéis (g)–(i) mostram o desvio padrão correspondente σ em função do tempo, comparando cada par de estratégias perdedoras com seu respectivo protocolo de alternância de Parrondo. As estratégias são definidas pelos parâmetros de defeito A: ($\xi = -1.8$, $\theta_- = -1.2\pi$, $\theta_+ = 1.2\pi$), B: ($\xi = 1.4$, $\theta_- = -1.5\pi$, $\theta_+ = 1.5\pi$), C: ($\xi = -1.0$, $\theta_{\pm} = 1.1\pi$) e D: ($\xi = -1.0$, $\theta_{\pm} = 0.9\pi$). A rede homogênea H (linha tracejada preta) é incluída como referência. Os insets nos painéis (h) e (i) mostram que C, B e D permanecem abaixo de H ao longo de toda a evolução; no painel (i), as curvas de C e D são quase indistinguíveis. Todas as simulações foram realizadas para um estado inicial gaussiano com $\sigma_0 = 1$ e evoluídas até $\gamma t = 1000$. . . 39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do defeito para cada estratégia perdedora (EP) e a correspondente razão de espalhamento σ_d/σ em $\gamma t = 1000$	38
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAC	Caminhada Aleatória Clássica
CQ	Caminhada Quântica
CQCT	Caminhada Quântica Contínua no Tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CAMINHADAS ALEATÓRIAS CLÁSSICAS E QUÂNTICAS	15
1.2	CAMINHADAS QUÂNTICAS EM REDES DEFEITUOSAS	17
1.3	ESTADOS DESLOCALIZADOS EM CAMINHADAS QUÂNTICAS . . .	18
1.4	PARADOXO DE PARRONDO EM CQS	19
1.5	OBJETIVO	21
1.6	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	21
2	CAMINHADA QUÂNTICA CONTÍNUA NO TEMPO	22
2.1	MOTIVAÇÃO HISTÓRICA: O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGS- BERG E TEORIA DE GRAFOS	22
2.2	CQCT EM UMA LINHA INFINITA UNIDIMENSIONAL	24
2.3	CQCT COM DEFEITOS COMPLEXOS NA REDE	28
2.4	ESTADO INICIAL DESLOCALIZADO GAUSSIANO	29
2.5	PROTOCOLO DE ALTERNÂNCIA PARRONDO	30
3	RESULTADOS	31
3.1	ESPALHAMENTO DE UM ESTADO GAUSSIANO	31
3.2	ESTADOS GAUSSIANOS EM REDES DEFEITUOSAS	33
3.3	PROTOCOLO DE PARRONDO EM ESTADOS GAUSSIANOS	36
4	CONCLUSÕES	41
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A – EVOLUÇÃO TEMPORAL DO PACOTE DE ONDA GAUSSIANO	47
	APÊNDICE B – SIMETRIAS EM CQCTS NO GRAFO DEFEITU- OSO L_5	52

1 INTRODUÇÃO

1.1 CAMINHADAS ALEATÓRIAS CLÁSSICAS E QUÂNTICAS

A caminhada aleatória clássica (CAC), introduzida por Pearson (1905), é um tipo de processo estocástico muito utilizado para modelar fenômenos físicos e matemáticos. De forma geral, ela descreve a trajetória de um caminhante cujos passos são determinados por eventos aleatórios. Devido à sua versatilidade, a CAC têm sido amplamente empregada tanto na descrição de processos físicos quanto no desenvolvimento de algoritmos como PageRank (Page et al., 1999), aprendizado semi-supervisionado (Zhu, 2008), modelagem matemática do movimento de animais, microrganismos e células (Codling; Plank; Benhamou, 2008).

No caso mais simples, em uma dimensão, considera-se um caminhante que se desloca ao longo de uma linha, com cada movimento sendo definido por um evento aleatório, como o lançamento de uma moeda. Para ilustrar este sistema, imagine que o caminhante parte de uma certa posição inicial e a cada lançamento de moeda um passo é realizado: se o resultado for “cara”, o caminhante se desloca um passo para a direita; se for “coroa”, ele se desloca um passo para a esquerda. A Figura 1 (a) ilustra uma das possíveis trajetórias do caminhante. Inicialmente, o caminhante encontra-se na posição inicial $j = 0$. Após o primeiro lançamento da moeda, cujo resultado é “cara”, ele se desloca para a direita ocupando a posição $j = 1$ no instante $t = 1$. Nos lançamentos subsequentes (coroa, cara, cara), encontra-se em $j = 2$ no instante $t = 4$. Após diversos lançamentos, a posição final do caminhante dependerá da sequência de resultados obtidos ao longo da dinâmica.

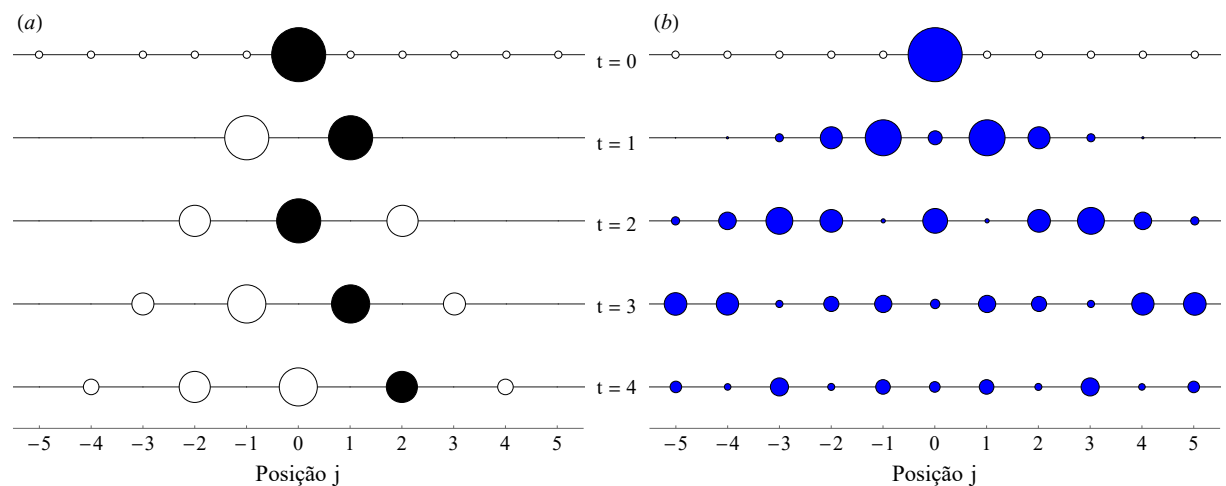


Figura 1 – Representação esquemática de caminhadas unidimensionais nos instantes $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Em (a), caminhada aleatória clássica (CAC): o caminhante ocupa deterministicamente um único sítio a cada passo temporal. Em (b), caminhada quântica (CQ): o estado evolui como uma superposição de trajetórias, produzindo uma distribuição de probabilidades com interferências quânticas. Em ambos os casos, o tamanho dos círculos é proporcional à probabilidade de ocupação em cada sítio da rede.

Cada trajetória individual é incerta, pois está condicionado aos resultados aleatórios da moeda. Logo, a posição do caminhante não pode ser descrita de forma determinística, mas por uma distribuição binomial na forma

$$P(n_d, n_e) = \frac{N!}{n_d! n_e!} \frac{1}{2^N}, \quad (1)$$

sendo n_d o número de passos para a direita e n_e o número de passos para a esquerda após um total de $N = n_d + n_e$ (Salinas, 1997).

A caminhada quântica (CQ) surge como uma extensão desses processos no contexto da mecânica quântica, incorporando princípios fundamentais como superposição e interferência quântica. Esse tipo de modelo foi introduzido na forma discreta no tempo por (Aharonov; Davidovich; Zagury, 1993) enquanto (Farhi; Gutmann, 1998) estenderam para a versão contínua. As CQs tornaram-se modelos essenciais para o processamento e a computação de informação quântica, tendo contribuído significativamente para algoritmos de busca (Shenvi; Kempe; Whaley, 2003; Childs; Goldstone, 2004; Magniez et al., 2007), para a computação universal (Lovett et al., 2010) e para a investigação experimental de sistemas físicos complexos (Schreiber et al., 2010; Karski et al., 2009). Na formulação contínua no tempo, comumente citada como caminhada quântica contínua no tempo (CQCT), o estado do sistema é completamente caracterizado pelo espaço de Hilbert de posições discretas. Toda a dinâmica do modelo é regido por um operador de evolução unitário, que é construído com base no Hamiltoniano do sistema (Portugal, 2013; Jr., 2017).

Diferentemente do caso clássico, o caminhante quântico pode evoluir simultaneamente por múltiplos caminhos, e as amplitudes associadas a esses caminhos podem interferir entre si, alterando a dinâmica do sistema. A Figura 1 (b) apresenta esse comportamento. No instante $t = 0$, o caminhante ocupa a posição inicial $j = 0$. Entretanto, distintamente do caso clássico, sua caminhada não corresponde à escolha de uma única trajetória bem definida. Em instantes subsequentes, o caminhante passa a ocupar simultaneamente diferentes posições possíveis, cada uma associada a uma probabilidade. Esse comportamento se mantém durante toda a dinâmica, sendo consequência da natureza quântica do sistema.

Portanto, assim como na CAC, a posição da partícula em uma CQ é descrita probabilisticamente. Entretanto, enquanto na CAC essa distribuição resulta de um processo estocástico que determina a trajetória da partícula, na CQ o estado evolui de forma unitária e determinística. A aleatoriedade surge no momento da medida, quando a partícula é detectada em uma das posições possíveis, com probabilidades determinadas pelas amplitudes de sua função de onda. Nesse contexto, a evolução do sistema é inteiramente caracterizada pela distribuição de probabilidade $P(j, t)$, que fornece a probabilidade de encontrar a partícula na posição j em um dado instante de tempo t . A distribuição espacial da CQ, quantificada pelo desvio padrão, apresenta um crescimento linear ao longo do tempo ($\sigma(t) \propto t$), caracterizando um regime balístico, em contraste com o comportamento difusivo da CAC, nos qual o desvio padrão cresce proporcionalmente com $\sigma(t) \propto t^{1/2}$ (Shenvi; Kempe; Whaley, 2003). A Figura 2 ilustra as distribuições de probabilidade

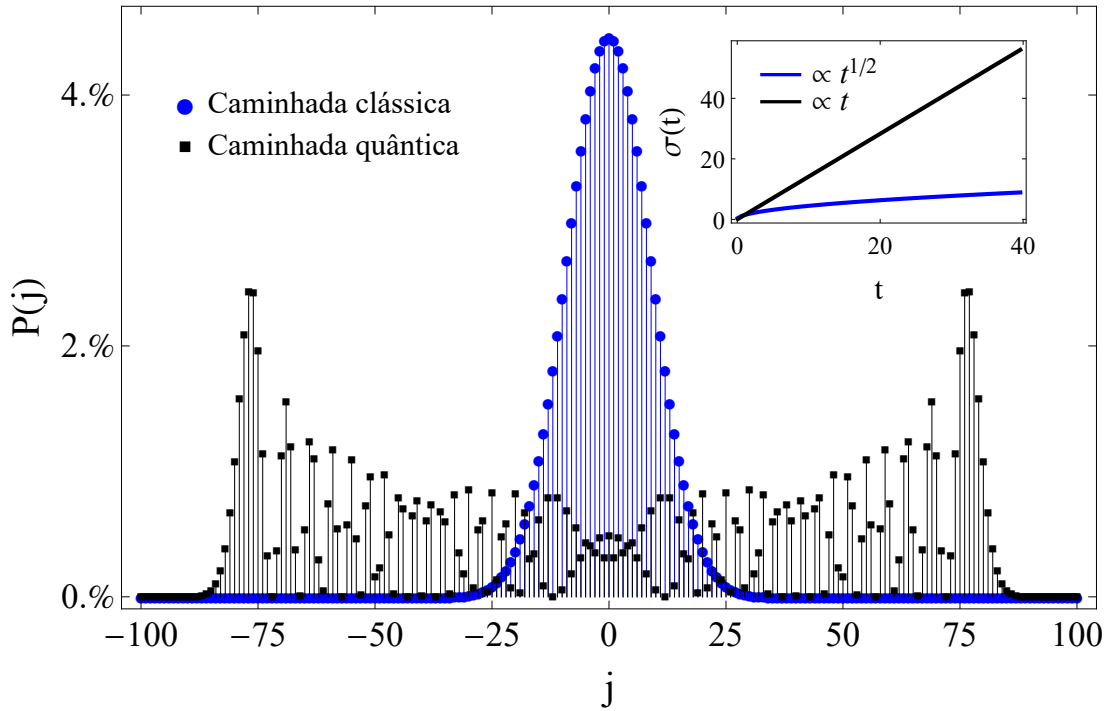


Figura 2 – Distribuições de probabilidade em função da posição para uma CQ (em azul) e quântica (em preto), evidenciando suas características distintas. Enquanto a distribuição clássica apresenta perfil aproximadamente gaussiano, associado a um processo difusivo, a distribuição quântica exibe estrutura marcada por interferências, que resulta em uma probabilidade maior nas regiões mais distantes do centro. O detalhe mostra como a dispersão aumenta com o tempo em ambos os casos: a caminhada clássica apresenta $\sigma(t) \propto t^{1/2}$, enquanto a CQ segue $\sigma(t) \propto t$, caracterizando um regime balístico.

da CAC e da CQ, destacando em particular o comportamento distinto da dispersão do caminhante em cada caso.

1.2 CAMINHADAS QUÂNTICAS EM REDES DEFEITUOSAS

Em sistemas físicos reais a estrutura da rede é raramente perfeita, sendo comum encontrar impurezas ou defeitos. Essas imperfeições podem mudar bastante a maneira como o estado quântico se propaga, afetando os padrões de interferência quântica e consequentemente o regime de transporte. Nesse contexto, é muito importante entender como esses defeitos afetam o comportamento da CQ.

Várias plataformas experimentais já mostraram implementações de CQs, como sistemas de ressonância magnética nuclear (Du et al., 2003), íons aprisionados (Schmitz et al., 2009), átomos neutros (Karski et al., 2009) e fótons individuais em meios ópticos passivos (Broome et al., 2010). Esses sistemas podem conter imperfeições estruturais na sua implementação experimental, que podem modificar de forma significativa a dinâmica, levando a fenômenos como localização, dispersão sub-balística e difusiva ou criação de estados ligados.

No caso da CQCT em redes unidimensionais, é possível introduzir defeitos na descrição

do Hamiltoniano do sistema. Quando o caminhante chega a uma região defeituosa, sua propagação balística pode ser drasticamente alterada. Um dos primeiros estudos a investigar essa questão foi conduzido por Wójcik et al. (2012), no qual foi demonstrado que introduzir uma mudança de fase em um único sítio de uma caminhada quântica discreta no tempo pode induzir um efeito de localização, levando ao confinamento da partícula nas proximidades do defeito. Os autores mostraram que a presença e a quantidade de estados localizados dependem fortemente do valor da fase introduzida e da condição interna inicial do caminhante. Seguindo essa direção, Zhang, Xue e Twamley (2014) estudaram defeitos de fase localizados em CQ discretas no tempo e descobriram que essas imperfeições podem diminuir drasticamente a velocidade de espalhamento. De maneira complementar, Li e Wang (2015) investigaram a CQCT considerando defeitos de transição e de posição, obtendo soluções analíticas que revelam a existência de estados propagantes, responsáveis pela evolução ao longo da rede, e estados ligados, que estão associados à localização da partícula nas proximidades do defeito.

1.3 ESTADOS DESLOCALIZADOS EM CAMINHADAS QUÂNTICAS

Embora defeitos desempenhem um papel importante na modificação da dinâmica das CQ, eles não são os únicos fatores relevantes. A forma do estado inicial também exerce influência significativa sobre a evolução do sistema, afetando tanto a propagação quanto os padrões de interferência, mesmo em redes ideais. Em particular, estados iniciais deslocalizados, isto é, inicialmente distribuídos ao longo de várias posições, podem alterar a dinâmica da caminhada, influenciando diretamente o comportamento do sistema.

Na CQCT, Engster et al. (2024) mostraram que estados gaussianos deslocalizados podem manter uma fidelidade alta e apresentar regimes de propagação controlada. Isso inclui velocidade de grupo nula e a recuperação periódica do estado inicial em grafos do tipo ciclo. Ximenes, Pires e Villas-Bôas (2026) mostraram que a deslocalização inicial pode influenciar o transporte quântico, levando a diferentes regimes de dispersão e impactando a probabilidade de sobrevivência. Na dinâmica de estados deslocalizados em situações com defeitos, mostrou-se que pode gerar transporte direcionado (Lu et al., 2016; Khalique et al., 2021; Chaves; Chagas; Coutinho, 2023; Bottarelli; Frigerio; Paris, 2023). Todos esses resultados mostram que a deslocalização inicial pode dar origem a fenômenos dinâmicos qualitativamente distintos na evolução do sistema.

Experimentos recentes têm possibilitado a preparação e manipulação de estados iniciais em superposição de forma controlada em diferentes plataformas físicas. Em implementações fotônicas, por exemplo, observa-se que a escolha do estado inicial influencia diretamente a velocidade de propagação e os padrões de interferência na CQ (Cardano et al., 2015; Su et al., 2019). Além disso, D’Errico et al. (2020) demonstraram a realização de CQ bidimensional nessas plataformas, evidenciando que o ajuste de estados iniciais em superposição permite controlar a dinâmica dos pacotes de onda e explorar propriedades topológicas do sistema. Esses resultados reforçam o papel do estado inicial na caracterização da dinâmica, indicando

que estados deslocalizados podem modificar significativamente a propagação das partículas e possibilitar o acesso a diferentes regimes dinâmicos.

1.4 PARADOXO DE PARRONDO EM CQS

Como a eficiência de propagação da CQ está associada a melhora de seu espalhamento balístico, há um interesse em desenvolver estratégias que sejam capazes de melhorar a propagação do caminhante. Em particular, é possível explorar o *paradoxo de Parrondo* para esse fim. De maneira geral, o paradoxo de Parrondo descreve situações aparentemente contraditórias nas quais a combinação de estratégias desfavoráveis pode levar a um resultado vantajoso (Harmer; Abbot, 2002; Shu; Wang, 2014). Tal fenômeno tem sido investigado em diversas áreas, como na descrição de adaptações em sistemas biológicos (Capp et al., 2021; Cheong; Koh; Jones, 2019), em estratégias agrícolas (Gokhale; Sharma, 2023) e na análise de redes complexas (Ye et al., 2016).

Um exemplo simples pode ser construído a partir de dois jogos baseados em lançamentos de moedas. Considere um jogador com um certo capital inicial. No jogo A, utiliza-se uma moeda levemente viciada, na qual a probabilidade de perda é maior do que a de ganho, de modo que o jogador, em média, perde ao longo do tempo. No jogo B, a moeda utilizada depende do estado atual do jogador (por exemplo, se seu capital é divisível ou não por três), sendo ora desfavorável ora favorável, mas ainda resultando, em média, em perda quando jogada isoladamente. De forma surpreendente, caso o jogador decida alternar estrategicamente entre os jogos A e B segundo uma sequência, o jogador passa a obter ganhos ao longo do tempo. Por exemplo, suponhamos que o jogador decida jogar três jogos A consecutivamente e logo em seguida dois jogos B consecutivamente. A sequência (AAABB) ao ser repetida em longo prazo, leva a uma situação favorável. A Figura 3 apresenta uma representação esquemática dos jogos utilizados na exemplificação, enquanto a simulação correspondente da evolução do capital do jogador é mostrada na Figura 4. Uma descrição detalhada do mecanismo do paradoxo de Parrondo pode ser encontrada em Ref. (Harmer; Abbott, 1999).

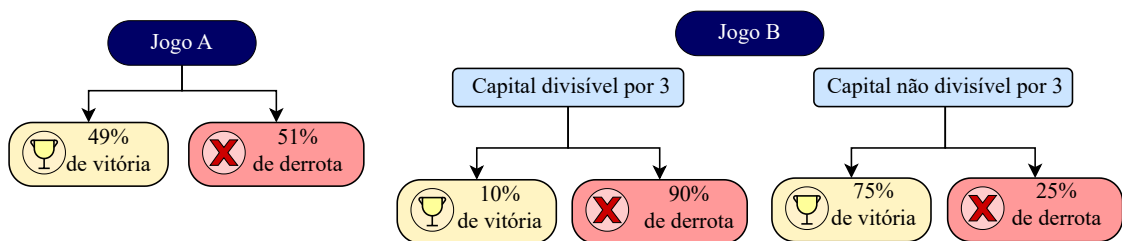


Figura 3 – Diagrama dos jogos de Parrondo, indicando as probabilidades associadas a cada cenário. O jogo A apresenta caráter desfavorável, com probabilidade de perda de 51%, enquanto o jogo B é condicionado ao estado do capital, exibindo dois regimes distintos: um favorável, com probabilidade de ganho de 75%, e outro desfavorável, com probabilidade de perda de 90%.

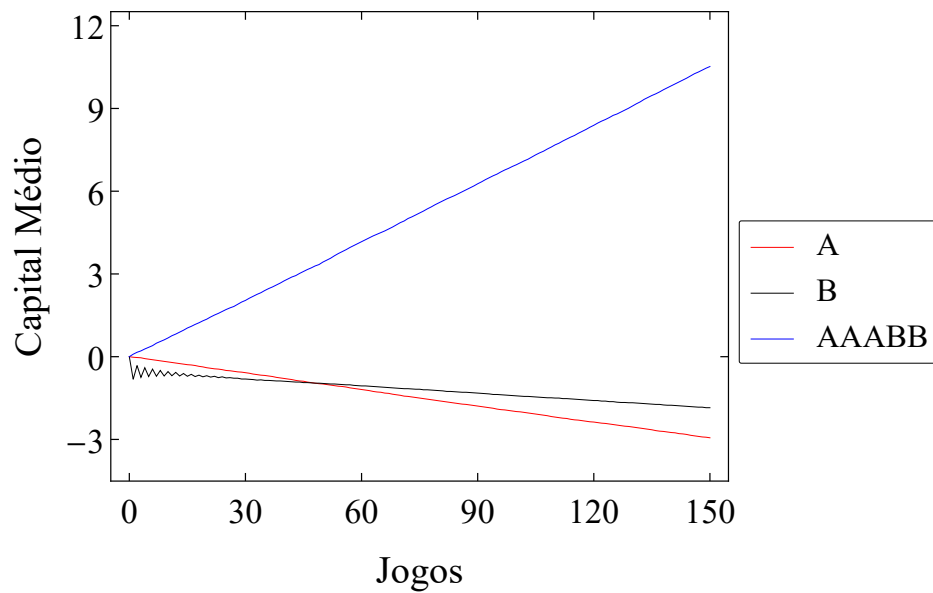


Figura 4 – Evolução do capital médio obtido a partir de 100000 simulações, cada uma composta por 150 jogadas. As curvas em vermelho e preto correspondem, respectivamente, aos jogos A e B jogados individualmente, enquanto a curva em azul representa a estratégia combinada (AAABB), evidenciando o surgimento de um cenário favorável a partir da alternância entre estratégias individualmente perdedoras.

No contexto da CQ, Ximenes, Pires e Villas-Bôas (2024) conduziram um estudo com o objetivo de investigar se a alternância entre configurações desfavoráveis do sistema poderia resultar em um comportamento global mais eficiente. Os autores estudaram a CQCT em uma rede com um único defeito, identificando duas configurações específicas, cada uma resultando de forma independente em um espalhamento ineficiente do caminhante. Entretanto, ao alternar temporariamente entre duas dessas configurações, foi observada uma significativa melhora da propagação, evidenciando o efeito de Parrondo no regime de CQCT. No entanto, a análise foi limitada a um estado inicial específico (localizado) e com o defeito modelado por amplitudes reais de transição entre o sítio com defeito e seus vizinhos.

Embora os estudos sobre CQCT avançaram bastante, ainda falta entender melhor como os estados iniciais deslocalizados e distintas imperfeições estruturais afetam essas caminhadas juntos. Por exemplo, não está claro como a presença de defeitos em uma rede unidimensional afeta a forma como a CQ evolui a partir de um estado deslocalizado Gaussiano. Ou ainda, qual impacto de se introduzir defeitos incorporando amplitudes de transição, também chamados de *hopping*, com fases. Portanto, é importante investigar como essas modificações estruturais afetam a dispersão e a distribuição de probabilidade do sistema, bem como analisar de que forma o paradoxo de Parrondo se manifesta nesse cenário.

1.5 OBJETIVO

Estudar a dinâmica de estados deslocalizados em CQCT em redes unidimensionais com a presença de defeitos locais complexos, levando em consideração tanto os efeitos das amplitudes de hopping complexas quanto os de protocolos temporais alternados do tipo Parrondo sobre o espalhamento balístico e a eficiência do transporte quântico.

1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação está organizada em três capítulos principais. No Capítulo 2, serão apresentados os fundamentos teóricos das caminhadas quânticas contínuas no tempo em redes discretas unidimensionais, com ênfase em sua formulação em termos de teoria de grafos. Além disso, será introduzido um modelo de caminhada quântica contendo um único defeito local complexo, implementado por meio da modificação das amplitudes de *hopping* da rede. Ainda neste capítulo, serão discutidas as propriedades do estado inicial deslocalizado gaussiano, bem como o protocolo temporal de alternância associado ao paradoxo de Parrondo.

No Capítulo 3, serão apresentados os resultados relacionados ao espalhamento do estado gaussiano, assim como à dinâmica da caminhada quântica contínua no tempo na presença de defeitos complexos locais. Serão analisadas numericamente grandezas associadas à distribuição espacial do caminhante e à dispersão do pacote de onda sobre a rede, incluindo o comportamento da dispersão e o mapeamento dos regimes de transporte em função dos parâmetros do defeito. Adicionalmente, serão explorados os resultados obtidos a partir da alternância temporal entre diferentes configurações de *hopping*, previamente selecionadas com base no mapeamento de parâmetros realizado, investigando seus impactos sobre a eficiência do transporte quântico e a manifestação do paradoxo de Parrondo.

Por fim, as conclusões da dissertação serão apresentadas no Capítulo 4. Cálculos complementares, demonstrações auxiliares e análise de um sistema simplificado serão apresentados no Apêndice.

2 CAMINHADA QUÂNTICA CONTÍNUA NO TEMPO

Nesta seção, apresentamos a formulação CQCT como uma generalização quântica das caminhadas aleatórias clássicas de tempo contínuo. Inicialmente, introduzimos uma motivação histórica por meio do problema das Pontes de Königsberg, com o intuito de estabelecer as bases da teoria de grafos. Em seguida, discutimos a representação matricial de grafos por meio das matrizes de adjacência e grau, fundamentais para a construção do operador que governa a dinâmica do sistema. Com essa estrutura, analisamos a CQCT em uma linha infinita unidimensional, destacando a relação entre o Hamiltoniano do sistema e o Laplaciano do grafo. Posteriormente, introduzimos modificações na rede por meio da inclusão de defeitos complexos, investigando seus efeitos na dinâmica da caminhada. Por fim, definimos o estado inicial deslocalizado de perfil gaussiano e apresentamos o protocolo de alternância de Parrondo, que será utilizado para explorar regimes distintos de dispersão ao longo da evolução temporal.

2.1 MOTIVAÇÃO HISTÓRICA: O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG E TEORIA DE GRAFOS

No início do século 18, um enigma popular era muito discutido pelos habitantes da cidade de *Königsberg* (atualmente Kaliningrado). Segundo Gribkovskaia, Sr. e Laporte (2007), o problema era saber se era possível percorrer um caminho que cruzasse apenas uma vez cada uma das sete pontes que ligavam as duas margens do rio *Pregel* e duas ilhas da cidade, como ilustrado na Figura 5 (a).

A resposta foi dada por *Leonhard Euler* em 1736, em uma obra considerada frequentemente como o início da teoria de grafos. A abordagem utilizada foi inovadora: Euler considerou estudar o problema como um todo abstraído para uma estrutura em termos de *conexões*. As áreas distintas de terra foram representadas por *vértices*, ligados por pontes ou *arestas*, tornando assim um problema estrutural, como observado na Figura 5 (b). O resultado é um conjunto de quatro vértices ligados por sete arestas.

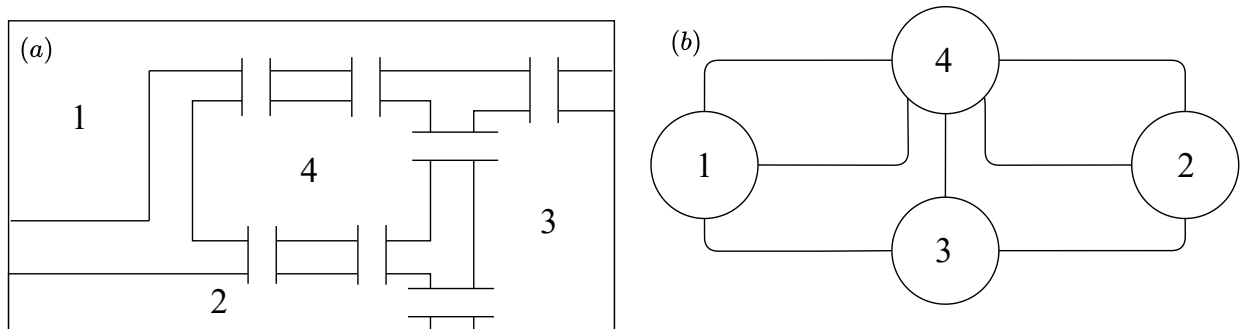


Figura 5 – (a) As sete pontes de Königsberg conectando as quatro porções de terra numeradas por 1, 2, 3 e 4. (b) Representação em grafo do problema das pontes de Königsberg, onde os vértices representam as regiões de terra e as arestas correspondem às pontes.

Euler não só resolveu o problema como também introduziu uma nova forma de descrever sistemas baseados em conexões. Assim, a análise passa a depender apenas do modo como os elementos são conectados, e não mais do modo como eles são arrumados geometricamente.

Essa nova metodologia é especialmente significativa na física, onde muitos sistemas podem ser representados por conexões. Por exemplo, na área de informação quântica, os grafos podem atuar na representação de *graph states*, para representar estados de vários qubits emaranhados. Esses estados foram estudados em áreas como cadeias de spins (Clark et al., 2007), emissores quânticos em estado sólido (Gong; Yan, 2021) e fontes de fótons individuais capazes de gerar *graph states* multifotônicos (Li et al., 2020). Logo, a ideia de grafo fornece uma base estrutural sobre como a dinâmica quântica será construída.

Formalmente, um grafo é uma estrutura matemática abstrata que descreve sistemas de relações entre elementos. É definido por $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, sendo $\mathcal{V}$ o conjunto finito de elementos denominados vértices e $\mathcal{E}$ o conjunto de arestas formados por pares de elementos de $\mathcal{V}$. Cada aresta pode ser representada como um par (u, v) com $u, v \in \mathcal{V}$, representando uma conexão entre os vértices u e v (West, 2001; Sadavare; Kulkarni, 2012).

Retornando ao problema das pontes, considerando a Figura 4 (b), vemos que o grafo associado possui os seguintes conjuntos de vértices e arestas:

$$\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{E} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (3, 4)\}. \quad (2)$$

Estamos considerando um grafo não direcionado, ou seja, a ordem dos vértices em uma aresta é irrelevante, de modo que o par (i, j) é equivalente a (j, i) . Quando existe uma aresta entre dois vértices i e j , dizemos que estes vértices são adjacentes.

Após entendermos a estrutura do problema das Pontes de Königsberg, seus respectivos conjuntos de vértices e arestas e, como os vértices se conectam, podemos introduzir uma forma de representar o grafo que é muito útil para analisá-lo matematicamente: a representação matricial.

Seguindo a formulação apresentada em West (2001), podemos introduzir uma representação da estrutura do grafo por meio da *matriz de adjacência* e *matriz grau*. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ um grafo com n vértices $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. A matriz de adjacência de $\mathcal{G}$, denotada por $\mathbf{A}$, é uma matriz de ordem n cujos elementos são definidos por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta conectando } v_i \text{ e } v_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

logo, a matriz de adjacência $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

O grau de um vértice v_i , denotado por $\mathcal{D}_i$, corresponde ao número de arestas incidentes a esse vértice. Em outras palavras, $\mathcal{D}_i$ contabiliza quantas conexões o vértice v_i estabelece com os demais vértices do grafo. Assim, define-se a *matriz grau* do grafo, indicada por $\mathbf{D}$, como a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal correspondem aos graus dos vértices.

Para um grafo com n vértices, temos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{D}_n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A construção da matriz $\mathbf{D}$ pode ser obtida diretamente a partir da matriz de adjacência $\mathbf{A}$. Em termos matriciais, isso equivale à soma dos elementos da linha associada ao vértice v_i na matriz de adjacência. Assim,

$$\mathcal{D}_i = \sum_k A_{ik}. \quad (6)$$

Para o grafo de Königsberg, considerando a Figura 4, obtemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Para que haja um percurso fechado que seja utilizado apenas uma vez por cada conexão (chamado de percurso *euleriano*), é necessário que no máximo dois vértices tenha *grau* ímpar. Como esta condição não é satisfeita no caso das pontes de Königsberg, conclui-se que o percurso é impossível.

Na seção seguinte, estudaremos o caso particular de interesse físico: a CQCT unidimensional infinita. Nesta situação, cada vértice irá corresponder a uma posição em um grafo unidimensional conectado apenas pelos seus dois vizinhos mais próximos.

2.2 CQCT EM UMA LINHA INFINITA UNIDIMENSIONAL

A CQCT é a generalização quântica da caminhada aleatória clássica de tempo contínuo, na qual a dinâmica é descrita por uma evolução unitária de tempo contínuo diretamente no espaço de posições. Diferentemente do modelo discreto, não há necessidade de introduzir um espaço de moeda, de modo que o sistema é completamente descrito pelo espaço de Hilbert associado aos vértices do grafo que representa a rede de posições acessíveis.

Conforme é observado na Figura 6, os vértices representam os estados de posição $|j\rangle$ da partícula na rede, enquanto as arestas descrevem as possíveis transições entre sítios vizinhos. O parâmetro γ caracteriza a taxa de transição (probabilidade por unidade de tempo) entre posições

adjacentes, permitindo que a partícula se mova apenas entre primeiros vizinhos. Além disso, cada sítio possui uma energia local ε , associada à permanência da partícula naquela posição da rede. Assim, cada vértice j está conectado aos vértices $j - 1$ e $j + 1$.

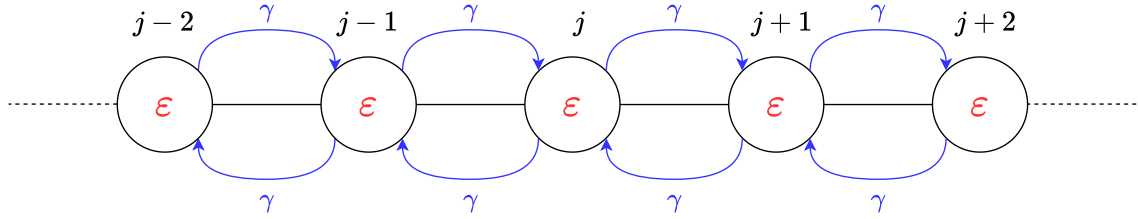


Figura 6 – Representação esquemática de uma CQCT em uma rede unidimensional infinita.

Uma vez que a equação de Schrödinger rege a evolução temporal do sistema, na forma

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (8)$$

onde assumimos $\hbar = 1$, resta estabelecer uma correspondência entre o Hamiltoniano que governa sua dinâmica e uma quantidade que atribua as características estruturais do sistema, a qual pode ser representada por meio de um grafo.

Para um partícula quântica, o Hamiltoniano do sistema é composto pela soma dos operadores de energia cinética e potencial,

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}. \quad (9)$$

Como não há interação externa atuando sobre a partícula, o potencial é nulo ($V = 0$), de modo que o Hamiltoniano reduz-se a

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (10)$$

De forma equivalente, podemos escrever o Hamiltoniano na forma

$$\hat{H} = -\gamma \nabla^2, \quad (11)$$

onde o parâmetro $\gamma = 1/(2m)$ é inversamente proporcional à massa da partícula e ∇^2 é o operador Laplaciano. No espaço contínuo unidimensional, o Laplaciano corresponde simplesmente à segunda derivada espacial,

$$\nabla^2 \psi = \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}. \quad (12)$$

Uma forma de compreender esse operador é analisá-lo como o limite de uma discretização espacial. Considerando uma rede de pontos regularmente espaçados por uma distância h , a segunda derivada pode ser escrita como

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h) + \psi(x-h) - 2\psi(x)}{h^2}. \quad (13)$$

Essa expressão indica que o operador Laplaciano pode ser visto como uma relação entre o valor da função em um ponto e os valores da função em pontos adjacentes. Quando o espaço é abordado de maneira discreta, como em uma rede de posições ou em um grafo, essa configuração se assemelha à forma do operador que rege a dinâmica do sistema. Em uma rede discreta unidimensional, no lugar de posições contínuas em x , as posições ou sítios discretos são indexados por j . Ou seja, a Eq. (13) indica uma versão discreta do operador Laplaciano, em que a operação do operador abrange combinações lineares das amplitudes ligadas aos vértices adjacentes. Essa construção reflete exatamente a estrutura matemática do *Laplaciano do grafo* $\hat{L}$, um operador que representa a conectividade da rede e é importante na descrição de processos dinâmicos que ocorrem em grafos.

Para apresentar essa correspondência, introduzimos o *Laplaciano do grafo* $\hat{L}$ associado à CQCT em uma linha unidimensional. Em geral, o Laplaciano do grafo é definido por

$$\hat{L} = \hat{A} - \hat{D}, \quad (14)$$

onde $\hat{A}$ é o operador de adjacência e $\hat{D}$ é o operador diagonal associado ao grau dos vértices. Para a linha infinita unidimensional, esses operadores podem ser escritos como

$$\hat{A} = \gamma \sum_j (|j-1\rangle\langle j| + |j+1\rangle\langle j|), \quad (15)$$

$$\hat{D} = \varepsilon \sum_j |j\rangle\langle j|, \quad (16)$$

de modo que

$$\hat{L} = \gamma \sum_j (|j-1\rangle\langle j| + |j+1\rangle\langle j|) - \varepsilon \sum_j |j\rangle\langle j|, \quad (17)$$

com $\hat{L} = \hat{L}^\dagger$.

Aqui, $\varepsilon = \gamma\mathcal{D}$, sendo $\mathcal{D}$ o grau dos vértices do grafo. Como a linha unidimensional infinita é um grafo regular, cada vértice está conectado apenas aos seus dois vizinhos mais próximos, implicando $\mathcal{D} = 2$. O primeiro termo da Eq. (17) descreve o acoplamento entre vértices adjacentes da rede, refletindo diretamente a conectividade do grafo unidimensional com taxa de transição γ entre sítios vizinhos, enquanto o segundo termo corresponde à energia ε associada à permanência da partícula em um determinado sítio¹. Dessa forma, a estrutura do Hamiltoniano é determinada pela forma do grafo.

Analisando como o operador $\hat{L}$ atua sobre um estado expandido em termos de seus coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{L}|\psi(t)\rangle &= \left[\gamma \sum_j (|j-1\rangle\langle j| + |j+1\rangle\langle j|) - \varepsilon \sum_j |j\rangle\langle j| \right] \sum_k \psi_k(t) |k\rangle \\ &= \gamma \sum_j (\psi_j(t) |j-1\rangle + \psi_j(t) |j+1\rangle) - \varepsilon \sum_j \psi_j(t) |j\rangle, \end{aligned}$$

¹ Visto que para a linha unidimensional infinita a matriz grau diagonal apenas subtrai $2\gamma\hat{I}_n$ do operador laplaciano, que implica apenas num deslocamento constante de energia em todos os sítios da rede. Podemos tornar nula a energia em cada sítio através da soma de um potencial constante dado por $2\gamma\hat{I}_n$ ao operador $\hat{L}$, zerando portanto a diagonal principal de $\hat{L}$ na dinâmica. Devido à essa escolha, podemos adotar $\varepsilon = 0$ sem perda de generalidade.

onde utilizamos a ortonormalidade da base de posição, $\langle j|k\rangle = \delta_{jk}$, eliminando uma somatória. Projetando ambos os lados da equação no estado $\langle j|$, resultando em

$$(\hat{L}\psi)_j = \langle j|\hat{L}|\psi(t)\rangle = \gamma[\psi_{j+1}(t) + \psi_{j-1}(t)] - \varepsilon\psi_j(t). \quad (18)$$

Note que a configuração dessa equação destaca a similaridade com o operador diferencial contínuo mostrado na Eq. (13). Especificamente, o termo que envolve as amplitudes nos sítios $j+1$ e $j-1$ reflete a estrutura vinculada ao operador Laplaciano, definida pela conectividade do grafo. A discretização da segunda derivada mostra que o operador Laplaciano contínuo atua apenas sobre amplitudes em posições vizinhas. Na CQCT, essa estrutura é preservada pelo Laplaciano do grafo, cuja definição depende exclusivamente das relações de adjacência entre vértices vizinhos. Assim, a dinâmica é inteiramente determinada pela conectividade do grafo, sem a necessidade de introduzir explicitamente um espaçamento espacial entre os sítios da rede.

Essa correspondência permite interpretar o Laplaciano do grafo $\hat{L}$ como o análogo discreto do operador Laplaciano contínuo,

$$\nabla^2 \longleftrightarrow \hat{L}. \quad (19)$$

Logo, a dinâmica da CQCT pode ser compreendida como a evolução quântica gerada pela ação do Laplaciano do grafo sobre o vetor de amplitudes do sistema. Consequentemente, o Hamiltoniano contínuo da Eq. (11) admite no espaço discreto definido pelo grafo a forma equivalente

$$\hat{H} = -\gamma\hat{L}. \quad (20)$$

Notemos que uma taxa de transição γ maior pode ser interpretada como a dinâmica de uma partícula com menor massa, uma vez que partículas menos massivas espalham mais facilmente (Wong; Tarrataca; Nahimov, 2016).

Para descrever a evolução do estado ao longo do tempo, sejam $\{\lambda_k\}$ e $\{|\phi_k\rangle\}$ os autovalores e os autoestados normalizados do Hamiltoniano $\hat{H}$, respectivamente. Na base espectral de $\hat{H}$, o estado do sistema pode ser expandido em termos desses autoestados, sendo então escrito como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle \\ &= \sum_k e^{i\gamma\lambda_k t} \langle\phi_k|\psi(0)\rangle |\phi_k\rangle. \end{aligned}$$

A partir da evolução temporal do estado, a probabilidade de encontrar o caminhante na posição j no instante t é dada por

$$P_j(t) = |\langle j|\psi(t)\rangle|^2. \quad (21)$$

Com base nessa distribuição de probabilidades, a dispersão do pacote de onda é obtido utilizando

$$\sigma(t) = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2}, \quad (22)$$

onde os valores esperados são calculados como $\langle j^n \rangle = \langle \psi(t) | j^n | \psi(t) \rangle$. Introduzimos também o coeficiente de espalhamento como a derivada temporal da dispersão,

$$\alpha(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad (23)$$

o qual quantifica a taxa de espalhamento do caminhante no regime de longa duração.

Ao conhecer o Hamiltoniano do sistema, a dinâmica da caminhada quântica contínua é inteiramente definida pelo estado inicial $|\psi(0)\rangle$. Em particular, diferentes escolhas de estados iniciais podem resultar em comportamentos variados na propagação da partícula na rede. Em seguida, investigaremos a dinâmica de uma CTQW em uma rede unidimensional contendo defeitos complexos. Em particular, analisaremos como modificações nos termos de transição associados a um sítio específico influenciam a evolução temporal da amplitude de probabilidade e, conseqüentemente, a propagação da partícula ao longo da rede.

2.3 CQCT COM DEFEITOS COMPLEXOS NA REDE

Em nosso modelo, introduzimos um defeito localizado em um sítio específico $j = d$, modificando as amplitudes de transição entre esse sítio e seus vizinhos mais próximos $d \pm 1$. Nessas condições, o Hamiltoniano do sistema pode ser escrito como

$$\hat{H}_d = \hat{H}_0 + \gamma(\hat{V}_d + \hat{V}_d^\dagger), \quad (24)$$

onde o operador de defeito é definido como

$$\hat{V}_d = (1 - \xi e^{-i\theta_-})|d-1\rangle\langle d| + (1 - \xi e^{i\theta_+})|d+1\rangle\langle d|. \quad (25)$$

Além disso, a inclusão explícita do termo hermitiano conjugado $\hat{V}_d^\dagger$ garante que o Hamiltoniano permaneça hermitiano, assegurando a unitariedade da evolução temporal.

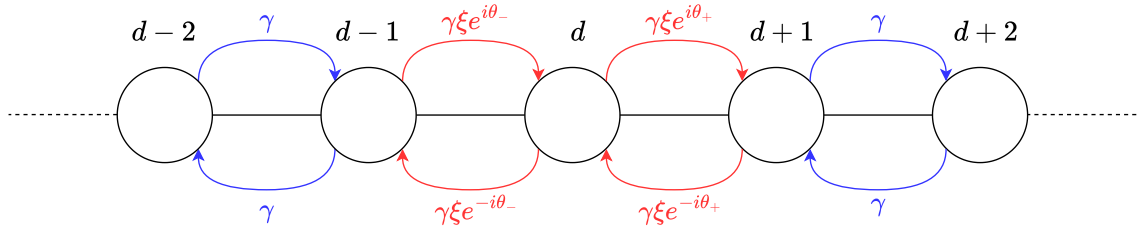


Figura 7 – Representação esquemática de uma CQCT em uma rede unidimensional contendo um defeito localizado no sítio d . As ligações entre o sítio defeituoso e seus vizinhos $d \pm 1$ possuem amplitudes de transição complexas, caracterizadas pelos parâmetros ξ e $\theta_{\pm}$, enquanto as demais conexões da rede permanecem homogêneas com $\gamma \in \mathbb{R}$.

O termo $\hat{H}_0$ é o Hamiltoniano de uma rede homogênea, ou seja, livre de defeitos, expressa pela Eq. (20). A formulação da Eq. (24) sugere que as transições do sítio d para seus vizinhos mais próximos $d \pm 1$ são influenciadas por fatores complexos adimensionais na forma $\xi e^{i\theta_{\pm}}$. As transições inversas, do sítio $d \pm 1$ para o sítio d , são, por sua vez, multiplicadas pelos respectivos conjugados complexos desses fatores. Uma representação esquemática deste sistema é observada na Figura 7. Quando $\theta_- \neq \theta_+$, o modelo estabelece fases diferentes para as amplitudes de transição à esquerda e à direita do defeito. O Hamiltoniano $\hat{H}_d$ recupera o Hamiltoniano

homogêneo $\hat{H}_0$ para $\xi = \gamma$ e $\theta_- = \theta_+ = 0$. O aspecto fundamental que queremos destacar aqui, é portanto, a possibilidade de representar o defeito por meio da incorporação de amplitudes de transição complexas nas arestas que ligam o sítio defeituoso d aos seus primeiros vizinhos.

Com o Hamiltoniano do sistema definido, podemos agora explorar a dinâmica da caminhada quântica. Para isso, é preciso definir o estado inicial do sistema. Na seção seguinte, apresentaremos um estado inicial deslocalizado com perfil gaussiano, que será empregado para examinar a evolução temporal e as características de dispersão da caminhada.

2.4 ESTADO INICIAL DESLOCALIZADO GAUSSIANO

Neste trabalho, consideramos um estado quântico inicial representado por uma superposição dos estados de base de posição,

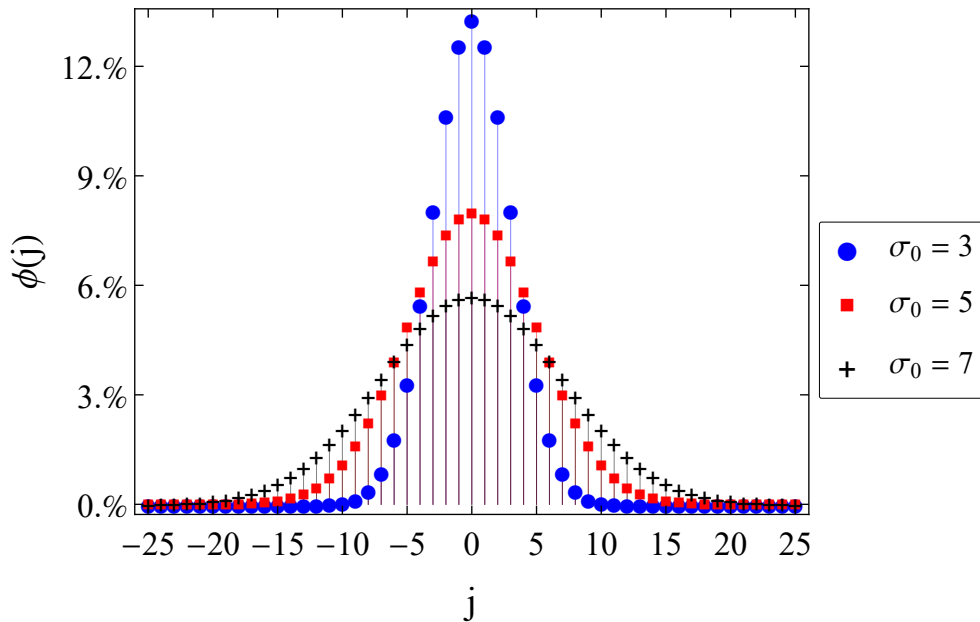


Figura 8 – Distribuição Gaussiana discreta inicial $\phi(j)$ com diferentes dispersões iniciais $\sigma_0 = 3$, $\sigma_0 = 5$ e $\sigma_0 = 7$. O aumento de σ_0 produz estados progressivamente mais deslocalizados ao longo da rede unidimensional.

$$|\phi(0)\rangle = \sum_j \phi(j) |j\rangle, \quad (26)$$

normalizada pela condição $\sum_j |\phi(j)|^2 = 1$. A função $\phi(j)$ escolhida para representar este estado inicial foi a distribuição gaussiana na forma

$$\phi(j) = A e^{-\frac{j^2}{4\sigma_0^2}}, \quad (27)$$

com A obtido a partir da condição de normalização da função e σ_0 corresponde a dispersão inicial da distribuição.

O parâmetro σ_0 indica o nível de deslocalização do estado inicial. Se σ_0 for muito pequeno, a distribuição do estado tende a se concentrar em um único ponto da rede, tornando-se altamente localizada. Por outro lado, se σ_0 for muito grande, o estado se espalha por uma grande área do espaço de posições, tornando-se amplamente distribuído. Ou seja, a escolha de uma distribuição gaussiana permite controlar diretamente o grau de deslocalização inicial do caminhante. A Figura 8 ilustra diferentes distribuições gaussianas associadas a distintos valores de σ_0 , evidenciando o alargamento espacial do estado à medida que a dispersão inicial aumenta.

Com o estado inicial deslocalizado gaussiano definido, estamos prontos para analisar sua evolução temporal em diferentes configurações do sistema. Na próxima seção, introduziremos o protocolo de alternância temporal inspirado no paradoxo de Parrondo, onde dois Hamiltonianos distintos são alternados periodicamente, nos permitindo investigar como a alternância de dinâmicas pode influenciar o espalhamento do caminhante.

2.5 PROTOCOLO DE ALTERNÂNCIA PARRONDO

Neste estudo, utilizamos um protocolo que estabelece um análogo quântico do paradoxo de Parrondo por meio da alternância periódica entre duas configurações distintas do sistema. Cada configuração está associada individualmente a um regime de baixa propagação. Entretanto, a alternância entre esses regimes pode induzir um comportamento global com maior espalhamento do caminhante.

Para isso, consideramos dois Hamiltonianos $\hat{H}_d^A$ e $\hat{H}_d^B$, ambos obtidos a partir da Eq. (24), porém utilizando dois conjuntos distintos de parâmetros:

$$(\xi^A, \theta_+^A, \theta_-^A) \quad \text{e} \quad (\xi^B, \theta_+^B, \theta_-^B). \quad (28)$$

Fixando $\gamma = 1$, o protocolo é construído de forma que, a cada semi-período, o sistema evolui sob a ação de um desses Hamiltonianos durante um intervalo de tempo constante π/ω . Isso define um Hamiltoniano dependente do tempo dado por

$$\hat{H}_{AB}(t) = \begin{cases} \hat{H}_d^A, & 0 \leq t < \pi/\omega, \\ \hat{H}_d^B, & \pi/\omega \leq t < 2\pi/\omega, \end{cases} \quad (29)$$

onde ω representa a frequência angular associada ao protocolo, de modo que o período completo de um ciclo é $T = 2\pi/\omega$.

Dessa forma, o Hamiltoniano satisfaz a condição de periodicidade $\hat{H}_{AB}(t + T) = \hat{H}_{AB}(t)$. A dinâmica do sistema é então construída iterativamente. Inicialmente, o estado quântico evolui sob a ação de $\hat{H}_d^A$ durante o primeiro semi-período. Em seguida, a evolução passa a ser governada por $\hat{H}_d^B$ no semi-período subsequente. Esse processo de alternância é repetido sucessivamente ao longo do tempo.

3 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos para a dinâmica de espalhamento de estados gaussianos em redes homogêneas e defeituosas. Inicialmente, analisamos a evolução temporal da dispersão em redes homogêneas, com ênfase no limite de longa duração, comparando os resultados numéricos com as previsões analíticas para a taxa de espalhamento. Em seguida, investigamos os efeitos introduzidos por defeitos locais na propagação do pacote de onda, destacando as diferenças entre estados inicialmente localizados e estados gaussianos com diferentes larguras iniciais σ_0 , bem como a influência de parâmetros reais e termos complexos associados ao defeito. Por fim, estudamos distribuições de probabilidade e propriedades de transporte utilizando o protocolo de Parrondo discutido na Seção 2.5. Para isso, consideramos estratégias individualmente desfavoráveis e analisamos de que forma a alternância entre elas ao longo do tempo modifica o transporte quântico do caminhante.

3.1 ESPALHAMENTO DE UM ESTADO GAUSSIANO

Antes de investigar os efeitos introduzidos por defeitos complexos na amplitude de hopping na rede, iniciamos analisando a dinâmica de propagação associada a estados gaussianos. Como referência para a análise dos resultados numéricos obtidos para as CQCT, consideramos a evolução contínua de um pacote de onda gaussiano livre em uma dimensão. Assim, utilizamos como condição inicial o estado gaussiano introduzido na Seção 2.4, centrado na origem e caracterizado pela dispersão inicial σ_0 para análise do espalhamento temporal do pacote de onda.

A transformada de Fourier desse estado apresenta um formato gaussiano no espaço dos momentos. Uma vez que o operador responsável pela evolução temporal é diagonal nessa representação, podemos expressar a função de onda evoluída da seguinte maneira:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p, 0) e^{-i\gamma p^2} e^{ipx} dp. \quad (30)$$

A integral acima pode ser resolvida analiticamente, resultando em

$$\phi(x, t) = \frac{\sigma_{\text{eff}}^{1/2}}{[2\pi(\sigma_{\text{eff}}^2 + i\gamma t)^2]^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\sigma_{\text{eff}}^2 + i\gamma t)}\right), \quad (31)$$

com

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma_0}{\text{Erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_0\right)}, \quad (32)$$

onde $\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$ é a função erro.

A densidade de probabilidade $|\phi(x, t)|^2$ mantém sua forma gaussiana ao longo de toda a evolução no tempo, sempre centrada na origem. No entanto, à medida que o tempo avança, a largura da distribuição aumenta, espalhando o pacote de onda. A dispersão temporal que

caracteriza a distribuição é expressa por:

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_{\text{eff}}^2 + \gamma^2 \frac{t^2}{\sigma_{\text{eff}}^2}}, \quad (33)$$

o que evidencia um crescimento assintoticamente linear para tempos longos. Portanto, em vez de termos a expressão não corrigida via Eq. (23) que leva a uma divergência na taxa de espalhamento no regime assintótico $\gamma t \gg 1$,

$$\alpha_a \approx \frac{\gamma}{\sigma_0}, \quad (34)$$

temos que a expressão com a correção do σ_{eff} nos leva a

$$\alpha_c \approx \frac{\gamma}{\sigma_0} \text{Erf} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 \right). \quad (35)$$

Os detalhes analíticos da evolução do pacote de onda gaussiano encontram-se no Apêndice A. A introdução de σ_{eff} tem como objetivo incorporar uma correção de normalização necessária quando o pacote gaussiano se torna muito estreito, ou seja, $\sigma_0 \rightarrow 0$. Em particular, essa correção permite conectar de forma válida o regime de pacotes de onda com deslocalização inicial ao limite localizado. No limite de pacotes largos, ou seja $\sigma_0 \gg 1$, temos

$$\text{Erf} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 \right) \rightarrow 1, \quad (36)$$

assim, o resultado usual para pacotes gaussianos deslocalizados é preservado. Por outro lado, no limite $\sigma_0 \rightarrow 0$ a correção leva a $\sigma_{\text{eff}} \rightarrow 1/\sqrt{2}$ e consequentemente $\alpha_c \rightarrow \sqrt{2}\gamma$, recuperando o resultado esperado para o estado inicialmente localizado. A necessidade de introduzir a função

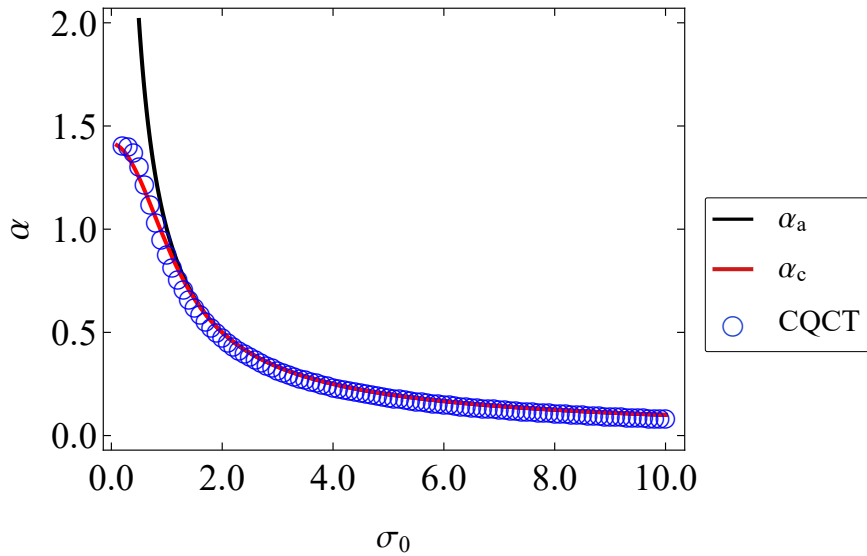


Figura 9 – Taxa de espalhamento α em função da largura inicial σ_0 para CQCT em $\gamma t = 1000$. Os círculos azuis representam os resultados numéricos, enquanto as linhas preta e vermelha correspondem às Eqs. (34) e (35), respectivamente, para $\gamma = 1$.

erro no processo de normalização de estados gaussianos localizados já foi discutida em análises anteriores da dinâmica de espalhamento em CQ (Orthey; Amorim, 2017; Orthey; Amorim, 2019).

A Figura 9 apresenta a comparação entre os resultados numéricos obtidos para a CQCT e as expressões analíticas dadas pelas Eqs. (34) e (35). Os círculos azuis representam os valores numéricos da taxa de espalhamento calculados a partir da evolução temporal da caminhada, enquanto as curvas preta e vermelha correspondem, respectivamente, às previsões analíticas assintótica α_a e corrigida α_c . Observa-se uma ótima concordância entre os resultados numéricos e a expressão corrigida α_c , sobretudo para pequenas larguras iniciais, regime em que os efeitos de normalização tornam-se mais relevantes. Por outro lado, a aproximação assintótica α_a descreve de forma adequada apenas o limite de grandes valores de σ_0 . Esses resultados evidenciam que a dinâmica de espalhamento da CQCT preserva características fundamentais da evolução contínua de pacotes gaussianos.

Verifica-se ainda que, embora a propagação permaneça balística, a taxa de espalhamento diminui à medida que σ_0 aumenta. Esse comportamento está diretamente relacionado à estrutura do estado inicial no espaço de momentos. Enquanto um estado perfeitamente localizado possui uma distribuição uniforme de momentos, um estado gaussiano apresenta uma distribuição também gaussiana nesse espaço. Assim, o aumento de σ_0 produz um estreitamento da distribuição de momentos, reduzindo a contribuição de componentes de alto momento para a evolução temporal do pacote de onda e, conseqüentemente, diminuindo sua velocidade efetiva de propagação. Esse resultado é consistente com o princípio da incerteza de Heisenberg, segundo o qual estados mais deslocalizados no espaço das posições apresentam menor dispersão no espaço dos momentos. Como consequência, a presença de componentes de maior velocidade na dinâmica é progressivamente suprimida à medida que a largura inicial do estado aumenta.

Os resultados obtidos até aqui mostram que a largura inicial do estado gaussiano exerce influência sobre a dinâmica de espalhamento da CQCT, controlando diretamente a taxa de propagação do pacote de onda. Na próxima seção examinamos de que maneira defeitos complexos afetam a propagação de estados gaussianos, analisando tanto alterações na dispersão quanto possíveis efeitos de localização induzidos pelos parâmetros do defeito.

3.2 ESTADOS GAUSSIANOS EM REDES DEFEITUOSAS

Para investigar a influência na dinâmica da CQCT, comparamos a dispersão da rede com defeitos regida por $\hat{H}_d$ na Eq. (24), com a dispersão da rede homogênea, descrita por $\hat{H}$ na Eq. (20). Este estudo foi realizado no limite assintótico $\gamma t \gg 1$, o que nos permite identificar regimes em que os defeitos favorecem ou suprimem o espalhamento em relação ao caso homogêneo. Além disso, analisamos a probabilidade P_0 no sítio do defeito como indicador de localização.

Na Figura 10, ilustramos a dependência da probabilidade P_0 no sítio defeituoso em relação aos parâmetros $(\xi, \theta_{\pm})$, considerando distintos estados iniciais gaussianos. Nos painéis

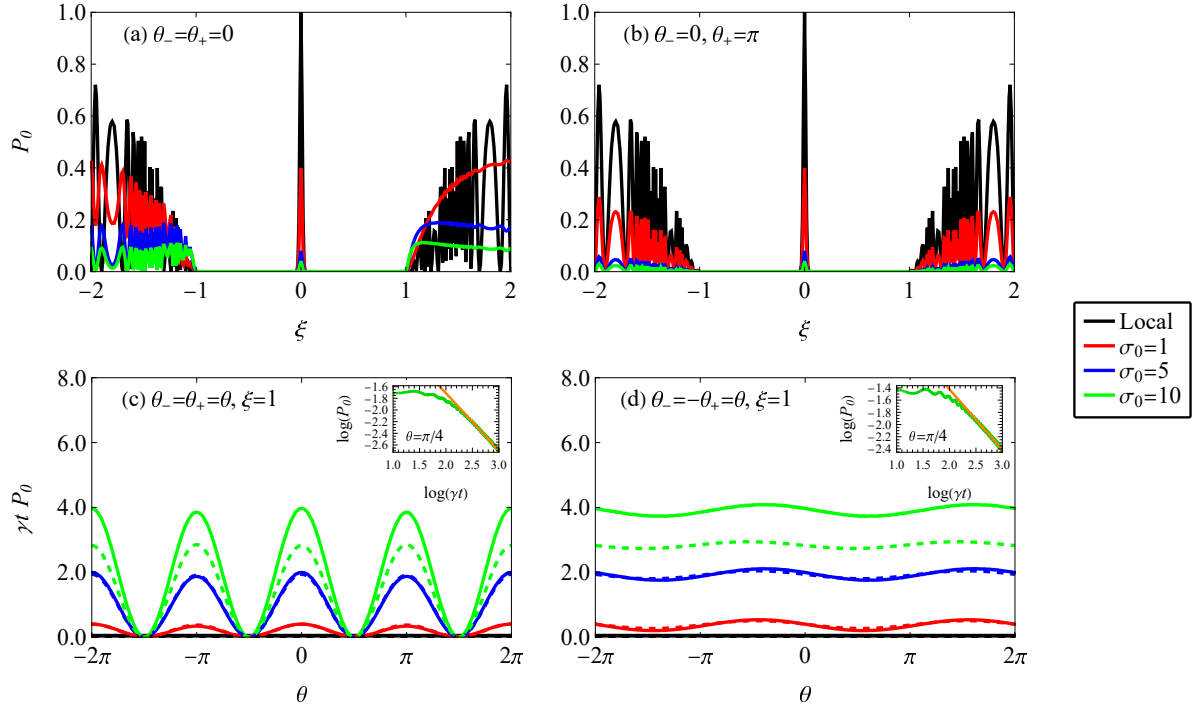


Figura 10 – Probabilidade P_0 no defeito em função de ξ para (a) $\theta_- = \theta_+ = 0$ e (b) $\theta_- = 0, \theta_+ = \pi$. Os painéis (c) e (d) apresentam a probabilidade reescalada $\gamma t P_0$ em função de θ para $\theta_- = \theta_+ = \theta$ e $\theta_- = -\theta_+ = \theta$, respectivamente, com $\xi = 1$. Linhas sólidas correspondem a $\gamma t = 1000$ e tracejadas a $\gamma t = 100$. O estado localizado corresponde a $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ (preto), enquanto os estados gaussianos possuem $\sigma_0 = 1$ (vermelho), 5 (azul) e 10 (verde). Os detalhes dos painéis (c) e (d) apresentam P_0 em função de γt para $\sigma_0 = 10$ e $\theta = \pi/4$ cujas curvas em laranja representam os ajustes obtidos para $\gamma t > 500$ evidenciando leis de potência.

(a) e (b), há uma dependência não monotônica de P_0 em relação a ξ , que está relacionada a dois mecanismos de localização diferentes. Para $|\xi|$ pequeno, o defeito acopla fracamente aos sítios adjacentes, levando ao isolamento do sítio central e aprisionando parte da amplitude de probabilidade. Quando ξ tende a 1, a rede retoma a invariância translacional e P_0 se aproxima do valor sem defeitos, sinalizando uma dinâmica completamente deslocalizada. Diferentemente, para $|\xi| > 1$, o acoplamento nos vínculos defeituosos é maior do que o acoplamento no restante da rede, favorecendo a formação de modos localizados ou quase localizados.

Além disso, a introdução de fases altera diretamente a simetria da dinâmica do defeito. Para $\theta_- = \theta_+ = 0$, nota-se que P_0 é dependente assimetricamente de ξ , o que se torna mais notável para estados inicialmente mais deslocalizados. Porém, se tomarmos $\theta_- = 0$ e $\theta_+ = \pi$, a simetria de reflexão da distribuição é restaurada, o que mostra que é a diferença de fase que controla a assimetria do transporte. Esse mecanismo é ilustrado analiticamente no Apêndice B em uma rede defeituosa L_5 .

Os painéis (c) e (d) da Figura 10 ilustram como P_0 depende da fase θ nos casos em que $\theta_- = \theta_+ = \theta$ e $\theta_- = -\theta_+ = \theta$, respectivamente, para os tempos $\gamma t = 100$ (linhas tracejadas) e $\gamma t = 1000$ (linhas contínuas). Para possibilitar a comparação na mesma escala, os resultados

foram renormalizados pelos valores correspondentes de γt . Os resultados indicam que a probabilidade do defeito diminui de acordo com a lei de potência $P_0 \propto (\gamma t)^{-1}$, aproximando-se de zero à medida que o tempo avança. Como exemplo representativo, os detalhes mostrados nas Figuras 10 (c) e (d) mostram P_0 em função de γt com $\sigma_0 = 10$ e $\theta = \pi/4$. O ajuste como uma lei de potência valida o comportamento assintótico $P_0 \propto (\gamma t)^{-1}$, demonstrando que a probabilidade de ocupação do defeito tende a zero no regime de longa duração. Isso aponta que os defeitos de fase analisados não sustentam aprisionamento permanente da função de onda, embora possam modificar transitoriamente a localização do estado. Esse comportamento está em concordância com as probabilidades de retorno conhecidas para CQCTs unidimensionais (Konno, 2010).

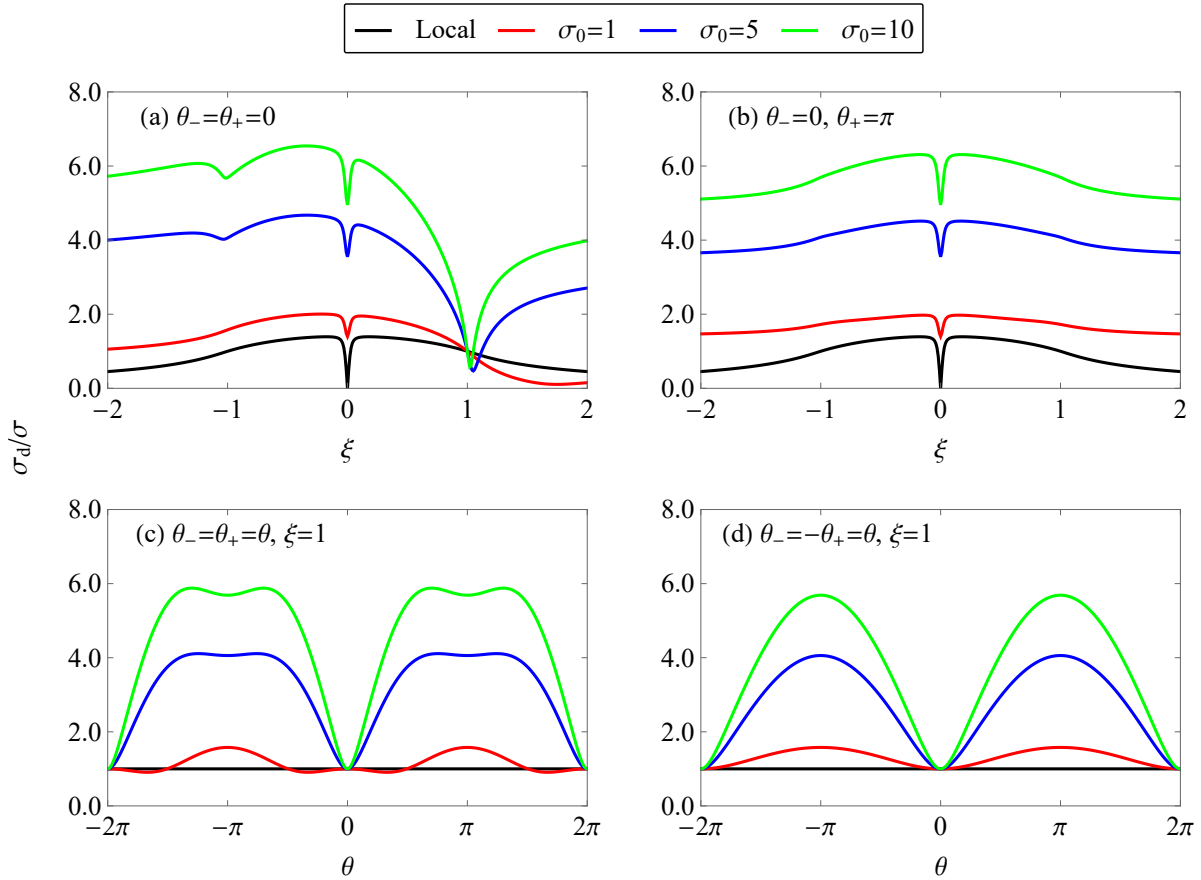


Figura 11 – Razão σ_d/σ entre as dispersões nas redes defeituosa e homogênea. Os painéis (a) e (b) mostram σ_d/σ em função de ξ para $\theta_- = \theta_+ = 0$ e $\theta_- = 0, \theta_+ = \pi$, respectivamente. Os painéis (c) e (d) apresentam σ_d/σ em função de θ para $\theta_- = \theta_+ = \theta$ e $\theta_- = -\theta_+ = \theta$, com $\xi = 1$. A curva preta corresponde ao estado localizado $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, enquanto os estados gaussianos possuem $\sigma_0 = 1$ (vermelho), 5 (azul) e 10 (verde). Em todos os casos, a evolução foi realizada até $\gamma t = 1000$.

A influência dos parâmetros $(\xi, \theta_{\pm})$ sobre o transporte quântico é apresentada na Figura 11. Os painéis (a) e (b) reforçam o efeito quiral observado nas distribuições de probabilidade, exibindo perfis assimétricos e simétricos para $\theta_- = \theta_+ = 0$ e $\theta_- = 0, \theta_+ = \pi$, respectivamente. Em conjunto com os resultados da Figura 10, esses perfis mostram que estados gaussianos podem

apresentar propagação direcional induzida por fases locais, em concordância com resultados apresentados por Khaliq et al. (2021).

Além disso, os resultados apontam para um aumento considerável do transporte para estados que, a princípio, estavam deslocalizados. Enquanto estados localizados têm um ganho modesto, cerca de 39% em σ_d/σ , esse aumento se intensifica para estados gaussianos mais largos, alcançando valores significativamente superiores à medida que σ_0 aumenta. De modo que, mesmo que estados deslocalizados se propaguem com mais lentidão em redes homogêneas, a presença de um único defeito local pode incrementar de forma significativa sua eficiência de transporte, superando inclusive o ganho observado para estados localizados.

Adicionalmente, verificamos que o controle de fase isolado também consegue elevar a taxa de espalhamento. Nos painéis (c) e (d) da Figura 11, mesmo com $\xi = 1$ mantido, a simples variação nas fases $\theta_{\pm}$ resulta em aumentos similares em σ_d/σ . Esses resultados ressaltam o papel das fases locais como um mecanismo eficaz de controle coerente em caminhadas quânticas (Chaves; Chagas; Coutinho, 2023; Sett et al., 2019), permitindo favorecer ou suprimir a direção da propagação sem modificar o regime assintótico deslocalizado da dinâmica (Li; Wang, 2015; Ximenes; Pires; Villas-Bôas, 2024).

Por fim, os resultados evidenciam a presença de regimes que são desfavoráveis ao transporte. No painel (c) da Figura 11, para $\sigma_0 = 1$ e $\xi = 1$, a razão σ_d/σ exibe mínimos em $\theta = \pm\pi/3, \pm5\pi/3$, o que indica configurações onde $\sigma_d/\sigma < 1$. Esses regimes se caracterizam por uma menor taxa de espalhamento e constituem a base para a construção das estratégias “perdedoras” individuais que serão utilizadas no protocolo de alternância do tipo Parrondo para estados gaussianos, o qual será abordado na próxima seção.

3.3 PROTOCOLO DE PARRONDO EM ESTADOS GAUSSIANOS

Neste trabalho, associamos uma estratégia perdedora em uma CQCT em uma rede defeituosa ao conjunto de parâmetros $(\xi, \theta_{\pm})$ que produz um espalhamento inferior àquele observado no caso homogêneo. Ximenes, Pires e Villas-Bôas (2024) investigaram esse efeito considerando estados iniciais localizados e alternâncias entre defeitos caracterizados apenas por parâmetros reais. No entanto, dado que estados deslocalizados em redes defeituosas frequentemente exibem um espalhamento maior em comparação ao caso homogêneo, conforme discutido na seção 3.2, foi necessário identificar regiões no espaço de parâmetros onde o espalhamento fosse reduzido. Isso possibilitou definir estratégias perdedoras de forma mais precisa para os protocolos de alternância analisados nesta seção.

Com esse objetivo, realizamos uma varredura no espaço de parâmetros $(\xi, \theta_{\pm})$ para analisar a razão σ_d/σ em diferentes configurações do defeito. A Figura 12 (a) mostra o mapa de contorno dessa razão em função dos parâmetros (ξ, θ) para o caso $\theta_- = -\theta_+ = \theta$. A escala de cores mostra claramente que a eficiência do espalhamento depende tanto da razão entre as amplitudes de hopping ξ quanto da fase θ que o defeito introduz. Observamos que o

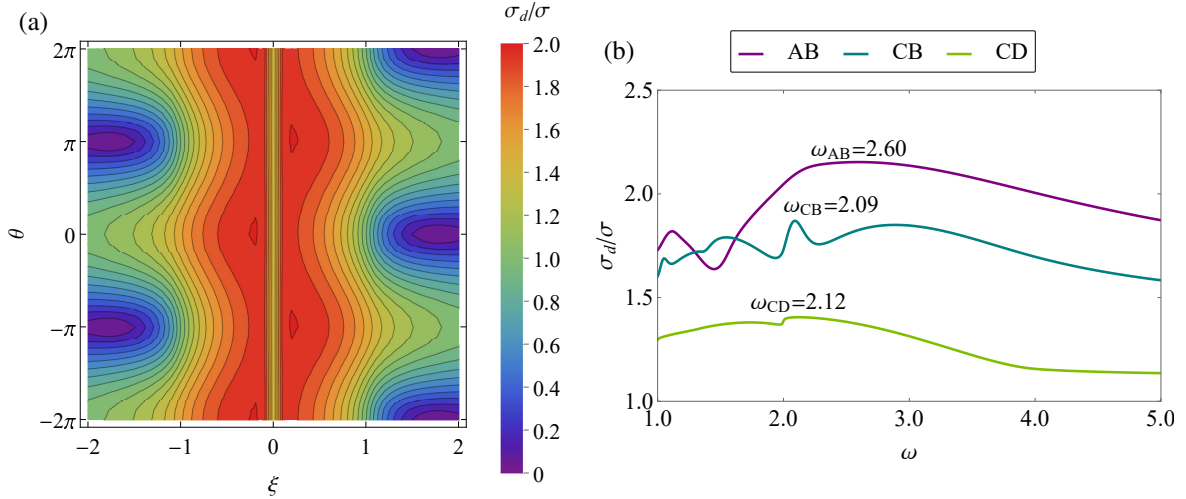


Figura 12 – (a) Mapa de contorno da razão σ_d/σ em função dos parâmetros do defeito ξ e θ . A simulação foi realizada para um estado inicial Gaussiano ($\sigma_0 = 1$) evoluído até $\gamma t = 1000$. (b) Razão σ_d/σ em função do parâmetro ω . Os valores de ω selecionados para cada protocolo de alternância estão indicados na figura. As simulações foram realizadas para um estado inicial Gaussiano ($\sigma_0 = 1$) evoluído até $\gamma t = 2000$.

comportamento observado é muito parecido com o caso $\theta_- = \theta_+ = \theta$, o que indica que as duas configurações têm características dinâmicas muito semelhantes.

Próximo ao limite homogêneo, caracterizado por $\xi \approx 1$ e $\theta \approx 0$, encontramos uma faixa estreita de valores próximos da unidade. Essa faixa é representada pela região em verde-claro no mapa de contorno e é consistente com $\sigma_d/\sigma \simeq 1$. Isso não é surpreendente, pois, nessa região do espaço de parâmetros o defeito se comporta de maneira semelhante ao caso homogêneo. Como resultado, o defeito modifica a dinâmica da caminhada de forma muito sutil. Em contraste, notamos o aparecimento de duas grandes áreas onde a propagação é menos intensa, representadas por lóbulos de cor azul-escuro localizados em $(\xi \simeq 2, \theta \simeq 0, \pm 2\pi)$ e $(\xi \simeq -2, \theta \simeq \pm\pi)$, apresentando $\sigma_d/\sigma < 1$. Esses mínimos surgem de defeitos de forte acoplamento que geram uma dinâmica dominada por reflexão: a interferência construtiva entre as componentes que se propagam para a esquerda e para a direita aprisiona uma fração significativa da densidade de probabilidade nas proximidades do defeito, inibindo, assim, o espalhamento global.

Por outro lado, encontramos uma grande área em amarelo e laranja para $-1 < \xi < 1$ em quase todo o intervalo de θ , correspondendo a $\sigma_d/\sigma > 1$ e, por conseguinte, o espalhamento é intensificado comparado ao caso uniforme. O aumento observado ocorre devido às componentes que se movem para a esquerda e para a direita e interferem de maneira destrutiva. Isso ocorre quando o defeito tem um acoplamento reduzido, o que faz com que o estado se distancie da região com defeito. No entanto, uma parte considerável da probabilidade ainda fica presa de forma fraca. As transições suaves de cor ao redor das áreas onde o transporte é intensificado ou suprimido mostram como as fronteiras entre esses regimes mudam continuamente à medida que o parâmetro ξ se afasta de um. Isso evidencia que o desequilíbrio local na amplitude de *hopping*, junto com a modulação de fase, controlam o comportamento do transporte. A linha vertical

EP	ξ	θ_-	θ_+	σ_d/σ
A	-1.8	$-6\pi/5$	$6\pi/5$	0.36
B	1.4	$-3\pi/2$	$3\pi/2$	0.91
C	-1.0	$11\pi/10$	$11\pi/10$	0.98
D	-1.0	$9\pi/10$	$9\pi/10$	0.98

Tabela 1 – Parâmetros do defeito para cada estratégia perdedora (EP) e a correspondente razão de espalhamento σ_d/σ em $\gamma t = 1000$.

central corresponde ao caso $\xi = 0$, para o qual parte da probabilidade permanece localizada na origem. Neste limite, o sítio defeituoso fica desacoplado de seus adjacentes, de tal forma que a fração do pacote de onda inicial localizada no defeito permaneça aprisionada durante a evolução.

A partir da análise do espaço de parâmetros, escolhemos as estratégias perdedoras A, B, C e D apresentadas na Tabela 1. Essas estratégias representam diferentes regimes observados nas CQCT em redes defeituosas, como forte localização, localização residual fraca e distribuições assimétricas. Depois de definir essas estratégias, criamos os protocolos de alternância AB, CB e CD. Nesses protocolos, alternamos no tempo as duas estratégias perdedoras em intervalos de duração π/ω . Para cada protocolo, analisamos a dependência do parâmetro ω com a dinâmica da caminhada, buscando encontrar os valores que tornem o espalhamento o mais eficiente possível. Os resultados dessa análise estão mostrados na Figura 12 (b), onde mostramos a razão σ_d/σ em função de ω para cada protocolo de alternância considerado. Depois de encontrar os valores favoráveis de ω , investigamos as propriedades de transporte que emergem tanto das estratégias individuais quanto dos protocolos alternados. As distribuições de probabilidade e a evolução temporal do desvio padrão para todos os casos estudados podem ser vistas na Figura 13.

Os painéis (a)–(c) ilustram as distribuições de probabilidade P_j obtidas a cada uma das estratégias perdedoras. No painel (a), podemos ver que as estratégias A e B produzem distribuições aproximadamente simétricas, ambas com uma forte concentração de probabilidade em torno do sítio defeituoso. A estratégia A provoca um aprisionamento muito mais intenso do que a estratégia B, ou seja, enquanto a estratégia B mantém cerca de 76% da probabilidade total para $j \in [-4, 4]$, a estratégia A mantém aproximadamente 97% da probabilidade confinada no mesmo intervalo.

Apesar dos valores globais de espalhamento de ambas as estratégias serem diferentes, observamos que o transporte é consideravelmente reduzido em ambas devido ao forte aprisionamento local causado pelo defeito. Particularmente, a estratégia B demonstra que a análise que se baseia unicamente no desvio padrão é insuficiente para caracterizar totalmente a dinâmica de transporte: mesmo com um desvio padrão apenas cerca de 9% menor do que no caso homogêneo, a caminhada ainda se mantém fortemente localizada perto do defeito. Esse resultado indica que uma configuração com defeito, mesmo tendo um espalhamento elevado, pode ainda apresentar um aprisionamento significativo.

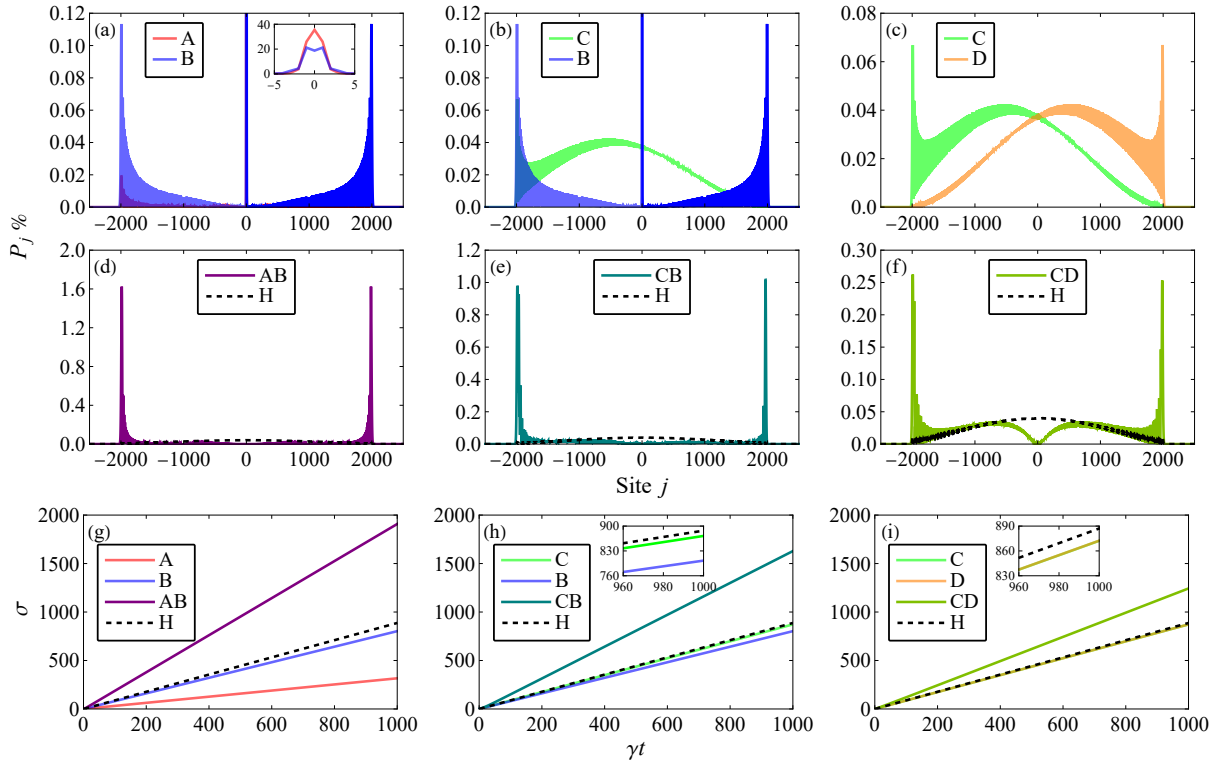


Figura 13 – Distribuição de probabilidade P_j para as estratégias perdedoras A (vermelho), B (azul), C (verde) e D (laranja) nos painéis (a)–(c), e para os protocolos de alternância AB (roxo), CB (verde-azulado escuro) e CD (verde-limão) nos painéis (d)–(f). Os painéis (g)–(i) mostram o desvio padrão correspondente σ em função do tempo, comparando cada par de estratégias perdedoras com seu respectivo protocolo de alternância de Parrondo. As estratégias são definidas pelos parâmetros de defeito A: ($\xi = -1.8$, $\theta_- = -1.2\pi$, $\theta_+ = 1.2\pi$), B: ($\xi = 1.4$, $\theta_- = -1.5\pi$, $\theta_+ = 1.5\pi$), C: ($\xi = -1.0$, $\theta_{\pm} = 1.1\pi$) e D: ($\xi = -1.0$, $\theta_{\pm} = 0.9\pi$). A rede homogênea H (linha tracejada preta) é incluída como referência. Os insets nos painéis (h) e (i) mostram que C, B e D permanecem abaixo de H ao longo de toda a evolução; no painel (i), as curvas de C e D são quase indistinguíveis. Todas as simulações foram realizadas para um estado inicial gaussiano com $\sigma_0 = 1$ e evoluídas até $\gamma t = 1000$.

As estratégias C e D, mostradas nos painéis (b) e (c), produzem distribuições assimétricas, favorecendo, respectivamente uma direção preferencial de propagação. Diferentemente das estratégias A e B, esses casos apresentam apenas localização residual nas proximidades do defeito. Ainda assim, mesmo sem forte aprisionamento, ambas permanecem incapazes de promover espalhamento eficiente, permanecendo abaixo do caso homogêneo ao longo da evolução temporal. Em seguida, analisamos os protocolos de alternância construídos a partir dessas estratégias perdedoras. Os painéis (d)–(f) apresentam as distribuições de probabilidade obtidas após alternar temporalmente os pares AB, CB e CD. Em todos os casos, observamos que a alternância elimina o aprisionamento presente nas estratégias individuais, produzindo distribuições muito mais dispersas superando inclusive o espalhamento observado na rede homogênea H, representada pela linha preta tracejada.

Verificamos que a supressão da localização ocorre porque cada etapa de alternância

interrompe a interferência construtiva responsável pelo aprisionamento nas estratégias individuais. Assim, a probabilidade consegue escapar da região defeituosa, favorecendo o transporte para locais distantes da rede. Em todos os casos que examinamos, notamos que o protocolo de alternância leva a um crescimento de σ que é significativamente mais rápido do que o crescimento observado para cada estratégia isoladamente. Ainda, em tempos longos, os protocolos alternados passam a superar inclusive a evolução homogênea.

Os painéis (h) e (i) mostram de forma clara que as estratégias B, C e D continuam abaixo da curva homogênea durante toda a evolução, o que reafirma que cada uma delas é, de fato, uma estratégia perdedora. Entretanto, os protocolos alternados exibem propagação persistente com inclinação assintótica superior à observada em todas as evoluções individuais. Também notamos que as curvas para as estratégias C e D no painel (i) se tornam quase indistinguíveis, o que demonstra a consistência desse padrão para estratégias que têm dinâmicas semelhantes.

Assim, os resultados da Figura 13 indicam que alternar entre duas estratégias que levam à perda de transporte pode suprimir a localização induzida pelo defeito, restaurar o transporte de longo alcance, tanto simétrico quanto direcional, e resultar em taxas de espalhamento que superam as das duas estratégias individuais e da caminhada homogênea. Esses resultados evidenciam explicitamente a presença de um efeito Parrondo em CQCT que foram iniciadas a partir de estados Gaussianos deslocalizados. Constatamos ainda que, em determinados regimes, os protocolos alternados podem alcançar taxas de espalhamento comparáveis ou até superiores às obtidas por outras estratégias que individualmente são favoráveis ao transporte, ao mesmo tempo em que reduzem significativamente a localização próxima ao defeito.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram estudadas as propriedades de transporte de CQCT iniciadas a partir de estados deslocalizados em uma rede unidimensional com um único defeito local. O defeito foi introduzido modificando a amplitude de *hopping* ξ e adicionando fases θ_- e θ_+ às ligações que conectam o sítio correspondente à posição média do estado inicial deslocalizado aos seus vizinhos mais próximos. A dinâmica de estados gaussianos com larguras iniciais distintas foi o foco da análise, em comparação com a dinâmica dos estados totalmente localizados. Verificou-se que, assim como os estados localizados, os pacotes gaussianos são fortemente sensíveis à intensidade do defeito. Contudo, ao contrário do caso inicial localizado, os estados deslocalizados apresentam uma quiralidade induzida pelas termos complexos, levando a uma propagação assimétrica do pacote de onda. Além disso, constatou-se que a competição entre mecanismos de localização, associados aos regimes de acoplamento forte e fraco, ambos modulados pelas fases aplicadas ao defeito, governa a dinâmica desses estados.

Os resultados indicaram que, ao selecionar apropriadamente os parâmetros $(\xi, \theta_{\pm})$, é possível melhorar consideravelmente a eficiência do transporte para estados gaussianos, apesar do fato de que a deslocalização inicial geralmente diminui a taxa de espalhamento em redes homogêneas. Em particular, a engenharia de fases revelou-se uma estratégia eficaz para direcionar a propagação do pacote de onda, possibilitando tanto a supressão quanto a restauração da simetria espacial na distribuição de probabilidade. Além disso, certas configurações podem aumentar a taxa assintótica de espalhamento sem provocar localização persistente. Por outro lado, também foram descobertas amplas regiões no espaço de parâmetros onde a dispersão espacial é suprimida ou onde há um aprisionamento significativo de probabilidade, mesmo quando $\sigma_d/\sigma > 1$. Estes resultados mostram que para se entender o transporte quântico, é crucial considerar os efeitos de espalhamento e localização em conjunto.

O mapeamento do espaço de parâmetros (ξ, θ) mostrou regiões bem definidas associadas tanto ao aumento quanto à supressão do espalhamento, governadas pela interação entre o desequilíbrio da intensidade do hopping e a modulação da fase. Regiões onde o transporte é ineficiente, identificadas pela condição $\sigma_d/\sigma < 1$ quando $\sigma_0 = 1$, serviram como base para a definição de estratégias perdedoras em um cenário inspirado no paradoxo de Parrondo. A partir disso, analisamos protocolos que alternam entre diferentes defeitos ao longo do tempo. Cada um desses defeitos, sozinho, leva a um transporte baixo. Observou-se que, para escolhas adequadas do parâmetro temporal ω , os protocolos de alternância reduzem os efeitos de localização redistribuindo a probabilidade aprisionada e aumentam as taxas de espalhamento. Isso ocorre não somente em comparação com cada estratégia isolada, mas também em comparação com a rede homogênea. Portanto, alternar entre defeitos ao longo do tempo pode criar padrões de interferência quântica que ajudam a aumentar o transporte global do caminhante.

Os resultados obtidos demonstram que a engenharia de defeitos, o controle de fases e os protocolos de alternância no tempo são úteis para manipular estados quânticos em CQCT

e melhorar suas propriedades de transporte. A combinação desses mecanismos abre novas possibilidades para controlar de forma coerente o transporte quântico, criar redes quânticas controláveis e realizar experimentos baseados em caminhadas quânticas.

REFERÊNCIAS

- AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 48, p. 1687–1690, ago. 1993. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.1687>. Citado na página 16.
- BOTTARELLI, Alberto; FRIGERIO, Massimo; PARIS, Matteo G. A. Quantum routing of information using chiral quantum walks. **AVS Quantum Science**, v. 5, n. 2, p. 025001, 04 2023. ISSN 2639-0213. Disponível em: <https://doi.org/10.1116/5.0146805>. Citado na página 18.
- BROOME, M. A. et al. Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 104, p. 153602, abr. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.153602>. Citado na página 17.
- CAPP, Jean-Paul et al. Does cancer biology rely on parrondo's principles? **Cancers**, v. 13, n. 9, p. 2197, 2021. Citado na página 19.
- CARDANO, Filippo et al. Quantum walks and wavepacket dynamics on a lattice with twisted photons. **Science Advances**, v. 1, n. 2, p. e1500087, 2015. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.1500087>. Citado na página 18.
- CHAVES, Rodrigo; CHAGAS, Bruno; COUTINHO, Gabriel. Why and how to add direction to a quantum walk. **Quantum Information Processing**, v. 22, n. 1, p. 41, 2023. ISSN 1573-1332. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-022-03746-9>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 36.
- CHEONG, Kang Hao; KOH, Jin Ming; JONES, Michael C. Paradoxical survival: Examining the parrondo effect across biology. **BioEssays**, v. 41, n. 6, p. 1900027, 2019. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bies.201900027>. Citado na página 19.
- CHILDS, Andrew M.; GOLDSTONE, Jeffrey. Spatial search by quantum walk. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 70, p. 022314, ago. 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.022314>. Citado na página 16.
- CLARK, Stephen R et al. Graph state generation with noisy mirror-inverting spin chains. **New Journal of Physics**, v. 9, n. 6, p. 202, jun. 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/6/202>. Citado na página 23.
- CODLING, Edward A; PLANK, Michael J; BENHAMOU, Simon. Random walk models in biology. **Journal of The Royal Society Interface**, v. 5, n. 25, p. 813–834, 04 2008. ISSN 1742-5689. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rsif.2008.0014>. Citado na página 15.
- D'ERRICO, Alessio et al. Two-dimensional topological quantum walks in the momentum space of structured light. **Optica**, Optica Publishing Group, v. 7, n. 2, p. 108–114, fev. 2020. Disponível em: <https://opg.optica.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-7-2-108>. Citado na página 18.
- DU, Jiangfeng et al. Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 67, p. 042316, abr. 2003. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.042316>. Citado na página 17.

ENGSTER, João P. et al. High-fidelity state transfer via quantum walks from delocalized states. **Quantum Information Processing**, v. 23, n. 3, p. 103, 2024. ISSN 1573-1332. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-024-04308-x>. Citado na página 18.

FARHI, Edward; GUTMANN, Sam. Quantum computation and decision trees. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 58, p. 915–928, ago. 1998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.915>. Citado na página 16.

GOKHALE, Chaitanya S.; SHARMA, Nikhil. Optimizing crop rotations via parrondo's paradox for sustainable agriculture. **Royal Society Open Science**, v. 10, n. 5, p. 221401, 05 2023. ISSN 2054-5703. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rsos.221401>. Citado na página 19.

GONG, Weiyi; YAN, Qimin. Graph-based deep learning frameworks for molecules and solid-state materials. **Computational Materials Science**, v. 195, p. 110332, 2021. ISSN 0927-0256. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025621000574>. Citado na página 23.

GRIBKOVSKAIA, Irina; SR., Øyvind Halskau; LAPORTE, Gilbert. The bridges of königsberg—a historical perspective. **Networks**, Wiley Periodicals, Inc., v. 49, n. 3, p. 199–203, 2007. Citado na página 22.

HARMER, Gregory P.; ABBOT, Derek. A review of parrondo's paradox. **Fluctuation and Noise Letters**, v. 02, n. 02, p. R71–R107, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0219477502000701>. Citado na página 19.

HARMER, Gregory P.; ABBOTT, Derek. Losing strategies can win by parrondo's paradox. **Nature**, v. 402, n. 6764, p. 864–864, 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/47220>. Citado na página 19.

JR., A. C. Orthey. **Caminhadas Quânticas A Partir De Estados Deslocalizados**. 100 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Brasil, 2017. Citado na página 16.

KARSKI, Michal et al. Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. **Science**, v. 325, n. 5937, p. 174–177, 2009. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1174436>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

KHALIQUE, A et al. Controlled information transfer in continuous-time chiral quantum walks. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 23, n. 8, p. 083005, aug 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac1551>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 36.

KONNO, Norio. Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line. **Quantum Information Processing**, v. 9, n. 3, p. 405–418, 2010. ISSN 1573-1332. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-009-0147-4>. Citado na página 35.

LI, Jin-Peng et al. Multiphoton graph states from a solid-state single-photon source. **ACS Photonics**, v. 7, n. 7, p. 1603–1610, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.0c00192>. Citado na página 23.

LI, Z. J.; WANG, J. B. Single-point position and transition defects in continuous time quantum walks. **Scientific Reports**, v. 5, n. 1, p. 13585, 2015. ISSN 2045-2322. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep13585>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 36.

LOVETT, Neil B. et al. Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 81, n. 4, abr. 2010. ISSN 1094-1622. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.81.042330>. Citado na página 16.

LU, Dawei et al. Chiral quantum walks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 93, p. 042302, Apr 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.042302>. Citado na página 18.

MAGNIEZ, Frederic et al. Search via quantum walk. In: **Proceedings of the Thirty-Ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2007. (STOC '07), p. 575–584. ISBN 9781595936318. Disponível em: <https://doi-org.ez74.periodicos.capes.gov.br/10.1145/1250790.1250874>. Citado na página 16.

ORTHEY, Alexandre C.; AMORIM, Edgard P. M. Asymptotic entanglement in quantum walks from delocalized initial states. **Quantum Information Processing**, v. 16, n. 9, p. 224, 2017. ISSN 1573-1332. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-017-1672-1>. Citado na página 33.

ORTHEY, Alexandre C.; AMORIM, Edgard P. M. Connecting velocity and entanglement in quantum walks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 99, p. 032320, Mar 2019. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.99.032320>. Citado na página 33.

PAGE, Lawrence et al. The pagerank citation ranking : Bringing order to the web. In: **The Web Conference**. [s.n.], 1999. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:1508503>. Citado na página 15.

PEARSON, Karl. The problem of the random walk. **Nature**, v. 72, n. 1865, p. 294–294, 1905. Citado na página 15.

PORTUGAL, Renato. **Quantum Walks and Search Algorithms**. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2013. ISBN 1461463351. Citado na página 16.

SADAVARE, A. B.; KULKARNI, R. V. A review of application of graph theory for network. **International Journal of Computer Science and Information Technologies (IJCSIT)**, v. 3, n. 6, p. 5296–5300, 2012. ISSN 0975-9646. Citado na página 23.

SALINAS, S.R.A. **Introdução a Física Estatística Vol. 09**. EDUSP, 1997. ISBN 9788531403866. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=cAIP3sc0K44C>. Citado na página 16.

SCHMITZ, H. et al. Quantum walk of a trapped ion in phase space. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 103, p. 090504, ago. 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.090504>. Citado na página 17.

SCHREIBER, A. et al. Photons walking the line: A quantum walk with adjustable coin operations. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 104, p. 050502, fev. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.050502>. Citado na página 16.

SETT, A. et al. Zero transfer in continuous-time quantum walks. **Quantum Information Processing**, v. 18, n. 5, p. 159, 2019. ISSN 1573-1332. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2267-9>. Citado na página 36.

SHENVI, Neil; KEMPE, Julia; WHALEY, K. Birgitta. Quantum random-walk search algorithm. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 67, p. 052307, maio 2003. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.052307>. Citado na página 16.

SHU, Jian-Jun; WANG, Qi-Wen. Beyond parrondo's paradox. **Scientific Reports**, v. 4, n. 1, p. 4244, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep04244>. Citado na página 19.

SU, Qi-Ping et al. Experimental demonstration of quantum walks with initial superposition states. **npj Quantum Information**, v. 5, n. 1, p. 40, 2019. ISSN 2056-6387. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41534-019-0155-x>. Citado na página 18.

WEST, D.B. **Introduction to Graph Theory**. Prentice Hall, 2001. (Featured Titles for Graph Theory). ISBN 9780130144003. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TuvuAAAAMAAJ>. Citado na página 23.

WÓJCIK, Antoni et al. Trapping a particle of a quantum walk on the line. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 85, p. 012329, Jan 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.012329>. Citado na página 18.

WONG, Thomas G.; TARRATACA, Luís; NAHIMOV, Nikolay. Laplacian versus adjacency matrix in quantum walk search. **Quantum Information Processing**, Kluwer Academic Publishers, USA, v. 15, n. 10, p. 4029–4048, out. 2016. ISSN 1570-0755. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-016-1373-1>. Citado na página 27.

XIMENES, J. J.; PIRES, M. A.; VILLAS-BÔAS, J. M. Parrondo's effect in continuous-time quantum walks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 109, p. 032417, Mar 2024. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.109.032417>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 36.

XIMENES, Jefferson J.; PIRES, Marcelo A.; VILLAS-BÔAS, José M. Directionality and quantum backfire in continuous-time quantum walks from delocalized states: Exact results. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 113, p. L010407, jan. 2026. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/h26t-g6c7>. Citado na página 18.

YE, Ye et al. Effects of behavioral patterns and network topology structures on parrondo's paradox. **Scientific Reports**, v. 6, n. 1, p. 37028, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep37028>. Citado na página 19.

ZHANG, Rong; XUE, Peng; TWAMLEY, Jason. One-dimensional quantum walks with single-point phase defects. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 89, p. 042317, abr. 2014. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.042317>. Citado na página 18.

ZHU, Xiaojin. Semi-supervised learning literature survey. **Comput Sci, University of Wisconsin-Madison**, v. 2, 07 2008. Citado na página 15.

APÊNDICE A – EVOLUÇÃO TEMPORAL DO PACOTE DE ONDA GAUSSIANO

Neste apêndice apresentamos os detalhes analíticos da evolução temporal de um pacote de onda gaussiano livre em uma dimensão. O objetivo é obter explicitamente a solução contínua no tempo e nas posições como referência para a comparação com os resultados numéricos das caminhadas quânticas contínuas no tempo sobre posições discretas discutidas ao longo deste trabalho. Em particular, derivamos a forma da função de onda evoluída, sua densidade de probabilidade e a expressão da dispersão temporal associada ao espalhamento do estado gaussiano.

O pacote de onda gaussiano na representação das posições, no tempo $t = 0$, é dado por

$$\langle x | \phi(x, 0) \rangle = \phi(x, 0) = A e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}}, \quad (37)$$

com a dispersão efetiva da gaussiana como

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma_0}{\text{Erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0\right)}, \quad (38)$$

corrigida via função Erro dada por

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad (39)$$

a fim de obter a correta convergência no caso limite de $\sigma_0 \rightarrow 0$.

Analisando o estado inicial $|\phi(x, 0)\rangle$, podemos expandi-lo na base das posições:

$$|\phi(x, 0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \underbrace{\langle x | \phi(x, 0) \rangle}_{\phi(x, 0)}, \quad (40)$$

onde

$$\hat{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| \quad (41)$$

representa a relação de completeza do espaço de Hilbert. Assim,

$$|\phi(x, 0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx A e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}} |x\rangle. \quad (42)$$

A constante de normalização A é determinada impondo a condição $\langle \phi(x, 0) | \phi(x, 0) \rangle = 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, 0) | \phi(x, 0) \rangle &= \langle \phi(x, 0) | \int_{-\infty}^{\infty} dx A e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}} |x\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx A e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}} A e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}} = 1 \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{\text{eff}}^2}} dx = 1, \end{aligned} \quad (43)$$

utilizando a solução da integral gaussiana na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (44)$$

e identificando $\alpha = 1/2\sigma_{\text{eff}}^2$, obtemos

$$\langle \phi(x,0) | \phi(x,0) \rangle = A^2 \sqrt{2\pi\sigma_{\text{eff}}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{(2\pi\sigma_{\text{eff}}^2)^{1/4}}. \quad (45)$$

Portanto, a função de onda inicial normalizada torna-se

$$\langle x | \phi(x,0) \rangle = \phi(x,0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}}}{(2\pi\sigma_{\text{eff}}^2)^{1/4}}. \quad (46)$$

Considerando agora uma partícula livre em uma dimensão, isto é, $V(x) = 0$, buscamos determinar a evolução temporal do estado $\phi(x,t)$, tal que $\langle x | \phi(x,t) \rangle = \phi(x,t)$.

O estado evoluído satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(x,t)\rangle = \hat{H} |\phi(x,t)\rangle, \quad (47)$$

e a evolução temporal do estado pode ser escrita como

$$|\phi(x,t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\phi(x,0)\rangle. \quad (48)$$

Para manipular o operador evolução temporal, utilizamos a representação de momentos:

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p|. \quad (49)$$

Expandindo a exponencial em série de Taylor,

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= (\hat{I} - i\gamma t \hat{P}^2 + \dots) \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| \\ &= (1 - i\gamma t p^2 + \dots) \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\gamma t p^2} |p\rangle \langle p|. \end{aligned} \quad (50)$$

Assim, o estado evoluído torna-se

$$\begin{aligned} |\phi(x,t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\gamma t p^2} |p\rangle \underbrace{\langle p | \phi(x,0) \rangle}_{\phi(p,0)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\gamma t p^2} \phi(p,0) |p\rangle, \end{aligned} \quad (51)$$

e projetando na base das posições

$$\langle x | \phi(x,t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\gamma t p^2} \phi(p,0) \langle x | p \rangle. \quad (52)$$

Identificando que

$$\langle x | \phi(x, t) \rangle = \phi(x, t), \quad (53)$$

$$\langle x | p \rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (54)$$

segue que

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p, 0) e^{-i\hbar p^2} e^{ipx} dp. \quad (55)$$

Esta equação é solução da equação de Schödinger dependente do tempo. Devemos agora determinar $\phi(p, 0)$. Expandindo novamente o estado inicial,

$$\begin{aligned} |\phi(x, 0)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \underbrace{\langle x | \phi(x, 0) \rangle}_{\phi(x, 0)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x, 0) |x\rangle, \end{aligned}$$

projetando-o agora na base de momentos

$$\langle p | \phi(x, 0) \rangle = \langle p | \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x, 0) |x\rangle = \phi(p, 0). \quad (56)$$

Substituindo

$$\phi(x, 0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2}}}{(2\pi\sigma_{\text{eff}}^2)^{1/4}} \quad (57)$$

e

$$\langle p | x \rangle = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (58)$$

obtemos

$$\phi(p, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma_{\text{eff}}^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2} - ipx} dx. \quad (59)$$

A integral acima pode ser calculada utilizando

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{b^2}{4\alpha}}, \quad (60)$$

com

$$\alpha = \frac{1}{4\sigma_{\text{eff}}^2}, \quad (61)$$

$$b = -ip. \quad (62)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi(p, 0) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sigma_{\text{eff}}^{1/2} e^{-\sigma_{\text{eff}}^2 p^2} \\ &= B e^{-\sigma_{\text{eff}}^2 p^2}, \end{aligned} \quad (63)$$

onde

$$B = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sigma_{\text{eff}}^{1/2}. \quad (64)$$

Substituindo $\phi(p, 0)$ na Eq. (55), temos que

$$\phi(x, t) = \frac{B}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_{\text{eff}}^2 p^2} e^{-i\gamma t p^2} e^{ipx} dp. \quad (65)$$

Agrupando os termos quadráticos em p ,

$$\phi(x, t) = \frac{B}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma_{\text{eff}}^2 + i\gamma t)p^2} e^{ipx} dp, \quad (66)$$

e recorrendo novamente a solução gaussiana da Eq. (60), obtemos

$$\phi(x, t) = \left(\frac{\sigma_{\text{eff}}^2}{2\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta}}}{\beta^{1/2}}, \quad (67)$$

onde definimos

$$\beta = \sigma_{\text{eff}}^2 + i\gamma t. \quad (68)$$

A densidade de probabilidade é obtida tomando o módulo quadrado da função de onda:

$$|\phi(x, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}}}{\xi}, \quad (69)$$

onde

$$\xi^2 = \sigma_{\text{eff}}^2 + \gamma^2 \frac{t^2}{\sigma_{\text{eff}}^2}. \quad (70)$$

A dispersão temporal do pacote pode então ser calculada a partir de

$$\sigma(t) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (71)$$

Como a distribuição é simétrica em torno da origem, temos

$$\langle x \rangle = 0, \quad (72)$$

restando apenas o cálculo de $\langle x^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) x^2 \phi(x, t) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \xi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}} dx, \end{aligned} \quad (73)$$

e usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2\xi^2}, \quad (74)$$

segue que

$$\langle x^2 \rangle = \xi^2. \quad (75)$$

Finalmente, a dispersão temporal do pacote gaussiano livre é dada por

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_{\text{eff}}^2 + \gamma^2 \frac{t^2}{\sigma_{\text{eff}}^2}}, \quad (76)$$

o que corresponde à Eq. (33). No limite assintótico $t \rightarrow \infty$ que corresponde ao regime de longa duração, a dispersão passa a crescer linearmente com o tempo,

$$\sigma(t) \approx \frac{\gamma t}{\sigma_{\text{eff}}}. \quad (77)$$

Consequentemente, a taxa de espalhamento torna-se invariante no tempo nesse regime, dada por

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{\sigma_{\text{eff}}}, \quad (78)$$

ou de maneira equivalente a

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{\sigma_0} \text{Erf} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 \right), \quad (79)$$

em concordância com a Eq. (35).

APÊNDICE B – SIMETRIAS EM CQCTS NO GRAFO DEFEITUOSO L_5

Apresentamos um exemplo analítico de caminhadas quânticas contínuas no tempo (CQCTs) inicializadas tanto a partir de estados localizados quanto deslocalizados no grafo de cinco sítios L_5 , cujos sítios são rotulados por $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. O defeito é introduzido por meio de amplitudes complexas de transição da forma $\xi e^{i\theta_{\pm}}$ conectando o sítio central $j = 0$ aos seus vizinhos mais próximos $j = \pm 1$. Nossa análise tem como objetivo destacar o surgimento de viés de transporte e sua dependência com a intensidade do defeito ξ e as fases $\theta_{\pm}$ para estados iniciais deslocalizados, bem como sua ausência para estados iniciais localizados. O Hamiltoniano em sua forma matricial é dado por

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\xi e^{-i\theta_-} & 0 & 0 \\ 0 & -\xi e^{i\theta_-} & 0 & -\xi e^{-i\theta_+} & 0 \\ 0 & 0 & -\xi e^{i\theta_+} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Primeiramente, consideramos um estado inicialmente localizado no sítio central, $|\psi_0\rangle = |0\rangle$. A probabilidade de ocupação do sítio j no instante t é dada por

$$P_j(t) = |\langle j|\psi(t)\rangle|^2, \quad (81)$$

e o estado evoluído no tempo é escrito como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k e^{-i\lambda_k t} \langle \phi_k|\psi_0\rangle |\phi_k\rangle, \quad (82)$$

onde λ_k e $|\phi_k\rangle$ denotam os autovalores e os respectivos autovetores do Hamiltoniano da Eq. (80). A diagonalização do Hamiltoniano fornece os autovalores

$$\lambda = \{-1, 1, 0, -\beta, \beta\}, \quad (83)$$

onde $\beta = \sqrt{2\xi^2 + 1}$. Os autovetores correspondentes conduzem à seguinte forma explícita do estado evoluído,

$$|\psi(t)\rangle = \beta^{-2} \begin{bmatrix} e^{-i\theta_-} \xi [\cos(\beta t) - 1] \\ ie^{-i\theta_-} \beta \xi \sin(\beta t) \\ 2\xi^2 \cos(\beta t) + 1 \\ ie^{i\theta_+} \beta \xi \sin(\beta t) \\ e^{i\theta_+} \xi [\cos(\beta t) - 1] \end{bmatrix}, \quad (84)$$

o que resulta nas probabilidades de encontrar a partícula em cada sítio,

$$P_{\pm 2}(t) = \frac{4\xi^2}{\beta^4} \sin^4\left(\frac{\beta t}{2}\right), \quad (85)$$

$$P_{\pm 1}(t) = \frac{\xi^2}{\beta^2} \sin^2(\beta t), \quad (86)$$

$$P_0(t) = \frac{[2\xi^2 \cos(\beta t) + 1]^2}{\beta^4}. \quad (87)$$

Assim, a distribuição de probabilidades é invariante sob a inversão do índice espacial, $P_j(t) = P_{-j}(t)$, e também sob a transformação $\xi \rightarrow -\xi$. Embora as fases apareçam explicitamente nas amplitudes, elas se cancelam nas probabilidades, garantindo a ausência de viés direcional na dinâmica. Essa simetria também se reflete na posição média, $\langle j \rangle$, que se anula identicamente para todos os tempos. O desvio padrão é dado por

$$\sigma(t) = \frac{2|\xi|}{\beta^2} \sqrt{8 \sin^4\left(\frac{\beta t}{2}\right) + \frac{\beta^2}{2} \sin^2(\beta t)}, \quad (88)$$

sendo também invariante sob a inversão de ξ .

Esses resultados mostram que, para um estado inicialmente localizado, a CQCT preserva uma distribuição de probabilidade simétrica independentemente da presença de amplitudes complexas de transição ou de variações na intensidade do defeito. Isso estabelece que um estado inicial localizado não conduz a transporte quiral ou direcional neste cenário.

Agora consideramos um estado inicial deslocalizado dado por uma distribuição uniforme sobre os sítios $j = \{-1, 0, 1\}$, que pode ser escrito como

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|-1\rangle + |0\rangle + |1\rangle). \quad (89)$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior, obtemos

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6\beta^2} \begin{bmatrix} 2\xi e^{-i\theta_-} (\cos \beta t - 1) - i\beta e^{-i(\theta_- + \theta_+)} (\beta \sin t - \sin \beta t) + i\beta (\beta \sin t + \sin \beta t) \\ \beta \left[\beta (\cos t + \cos \beta t) + \beta e^{-i(\theta_- + \theta_+)} (\cos \beta t - \cos t) + 2i\xi \sin \beta t e^{-i\theta_-} \right] \\ 2 \left[1 + 2\xi^2 \cos \beta t + i\beta \xi \sin \beta t (e^{i\theta_-} + e^{-i\theta_+}) \right] \\ \beta \left[\beta (\cos t + \cos \beta t) - \beta e^{i(\theta_- + \theta_+)} (\cos t - \cos \beta t) + 2i\xi \sin \beta t e^{i\theta_+} \right] \\ 2\xi e^{i\theta_+} (\cos \beta t - 1) - i\beta e^{i(\theta_- + \theta_+)} (\beta \sin t - \sin \beta t) + i\beta (\beta \sin t + \sin \beta t) \end{bmatrix}, \quad (90)$$

e a posição média do caminhante é dada por

$$\langle j \rangle = -\frac{4\xi}{3\beta^2} \sin^2\left(\frac{\beta t}{2}\right) \left[\beta \cos(t) \cot\left(\frac{\beta t}{2}\right) + 2 \sin(t) \right] (\sin \theta_- + \sin \theta_+). \quad (91)$$

A partir dessa última expressão, observa-se que impor $\theta_- = \theta_+ = \theta$ com $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) conduz a uma caminhada enviesada, com $\langle j \rangle$ governado pelos parâmetros (ξ, θ) . Em contraste, para $\theta_- = -\theta_+ = \theta$, a posição média se anula, correspondendo a uma dinâmica não enviesada.

Por fim, consideremos o caso especial $\theta_- = 0$ e $\theta_+ = \pi$. Temos

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}\beta^2} \begin{bmatrix} \xi[\cos(\beta t) - 1] + i\beta^2 \sin t \\ \beta[\beta \cos t + i\xi \sin(\beta t)] \\ 2\xi^2 \cos(\beta t) + 1 \\ \beta[\beta \cos t - i\xi \sin(\beta t)] \\ -\xi[\cos(\beta t) - 1] + i\beta^2 \sin t \end{bmatrix}, \quad (92)$$

o que fornece as seguintes probabilidades

$$P_{\pm 2}(t) = \frac{1}{3} \left[\frac{\xi^2(\cos(\beta t) - 1)^2}{\beta^4} + \sin^2(t) \right], \quad (93)$$

$$P_{\pm 1}(t) = \frac{1}{3} \left[\frac{\xi^2 \sin^2(\beta t)}{\beta^2} + \cos^2(t) \right], \quad (94)$$

$$P_0(t) = \frac{(2\xi^2 \cos(\beta t) + 1)^2}{3\beta^4}, \quad (95)$$

onde a distribuição de probabilidades é invariante sob a inversão tanto de j quanto de ξ , assim como no caso localizado. Embora estados gaussianos e uniformes truncados sejam distintos, o mecanismo subjacente à simetria em ξ e à dinâmica não enviesada para $\theta_- = 0$ e $\theta_+ = \pi$ é comum a ambos os casos. Isso sugere que amplitudes não nulas em sítios adjacentes a $j = 0$, permite fluxo de probabilidade de $j = \pm 1$ em direção ao defeito desde o instante inicial e são suficientes para induzir assimetria controlada por fase em estados deslocalizados.



JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS
TECNOLÓGICAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, EDGARD PACHECO MOREIRA AMORIM, professor(a) do curso de MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação/tese intitulada: **“MELHORIA DA PROPAGAÇÃO DE ESTADOS DESLOCALIZADOS EM CAMINHADAS QUÂNTICAS VIA PARADOXO DE PARRONDO”** de autoria do(a) acadêmico JOÃO VITOR CORDEIRO.

Joinville, 04 de Agosto de 2026.

Assinatura digital do(a) orientador(a):



Documento assinado digitalmente
EDGARD PACHECO MOREIRA AMORIM
Data: 05/08/2026 15:54:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

[Edgard Pacheco Moreira Amorim]