

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

JOYCE MACHADO OLIVEIRA

**ESTUDO DA EMISSÃO EM RAIOS-X DE HOT-SPOTS EM ESTRELAS DE
NÊUTRONS SUPERMASSIVAS: ANÁLISE DE IMAGENS DUPLAS**

JOINVILLE

2025

JOYCE MACHADO OLIVEIRA

**ESTUDO DA EMISSÃO EM RAIOS-X DE HOT-SPOTS EM ESTRELAS DE
NÊUTRONS SUPERMASSIVAS: ANÁLISE DE IMAGENS DUPLAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Dr Rafael Camargo Rodrigues de Lima

**JOINVILLE
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Oliveira, Joyce Machado
ESTUDO DA EMISSÃO EM RAIOS-X DE HOT-SPOTS EM
ESTRELAS DE NÊUTRONS SUPERMASSIVAS: ANÁLISE DE
IMAGENS DUPLAS / Joyce Machado Oliveira. -- 2025.
114 p.

Orientador: Rafael Camargo Rodrigues de Lima
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2025.

1. Estrelas de Nêutrons. 2. Relatividade Geral. 3. Teoria
Escalar-Tensorial. 4. Emissões de Raios-X. 5. Múltiplas Imagens. I.
de Lima, Rafael Camargo Rodrigues . II. Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física. III. Título.

JOYCE MACHADO OLIVEIRA

**ESTUDO DA EMISSÃO EM RAIOS-X DE HOT-SPOTS EM ESTRELAS DE
NÊUTRONS SUPERMASSIVAS: ANÁLISE DE IMAGENS DUPLAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Dr Rafael Camargo Rodrigues de Lima

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima (Presidente/Orientador)
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Dr. Bruno Duarte da Silva Moreira
CCT/UDESC

Prof. Dr. Jonas P. Pereira
UnB

Joinville, 16 de Julho de 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e à minha avó que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando ao longo de toda a minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Rafael Camargo Rodrigues de Lima, pela dedicação a esta pesquisa.

Aos professores do curso, por sua paciência e compreensão.

Aos meus amigos; todos foram extremamente importantes nessa jornada.

Aos colegas de curso e de pesquisa, pela constante troca de ideias e apoio moral.

Agradeço à UDESC e à CNPq pelo apoio financeiro que tornou possível esta pesquisa.

RESUMO

Estrelas de Nêutrons (ENs) são laboratórios naturais que permitem explorar fenômenos físicos sob condições extremas de densidade, campos gravitacionais e campos magnéticos. Um caso especialmente interessante é aquele de estrelas de nêutrons supermassivas; à medida que a massa destes objetos aumenta e estas estrelas se tornam super ou ultracompactas, os efeitos relativísticos se tornam cada vez mais extremos. Neste trabalho, investigamos o fenômeno de deflexão da luz emitida de determinados pontos da superfície, denominados hot-spots, com foco no cenário em que fótons emitidos de um mesmo ponto sofrem desvios diferentes em sua trajetória, resultando na observação de duas ou mais imagens do mesmo ponto. Além disso, o estudo faz a análise comparativa entre a RG e a Teoria Escalar-Tensorial (STT), que propõe a existência de um campo escalar adicional mediando a gravidade e considerando o fenômeno de escalarização espontânea, onde o campo escalar torna-se relevante em regimes de campo forte. Foram considerados dois modelos para esta teoria; STT1, no qual o fator conforme $A = 0.95$ e a carga escalar $Q = 0.5$, e STT2, no qual $A = 1.05$, $Q = 0.5$. A modelagem teórica utiliza a métrica de Schwarzschild para a RG e a métrica de Just para a STT. Foram incorporados efeitos como o redshift gravitacional, efeito Doppler relativístico e atraso de Shapiro. Simulações numéricas foram realizadas para diferentes configurações, variando a razão massa-raio (M/R), a posição do hot-spot emissor na sua superfície e a posição do observador em relação ao ângulo da emissão, e a frequência de rotação da estrela, desconsiderando o achatamento estelar. O modelo de pulsares, com dois hot-spots antipodais, também foi considerado. Os resultados mostraram que ENs com razão $M/R > 0.284$ produzem duas ou mais imagens de um mesmo hot-spot devido à curvatura extrema da luz. Para regimes extremos, nos quais $M/R \geq 0.305$, as diferenças entre a RG e a STT tornam-se mais pronunciadas, com o modelo STT1 ($A = 0.95$) reduzindo o fluxo observado e o STT2 ($A = 1.05$) amplificando-o. Hot-spots maiores $\Delta\psi = 20^\circ$ geram curvas de luz com amplitudes maiores, enquanto configurações equatoriais ($i_0 = 90^\circ$) destacam a formação de imagens secundárias. A rotação estelar gera distorções adicionais aos perfis de pulso, principalmente em regimes nos quais $v > 250Hz$. Concluímos que a análise das curvas de luz considerando efeitos relativísticos realistas mostra-se um caminho promissor para o estudo de fenômenos relativísticos extremos e teorias alternativas da gravidade, permitindo refinar as restrições de determinados modelos e a distinção entre RG e STT. Além disso, a modelagem das emissões permite a melhor compreensão e restrição de modelos para a equação de estado da matéria.

Palavras-chave: Estrelas de Nêutrons. Relatividade Geral. Teoria Escalar-Tensorial. Emissões de Raios-X. Múltiplas Imagens.

ABSTRACT

Neutron Stars (NSs) are natural laboratories that allow us to explore physical phenomena under extreme conditions of density, gravitational fields and magnetic fields. A special case arises when considering supermassive neutron stars; as their masses rise and these stars become super or ultracompacts, the relativistic effects become more extreme. In this work, we investigate the phenomena of deflection of light that is emitted from regions on the star surface, denominated hot-spots, focusing in the scenario of photons that are emitted from the same hot-spot, but travel along different trajectories, resulting in the observation of two or more images of the same spot. Furthermore, this study makes a comparative analysis between General Relativity (GR) and the Scalar-Tensor Theory (STT), which proposes the existence of an additional scalar field mediating gravity and considering the phenomena of spontaneous scalarization, in which the scalar field becomes relevant in strong field regime. Two models were considered for this theory; STT1, in which the conformal factor $A = 0.95$ and the scalar charge $Q = 0.5$, and STT2, with $A = 1.05$ and $Q = 0.5$. The theoretical modeling considers the Schwarzschild metric for GR and the Just metric for STT. Effects such as the gravitational redshift, relativistic Doppler effect and the Shapiro timedelay were also incorporated. Numerical simulations were performed to different configurations, varying the mass-radius ratio (M/R), the hot-spot's position on the star surface and the observer position in relation with the emission angle, and the star's rotation frequency, neglecting the oblateness effect. The pulsar model, with two antipodal emitting hot-spots, was also considered. The results show that NSs with $M/R > 0.284$ produce two or more images of the same hot-spot. For more extreme regimes, those for $M/R \geq 0.305$, the differences between GR and STT become more pronounced, with the STT1 model reducing the observed flux, while the STT2 amplifies them. Bigger hot-spots ($\Delta\psi = 20^\circ$) generate light curves with larger amplitudes, while equatorial configurations ($i_0 = 90^\circ$) amplify the formation of secondary images. The star's rotation generates additional distortions to the pulse profiles, especially in regimes for which $v > 250\text{Hz}$. We conclude that the analysis of the light curves considering realistic relativistic effects is a promising path for the studies of extreme relativistic phenomena and alternative theories of gravitation, allowing for the restriction of such models and the distinction between GR and STT. Furthermore, the modelling of such emissions allows a better comprehension and restriction for the equation of state for matter.

Keywords: Neutron Stars. General Relativity. Scalar-Tensor Theory. X-ray Emissions. Multiple Images.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Par de fotografias retiradas do Pulsar do Caranguejo, que evidenciam o efeito de farol característico dos pulsares, destacando seus estados de luminosidade máxima (imagem à esquerda) e mínima (imagem à direita).	21
Figura 2 – Principais estágios da evolução de uma estrela de nêutrons. Observa-se, respectivamente, (I) o choque inicial do colapso gravitacional, (II) o remanescente estelar, (III) a estrela atinge sua temperatura máxima, (IV) inicia-se a estabilização da temperatura, principalmente pela emissão de neutrinos, (V) a estrela se torna isotérmica (temperatura tende a ser estável) e (VI) a estrela passa a emitir termicamente, principalmente em raios-X.	23
Figura 3 – Estrutura física interna de uma estrela de nêutrons, com suas respectivas composições. Em sua camada mais externa há uma atmosfera, seguido de um envelope. Tem-se ainda a crosta, classificada entre sua porção mais externa e a mais interna. Por último, o núcleo, dividido entre uma camada mais externa e uma camada mais interna, cuja composição exata ainda não é conhecida. . .	24
Figura 4 – Exemplos de diferentes fases e estruturas da pasta nuclear. (a) nhoque, (b) espaguete, (c) waffles, (d) lasanha, (e) defeitos, (f) anti-espaguete e (g) anti-nhoque.	25
Figura 5 – Visão esquemática de um pulsar. As linhas pontilhadas indicam o campo magnético da estrela, enquanto as linhas que deixam os polos magnéticos indicam os feixes de emissão.	25
Figura 6 – Transporte paralelo de dois vetores em uma esfera. Dois vetores transportados paralelamente a partir de dois pontos diferentes não se cruzam em um caminho necessariamente paralelo, evidenciando a influência da escolha da trajetória no resultado do transporte.	30
Figura 7 – Representação do efeito Doppler para uma fonte que se move com velocidade u em relação a um observador distante. A distância que a frente de onda viaja para alcançá-lo varia, dependendo do ângulo de movimento em relação ao sinal.	40
Figura 8 – Representação do fenômeno de Aberraçāo da luz. O vetor em vermelho indica o feixe de luz emitido pela fonte S. O feixe é visto de forma diferente por dois observadores em movimento relativo, enquanto a sua velocidade (magnitude do vetor c) permanece constante para ambos.	41
Figura 9 – Ilustração da Aberraçāo relativística e desvio de um feixe de luz cuja trajetória é influenciada pelo campo gravitacional de um objeto massivo. A linha em vermelho indica a trajetória real do feixe, sendo emitido pelo objeto em azul. Já a linha laranja indica a trajetória aparente, após sofrer a curvatura gravitacional.	42

Figura 10 – Ilustração do quarto teste da Relatividade Geral proposto por Shapiro. A linha reta entre Mercúrio e a Terra representa a trajetória que o sinal percorreria na geometria euclidiana (a mecânica clássica de Newton). Já as linhas curvas, que passam perto do Sol, representam a trajetória real do sinal na presença do campo gravitacional do Sol.	44
Figura 11 – Potencial efetivo para fótons na métrica de Schwarzschild. A linha preta representa como $B^{-2}(r)$ varia com a distância radial. O ponto mais alto da curva, indicado pela seta em vermelho, ocorre em $r = 3M$ e indica a esfera de fótons, uma órbita circular e instável na qual a luz pode orbitar a estrela. .	56
Figura 12 – Fótons são emitidos de um hot-spot na superfície da estrela de nêutrons. O vetor \hat{n} representa a normal à superfície no ponto de emissão; \hat{k} representa a direção inicial do fóton emitido; α é o ângulo de emissão entre \hat{n} e \hat{k} ; θ corresponde à colatitude na superfície da estrela; ϕ é a coordenada azimutal; ω indica a frequência de rotação.	57
Figura 13 – Um fóton emitido de um ângulo $\alpha \geq \alpha_{crit}$ é capturado pelo campo gravitacional da estrela e retorna para a superfície. α_{crit} determina o ângulo máximo de emissão em relação à normal.	58
Figura 14 – Geometria da emissão por um hot-spot na superfície da estrela. O ângulo ψ está relacionado à deflexão (curvatura) da trajetória do fóton, enquanto ξ denota o azimute da direção de emissão no referencial local.	60
Figura 15 – Trajetórias de fótons emitidos da face oposta de uma estrelas de diferentes compacidades (M/R). As curvas em vermelho correspondem a geodésicas emitidas de diferentes latitudes da estrela de nêutrons, ilustradas em vista superior, com a linha de visada do observador alinhada ao eixo x e o hot-spot localizado na face oposta. O aumento da compacidade modifica as trajetórias dos fótons, que, apesar disso, continuam alcançando o mesmo observador. .	68
Figura 16 – Trajetória de fótons emitidos de um hot-spot localizado na face oposta ao observador. Em casos mais extremos, a deflexão extrema faz com trajetórias distintas sejam projetadas no mesmo plano e se interceptem visualmente. . .	69
Figura 17 – Relação entre ψ_{max} (eixo y) e a compacidade M/R (eixo x). Em baixas compacidades apenas parte da superfície é visível, enquanto para $M/R \gtrsim$ a deflexão diverge, tornando tornando toda a estrela observável e apresentando múltiplas imagens de cada ponto.	70
Figura 18 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\psi = 5^\circ$, configuração característica de hot-spots pontuais. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$	77

Figura 19 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\psi = 10^\circ$. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.	78
Figura 20 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\psi = 15^\circ$. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.	79
Figura 21 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\psi = 20^\circ$. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.	80
Figura 22 – Fluxo de um hot-spot em colatitude $\theta = 80^\circ$ na superfície da estrela. O hot-spot está próximo ao equador, mas ainda um pouco deslocado em direção ao polo norte da estrela.	82
Figura 23 – Fluxo de um hot-spot em colatitude $\theta = 60^\circ$ na superfície da estrela. O hot-spot está deslocado 30° acima do equador, em uma região intermediária.	83
Figura 24 – Fluxo de um hot-spot em colatitude $\theta = 45^\circ$ na superfície da estrela. O hot-spot está localizado exatamente entre o polo e o equador da estrela.	84
Figura 25 – Fluxo de um hot-spot para $i = 135^\circ$. Nesse cenário, o observador está abaixo do equador, próximo ao polo sul, inclinado 45° em relação ao equador.	86
Figura 26 – Fluxo de um hot-spot para $i = 150^\circ$. O observador está hemisfério sul da estrela, próximo ao polo, mas inclinado 30° acima dele.	87
Figura 27 – Fluxo de um hot-spot para $i = 170^\circ$. O observador está praticamente alinhado ao polo sul da estrela, apenas 10° acima dele.	88
Figura 28 – Fluxo para dois hot-spots antipodais em diferentes compacidades para RG. Nessa configuração, o observador está no plano equatorial, enquanto os hot-spots estão localizados em latitudes intermediárias.	91
Figura 29 – Fluxo para dois hot-spots antipodais para diferentes compacidades para STT1. O observador está no plano equatorial, enquanto os hot-spots estão localizados em latitudes intermediárias.	92
Figura 30 – Fluxo para dois hot-spots antipodais para diferentes compacidades para STT2. O observador está no plano equatorial, enquanto os hot-spots estão localizados em latitudes intermediárias.	93

Figura 31 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 250\text{Hz}$. O observador está em uma inclinação intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A estrela tem compacidade $M/R = 0.275$.	95
Figura 32 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 250\text{Hz}$. O observador está em uma inclinação intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A estrela tem compacidade $M/R = 0.305$.	96
Figura 33 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 250\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão localizados em planos quase equatoriais. A estrela tem compacidade $M/R = 0.275$.	97
Figura 34 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 250\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão em planos quase equatoriais. A compacidade considerada é $M/R = 0.305$.	98
Figura 35 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 700\text{Hz}$. O observador tem uma linha de visão intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A compacidade considerada é $M/R = 0.275$.	99
Figura 36 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 700\text{Hz}$. O observador tem uma linha de visão intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A compacidade considerada é $M/R = 0.305$.	100
Figura 37 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 700\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão em planos quase equatoriais. A compacidade considerada é $M/R = 0.275$.	101
Figura 38 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 700\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão em planos quase equatoriais. A compacidade considerada é $M/R = 0.305$.	102

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AXPs	Anomalous X-ray Pulsars
CCOs	Central Compact Objects
DEF	Damour-Esposito-Farese
ENs	Estrelas de Nêutrons
EdE	Equação de Estado
eXTP	Enhanced X-ray Timing and Polarimetry
FRBs	Fast Radio Bursts
HMXB	High-Mass X-ray Binary
INSs	Isolated Neutron Stars
J+D	Just-plus-Doppler
LMXB	Low-Mass X-ray Binary
MO	Mendes-Ortiz
NICER	Neutron Star Interior Composition Explorer
PPN	Post-Newtonian Parameters
RE	Relatividade Especial
RG	Relatividade Geral
RRATS	Rotating Radio-Transientes
S+D	Schwarzschild-plus-Doppler
SGRs	Soft Gamma Repeaters
STT	Scalar-Tensor Theory
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff

LISTA DE SÍMBOLOS

λ	Parâmetro afim ao longo de uma curva
∇_μ	Derivada covariante
Γ	Símbolos de conexão (Símbolos de Christoffel)
\mathcal{L}_ξ	Derivada de Lie
ξ^μ	Campo vetorial (Vetor de Killing)
\square	Operador d'Alembertiano
M_\odot	Massa solar
M	Massa da estrela
R	Raio da estrela
ρ	Densidade de massa-energia
n_0	Densidade de saturação nuclear
P	Pressão
$g_{\mu\nu}$	Tensor Métrico
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
R	Escalar de Ricci
$T^{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
ds^2	Elemento de linha da métrica
U^μ	Quadrivelocidade de uma partícula
p^μ	Quadrimomento do fóton
c	Velocidade da luz
G	Constante gravitacional
R_s	Raio de Schwarzschild
e, E	Energia conservada do fóton
ℓ	Momento angular conservado de um fóton
b	Parâmetro de impacto (ℓ/e)
$B(r)$	Potencial efetivo para a órbita do fóton
z	Redshift gravitacional
v	Frequência de rotação da estrela
β	Velocidade normalizada (v/c)

η, δ	Fator Doppler relativístico
i, i_0	Ângulo de inclinação entre o observador e o eixo de rotação
θ_s	Colatitude do hot-spot
ϕ_s	Fase de rotação (ângulo azimutal) do hot-spot
α	Ângulo de emissão do fóton em relação à normal da superfície
ψ	Ângulo de deflexão da luz
ξ	Ângulo entre a direção de emissão e o movimento do hot-spot
$\Delta\psi$	Semiacabertura angular do hot-spot
F	Fluxo de radiação observado
I	Intensidade da radiação
D	Distância entre a estrela e o observador
ψ_n	Ângulo de deflexão para a n-ésima imagem
Φ, φ	Campo escalar
$\bar{g}_{\mu\nu}$	Métrica no frame de Jordan
$g_{\mu\nu}$	Métrica no frame de Einstein
$F(\Phi)$	Função de acoplamento do campo escalar com a curvatura
$A(\varphi)$	Fator de acoplamento da matéria com o campo escalar
$\alpha(\varphi)$	Derivada de $\ln(A(\varphi))$ em relação a φ
$\beta(\varphi)$	Derivada de $\alpha(\varphi)$ em relação a φ
Q, q	Carga escalar da estrela de nêutrons
a, b	Constantes relacionadas à massa e carga escalar na métrica de Just.
ρ_r	Coordenada radial na métrica de Just
σ	Parâmetro de impacto na STT (h/ϵ)
A_s	Valor do fator conforme $A(\varphi)$ na superfície da estrela

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	ESTRELAS DE NÊUTRONS	19
2.1	TEORIZAÇÃO E DESCOBERTA	19
2.2	FORMAÇÃO E ESTRUTURA INTERNA	21
2.3	TIPOS DE ESTRELAS DE NÊUTRONS E SUAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS	25
2.4	LIMITES DE MASSA PARA ESTRELAS DE NÊUTRONS	26
3	RELATIVIDADE GERAL	29
3.1	BASE TEÓRICA	29
3.1.1	Transporte paralelo	29
3.1.2	Geodésicas	31
3.1.3	Derivada de Lie, Simetrias e Vetores de Killing	33
3.2	A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	35
3.3	GEODÉSICAS NO ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD	37
3.4	EFEITO DOPPLER RELATIVÍSTICO E ABERRAÇÃO RELATIVÍSTICA	40
3.5	REDSHIFT GRAVITACIONAL	43
3.6	ATRASO DE SHAPIRO	44
4	TEORIA ESCALAR-TENSORIAL DA GRAVITAÇÃO	46
4.1	DEFINIÇÃO	46
4.2	ESCALARIZAÇÃO ESPONTÂNEA	48
4.3	SOLUÇÃO EXTERNA EXATA	49
4.4	MODELOS	51
4.5	RESTRIÇÕES OBSERVACIONAIS DA STT	51
5	ANÁLISE DA EMISSÃO DE RAIOS-X DE HOT-SPOTS	54
5.1	ÓRBITA DE FÓTONS NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	54
5.1.1	Curvatura da Luz	59
5.1.2	Rotação	64
5.1.3	Fluxo para dois hot-spots antipodais	67
5.2	MÚLTIPLAS IMAGENS	68
5.3	MODELAGEM DO FLUXO NA STT	71
5.4	MODELAGEM NUMÉRICA DAS CURVAS DE LUZ	74
6	RESULTADOS	76
6.1	TAMANHO DO HOT-SPOT	76
6.2	POSIÇÃO DO HOT-SPOT NA SUPERFÍCIE DA ESTRELA	81
6.3	DIFERENTES CONFIGURAÇÕES PARA A GEOMETRIA DO PROBLEMA.	85

6.4	DOIS HOT-SPOTS	89
6.5	ROTAÇÃO	94
6.6	DISCUSSÃO	103
7	CONCLUSÃO	105
	REFERÊNCIAS	108

1 INTRODUÇÃO

Estrelas de Nêutrons (ENs) constituem um dos ambientes mais extremos do Universo, tornando-as laboratórios naturais para o estudo da física sob condições de densidade, campo gravitacional e campo magnético que não podem ser reproduzidos em laboratórios terrestres. Formadas a partir do colapso gravitacional de estrelas supermassivas, as ENs comportam massas da ordem daquela do Sol em raios de 10-15 km, atingindo densidades centrais que superam em várias vezes aquela de saturação nuclear. O estudo desses objetos desafia a nossa compreensão sobre as interações nucleares, cuja física está contida na Equação de Estado (EdE) da matéria, e exige o uso de teorias relativísticas da gravitação, sendo a Relatividade Geral (RG) de Einstein a teoria padrão.

Uma das formas mais promissoras de se investigar as propriedades das ENs é através da análise de emissões eletromagnéticas, como as de raios-X. Muitas ENs, como pulsares em sistemas binários ou magnetares, exibem regiões em sua superfície que são aquecidas a milhões de Kelvin, chamadas de hot-spots. Devido à rápida rotação da estrela, a emissão desses hot-spots é observada como uma modulação periódica, gerando um perfil de pulso característico. A forma desses pulsos é influenciada pelo campo gravitacional da estrela, que desvia as trajetórias da luz, efeito conhecido como deflexão da luz, e atrasa seu tempo de chegada, além de ser modificada por efeitos relativísticos como o efeito Doppler e a aberração da luz. A modelagem dos perfis de pulso permite inferir parâmetros estelares, como a massa e o raio, e restringir a EdE da matéria.

Embora a RG tenha sido validada através de testes em regimes de campo fraco, o regime de campo forte, como aquele próximo à superfície das estrelas de nêutrons, é propício para testar seus limites e buscar por desvios previstos em teorias alternativas da gravitação. Entre tais teorias, a Teoria Escalar-Tensorial (Scalar-Tensor Theory - STT) é uma extensão que propõe a existência de um campo escalar adicional que media a gravidade. Em objetos compactos, a STT pode levar a fenômenos como a escalarização espontânea, onde uma estrela pode adquirir uma carga escalar que altera sua estrutura e o espaço-tempo ao seu redor. Essa modificação instiga a investigação das assinaturas deixadas nos perfis de pulso e se elas são suficientemente distintas para serem diferenciadas daquelas previstas pela RG.

Este trabalho investiga estes cenários, focando em um regime físico ainda mais sensível: o de estrelas de nêutrons supermassivas e ultracompactas, cuja compacidade (M/R) é tão elevada que a curvatura na trajetória da luz emitida se torna extrema, levando à formação de múltiplas imagens de um mesmo hot-spot. O estudo da estrutura e a contribuição dessas imagens são sensíveis à geometria do espaço-tempo e podem servir como um caminho para a distinção entre a STT e a RG.

Para tal investigação, esta dissertação utiliza um modelo teórico e numérico para calcular e comparar os perfis de pulso de raios-X de estrelas de nêutrons supermassivas nos cenários da RG e da STT. Nosso objetivo é modelar a emissão de hot-spots de tamanho finito, incluindo a contribuição das imagens secundárias para o fluxo total. Além disso, buscamos avaliar como

a forma dos perfis de pulso é afetada por parâmetros como a compacidade da estrela, fazendo uma análise entre o regime compacto e ultracompacto, e o tamanho e posição do hot-spot, além de analisar como a geometria da observação e a frequência de rotação da estrela afetam o fluxo. Também buscamos comparar as previsões de dois modelos da STT, STT1 (com um fator conforme $A_s < 1$) e STT2 (com o fator conforme $A_s > 1$), com a RG, a fim de identificar as assinaturas observacionais de cada uma dessas teorias.

Para isso, este trabalho aborda no Capítulo 2 uma revisão sobre a física das estrelas de nêutrons. O Capítulo 3 revisa os fundamentos da Relatividade Geral, com foco nos conceitos necessários para a modelagem da trajetória da luz. O Capítulo 4 introduz a Teoria Escalar-Tensorial, o fenômeno da escalarização espontânea, alguns modelos importantes e a métrica de Just. O Capítulo 5 detalha o desenvolvimento do formalismo matemático e do modelo numérico para o cálculo das curvas de luz em ambos os regimes gravitacionais, incluindo a análise de múltiplas imagens. O Capítulo 6 apresenta a análise dos resultados numéricos obtidos e uma discussão sobre as implicações, limitações e perspectivas futuras do estudo. Por fim, o Capítulo 7 sumariza as conclusões desta dissertação.

2 ESTRELAS DE NÊUTRONS

Estrelas de nêutrons são remanescentes estelares compactos formados no estágio final da evolução de estrelas supermassivas com massas aproximadamente na faixa de $8M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$. Ao fim do seu ciclo evolutivo, a estrela progenitora desenvolve um núcleo de ferro que não é suportado pela pressão hidrostática e colapsa. Durante esse processo, o núcleo atinge valores de massa superiores ao limite de Chandrasekhar ($M \approx 1.4M_{\odot}$), que representa a massa máxima que um núcleo estelar composto principalmente por elétrons degenerados é capaz de suportar sem colapsar sob sua própria gravidade (GLENDENNING, 1997). Acima desse valor, a pressão de degenerescência eletrônica não é suficiente para conter o colapso gravitacional, levando ao colapso do núcleo e à formação de um objeto mais compacto. Nessa fase, inicia-se o processo de captura de elétrons,

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e, \quad (1)$$

no qual prótons se combinam com elétrons, gerando nêutrons e neutrinos do elétron, prosseguindo até que a pressão de degenerescência dos nêutrons estabilize o colapso gravitacional (LATTIMER; PRAKASH, 2004).

Estrelas de nêutrons típicas possuem massas em torno de $1,4 M_{\odot}$, raios entre 10-15 km e densidades da ordem de $10^{15} g/cm^3$. Essa densidade extrema as torna um dos objetos mais compactos do universo, ficando atrás apenas dos Buracos Negros em termos de compacidade (GLENDENNING, 1997).

Neste capítulo, serão abordadas as principais características das estrelas de nêutrons, sua teorização e descoberta, bem como a formação e as diferentes classificações desses objetos.

2.1 TEORIZAÇÃO E DESCOBERTA

Antes da descoberta do nêutron, em 1932, as equações de campo de Einstein, publicadas em 1915, já previam a existência de objetos extremamente compactos, nos quais a gravidade desempenharia um papel fundamental na sustentação da estrutura estelar. Entretanto, os primeiros modelos estelares consideravam apenas prótons e elétrons como constituintes da matéria estelar. Ainda em 1932, Lev Landau publicou o artigo *On the Theory of Stars*, no qual apresenta o cálculo para a massa máxima de uma anã branca e especula sobre a estrutura e a física de estrelas com densidades mais elevadas, cujos núcleos seriam tão compactos que "as leis da mecânica quântica comum se quebrariam" (HAENSEL; PROSZYŃSKI; KIZILTAN, 2013).

Walter Baade e Fritz Zwicky propuseram, em 1934, que "supernovas representam a transição entre estrelas comuns e estrelas de nêutrons, que, em seu estado final, consistem de nêutrons" (HAENSEL; PROSZYŃSKI; KIZILTAN, 2013). O argumento dos autores foi que, durante o colapso de uma estrela massiva o suficiente, os prótons e elétrons do núcleo estelar poderiam se combinar, formando nêutrons através da captura eletrônica (1). Esse processo

reduziria significativamente a pressão de degenerescência eletrônica, o que permitiria um colapso gravitacional mais profundo. Os autores ainda concluíram que "essas estrelas podem possuir raios muito pequenos e uma densidade extremamente alta"(HAENSEL; PROSZYŃSKI; KIZILTAN, 2013).

Inspirados por esses trabalhos, Richard C. Tolman, J. Robert Oppenheimer e George M. Volkoff desenvolveram, em 1939, um modelo teórico a partir da Relatividade Geral para descrever a estrutura das ENs. Os autores aplicaram as equações de Einstein para um gás degenerado de nêutrons em equilíbrio hidrostático sob extrema gravidade, resultando nas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV),

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G \left(m(r) + \frac{4\pi r^3 P}{c^2} \right) \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)}{r \left(r - \frac{2Gm(r)}{c^2} \right)}, \quad (2)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho r^2, \quad (3)$$

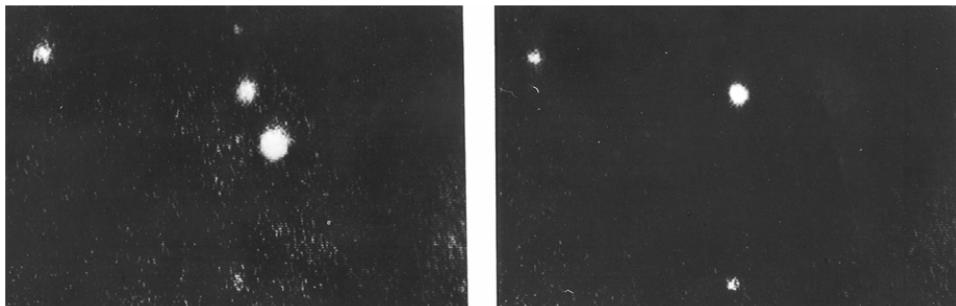
onde P e ρ representam a pressão e a densidade massa-energia, respectivamente, e $m(r)$ é a massa gravitacional contida em um determinado raio r . Essas equações, que devem ser resolvidas em conjunto com uma Equação de Estado (EdE) que descreva as propriedades da matéria, foram fundamentais para modelar o equilíbrio interno das estrelas de nêutrons, levando em consideração tanto a pressão de degenerescência dos nêutrons, quanto os efeitos relativísticos da gravidade intensa. Os resultados iniciais indicaram um limite de massa máxima para essas estrelas, estimado entre $0,7M_{\odot}$ e $1,0M_{\odot}$ (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939). Trabalhos mais atuais expandiram essa faixa para aproximadamente $2M_{\odot}$ (ANTONIADIS et al., 2013; FONSECA et al., 2021; LIMA et al., 2024), levando em conta interações nucleares mais complexas e outras considerações relativísticas. No entanto, existem alguns limites impostos pelas soluções da TOV, como a condição de que o raio de Schwarzschild, o qual será abordado nos capítulos seguintes, deve ser menor que o raio da estrela ($R > 2GM/c^2$), e a condição de causalidade, que estabelece que a velocidade do som na matéria não exceda a velocidade da luz (GLENDENNING, 1997).

Apesar das previsões teóricas, a confirmação da existência das estrelas de nêutrons ocorreu apenas em 1967, quando Jocelyn Bell Burnell e Antony Hewish detectaram pulsos regulares de rádio vindos de uma fonte celeste. Esses sinais eram extremamente precisos e repetitivos, algo que sugeria ser um objeto rotacionado rapidamente. Inicialmente, os pesquisadores se referiam aos sinais detectados como "Little Green Men", traduzido livremente como "Homen-zinhos Verdes", pois sua origem era desconhecida. Posteriormente, eles foram identificados como provenientes do pulsar PSR B1919+21, com período de 1.3 s (BIELICH, 2020; LANG; GINGERICH, 1979).

Pouco após a descoberta de Bell e Hewish, investigou-se a possibilidade de que essas fontes compactas não apenas emitissem pulsos de rádio, mas também pulsos ópticos. Em 1969, Coke, Disney e Taylor confirmaram essa hipótese ao identificar a emissão desses pulsos pelo

Pulsar do Caranguejo. No mesmo ano, pesquisadores do Lick Observatory empregaram uma nova técnica de captura de imagens em um telescópio de 120 polegadas (aproximadamente 3 metros) e obtiveram as primeiras fotografias do Pulsar do Caranguejo, localizado na Nebulosa do Caranguejo (Figura 1) (LYNE; GRAHAM-SMITH, 2012; LANG; GINGERICH, 1979).

Figura 1 – Par de fotografias retiradas do Pulsar do Caranguejo, que evidenciam o efeito de farol característico dos pulsares, destacando seus estados de luminosidade máxima (imagem à esquerda) e mínima (imagem à direita).



Fonte: Lick Observatory, retirado de Pulsar Astronomy (LYNE, GRAHAM-SMITH, 2012).

Hodiernamente, a principal questão relacionada às estrelas de nêutrons passou a ser a determinação precisa e universal da EdE, que estabelece a relação entre densidade e pressão para estrelas frias. Essa equação é fundamental para descrever a correlação entre a massa e o raio dessas estrelas e, atualmente, se utiliza parâmetros observacionais para restringir e refinar os modelos teóricos das EdEs (LYNE; GRAHAM-SMITH, 2012).

2.2 FORMAÇÃO E ESTRUTURA INTERNA

Ao esgotar suas fontes de energia, uma estrela colapsa sob a ação de sua própria gravidade. Dependendo de sua massa inicial, esse colapso pode resultar principalmente em um dos três estados finais possíveis: uma anã branca, se a pressão de degenerescência dos elétrons for suficiente para equilibrar a gravidade; uma estrela de nêutrons, caso a pressão de degenerescência dos nêutrons sustente a estrutura estelar; ou um buraco negro, se nenhuma força de sustentação for capaz de conter o colapso gravitacional completo. A extensão de tal colapso gravitacional depende diretamente de sua massa inicial. Estrelas de maior massa, geralmente $M \geq 25M_{\odot}$, evoluem para Buracos Negros. Estrelas de massas $M \lesssim 8M_{\odot}$ evoluem para Anãs Brancas após passarem pelas fases de gigante vermelha e nebulosa planetária em seu ciclo evolutivo. As estrelas progenitoras de estrelas de nêutrons ocupam uma faixa intermediária de massas, $8M_{\odot} \leq M \leq 25M_{\odot}$ (LYNE; GRAHAM-SMITH, 2012; GLENDENNING, 1997).

A formação de Anãs Brancas acontece de maneira gradual e contínua; à medida que seu combustível nuclear se esgota, seu núcleo se contrai enquanto a camada externa se expande. O colapso gravitacional total do núcleo é evitado pela pressão de degenerescência dos elétrons, um fenômeno quântico que surge do princípio da exclusão de Pauli, o qual impede que dois férmiions

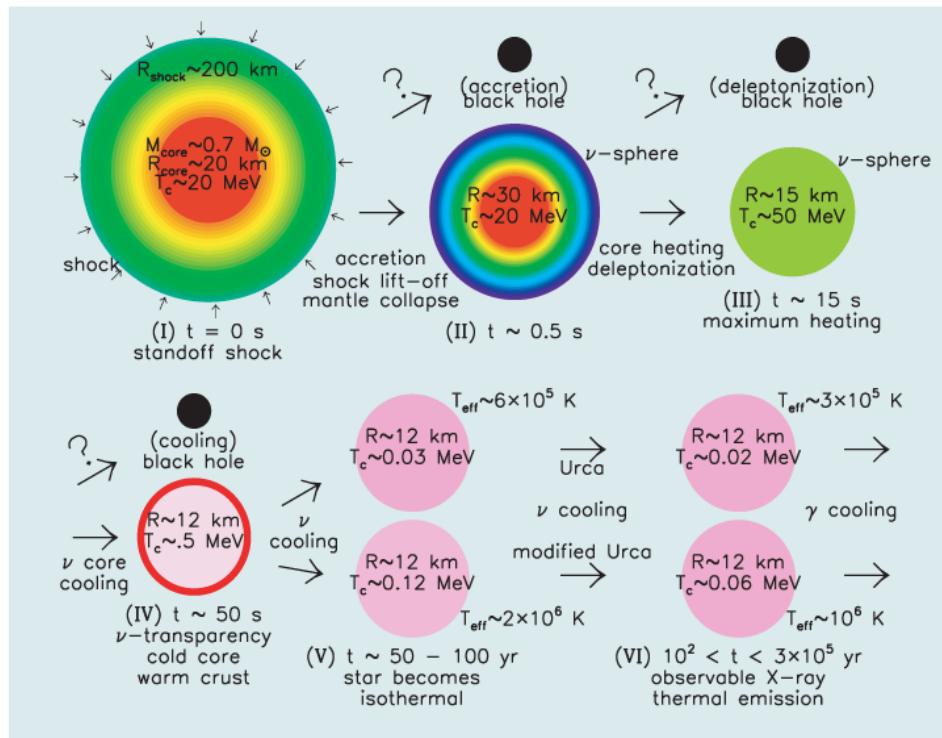
ocupem o mesmo estado quântico. Essa pressão estabiliza a estrutura estelar, evitando o colapso final em um Buraco Negro (GLENDENNING, 1997). Se a massa do núcleo excede $1.4M_{\odot}$, essa pressão se torna insuficiente para resistir à força de sua própria gravidade e para prevenir a continuação do colapso gravitacional. Nesse estágio, uma parte significativa da energia potencial gravitacional da estrela é liberada, manifestando-se como uma supernova do tipo II. A maior parte da massa original da estrela encontra-se fora do núcleo em colapso e é ejetada para o meio interestelar durante o processo, resultando em uma estrela de nêutrons (LATTIMER; PRAKASH, 2004). O colapso do núcleo é interrompido quando a densidade interna da estrela atinge a densidade de saturação nuclear, $\rho_0 \approx 2.7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$, desencadeando a formação de uma onda de choque na região externa do núcleo. Essa onda de choque se propaga por aproximadamente 100 a 200 km antes de se dissipar, devido à perda de energia para a emissão de neutrinos, como ilustrado no estágio I da Figura 2 (LATTIMER; PRAKASH, 2004). Os neutrinos originados no núcleo, possivelmente auxiliados por efeitos como rotação, assimetrias, turbulência, convecção e os campos magnéticos, eventualmente reativam a onda de choque. Em questão de segundos, essa onda se propaga para o exterior, acelerando e expulsando matéria. A estrela de nêutrons remanescente encolhe rapidamente devido à perda de pressão associada à emissão de neutrinos, como ilustrado no estágio II da Figura 2. Essa perda induz a recombinação de elétrons e prótons, enriquecendo a matéria e contribuindo para o aquecimento do interior da estrela. Como resultado, a temperatura central mais do que dobra (ilustrado no estágio III da Figura 2). Em seguida, a estrela se torna progressivamente transparente aos neutrinos (estágio IV), o que acelera sua taxa de resfriamento. O interior da estrela também perde energia rapidamente e uma estrutura isotérmica é criada (estágio IV da Figura 2). A partir desse estágio, a estrela emite fôtons, predominantemente na forma de raios-X (estágio VI da Figura 2).

Embora os nêutrons predominem na composição nuclear dessas estrelas, elas também contêm prótons, elétrons e mûons, que garantem a neutralidade da matéria. Em densidades supranucleares, podem estar presentes bárions contendo quarks strange (GLENDENNING, 1985), bem como condensados de mésons, como *píons* e *káons* [(KAPLAN; NELSON, 1986), e até mesmo quarks livres (COLLINS; PERRY, 1975)]. A possível presença dessas fases exóticas gera incertezas nas EdEs em altas densidades, afetando as previsões para o raio e a massa dessas estrelas.

ENs recém-formadas são ricas em léptons, principalmente elétrons (e^-) e neutrinos eletrônicos (ν_e). Um dos aspectos mais notáveis dos neutrinos é a possibilidade de ficarem temporariamente aprisionados dentro da estrela durante o colapso, influenciando significativamente sua dinâmica e evolução (BURROWS, 2000). Durante o colapso do núcleo da estrela progenitora a energia de ligação gravitacional liberada na transição para uma estrela de nêutrons é da ordem de $3GM/5R \sim 3 \cdot 10^{53} \text{ erg}$. Esse valor corresponde a aproximadamente 10% da energia total de massa da estrela, Mc^2 . A energia cinética da remanescente está na faixa de $\sim 1 - 2 \cdot 10^{51} \text{ erg}$. A maior parte da energia liberada durante o colapso é transportada por neutrinos e antineutrinos de todos os sabores, emitidos em proporções aproximadamente iguais (LATTIMER; PRAKASH,

2004).

Figura 2 – Principais estágios da evolução de uma estrela de nêutrons. Observa-se, respectivamente, (I) o choque inicial do colapso gravitacional, (II) o remanescente estelar, (III) a estrela atinge sua temperatura máxima, (IV) inicia-se a estabilização da temperatura, principalmente pela emissão de neutrinos, (V) a estrela se torna isotérmica (temperatura tende a ser estável) e (VI) a estrela passa a emitir termicamente, principalmente em raios-X.

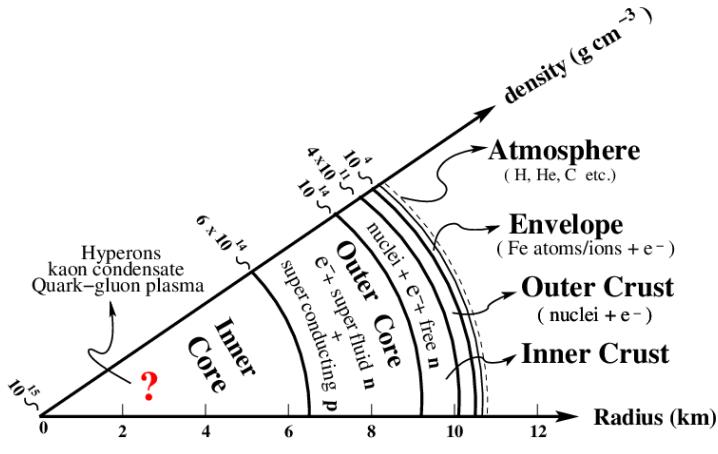


Fonte:(LATTIMER; PRAKASH, 2004)

Uma estrela de nêutrons tem 5 regiões principais: os núcleos interno e externo, a crosta – dividida entre uma região mais externa e uma mais interna –, o envelope e a atmosfera, tal como ilustrado na Figura 3. A atmosfera é uma camada fina, com massa desprezível, e é crucial para modelar o espectro de radiação observado, já que ela pode alterar a distribuição da radiação que chega até o observador. O envelope atua na condução de calor entre o interior da estrela e sua superfície. Sua composição, rica em elementos leves como hidrogênio e hélio, influencia o transporte e a liberação de energia térmica da superfície da estrela (LATTIMER; PRAKASH, 2004).

A crosta pode se estender até 2 km abaixo da superfície. Em sua parte mais externa, as densidades são relativamente baixas e predominam núcleos atômicos como o ferro ^{56}Fe e esses núcleos se organizam em estruturas tridimensionais convencionais. No entanto, conforme a densidade se eleva, os núcleos se tornam gradativamente mais 'neutronizados', até que os nêutrons começem a escapar dos núcleos, formando um fluido. Em densidades próximas à transição para o núcleo, as interações nucleares podem levar à formação de estruturas geométricas

Figura 3 – Estrutura física interna de uma estrela de nêutrons, com suas respectivas composições. Em sua camada mais externa há uma atmosfera, seguido de um envelope. Tem-se ainda a crosta, classificada entre sua porção mais externa e a mais interna. Por último, o núcleo, dividido entre uma camada mais externa e uma camada mais interna, cuja composição exata ainda não é conhecida.



Fonte: (NANDI; BANDYOPADHYAY, 2012)

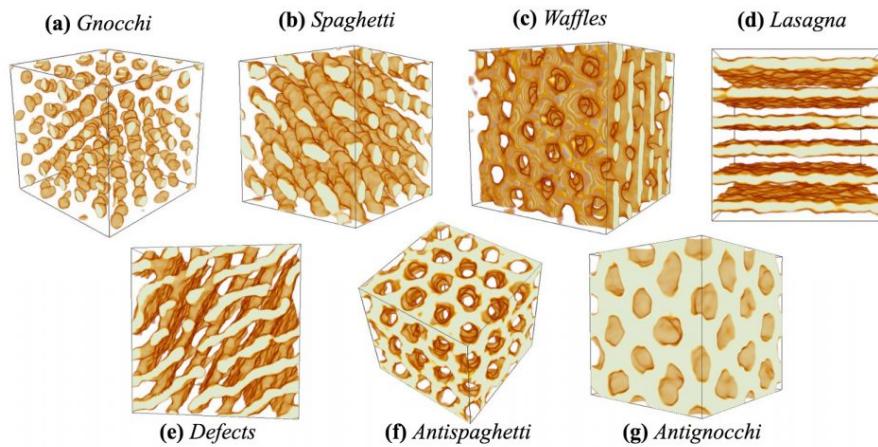
não convencionais, chamadas de pasta nuclear (LATTIMER; PRAKASH, 2004; Newton, 2013).

A pasta nuclear é composta por estruturas exóticas que passam por uma transição se-
quencial dimensional. Essas estruturas tomam a forma de esferas 3D (meatballs), cilindros 2D
(spaghetti) e lâminas 1D (lasagna), tal como ilustrado na Figura 4. Além dessas, podem surgir
estruturas em que se formam vazios 'organizados', com dimensionalidades que variam, descritos
como 'raviolli' ou 'Swiss cheese' (CPLAN; HOROWITZ, 2017).

Na crosta pode ocorrer também fenômenos de superfluidez. Acima de uma densidade crítica, conhecida como densidade de 'drip' (cerca de $4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$), os nêutrons começam a escapar dos núcleos. Este fluido de nêutrons, em condições de temperatura inferiores a $\sim 0,1 \text{ MeV}$, tende a condensar em estado superfluido. A formação de tal pode alterar a capacidade calorífica e os mecanismos de resfriamento da estrela. A superfluidez também poderia explicar um fenômeno comum observado em pulsares chamado de 'glitch', que são saltos positivos na rotação (LATTIMER; PRAKASH, 2004).

O núcleo constitui cerca de 99% da massa da estrela. Espera-se que os nêutrons na região mais externa da estrela formem superfluidos do tipo 3P_2 , um tipo específico de pares de Cooper, no qual dois nêutrons se combinam, formando um par com momento magnético (PAGE et al., 2009), e os prótons formem um supercondutor 1S_0 , outro par de Cooper caracterizado por dois elétrons com spins opostos que formam pares com spin total zero. Na parte mais interna do núcleo é teorizada a existência de condensados de Bose e híperons do tipo strange. Nessa região também é possível que ocorra a transição para uma fase mista da matéria de quarks livres (LATTIMER; PRAKASH, 2004).

Figura 4 – Exemplos de diferentes fases e estruturas da pasta nuclear. (a) nhoque, (b) espaguete, (c) waffles, (d) lasanha, (e) defeitos, (f) anti-espaguete e (g) anti-nhoque.



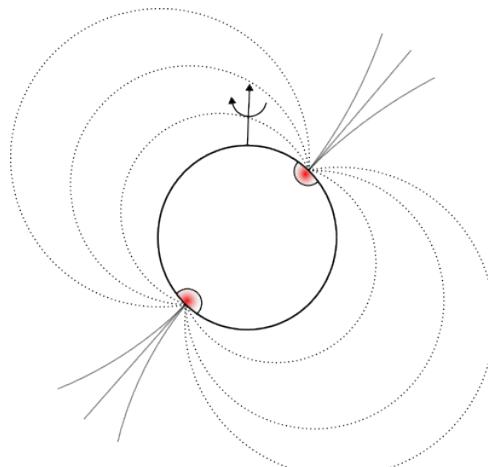
Fonte: CAPLAN, M. E., HOROWITZ, C. J. (2017, p. 8)

2.3 TIPOS DE ESTRELAS DE NÊUTRONS E SUAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

Estrelas de nêutrons podem ser observadas em remanescentes de supernovas, como objetos isolados ou em sistemas binários. Atualmente, existem diversos tipos e classificações para esses objetos.

Os pulsares, que podem ser estudados através de suas propriedades observacionais, são estrelas de nêutrons movidas por rotação. Eles exibem uma emissão periódica, que varia entre $1,5\text{ ms}$ a 11 s , resultado de sua rotação e do campo magnético da estrela, da ordem de 10^{13} G , que direciona a emissão de feixes observados (LATTIMER; PRAKASH, 2004; BIELICH, 2020). Essa emissão periódica gera o efeito de farol observado na Figura 5.

Figura 5 – Visão esquemática de um pulsar. As linhas pontilhadas indicam o campo magnético da estrela, enquanto as linhas que deixam os polos magnéticos indicam os feixes de emissão.



Fonte: A autora.

A emissão dos feixes se dá devido à rápida rotação combinada com os campos magnéticos extremamente intensos; são gerados potenciais elétricos muito altos próximos à superfície da estrela e os campos aceleram as partículas carregadas a energias ultrarrelativísticas, desencadeando a produção de pares elétron-pósitron, formando um feixe de radiação que é emitido de forma direcionada. Na maioria dos pulsares, o eixo magnético, que define a orientação das linhas de campo, não está alinhado ao eixo de rotação da estrela. Esse desalinhamento permite que, conforme a estrela rotaciona, os feixes de radiação "varram" o espaço e sejam detectados quando estiverem direcionados à região do observador (LYNE; GRAHAM-SMITH, 2012).

Além dos pulsares, existem diversas classes de objetos que estão associados às estrelas de nêutrons:

- **Magnetares:** são estrelas com campos magnéticos extremamente intensos (geralmente entre $10^{14} - 10^{15}$ G), têm períodos de rotação maiores, geralmente de alguns segundos, e emitem ondas de raios-X continuamente. Exemplos de magnetares conhecidos são os Soft Gamma Repeaters (SGRs), que liberam explosões curtas de raios gama e raios-X, e os Anomalous X-ray Pulsars (AXPs), que emitem pulsos em raios-X com períodos de alguns segundos (BIELICH, 2020).
- **Central Compact Objects (CCOs):** são objetos encontrados no centro de remanescentes de supernovas e apresentam emissões térmicas de raios-X (BIELICH, 2020).
- **Isolated Neutron Stars (INSSs):** estrelas isoladas que emitem radiação térmica na forma de raios-X (BIELICH, 2020).
- **Rotating Radio-Transients (RRATs):** objetos que emitem rajadas curtas e esporádicas de ondas de rádio. Elas possuem períodos maiores (alguns segundos) e apresentam uma grande taxa de variação em sua rotação (BIELICH, 2020).
- **Fast Radio Bursts (FRBs):** são emissões de rádio que duram, geralmente, milissegundos. Essas emissões possuem uma alta dispersão, que indica fontes extregálacticas (BIELICH, 2020).
- **Binários de Raios-X:** são sistemas de acreção que emitem raios-X. Nesses sistemas, a estrela companheira pode ser uma estrela massiva, formando um Binário de Alta Massa (High-Mass X-ray Binary [HMXB]), com massas $\sim 20M_{\odot}$. A estrela companheira pode ser, também, uma estrela com massa $\sim 1M_{\odot}$, caracterizando, então, um Binário de Baixa Massa (Low-Mass X-ray Binary [LMXB]) (BIELICH, 2020).

2.4 LIMITES DE MASSA PARA ESTRELAS DE NÊUTRONS

A determinação precisa dos limites de massa para estrelas de nêutrons, particularmente o limite superior, é um dos principais objetivos da astrofísica de objetos compactos, uma vez que

ela impõe restrições fundamentais sobre a EdE da matéria em densidades supranucleares e sobre a natureza da gravidade em regimes extremos. Estrelas de nêutrons com massas elevadas são ideais para esses estudos.

Atualmente, a forma mais precisa de se medir a massa de uma estrela de nêutrons é através de observações de sistemas binários de pulsares que emitem ondas de rádio. Nesses sistemas, os pulsares podem estar orbitando outra estrela de nêutrons, uma estrela do tipo anã branca ou uma estrela de sequência principal. Devido à sua natureza compacta, esses sistemas também permitem a detecção de efeitos relativísticos, como o atraso de Shapiro (GAUTAM et al., 2024), que será abordado no capítulo seguinte, ou o encolhimento da órbita, que restringe o ângulo de inclinação do objeto e permite a medição de cada uma das massas do sistema.

O limite de massa máxima pode ser determinado por uma equação de equilíbrio hidrostático (TOV), pelo princípio de Le Chatelier, que garante que a pressão deve ser uma função crescente da densidade ($d\rho/dp \geq 0$), garantindo a estabilidade contra colapsos espontâneos locais, e o princípio de causalidade, no qual a velocidade do som na matéria não pode ser maior que a velocidade da luz ($v_s \leq c$) (RHODES; RUFFINI, 1974). O limite teórico máximo de massa foi estimado em

$$M_{mx} = 4.2 \sqrt{\rho_s/\rho_f} M_\odot, \quad (4)$$

onde $\rho_s \sim 2.7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ é a densidade nuclear de saturação, ρ_f é a densidade acima da qual a equação de estado é mal definida, ou seja, acima de ρ_f a equação de estado se torna altamente incerta, e M_{mx} é a massa máxima da estrela de nêutrons (RHODES; RUFFINI, 1974). Diferentes modelos para a equação de estado resultam em limites de massa diferentes; equações de estado mais rígidas (stiff) resultam em massas máximas mais altas, enquanto equações de estado mais 'macias' (soft), com forte presença de matéria exótica (como híperons, condensados de mésons ou matéria de quarks), reduzem a massa máxima.

As medições de massas realizadas através de métodos observacionais fornecem limites experimentais para a equação de estado; a maioria das massas de estrelas em binários de rádio está na faixa entre $1,25M_\odot - 1,44M_\odot$ (BIELICH, 2020). Existem ainda sistemas que possuem massas maiores, como a Cyg X-2, com massa de $1,8 \pm 0,2M_\odot$ (OROSZ; KUULKERS, 1999) e a Vela X-1, com massa estimada de $1,9M_\odot$ (TJEMKES; PARADIJS; HEUVEL, 1986). Atualmente, foram registrados pulsares com massa igual ou superiores a $2M_\odot$, como o PSR J0348+0432 com $2.01 \pm 0.04M_\odot$ (ANTONIADIS et al., 2013), PSR J0740+6620 com $2.08 \pm 0.07M_\odot$ (FONSECA et al., 2021) e PSR J0952-0607 com $2.35 \pm 0.17M_\odot$ (LIMA et al., 2024). Este último pertence à classe dos sistemas spider, constituídos por um pulsar de milissegundos e uma estrela companheira de baixa massa que é acretada pela radiação e pelo vento de partículas emitidos pelo pulsar, podendo ser subclassificados em black widows (companheiras com $M \lesssim 0,05M_\odot$) e redbacks (companheiras com $0,1 \lesssim M \lesssim 0,5M_\odot$). A evolução desses sistemas envolve longos períodos de acreção, nos quais o pulsar é reciclado e acumula quantidade significativa de massa, o que favorece a ocorrência de objetos mais massivos que a média e os torna alvos relevantes para

a imposição de restrições à equação de estado da matéria nuclear densa (Blanchard, C. et al., 2025).

Caso sejam observados, pulsares com massas superiores a $2M_{\odot}$ podem ajudar a descartar algumas equações de estado mais macias, já que tais objetos não poderiam existir se a matéria se torna muito compressível a altas densidades. Além disso, sua alta compacidade, que é a razão massa-raio da estrela, as torna excelentes laboratórios para testar os limites da RG e buscar compreender efeitos de teorias gravitacionais alternativas. Para valores típicos de ρ_f , (RHODES; RUFFINI, 1974) obtiveram um valor extremo de $3.2M_{\odot}$, utilizado para distinguir Estrelas de Nêutrons de Buracos Negros, uma vez que existe a condição

$$M_{mx} \leq 3.2M_{\odot}. \quad (5)$$

Esse limite é teórico e baseado em uma suposição de que a EdE tem uma rigidez máxima acima de uma densidade crítica. No entanto, esse limite não depende de interações nucleares específicas ou da presença de matéria exótica. Ele é um limite absoluto, imposto pela condição de causalidade e estabilidade hidrostática, visto que, se uma estrela tivesse uma massa superior ao limite absoluto, ela inevitavelmente colapsaria para um buraco negro, pois nenhuma configuração estável poderia existir além desse valor (RHODES; RUFFINI, 1974).

A compreensão das propriedades e dinâmicas dessas classes de estrelas de nêutrons é essencial para explorar os mecanismos físicos subjacentes à sua formação e evolução. No entanto, para descrever completamente os fenômenos associados a esses objetos, é necessário considerar os efeitos gravitacionais em seu entorno. Para isso, é necessário compreender a estrutura do espaço-tempo ao seu redor e qual é a sua influência no movimento de partículas e fôtons.

No próximo capítulo, será abordada a aplicação da Relatividade Geral na descrição do espaço-tempo, com foco na métrica de Schwarzschild e na análise das geodésicas que determinam as trajetórias de partículas e fôtons em campos gravitacionais intensos, de modo a compreender o fenômeno de formação de múltiplas imagens e sua aplicação para emissões de raios-X em estrelas de nêutrons supermassivas.

3 RELATIVIDADE GERAL

A Relatividade Geral (RG), formulada por Albert Einstein em 1915, revolucionou a compreensão da gravitação ao descrevê-la como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa e energia. Neste capítulo, serão explorados os princípios fundamentais dessa teoria, com ênfase na métrica de Schwarzschild, a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein. Essa métrica descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto esfericamente simétrico, estático e sem rotação, sendo uma boa aproximação para modelar o exterior de estrelas de nêutrons, bem como Buracos Negros estáticos. Além disso, serão discutidas as implicações dessa solução para a física de objetos compactos, incluindo as previsões sobre a deflexão da luz e a órbita de partículas em campos gravitacionais intensos. Esse capítulo teve como embasamento teórico os trabalhos de (CARROLL, 2019; MISNER; THORNE; WHEELER, 2017; SCHUTZ, 2009; HARTLE, 2021; CARROLL; OSTLIE, 2017; THORNE, 1994), qualquer outra fonte será indicada no texto.

3.1 BASE TEÓRICA

Na Relatividade Geral, existem algumas ferramentas matemáticas que são fundamentais para descrever como partículas e fôtons se movem em um espaço-tempo curvo. Essas ferramentas fornecem a estrutura necessária para entender a dinâmica de objetos em campos gravitacionais intensos, como aqueles encontrados ao redor de estrelas de nêutrons.

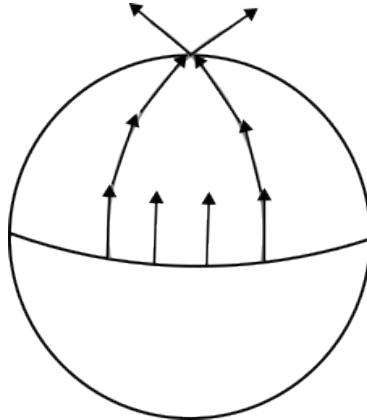
3.1.1 Transporte paralelo

O transporte paralelo descreve como um vetor é deslocado ao longo de uma curva sem que sua direção ou magnitude intrínseca sejam alteradas em relação ao espaço-tempo. Matematicamente, isso implica que a derivada covariante do campo vetorial ao longo da curva é nula. Assim, um vetor transportado paralelamente se mantém o mais reto possível em sua trajetória. A Figura 6 ilustra uma consequência importante do transporte paralelo em superfícies curvas; dois vetores que partem do equador de uma esfera apontando na mesma direção, quando transportados paralelamente até o polo norte por caminhos diferentes, não chegarão necessariamente paralelos entre si no destino. Isso evidencia que, em espaços curvos, o resultado do transporte paralelo depende do caminho percorrido.

Em uma variedade curva, também conhecida como *manifold* – um espaço matemático que localmente se assemelha a um plano euclidiano, mas globalmente pode ter uma estrutura mais complexa – é geralmente impossível definir um campo vetorial globalmente paralelo. Para que um tensor T_v^μ seja constante ao longo de uma curva $x^\mu(\lambda)$ em um espaço-tempo localmente plano, sua derivada total em relação ao parâmetro da curva (λ) deve ser zero:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j} = 0. \quad (6)$$

Figura 6 – Transporte paralelo de dois vetores em uma esfera. Dois vetores transportados paralelamente a partir de dois pontos diferentes não se cruzam em um caminho necessariamente paralelo, evidenciando a influência da escolha da trajetória no resultado do transporte.



Fonte: A autora. Adaptado de (CARROLL, 2019)

Contudo, em um espaço-tempo curvo, a derivada $\partial/\partial x^\sigma$ não se transforma como um tensor; ao derivar parcial uma componente do vetor, $\partial_\sigma V^\mu$, a única informação obtida é como essa componente muda numericamente, mas não leva em conta a mudança dos próprios vetores. Para tratar o problema de forma puramente tensorial, substitui-se a derivada parcial pela derivada covariante ∇_μ . Define-se então a derivada covariante direcional ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$ como:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (7)$$

O transporte paralelo de um tensor T ao longo da trajetória é definido pela condição de que sua derivada covariante direcional seja nula:

$$\left(\frac{DT}{D\lambda} \right)_{v_1 v_2 \dots v_j}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{v_1 v_2 \dots v_j} = 0 \quad (8)$$

Para um campo vetorial V^μ , a equação 8 toma sua forma explícita:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\phi\rho}^\mu \frac{dx^\phi}{d\lambda} V^\rho = 0, \quad (9)$$

em que $\Gamma_{\phi\rho}^\mu$ são os símbolos de conexão. Os símbolos de conexão descrevem como os vetores da base mudam ponto a ponto ao longo da trajetória e, portanto, carregam informações a respeito do campo gravitacional e a curvatura do espaço-tempo. Para a RG, a conexão geralmente utilizada é a de Levi-Civita, também conhecida como derivada covariante, e seus símbolos são chamados de símbolos (ou coeficientes) de Christoffel. Entretanto, diferentes conexões levam a diferentes noções de transporte paralelo. Se a conexão é, por exemplo, compatível com a métrica $g_{\mu\nu}$, de modo que $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, então a própria métrica é transportada paralelamente ao longo de qualquer curva:

$$\frac{d}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (10)$$

Portanto, um vetor \vec{V} é transportado paralelamente ao longo de uma curva com vetor tangente $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$ se suas componentes satisfazem

$$U^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0. \quad (11)$$

Esta condição é importante para a análise das trajetórias seguidas por partículas livres e pela luz, conhecidas como geodésicas, que são curvas que realizam o transporte paralelo de seus próprios vetores tangentes.

3.1.2 Geodésicas

Tendo estabelecido na Seção 3.1.1 como um vetor é deslocado através do transporte paralelo, pode-se definir as trajetórias que representam os caminhos percorridos em um espaço-tempo curvo: as geodésicas. Enquanto em um espaço euclidiano plano as linhas retas são as curvas cujos vetores tangente mantêm uma direção constante, em uma variedade pseudo-riemanniana, ou seja, aquela cujo tensor métrico não tem uma assinatura definida, podendo assumir valores positivos, negativos ou nulos, o conceito é generalizado.

Uma geodésica é definida como uma curva que realiza o transporte paralelo de seu próprio vetor tangente ao longo de si mesma. Considerando a curva $x^\mu(\lambda)$, o vetor tangente à trajetória é dado por $dx^\mu/d\lambda$. A condição de transporte paralelo do vetor tangente ao longo da própria curva torna-se

$$\frac{d}{d\lambda} U^\mu = U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0. \quad (12)$$

Ou, de forma mais explícita em termo de λ ,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (13)$$

Expandindo a derivada covariante em termos dos coeficientes de conexão, obtém-se a equação geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (14)$$

Essa equação expressa a condição para que a curva $x^\mu(\lambda)$ preserve a direção do vetor tangente sob o transporte paralelo. Se λ é um parâmetro afim, então qualquer transformação linear $\lambda' = a\lambda + b$, em que a e b são constantes, também resultará em um parâmetro afim que satisfaz a equação geodésica. Se um parâmetro $\alpha(\lambda)$ for usado para descrever a curva, a equação assume a forma mais geral

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\alpha} = f(\alpha) \frac{dx^\mu}{d\alpha}, \quad (15)$$

onde a função $f(\alpha)$ está relacionada ao parâmetro λ pela expressão

$$f(\alpha) = - \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} \right) \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)^{-2}. \quad (16)$$

As geodésicas representam as trajetórias que estão sujeitas apenas à influência da gravidade, ou seja, a curvatura do espaço-tempo. Existem três tipos de geodésicas, classificadas de acordo com o intervalo do espaço tempo ds^2 ao longo da curva:

- **Geodésicas Nulas:** são as trajetórias seguidas por partículas sem massa, como os fótons, ou de massa desprezível, como neutrinos. São definidas por $ds^2 = 0$.
- **Geodésicas Temporais:** são as trajetórias percorridas por partículas e objetos massivos. Para essas partículas, o parâmetro afim pode ser escolhido como o tempo próprio da partícula, ou uma função linear dele. Elas são definidas por $ds^2 < 0$.
- **Geodésicas Espaciais:** são as trajetórias percorridas por objetos hipotéticos que se moveriam mais rápido que a luz. Elas são definidas por $ds^2 > 0$, mas não são fisicamente realizáveis dentro da relatividade geral, devido ao limite relativístico da luz. No entanto, são relevantes em teorias de campo em espaços curvos.

Para geodésicas nulas, é conveniente realizar a normalização do parâmetro λ ao longo da trajetória de modo que o vetor tangente $dx^\mu/d\lambda$ seja igual ao quadrimomento do fóton:

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (17)$$

Essa escolha permite reescrever a equação 14 em termos do quadrimomento do fóton

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu p^\rho p^\nu = 0, \quad (18)$$

Esta forma da equação é conveniente por p^μ estar diretamente ligado à energia do fóton, de modo que, para um observador com quadrivelocidade u^μ , a energia medida é dada por

$$E = -g_{\mu\nu} U^\mu p^\nu. \quad (19)$$

Assim, ao resolver a equação 14 para o quadrimomento ao longo da trajetória do fóton, é possível calcular como sua energia e frequência se alteram. Entretanto, a resolução dessa equação pode ser complexa especialmente para espaços-tempos curvos. Existem maneiras de simplificar essa análise e, no geral, tal simplificação é feita através da identificação de quantidades conservadas das geodésicas. Na seção seguinte, serão exploradas as ferramentas matemáticas para explorar essas conservações.

3.1.3 Derivada de Lie, Simetrias e Vetores de Killing

Na Seção 3.1.1, estabeleceu-se que, para realizar o transporte de vetores em espaços curvos, é necessário realizar o transporte paralelo do vetor utilizando uma conexão. Existe, no entanto, uma forma de realizar a análise tensorial sem depender explicitamente de uma conexão. A derivada de Lie, denotada por \mathcal{L}_ξ , permite o tratamento do campo vetorial através da variação de um fluxo gerado por um campo vetorial ξ^μ . Ela mede como um campo tensorial se deforma à medida que é arrastado pelas linhas de fluxo do campo vetorial.

A definição da derivada de Lie é feita ao considerar uma curva $C : \mathbb{R} \rightarrow M$ parametrizada por λ , de cujo vetor tangente em cada ponto é dado por

$$\xi^\mu(x(\lambda)) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (20)$$

A derivada de Lie de uma função escalar f ao lodo do campo ξ^μ é sua derivada direcional

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad (21)$$

podendo ser generalizada para um campo vetorial v^μ através de

$$\mathcal{L}_\xi V^\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x^\alpha - \varepsilon \xi^\alpha) - V^\mu(x^\alpha)}{\varepsilon}. \quad (22)$$

onde $V^\mu(x^\alpha - \varepsilon \xi^\alpha)$ é o transporte de Lie de V através da curva e ε é um parâmetro infinitesimal que mede a quantidade de movimento no ponto x^α . O transporte de Lie consiste em pegar o valor do campo vetorial em um determinado ponto na curva C , como $V(\lambda)$, e realizar uma transformação de coordenadas de modo que $C(\lambda) \rightarrow P = C(0)$. A transformação de coordenadas é, para um determinado $\lambda = \varepsilon$ infinitesimal,

$$V^\alpha = x^\alpha - \varepsilon \xi^\alpha(0). \quad (23)$$

As componentes de V^α mudam de acordo com

$$\begin{aligned} V^\alpha(0) &= V^\beta(\lambda) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= \left[V^\beta(x^\mu(0) + \varepsilon \xi^\mu) \right] (\delta_\beta^\alpha - \varepsilon \partial_\beta \xi^\alpha) \\ &= \left[V^\beta(0) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu V^\beta(0) \right] (\delta_\beta^\alpha - \varepsilon \partial_\beta \xi^\alpha) \\ &= V^\alpha(0) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu V^\alpha(0) - \varepsilon V^\beta(0) \partial_\beta \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

A derivada então se dá por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi V &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(P + \varepsilon \xi) - V(P)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V^\alpha(0) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu V^\alpha(0) - \varepsilon V^\beta(0) \partial_\beta \xi^\alpha - V(0)}{\varepsilon} \\ &= \xi^\mu \partial_\mu V^\alpha(0) - V^\beta(0) \partial_\beta \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

É possível generalizar para tensores de ordens maiores, uma vez que as derivações devem satisfazer a regra de Leibnitz (HAWKING; ELLIS, 1973). Para o produto de dois vetores, $T^{\alpha\beta} = U^\alpha V^\beta$, a derivada se dá, então, por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi T^{\alpha\beta} &= L_\xi(U^\alpha V^\beta) \\ &= (L_\xi U^\alpha)V^\beta + U^\alpha(L_\xi V^\beta) \\ &= (\xi^\mu \partial_\mu U^\alpha - U^\mu \partial_\mu \xi^\alpha)V^\beta + U^\alpha(\xi^\mu \partial_\mu V^\beta - V^\mu \partial_\mu \xi^\beta) \\ &= \xi^\mu \partial_\mu(U^\alpha V^\beta) - U^\mu V^\beta \partial_\mu \xi^\alpha - U^\alpha V^\mu \partial_\mu \xi^\beta \\ &= \xi^\sigma \partial_\sigma T^{\alpha\beta} - T^{\rho\beta} \partial_\rho \xi^\alpha - T^{\alpha\rho} \partial_\rho \xi^\beta,\end{aligned}\quad (26)$$

considerando um fator de correção $-T^{\alpha\dots\mu\dots\beta} \partial_\mu \xi^\nu$ para cada índice de tensor de ordem maior.

A derivada de Lie permite obter simetrias do espaço-tempo. Uma simetria implica em uma geometria do espaço-tempo que permanece inalterada sob alguma transformação contínua. Essas simetrias são representadas por campos vetoriais de Killing; um campo vetorial é considerado um vetor de Killing se o fluxo gerado por ele preserva o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Matematicamente, essa condição é expressa como

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \quad (27)$$

Se a derivada de Lie é zero, o campo vetorial ao longo da curva parametrizada é constante. Ou seja, o fluxo gerado por ξ^μ não altera a métrica, tornando $g_{\mu\nu}$ invariante sob a transformação infinitesimal associada ao vetor. Expandindo a equação 27 para um vetor de Killing puramente temporal, $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$, obtemos a condição

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0. \quad (28)$$

Esse resultado deixa explícita a independência da métrica em relação ao tempo. Ou seja, o espaço-tempo por ela descrito é estático. A quantidade conservada associada a esta simetria é a energia do fóton ($e = -p_t = -p_\mu \xi^\mu_t$). Estendendo o raciocínio para um vetor espacial, tem-se que

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi} = 0. \quad (29)$$

Como consequência, um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico assume a forma geral de

$$ds^2 = -g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (30)$$

em que g_{00} e g_{rr} são funções que dependem apenas da coordenada radial r . A simetria em torno do eixo azimutal (ϕ) leva à conservação da componente p_ϕ do momento angular.

A existência dos campos de Killing e as conservações ligadas a eles são de extrema importância para trabalhar a métrica que descreve o espaço-tempo externo a objeto supermassivo.

Na próxima seção, será analisada a métrica de Schwarzschild e sua utilidade para a modelagem do problema abordado neste trabalho.

3.2 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Em busca de uma solução para as equações de campo de Einstein no vácuo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0, \quad (31)$$

Karl Schwarzschild derivou a primeira solução exata para tais equações. Esta solução, conhecida como métrica de Schwarzschild, descreve o campo gravitacional externo a qualquer corpo esfericamente simétrico, estático e sem carga elétrica.

Como apontado na Seção 3.1.3, as exigências de simetria de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico impostas pelos vetores de Killing restringem a forma geral da métrica de Minkowski a

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (32)$$

O elemento de linha pode ser reescrito como:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + e^{2\gamma(r)}r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (33)$$

onde $\alpha(r)$, $\beta(r)$ e $\gamma(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial r . Pode-se simplificar esta forma através de uma redefinição da coordenada radial, tal que

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)}r, \quad (34)$$

cujo diferencial é

$$d\bar{r} = (e^\gamma + re^\gamma \frac{d\gamma}{dr})dr = (1 + r\frac{d\gamma}{dr})e^\gamma dr. \quad (35)$$

Substituindo \bar{r} na expressão para ds^2 e redefinindo $\bar{r} = r$, a métrica assuma a forma mais padrão

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (36)$$

onde, agora, $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ são funções desconhecidas que precisam ser determinadas. Para calcular as componentes do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$), primeiro é necessário obter os símbolos de Christoffel a partir da métrica (equação 36). As componentes não nulas são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha \\
\Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \\
\Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\beta} \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.
\end{aligned} \tag{37}$$

A partir das componentes não nulas, calcula-se o tensor de curvatura de Riemann ($R_{\sigma\mu\nu}^\rho$). As componentes não nulas do tensor de Riemann relevantes para esta métrica são contraídas para formar o tensor de Ricci ($R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$):

$$\begin{aligned}
R_{rr}^t &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\
R_{\theta t \theta}^t &= -re^{-2\beta} \partial_r \alpha \\
R_{\phi t \phi}^t &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\
R_{\theta r \theta}^r &= re^{-2\beta} \partial_r \beta \\
R_{\phi r \phi}^r &= re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\
R^\theta \phi \theta \phi &= (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{38}$$

Ao realizar as contrações necessárias, obtém-se as componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\
R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Impondo a condição de vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$), as componentes R_{tt} e R_{rr} devem se anular, levando a

$$e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0, \tag{40}$$

que implica em $\partial_r \alpha = -\partial_r \beta$ e, integrando, $\alpha = -\beta + C$, onde C é uma constante que pode ser incorporada na coordenada temporal ($e^{-C} t$, de modo que $C = 0$). Substituindo esta condição em $R_{\theta\theta}$, tem-se que

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1, \tag{41}$$

que é equivalente a $\partial_r(re^{2\alpha}) = 1$. Resolvendo esta equação, obtém-se

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}, \quad (42)$$

onde R_s é uma constante. Substituindo essas expressões para $e^{2\alpha}$ e $e^{2\beta}$ na equação 36 se obtém

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (43)$$

que é a métrica de Schwarzschild e a constante R_s é chamada de Raio de Schwarzschild. Para entender o significado físico de R_s é necessário comparar a componente g_{tt} da métrica de Schwarzschild com o limite newtoniano para campos fracos, onde o potencial gravitacional ($\Phi = -GM/r$) resulta em

$$g_{tt} \approx -(1 + 2\Phi/c^2) = -(1 - 2GM/rc^2) = -(1 - 2M/r). \quad (44)$$

Comparando com g_{tt} da métrica de Schwarzschild, identifica-se a constante R_s somo o raio de Schwarzschild

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2M \quad (45)$$

para $c = G = 1$. Aqui, M é o parâmetro de massa que caracteriza a fonte do campo gravitacional. O próximo passo para a análise das trajetórias influenciadas por este campo gravitacional é o estudo das geodésicas para esta métrica em específico, que será realizado na próxima seção.

3.3 GEODÉSICAS NO ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Como abordado na Seção 3.1.3, identificar simetrias em um espaço-tempo simplifica consideravelmente o estudo das trajetórias de partículas e fôtons. As simetrias do espaço-tempo de Schwarzschild (estático e esférico) permitem uma simplificação na obtenção das equações geodésicas (14). Os símbolos de Christoffel não nulos para a métrica (43) são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^r &= \frac{GM}{r^2}(1 - 2GM/r)^{-1} \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{-GM}{r(r - 2GM)} \\
\Gamma_{tr}^t &= \frac{GM}{r(r - 2GM)} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -(r - 2GM) \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -(r - 2GM)\sin^2\theta \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Substituindo estes símbolos na equação 14, se obtém um sistema de quatro equações diferenciais acopladas para as coordenadas (t, r, θ, ϕ) em função do parâmetro afim λ :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r - 2GM)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} &= 0, \\
\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3}(r - 2GM) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{GM}{r(r - 2GM)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \\
&\quad - (r - 2GM) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0, \\
\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin\theta\cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\
\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} &= 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

Resolver este sistema de equações pode ser relativamente complexo. Entretanto, fazendo uso das simetrias do espaço-tempo de Schwarzschild, identifica-se quatro vetores de Killing independentes: um está associado à translação temporal (sua condição de estacionariedade) e três estão associados à rotações espaciais (sua simetria esférica). Cada vetor de Killing ξ^μ leva a uma quantidade conservada ao longo de geodésica, dada por

$$\xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = constante. \tag{48}$$

Além disso, a norma do quadrvetor tangente, $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$, é conservada ao longo da geodésica, como consequência da compatibilidade da conexão com a métrica ($\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$) e da equação

geodésica

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{constante} \quad (49)$$

Para partículas massivas, pode-se escolher o parâmetro afim como o tempo próprio τ , resultando em $\epsilon = 1$. Para partículas sem massa (ou de massa desprezível), as trajetórias são geodésicas nulas e, portanto, $\epsilon = 0$. Neste caso, é conveniente normalizar o parâmetro afim de modo que o quadrvetor tangente coincida com o quadrimomento do fóton, $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$, como discutido na Seção 3.1.2.

Essas simetrias fornecem informações importantes a respeito do problema a ser tratado: a invariância no tempo está relacionada à conservação de energia, e , dada por

$$e = -g_{\mu\nu} \xi_{(t)}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -g_{tt} \xi_{(t)}^t \frac{dt}{d\lambda} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (50)$$

Já a simetria esférica implica na conservação do momento angular. A invariância sob rotações em torno de ϕ é representada pelo vetor de Killing azimutal e a quantidade conservada associada ao vetor é o momento angular, ℓ , dado por

$$\ell = g_{\mu\nu} \xi_{(\phi)}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\phi\phi} \xi_{(\phi)}^\phi \frac{d\phi}{d\lambda} = (r^2 \sin^2 \theta) \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (51)$$

Uma consequência direta dessa conservação é que o movimento de uma partícula ou fóton ocorre em um plano que passa pela origem ($r = 0$). É possível rotacionar o sistema de coordenadas de forma que o plano orbital coincide com o plano equatorial $\theta = \pi/2$. Desse modo, a expressão 51 toma a forma de

$$\ell = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (52)$$

As componentes da quadrivelocidade $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$ são dadas por

$$U = \left(\frac{dt}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}, \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = \left(e(1 - 2M/r), \frac{dr}{d\lambda}, 0, \frac{\ell}{r^2} \right). \quad (53)$$

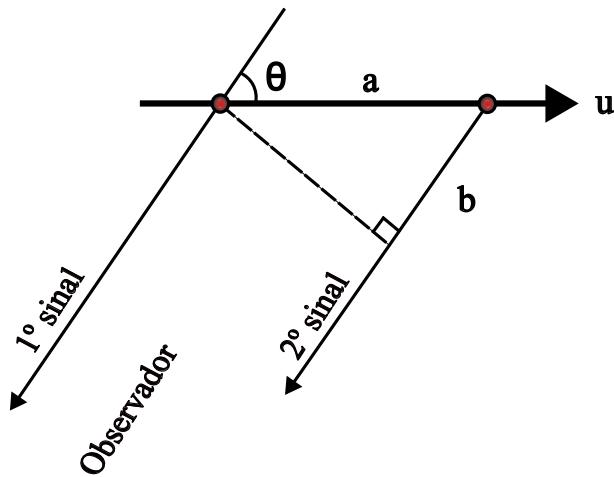
Com as constantes e e ℓ e a simplificação do movimento planar, a equação geodésica para a coordenada r pode ser obtida mais facilmente. As quantidades conservadas desempenham um papel fundamental para o estudo de órbitas de partículas sem massa, já que o parâmetro de impacto, que representa a distância perpendicular entre o centro do objeto massivo e a trajetória inicial do fóton quando este está em um ponto $r \rightarrow \infty$, pode ser definido como a razão entre ℓ e e . Este parâmetro é fundamental no estudo de trajetórias curvadas por campos gravitacionais, como veremos nas seções subsequentes. Na próxima seção, serão apresentados os efeitos que influenciam a observação dos raios de luz que são emitidos de objetos relativísticos.

3.4 EFEITO DOPPLER RELATIVÍSTICO E ABERRAÇÃO RELATIVÍSTICA

Quando uma fonte de luz, como um hot-spot na superfície de uma estrela de nêutrons em rotação, está em movimento em relação a um observador distante, a Relatividade Especial (RE) prevê dois fenômenos que alteram a luz observada, conhecidos como Efeito Doppler Relativístico e Aberração Relativística. Diferentemente do tratamento clássico, esses efeitos não dependem de um meio de propagação e surgem das transformações de Lorentz para o espaço-tempo.

O Efeito Doppler Relativístico descreve a mudança na frequência e energia da luz devido ao movimento relativo entre a fonte e o observador. Para compreender suas implicações, pode-se considerar o cenário ilustrado na Figura 7, onde uma fonte emite sinais de luz enquanto se move com velocidade u em relação a um observador. O intervalo de tempo entre a chegada de dois sinais consecutivos (Δt_{obs}) é afetado pela dilatação temporal, que faz com que o tempo na fonte passe mais devagar do ponto de vista do observador, e também pela mudança na distância que o sinal precisa percorrer devido ao movimento da fonte.

Figura 7 – Representação do efeito Doppler para uma fonte que se move com velocidade u em relação a um observador distante. A distância que a frente de onda viaja para alcançá-lo varia, dependendo do ângulo de movimento em relação ao sinal.



Fonte: A autora. Adaptado de (CARROLL; OSTLIE, 2017)

Ao aplicar a equação para a dilatação temporal,

$$\Delta t_{obs} = \frac{\Delta t_r}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (54)$$

em que $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ é o fator de Lorentz, é possível definir que

$$a = \frac{u \Delta t_r}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (55)$$

$$b = \frac{u \Delta t_r \cos(\theta)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

de modo que

$$\Delta t_{obs} = \frac{\Delta t_{rep}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} [1 + (u/c) \cos(\theta)]. \quad (56)$$

Definindo Δt_r como sendo o tempo entre a emissão dos máximos de onda e Δt_{obs} como tempo entre a chegada de cada sinal, as frequências das ondas são dadas por

$$v_r = \frac{1}{\Delta t_r}, \quad v_{obs} = \frac{1}{\Delta t_{obs}}. \quad (57)$$

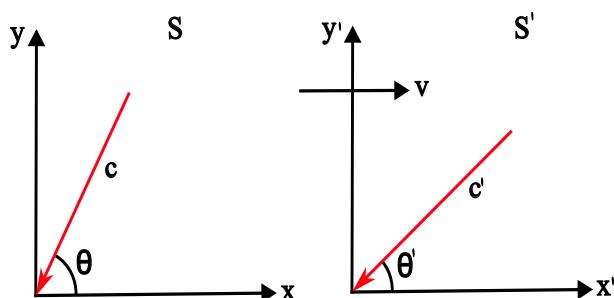
O efeito Doppler relativístico é, portanto,

$$v_{obs} = \frac{v_r \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + (u/c) \cos(\theta)} = \frac{v_r \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v_{rad}/c}, \quad (58)$$

onde $v_{rad} = u \cos(\theta)$ é a velocidade radial da fonte. Se a fonte se afasta ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$), então $v_{rad} > 0$ e $v_{obs} < v_r$, resultando em um desvio para o vermelho (*redshift*). Se a fonte se aproxima ($90^\circ < \theta < 180^\circ$), de modo que $v_{rad} < 0$ e $v_{obs} > v_r$, resultando em desvio para o azul (*blueshift*). Existe ainda o chamado Doppler Transversal, um efeito puramente relativístico, em que, para $\theta = 90^\circ$, ainda há um *redshift* como consequência da dilatação temporal e $v_{obs} = v_r \sqrt{1-u^2/c^2}$.

Intrinsecamente ligado ao efeito Doppler está a Aberraçāo Relativística, que descreve a mudança na direção aparente de origem da luz devido ao movimento relativo entre a fonte e o observador. Como ilustrado na Figura 8, um feixe de luz que é emitido em um ângulo θ' em um referencial S' que se move com velocidade u em relação a um referencial S , será observado em um ângulo θ diferentes no referencial S .

Figura 8 – Representação do fenômeno de Aberraçāo da luz. O vetor em vermelho indica o feixe de luz emitido pela fonte S . O feixe é visto de forma diferente por dois observadores em movimento relativo, enquanto a sua velocidade (magnitude do vetor c) permanece constante para ambos.



Fonte: A autora. Adaptado de (FITZPATRICK, s.d.)

A velocidade da luz é dada em módulo $|c| = c$, de modo que suas componentes são dadas por $c'_x = c \cos(\theta')$ e $c'_y = c \sin(\theta')$. A transformação das componentes da velocidade $v = v'_x, v'_y$ do referencial S' para S , onde S' se move com velocidade u ao longo de x , são:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}},$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2} \right)}, \quad (59)$$

em que $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Substituindo as componentes c'_x , c'_y , tem-se que

$$c_x = \frac{c \cos(\theta') + u}{1 + \frac{u c \cos(\theta')}{c^2}} = \frac{c(\cos(\theta') + \beta)}{1 + \beta \cos(\theta')},$$

$$c - y = \frac{c \sin(\theta')}{\gamma(1 + \beta \cos(\theta'))},$$

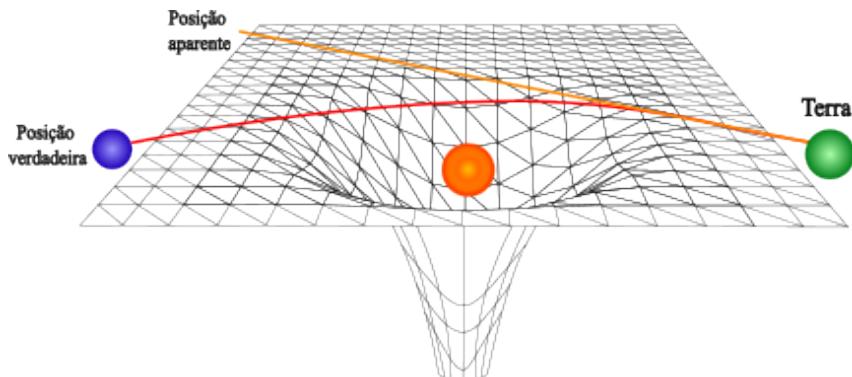
$$\text{onde } \beta = v/c. \text{ O novo valor de } \theta \text{ no referencial } S \text{ é dado por } \tan(\theta) = c_y/c_x. \text{ Portanto,}$$

$$(60)$$

$$\tan(\theta) = \frac{c_y}{c_x} = \frac{\frac{c \sin(\theta')}{\gamma[1+\beta \cos(\theta')]} \cdot \frac{c[\cos(\theta')+\beta]}{1+\beta \cos(\theta')}}{\frac{c[\cos(\theta')+\beta]}{1+\beta \cos(\theta')}} = \frac{\sin(\theta')}{\gamma[\cos(\theta')+\beta]} = \frac{\sin(\theta')}{[\cos(\theta')+\beta]\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (61)$$

que é a fórmula da Aberraçāo Relativística. Para um observador no referencial S , que vê S' se mover com uma velocidade v , o feixe de luz parece ser emitido de uma direção diferente, como ilustrado na Figura 9. A transformação da velocidade é necessária para que se possa compreender como o movimento dos fótons muda entre referenciais. No estudo de estrelas de nêutrons, considerar a aberraçāo da luz é essencial na modelagem do fluxo, uma vez que seu efeito se torna significativo em velocidades relativísticas.

Figura 9 – Ilustração da Aberraçāo relativística e desvio de um feixe de luz cuja trajetória é influenciada pelo campo gravitacional de um objeto massivo. A linha em vermelho indica a trajetória real do feixe, sendo emitido pelo objeto em azul. Já a linha laranja indica a trajetória aparente, após sofrer a curvatura gravitacional.



Fonte: A autora. Adaptado de (PAOLOZZI et al., 2015)

3.5 REDSHIFT GRAVITACIONAL

O redshift gravitacional, ou desvio para o vermelho gravitacional, é um fenômeno previsto pela RG e muito importante no estudo de estrelas de nêutrons. Ele descreve como a radiação eletromagnética, como raios-X, perde energia e, portanto, tem sua frequência diminuída e seu comprimento de onda aumentado ao escapar de um campo gravitacional intenso.

Uma maneira mais formal de caracterizar esse fenômeno é através da dilatação temporal gravitacional. Um observador localizado em um campo gravitacional forte, como aquele próximo a uma estrela, tem seu tempo próprio passando mais devagar em relação a um observador distante da fonte, em um campo gravitacional mais fraco. Assim, se o emissor na superfície da estrela emite N cristas de onda em um intervalo de tempo Δt_{em} , que é medido por um relógio local, um observador distante medirá a chegada dessas cristas em um intervalo de tempo $\Delta t_{obs} > \Delta t_{em}$ medido por seu próprio relógio. Como a frequência é o número de cristas por unidade de tempo, $v = N/\Delta t$, a frequência observada v_{obs} será menor que a frequência emitida v_{em} , caracterizando o desvio para o vermelho.

Para o espaço-tempo de Schwarzschild, pode-se considerar um fóton emitido por uma fonte estática em posição radial r que é detectado por um observador também estático em $r \rightarrow \infty$. A energia do fóton medida por um observador local com quadrivelocidade U^μ é dada por $e = -p_\mu U^\mu$, em que p_μ é o quadrimomento do fóton. Como visto na Seção 3.3, a componente $p_t = -e$ é uma quantidade conservada ao longo da geodésica, de modo que a energia medida pelo observador é dada por

$$e_{local} = \sqrt{-g_{\mu\nu}} e = \sqrt{-g_{tt}} e, \quad (62)$$

como demonstrado na equação 50. Portanto, a energia emitida na superfície da estrela ($r = R$) e a energia observada no infinito ($r = \infty$) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} e_{em} &= \sqrt{-g_{tt}(R)} \cdot p^t, \\ e_{obs} &= \sqrt{-g_{tt}(\infty)} \cdot p^t. \end{aligned} \quad (63)$$

A razão entre a frequência observada e a emitida é a razão entre os fatores de dilatação temporal:

$$\frac{v_{obs}}{v_{em}} = \frac{\sqrt{-g_{tt}(\infty)} \cdot p^t}{\sqrt{-g_{tt}(r)} \cdot p^t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}. \quad (64)$$

O fator de redshift gravitacional, z , é definido como a variação no comprimento de onda, λ ,

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (65)$$

Como $\lambda = c/v$, tem-se que

$$z = \frac{v_{em}}{v_{obs}} - 1. \quad (66)$$

Substituindo a relação encontrada na equação 64, tem-se que

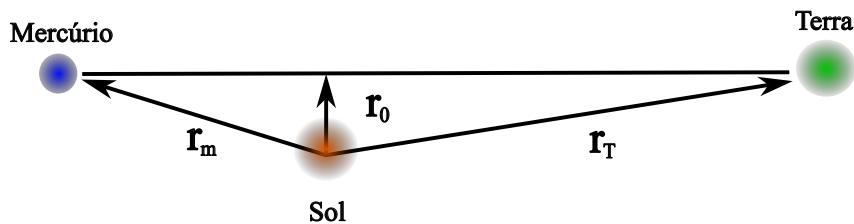
$$z = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} - 1. \quad (67)$$

Para qualquer fóton emitido da superfície de uma estrela de nêutrons, este efeito deve ser considerado, pois ele reduz a energia dos fôtons que chegam até o observador. Quando a rotação da estrela é considerada, o desvio na frequência é uma combinação do redshift gravitacional e do efeito Doppler. Geralmente, ambos os efeitos são unificados em um fator Doppler δ , utilizado na modelagem do fluxo observado, como será detalhado no Capítulo 5.

3.6 ATRASO DE SHAPIRO

O atraso de Shapiro, conhecido também como atraso temporal gravitacional, é considerado o quarto teste da RG e descreve como o tempo de viagem de um sinal de luz entre dois pontos é maior quando este sinal atravessa um campo gravitacional em comparação com o tempo que levaria se percorresse a mesma distância em um espaço-tempo plano (PÖSSEL, 2021).

Figura 10 – Ilustração do quarto teste da Relatividade Geral proposto por Shapiro. A linha reta entre Mercúrio e a Terra representa a trajetória que o sinal percorreria na geometria euclidiana (a mecânica clássica de Newton). Já as linhas curvas, que passam perto do Sol, representam a trajetória real do sinal na presença do campo gravitacional do Sol.



Fonte: A autora. Adaptado de (PÖSSEL, 2021)

A presença de massa (e energia) curva o espaço-tempo, resultando em uma trajetória mais longa através da região curvada quando comparada com a distância que seria percorrida em linha reta em um espaço-tempo plano. Além disso, o tempo passa mais devagar em regiões de campo gravitacional mais intenso, como visto na Seção 3.5. Então, do ponto de vista do observador distante, a velocidade da luz (dr/dt) parece diminuir à medida que ela passa pelo "poço" do campo gravitacional, aumentando o tempo da trajetória.

Este efeito foi proposto e confirmado por Irwin Shapiro (SHAPIRO, 1964). O experimento original consistiu em enviar pulsos de rádio da Terra para outros planetas do Sistema Solar, como ilustrado na Figura 10, onde r_m e r_T são as distâncias do Sol até Mercúrio e Terra, respectivamente, e r_0 é a distância do Sol até o periélio, que é o ponto de maior aproximação do caminho da luz. De acordo com a RG, o pulso, ao retornar, deveria ter sofrido um pequeno atraso temporal devido à sua aproximação com o campo gravitacional do Sol. Esse atraso se

dá devido a previsão de que o tempo decorre mais devagar próximo de corpos muito massivos. Em um espaço-tempo curvo, o intervalo de tempo local $d\tau$ está relacionado ao tempo medido por um observador no infinito através da fórmula do fator gravitacional 62; quanto menor for r , ou seja, quanto mais um objeto se aproxima do corpo massivo, menor será $d\tau$. Isso significa, essencialmente, que o tempo passa mais devagar perto da massa.

Originalmente, Shapiro obteve a formulação do atraso temporal a partir da solução de Schwarzschild. Shapiro argumentou que o aumento no atraso temporal poderia ser obtido ao calcular a diferença entre o atraso no tempo próprio previsto pela RG e o valor correspondente para um espaço-tempo plano, resultando em

$$\Delta t_r \approx \frac{4r_0}{c} \left\{ \ln \left[\frac{x_p + (x_p^2 + d^2)^{1/2}}{-x_e + (x_e^2 + d^2)^{1/2}} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{x_p}{(x_p^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{2x_e + x_p}{(x_e^2 + d^2)^{1/2}} \right] \right\} + O\left(\frac{r_0^2}{c^2}\right), \quad (68)$$

onde d é a distância da maior aproximação da onda ao centro do Sol, x_e é a distância do ponto de emissão do pulso de rádio até o periélio e x_p é a trajetória desse ponto até o planeta Mercúrio. A equação se dá principalmente devido à variação da velocidade do raio de luz. Para o caso abordado na Figura 10, em que $d \ll x_e, x_p$, a equação 68 se reduz a

$$\Delta t_r \approx \frac{4r_0}{c} \left\{ \ln \left(\frac{4x_e x_p}{d^2} \right) - \left(\frac{3x_e + x_p}{2x_e} \right) \right\}. \quad (69)$$

Assim como a luz sofre um atraso ao passar próximo do Sol, o mesmo efeito ocorre para a luz que viaja sob a influência do campo gravitacional de uma estrela de nêutrons. Os fôtons emitidos devem escapar do poço gravitacional para chegar a um observador distante. Os sinais emitidos da fração oculta da superfície da estrela percorrem um caminho mais longo através da região de curvatura quando comparados com fôtons emitidos da superfície que está diretamente voltada para o observador. Então, o atraso de Shapiro é utilizado para a distinção entre esses dois cenários. Para uma estrela em rotação, a posição da região emissora muda continuamente em relação ao observador. Isso implica que o caminho percorrido pelo fóton e, consequentemente, a magnitude do atraso, varia com a fase de rotação. Este efeito é essencial para a modelagem dos perfis de pulso e é incorporado do cálculo da fase observada, como será detalhado nos capítulos seguintes.

4 TEORIA ESCALAR-TENSORIAL DA GRAVITAÇÃO

A Teoria Escalar-Tensorial da Gravitação apresenta uma modificação da RG ao introduzir um campo escalar Φ que atua juntamente com o campo tensorial da métrica ($g_{\mu\nu}$) para mediar a interação gravitacional. Esse campo escalar interage com a matéria e a geometria do espaço-tempo, podendo alterar a estrutura e o comportamento de objetos compactos, como as estrelas de nêutrons. A base teórica deste capítulo está nos trabalhos de (OTTONI et al., 2024; FUJII; MAEDA, 2003; LICHNEROWICZ, 1955; SILVA; YUNES, 2019; SOTANI; MIYAMOTO, 2018; BERTI et al., 2015). Outras fontes serão devidamente citadas no texto.

4.1 DEFINIÇÃO

A STT é formulada em dois referenciais teóricos, denominados frames, interligados por uma transformação conforme: o frame de Jordan e o frame de Einstein.

O frame de Jordan é um frame físico, onde as partículas seguem geodésicas da métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, e as distâncias e tempos são definidos por esta métrica. Neste frame, o campo escalar é acoplado diretamente à curvatura do espaço-tempo ao escalar de Ricci (\tilde{R}). A ação gravitacional geral no frame de Jordan é dada por

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [F(\Phi)\tilde{R} - Z(\Phi)\tilde{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - V(\Phi)], \quad (70)$$

onde Φ representa o campo escalar fundamental no frame de Jordan, $F(\Phi)$ é a função de acoplamento, $Z(\Phi)$ é o coeficiente cinético do campo escalar e $V(\Phi)$ é o potencial escalar. Neste trabalho, será considerado o caso de um campo escalar sem massa e sem autointerações, de modo que $V(\Phi) = 0$ e $Z(\Phi) = 1$. Na STT, a dinâmica, tanto do campo gravitacional quanto da matéria, é definida por uma ação total S , cuja composição é dada por

$$S = S_g + S_m[\Psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}], \quad (71)$$

em que S_g é a ação gravitacional, ou seja, a parte da ação que governa o comportamento do campo gravitacional e inclui a métrica e o campo escalar, determinando como a curvatura do espaço-tempo é afetada pelo campo escalar, já S_m é a ação da matéria e descreve como matéria e energia (partículas, fluidos, radiação) se comportam no espaço-tempo. Ψ_m simboliza os campos da matéria e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a métrica que, neste caso, é do frame de Jordan. Além disso, o tensor energia-momento é definido como

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + p\tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (72)$$

em que ϵ é a densidade de energia, p é a pressão. u^μ é o quadrivector velocidade do fluido e $g_{\mu\nu}$ é a métrica.

O segundo frame considerado é o frame de Einstein. Embora o frame de Jordan seja físico, suas equações de campo são complexas devido ao acoplamento entre $F(\Phi)$ e \tilde{R} . Para

simplificar, realiza-se uma transformação conforme da métrica e redefine-se o campo escalar, resultando no frame de Einstein. A nova métrica $g_{\mu\nu}$ "absorve" a função de acoplamento

$$g_{\mu\nu} \equiv F(\Phi)\tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (73)$$

Com isso, a ação total no frame de Einstein é

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi] + S_m [\Psi_m, A^2(\varphi) g_{\mu\nu}], \quad (74)$$

na qual $g_{\mu\nu}$ é a métrica no frame de Einstein, R é o escalar de Ricci de $g_{\mu\nu}$, φ é o campo escalar canônico e define-se $A(\varphi) \equiv F(\Phi(\varphi))^{-1/2}$ e S_m está acoplada a $A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$.

As equações de campo são obtidas variando esta ação em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e ao campo escalar φ . A variação da ação de Einstein-Hilbert ($\int \sqrt{-g} R d^4x$) e do termo cinético do campo escalar em relação à métrica resulta em

$$\delta \left(\int \sqrt{-g} R d^4x \right) = \int \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (75)$$

Em que G é o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (76)$$

O termo cinético da ação (S_φ) também deve ser variado, resultando em

$$\delta (\sqrt{-g} \nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi) = \sqrt{-g} \left(\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \varphi)^2 \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (77)$$

Portanto, a contribuição do campo escalar à equação de campo é

$$2\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} (\nabla \varphi)^2. \quad (78)$$

Somando as duas variações, obtém-se

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}, \quad (79)$$

em que

$$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = A^2(\varphi) T_{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} \left(\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \varphi)^2 \right). \quad (80)$$

Portanto, as equações de campo são

$$G_{\mu\nu} = 8\pi A^2(\varphi) T_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} (\nabla^\alpha \varphi \nabla_\alpha \varphi). \quad (81)$$

É necessário obter também a variação em relação ao campo escalar (φ). A variação do termo cinético é

$$\delta S_\varphi = -\frac{1}{8\pi} \int \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) d^4x. \quad (82)$$

Variando a densidade lagrangiana em relação a φ , obtém-se

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi) = \sqrt{-g}\cdot 2\partial^\mu\varphi\partial_\mu(\delta\varphi). \quad (83)$$

Ao substituir na ação, tem-se que

$$\delta S_\varphi = -\frac{1}{8\pi}\int 2\sqrt{-g}\partial^\mu\varphi\partial_\mu(\delta\varphi)d^4x = -\frac{1}{4\pi}\int\sqrt{-g}\partial^\mu\varphi\partial_\mu(\delta\varphi)d^4x, \quad (84)$$

em que

$$\square\varphi = \nabla^\mu\nabla_\mu\varphi. \quad (85)$$

A variação da matéria com respeito a φ é dada por

$$\delta S_m = \int d^4x\sqrt{-g}A^4(\varphi)\alpha(\varphi)T\delta\varphi, \quad (86)$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, que é o traço do tensor energia-momento, e $\alpha(\varphi) = \frac{d\ln A(\varphi)}{d\varphi}$, que é a função de acoplamento.

Ao juntar as duas equações, obtém-se

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{4\pi}\square\varphi + A^4(\varphi)\alpha(\varphi)T\right]\delta\varphi. \quad (87)$$

Para que a ação seja estacionária, ou seja, para que $\delta S = 0$ para todo δS , é necessário que

$$\frac{1}{4\pi}\square\varphi + A^4(\varphi)\alpha(\varphi)T = 0, \quad (88)$$

de modo que

$$\square\varphi = -4\pi A^4(\varphi)\alpha(\varphi)T. \quad (89)$$

E, como definido na equação 85,

$$\nabla^\mu\nabla_\mu\varphi = -4\pi A^4(\varphi)\alpha(\varphi)T. \quad (90)$$

4.2 ESCALARIZAÇÃO ESPONTÂNEA

Um fenômeno importante previsto pela STT é a escalarização espontânea (DAMOUR; ESPOSITO-FARESE, 1993), que se trata de um mecanismo essencialmente não-perturbativo, dado que seu estado final envolve um campo escalar macroscópico não nulo, no qual um objeto compacto, como uma estrela de nêutrons, pode adquirir espontaneamente uma carga escalar macroscópica, mesmo que o campo escalar seja nulo no espaço-tempo assintoticamente plano. Entretanto, sua origem pode ser compreendida através de análises perturbativas lineares, como pequenas flutuações que podem indicar uma instabilidade. Isto é, estas pequenas perturbações

são uma ferramenta diagnóstica, mesmo que a escalarização seja um manismo não-perturbativo em seu estado final.

$\delta\varphi$, no campo escalar dentro da estrela. Linearizando a equação 89, obtém-se a equação para a perturbação:

$$\square\delta\varphi = -4\pi\beta(\varphi)T\delta\varphi, \quad (91)$$

em que T é o traço do tensor energia-momento e $\beta(\varphi) = d\alpha(\varphi)/d\varphi$ determina como a interação escalar-matéria muda com o campo:

- se $\beta(\varphi_\infty) < 0$ e suficientemente grande, o campo escalar dentro de uma estrela de nêutrons pode sofrer um crescimento exponencial, levando à formação de uma carga escalar Q . Fisicamente, isso significa que o campo escalar tem um máximo em $\varphi = 0$ e qualquer perturbação infinitesimal no campo escalar não será oscilatória, mas crescerá exponencialmente, levando a uma diferença maior entre a STT e a RG.
- se $\beta(\varphi_\infty) > 0$, a configuração é estável e qualquer perturbação no campo escalar se dissipia e a estrela permanece não-escalarizada, assim como na RG.

O resultado do crescimento exponencial citado acima pode resultar em uma estrela de nêutrons "escalarizada", que possui uma carga macroscópica (Q) e uma estrutura interna (assim como massa e raio) diferente daquela prevista pela RG. Esse crescimento só ocorre se o parâmetro de acoplamento β for suficientemente negativo para que o traço T seja negativo o bastante e desencadeie a escalarização. Para matéria estelar realista, o traço é tipicamente definido como $T = -\varepsilon + 3p$. Nesse caso, a equação de evolução do campo escalar apresenta um termo de massa efetiva negativo dentro da estrela, tornando a solução instável e levando ao crescimento exponencial da perturbação escalar. Por outro lado, para valores de β que não satisfaçam essa condição (como no caso em que $\beta > 0$), a solução tende a permanecer próxima à da RG, sem aquisição significativa de carga escalar (OTTONI et al., 2024).

4.3 SOLUÇÃO EXTERNA EXATA

A métrica de Just apresenta uma solução analítica exata para o espaço-tempo externo a uma estrela de nêutrons. A solução é dada por

$$ds^2 = -f^\nu dt^2 + f^{-\nu} d\rho^2 + f^{\mu-\nu} d\Omega^2, \quad (92)$$

em que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, que é o elemento de ângulo sólido, ρ é a coordenada radial isotrópica e a é um parâmetro da solução escalarizada, relacionada à intensidade do campo escalar e, portanto, à varga Q . A métrica de Just apresenta uma relação com as coordenadas de Schwarzschild através da coordenada radial de acordo com

$$r = \rho_r \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}(1-b/a)}, \quad (93)$$

e, para $a = b$, se recupera a métrica de Schwarzschild.

Para definir o campo escalar, considera-se a métrica (92) no sistema de coordenadas de Just. Fazendo $v = b/a$, as equações de campo de Einstein no vácuo são

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \mu'' - \mu'v' - f^{-\mu} - v'' + \frac{v'^2 + 3\mu'^2}{4} + \varphi_0'^2 = 0, \\ G_{\rho\rho} &= f^{-\mu} + \frac{v'^2 - \mu'^2}{4} + \varphi_0'^2 = 0, \\ G_{\theta\theta} &= 2\mu'' + \mu'^2 + v'^2 + 4\varphi_0'^2 = 0. \end{aligned} \quad (94)$$

Tomando as diferentes combinações das componentes, encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{G_{\theta\theta}}{2} - G_{tt} - G_{\rho\rho} &= v'' + \mu'v' = 0, \\ \frac{G_{\theta\theta}}{2} - 2G_{\rho\rho} &= -2f^{-\mu} + \mu'^2 + \mu'' = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Da segunda equação em 95, tem-se

$$\mu = \log \left[-\frac{C_1}{4} + (C_2 + \rho)^2 \right] = \log \left[\rho^2 \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \right], \quad (96)$$

em que se escolhe $C_1 = 4C_2^2$ e redefine-se $C_2 = -a/2$. Conectando essa solução à primeira equação em 95 e resolvendo para v , encontra-se

$$v = K_1 + \frac{K_2}{a} \log \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) = \frac{b}{a} \log \left(1 - \frac{a}{\rho} \right), \quad (97)$$

onde se define $K_2 = b$ e $K_1 = 0$ ao considerar que o espaço-tempo é assintoticamente plano. No vácuo, a equação de movimento no sistema de coordenadas de Just é dada por

$$\varphi_0'' + \mu'\varphi_0' = f^{-\mu} (\varphi_0' f^\mu)' = 0 \quad (98)$$

Substituindo em 96 e integrando, obtém-se

$$\varphi = b_1 + \frac{b_2}{a} \log \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) = \varphi_{0\infty} + \frac{q}{a} \log \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \quad (99)$$

onde define-se $b_2 = q$ e $b_1 = \varphi_{0\infty}$ é o valor do campo escalar no infinito. Substituindo as coluções em $G_{\theta\theta}$ na equação 94, tem-se que

$$a^2 - b^2 - (2q)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + 4q^2 \quad (100)$$

sendo mais comum relacioná-los de modo que $Q \equiv q/M$, tal que a razão a/b seja dada por

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 + Q^2}. \quad (101)$$

4.4 MODELOS

Existem modelos específicos da STT que se diferenciam pela forma da função de acoplamento, $A(\varphi)$, entre o campo escalar e a matéria. Esses modelos permitem a análise da gravidade em regimes que não são considerados na RG, como o regime de campo forte, que é teorizado para o interior de estrelas de nêutrons.

No modelo de Damour-Esposito-Farese (DEF), considerado um modelo mais simples, é introduzido um acoplamento não-linear entre o campo escalar e a matéria, levando ao fenômeno da escalarização espontânea em objetos compactos. O modelo DEF é definido pela função de acoplamento exponencial

$$A(\varphi) = e^{\frac{\beta\varphi^2}{2}}, \quad (102)$$

em que φ é o campo escalar no frame de Einstein e β é um parâmetro de acoplamento adimensional. A presença do termo $\beta\varphi^2$ modifica as equações de Einstein, introduzindo um acoplamento não trivial entre o campo escalar e a matéria através do traço do tensor energia-momento $T = 3p - \varepsilon$. Esse modelo prevê uma escalarização espontânea para $\beta < 0$ e, em observações recentes, grande parte do espaço de parâmetros foi restringido.

Outro modelo, conhecido por modelo cosmológico, surge em teorias onde o campo escalar acopla-se à curvatura do espaço-tempo, como a inflação de Higgs, existe o acoplamento do campo de Higgs à gravidade. Nesse caso, a função de acoplamento toma a forma de

$$A(\Phi) = F(\Phi)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi\Phi^2}}, \quad (103)$$

onde ξ é o parâmetro adimensional que controla a força do acoplamento. No entanto, não existem soluções analíticas para a relação entre Φ (frame de Jordan) e φ (frame de Einstein), sendo necessária a solução numérica das equações de campo.

Por fim, é importante destacar o modelo proposto por Mendes-Ortiz (MO), que se apresenta como uma versão analiticamente tratável dos modelos abordados anteriormente, contornando algumas restrições observacionais. A função de acoplamento é dada por

$$\alpha(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh(-2\sqrt{3}\xi\varphi), \quad (104)$$

na qual ξ é o parâmetro de acoplamento e φ é o campo escalar. Esse modelo faz aproximações para as soluções de outros modelos inflacionários através de funções hiperbólicas, evitando a necessidade de soluções numéricas.

4.5 RESTRIÇÕES OBSERVACIONAIS DA STT

Na STT existem algumas limitações impostas por observações que são importantes para definir quais modelos são viáveis frente aos dados experimentais. Uma dessas limitações surge

ao considerar o regime de campo fraco/baixas velocidades, chamada de Limite Cassini, que provem de medições de sinais de rádio e como esses sinais são atrasados e desviados pelo campo gravitacional do Sol, testando diretamente o parâmetro γ_{PPN} , que faz parte de um conjunto de coeficientes adimensionais, chamados de Parâmetros Pós-Newtonianos (PPN), usados para descrever desvios da RG em teorias alternativas da gravitação. No experimento realizado pela sonda Cassini, enquanto estava próxima a Saturno, foram enviados sinais de rádio de volta à Terra. Esses sinais passaram próximos ao Sol e foram realizadas medições na mudança da frequência Doppler dos sinais com precisão de $\sim 10^{-14}$. O valor obtido,

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \cdot 10^{-5}, \quad (105)$$

é consistente com a RG, em que $\gamma = 1$. Para a STT, esse resultado implica em

$$|\alpha_0| < 10^{-3}, \quad (106)$$

em que α_0 representa o valor da função de acoplamento matéria-escalar ($\alpha(\varphi)$), de modo que $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_\infty)$. Neste contexto, α_0 quantifica o quanto a gravidade se desvia da Relatividade Geral em regimes de campo fraco. Esse limite é importante pois não restringe o comportamento do campo escalar ao regime de campo forte, já que $\alpha(\varphi)$ pode ser grande mesmo com $\alpha_0 \sim 0$. Nesse cenário, as STTs são indistinguíveis da RG no Sistema Solar, mas produzem efeitos em objetos compactos.

No regime de campo forte intermediário, como aqueles encontrados em binários de pulsares, as STTs preveem emissão de radiação gravitacional dipolar, efeito não observado na RG, que acelera a perda de energia orbital. Nesse caso, as restrições ocorrem na constante de acoplamento, ξ , e exclui regiões em que

$$2\xi = \beta \leq -4.25. \quad (107)$$

(HORBATSCH; BURGESS, 2012) estudaram o PSR J0737-3039, um pulsar duplo, e limitaram a carga escalar adimensional $Q < 0.21$ para ENs cuja massa seja $\sim 1.4M_\odot$, limite que pode não ser válido para ENs supermassivas ($M \geq 2.1M_\odot$, onde a escalarização pode ocorrer mesmo para Q menores).

Para campos escalares com massa $m_\varphi \neq 0$, seu alcance é limitado pelo comprimento de Compton $\lambda_\phi = 2\pi/m_\varphi$, efeito conhecido como supressão Yukawa, que descreve como a interação mediada pelo campo escalar é exponencialmente suprimida nesses casos. Para $r \gg \lambda_\phi$, o termo de Yukawa, e^{-r/λ_ϕ} , que vem do potencial de Yukawa, que descreve a interação de mésons entre núcleon, se torna negligenciável. Em pequenas distâncias, $r \ll \lambda_\phi$, os efeitos do campo escalar são significativos e, caso λ_ϕ seja comparável ao raio da ENs, o campo escalar pode afetar sua estrutura estelar. Portanto, torna-se viável considerar um intervalo para m_φ

$$10^{-16}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV}, \quad (108)$$

que é justificado por duas condições importantes; a não supressão da escalarização dentro da ENs, garantida por

$$\lambda_\phi > R \sim 10 \text{ km} \rightarrow m_\phi < 10^{-9} \text{ eV}, \quad (109)$$

e, para sistemas binários, a condição de

$$\lambda_\phi < r_{binario} \sim 10^6 \text{ km} \rightarrow m_\phi > 10^{-16} \text{ eV}, \quad (110)$$

que implica na supressão da radiação gravitacional.

No próximo capítulo, será abordada a modelagem das curvas de luz através da RG e da STT, bem como sua modelagem numérica computacional.

5 ANÁLISE DA EMISSÃO DE RAIOS-X DE HOT-SPOTS

Como abordado no capítulo 2, ENs são objetos extremamente compactos, com campos gravitacionais tão intensos que efeitos relativísticos interferem na radiação observada. Neste trabalho, são consideradas as emissões de regiões localizadas, chamadas de hot-spots. A rotação da estrela modula o fluxo de luz recebido dessas regiões, dando origem a perfis de pulso. Este capítulo tem como objetivo apresentar o desenvolvimento teórico e numérico para a modelagem desses perfis de pulso. Partindo dos fundamentos apresentados nos Capítulos 3 e 4, serão derivadas as equações específicas para a trajetória de fôtons e o fluxo observado.

A morfologia da emissão observada depende diretamente da geometria do sistema, da compacidade da estrela e do processo físico envolvido. É comum assumir que há uma ou duas manchas emissoras fixas na superfície da estrela, que podem estar associadas, por exemplo, aos polos magnéticos. A rotação da estrela, combinada com a inclinação do eixo de rotação em relação à linha de visão do observador, modula a intensidade da luz recebida e dá origem às chamadas curvas de luz. A base teórica para a escrita deste capítulo é (OLAUSEN, 2008; SOTANI, 2020; OTTONI et al., 2024; FUJII; MAEDA, 2003; LICHNEROWICZ, 1955; MISNER; THORNE; WHEELER, 2017; CARROLL, 2019; HARTLE, 2021). Outras fontes serão indicadas no texto.

5.1 ÓRBITA DE FÔTONS NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Para iniciar a análise das emissões, é necessário considerar a dinâmica das órbitas dos fôtons no espaço-tempo de Schwarzschild. O ponto de partida é a métrica obtida na Seção 3.2:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (111)$$

para $G = c = 1$ e em que $d\Omega^2 = d\theta^2 + r^2 d\phi^2$. Para um fôton, a geodésica deve ser

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0, \quad (112)$$

já que fôtons se movem através de geodésicas nulas. Então,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00} u^0 u^0 + g_{rr} u^r u^r + g_{\theta\theta} u^\theta u^\theta + g_{\phi\phi} u^\phi u^\phi$$

$$\begin{aligned} &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \\ &\quad + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2. \end{aligned} \quad (113)$$

Como foi estabelecido anteriormente, as simetrias do espaço-tempo de Schwarzschild garantem que a energia e e o momento angular ℓ são conservados, e que o movimento ocorre em um plano

que, para fins de simplificação, é definido como o plano equatorial $\theta = \pi/2$, $d\theta/d\lambda = 0$, de modo que a métrica toma a forma de:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (114)$$

Entretanto, pode-se substituir as quantidades conservadas que foram definidas nas equações 50 e 51, tal que

$$e^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \quad (115)$$

$$\ell^2 = r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2.$$

Para a órbita do fóton, é necessário encontrar

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dr}, \quad (116)$$

de modo que, ao isolar $d\phi/d\lambda$ e substituindo na equação 114, se obtém

$$-e^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = 0 \quad (117)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = e^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 - \frac{l^2}{r^2}.$$

Isolando $dr/d\lambda$, obtém-se

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}\right]^{1/2}. \quad (118)$$

De modo que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{e^2}{\ell^2} - \left(1 - \frac{2M/r}{r^2}\right)\right]^{-1/2}. \quad (119)$$

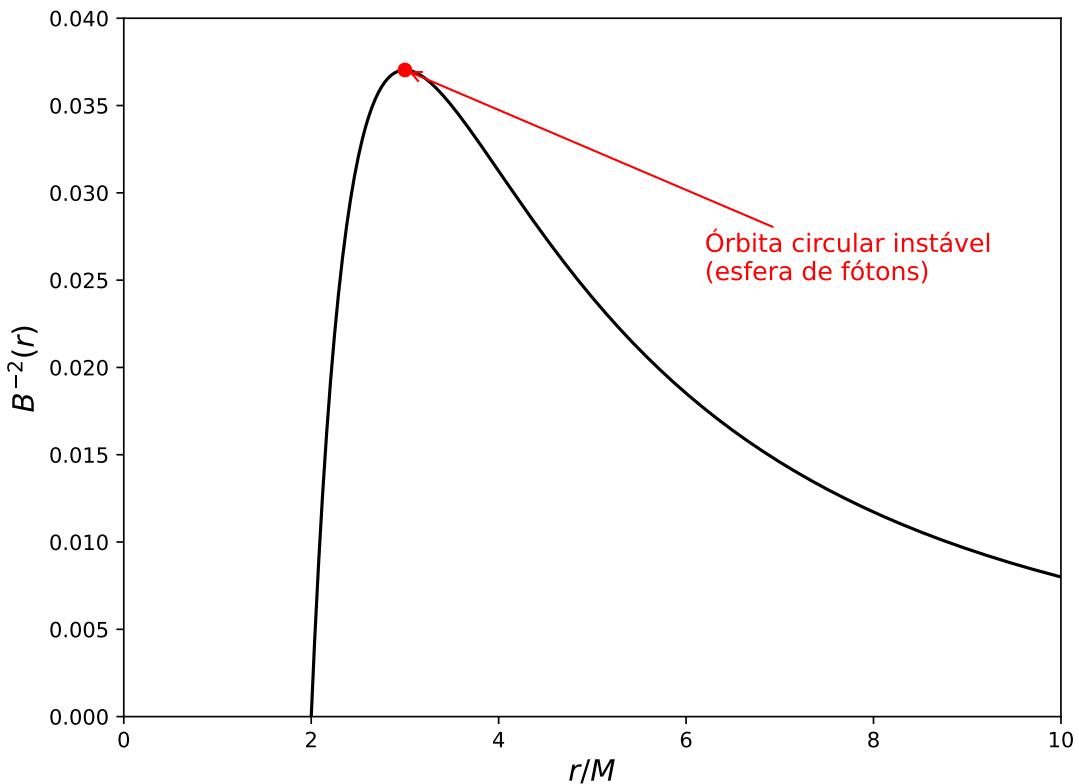
Para essa simetria do espaço-tempo, o movimento de fótons é descrito pelo parâmetro de impacto, que é uma quantidade conservada e definida como a distância perpendicular do centro da estrela de nêutrons à tangente do raio de luz que chega até o observador. O parâmetro de impacto determina, portanto, a forma da órbita e é representado pela razão entre o momento angular do fóton (ℓ) e a energia (e). Dessa forma, define-se o potencial efetivo para a órbita do fóton como

$$B^{-2}(r) = \frac{1 - 2M/r}{r^2}. \quad (120)$$

Considerando ambas as definições, pode-se então reescrever a equação 119 como

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} [b^{-2} - B^{-2}(r)]^{-1/2}. \quad (121)$$

Figura 11 – Potencial efetivo para fótons na métrica de Schwarzschild. A linha preta representa como $B^{-2}(r)$ varia com a distância radial. O ponto mais alto da curva, indicado pela seta em vermelho, ocorre em $r = 3M$ e indica a esfera de fótons, uma órbita circular e instável na qual a luz pode orbitar a estrela.



Fonte: A autora.

O potencial efetivo é essencial para compreender o movimento de partículas e fótons em campos gravitacionais, já que ele facilita a visualização das possíveis trajetórias e é uma ferramenta importante na identificação de órbitas circulares, como a órbita da esfera de fótons. Essa órbita representa uma fronteira crítica entre trajetórias que escapam para o infinito, ou seja, para fótons que podem chegar até o observador, e aquelas que são atraídas de volta para a superfície da estrela. Para encontrar a órbita da esfera de fótons, é necessário considerar seu máximo, como identificado na Figura 11. O potencial efetivo tem seu máximo em

$$\frac{dB}{dr} = 0, \quad (122)$$

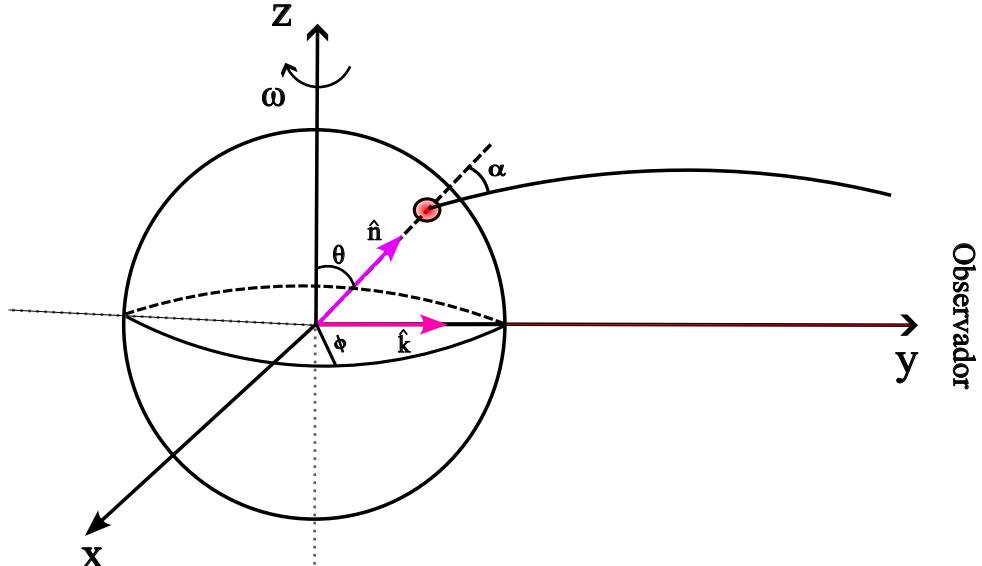
e, ao aplicar a condição , tem-se que

$$\begin{aligned}
 (1 - 2M/r)^{-1/2} - \frac{M}{r}(1 - 2M/r)^{-3/2} &= 0, \\
 1 - \frac{M}{r}(1 - 2M/r)^{-1} &= 0 \\
 r &= 3M.
 \end{aligned} \tag{123}$$

O raio $r = 3M$ é a esfera de fótons. Nesse ponto, os fótons podem orbitar a estrela de nêutrons em uma órbita circular instável. Se torna óbvio, portanto, que a esfera de fótons só existe se o raio da estrela for menor que $3M$. Além disso, para essas estrelas cujo raio é menor que essa região, apenas fótons com $b^{-2} > B_{mx}^{-2}$ escapam para o infinito, já que $\frac{d\phi}{dr} > 0$ (equação 121) e também real.

Pode-se supor que um fóton é emitido de uma superfície $r = R$, tal como ilustrado pela Figura 12

Figura 12 – Fótons são emitidos de um hot-spot na superfície da estrela de nêutrons. O vetor \hat{n} representa a normal à superfície no ponto de emissão; \hat{k} representa a direção inicial do fóton emitido; α é o ângulo de emissão entre \hat{n} e \hat{k} ; θ corresponde à colatitude na superfície da estrela; ϕ é a coordenada azimutal; ω indica a frequência de rotação.



Fonte: A autora.

em que α é o ângulo de emissão. É importante determinar a quantidade de luz que escapa para o infinito e a quantidade de luz que chega até um observador. Para tal, é necessário determinar o ângulo entre a direção do raio de luz e a direção radial

$$tg(\alpha) = \frac{u^\phi}{u^r} = \frac{u \cdot e_\phi}{u \cdot e_r}, \tag{124}$$

em que u é a quadrivelocidade e o fóton. É necessário determinar, primeiramente, qual é o ângulo crítico para além do qual os fótons emitidos não escapam o campo gravitacional da estrela e caem de volta na superfície. Para isso, deve-se analisar a conexão entre α e o parâmetro de

impacto b . Utilizando uma base ortonormal \hat{e}_μ na posição do observador, as componentes u^r e u^ϕ de \vec{u} podem ser obtidas utilizando as equações 50 e 51

$$\begin{aligned} u^\phi &= \frac{\ell}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\ell}{r^2}, \\ u^r &= \left[\frac{\ell^2}{b^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\ell^2}{R^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (125)$$

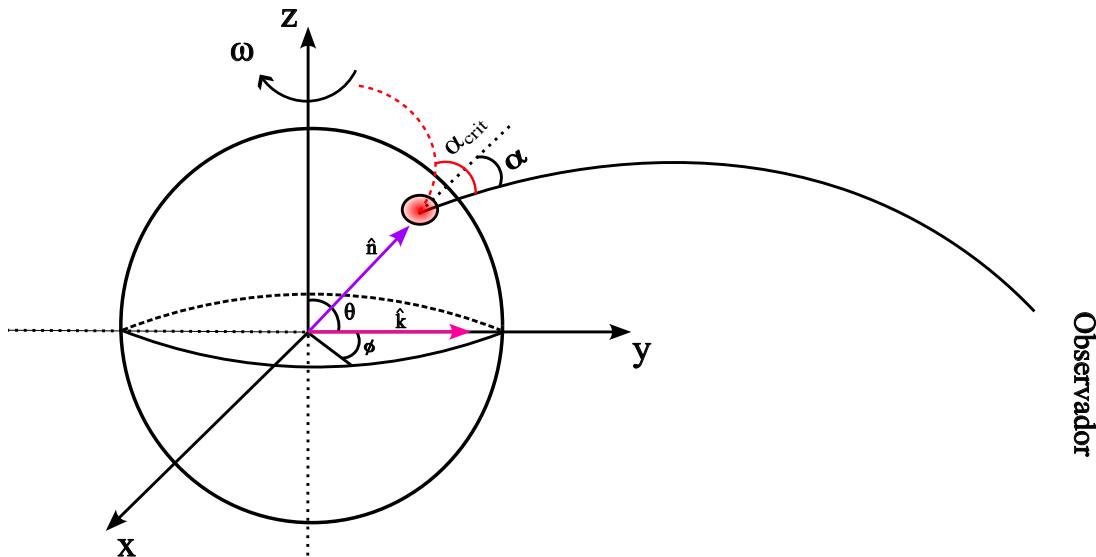
Então, $\vec{u} \cdot \hat{e}_\phi$ é dado por

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \hat{e}_\phi &= g_{\phi\phi} u^\phi \cdot (\hat{e}_\phi)^\phi \\ &= (r^2) \left(\frac{\ell}{r^2} \right) \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{\ell}{R} \end{aligned} \quad (126)$$

e $\vec{u} \cdot \hat{e}_r$ é dado por

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \hat{e}_r &= g_{rr} (\hat{e}_r)^r \cdot u^r \\ &= \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} \cdot \left[\frac{\ell^2}{b^2} - \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \frac{\ell^2}{R^2} \right]^{1/2} \\ &= \left(\frac{1-2M}{R} \right)^{-1/2} \ell \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{1-2M}{R} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (127)$$

Figura 13 – Um fóton emitido de um ângulo $\alpha \geq \alpha_{crit}$ é capturado pelo campo gravitacional da estrela e retorna para a superfície. α_{crit} determina o ângulo máximo de emissão em relação à normal.



Fonte: A autora.

Portanto, a equação 124 se torna

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{\ell}{R} \left\{ \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \ell \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \right]^{1/2} \right\}^{-1/2} \\ &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (128)$$

De acordo com a equação ??, o valor máximo do potencial efetivo ocorre em $r = 3M$. Substituindo esse valor na equação 120, obtém-se

$$\begin{aligned} B^{-2}(r) &= \frac{1 - 2M/r}{r^2} = \frac{r - 2M}{r^3} \\ &= \frac{(3M) - 2M}{(3M)^3} = \frac{1}{27M^2}, \end{aligned} \quad (129)$$

que é o valor crítico do potencial efetivo. Quando B^{-2} assume esse valor, $b^2 = 27M^2$ e indica o ângulo de abertura crítico abaixo do qual os raios de luz escapam para o infinito através de

$$\operatorname{tg}(\alpha_{crit}) = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{27M^2} - \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \right]^{-1/2} \quad (130)$$

e como $2M < R < 3M$, tem-se que

$$\operatorname{tg}(\alpha_{crit}) = \frac{1}{3M} \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}. \quad (131)$$

A condição de escape é $\alpha < \alpha_{crit}$, tal como ilustrado na Figura 13. Isso significa que α_{crit} define qual fração da superfície estelar é visível para o observador. Na próxima seção, será estabelecida base geométrica para o cálculo do fluxo recebido pelo observador.

5.1.1 Curvatura da Luz

Um fóton é emitido de um hot-spot fazendo um ângulo α com a direção radial e chega até o observador posicionado no infinito, como ilustrado na Figura 14, em que θ denota o ângulo entre o eixo de rotação e a emissão do fóton, ψ é o ângulo entre a emissão e a linha de visão do observador, i denota o ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visão do observador e ξ é o ângulo entre a emissão e a direção do movimento do fóton, que ocorre devido a rotação da estrela.

Da equação ??, tem-se que

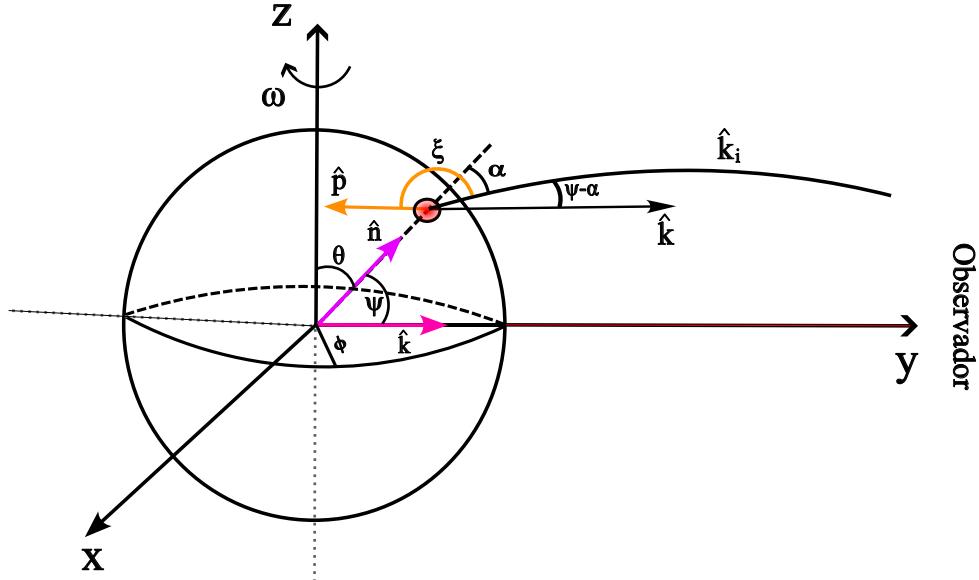
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{R} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}. \quad (132)$$

O parâmetro de impacto é, portanto,

$$b = \frac{R \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 - 2M/R}}. \quad (133)$$

O ângulo de curvatura da luz, ψ , pode ser encontrado ao integrar a equação 121, tal que

Figura 14 – Geometria da emissão por um hot-spot na superfície da estrela. O ângulo ψ está relacionado à deflexão (curvatura) da trajetória do fóton, enquanto ξ denota o azimute da direção de emissão no referencial local.



Fonte: A autora.

$$\begin{aligned} \psi &= \int_R^\infty \frac{d\phi}{dr} dr \\ &= \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{R^2 \sin^2(\alpha)} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} dr. \end{aligned} \quad (134)$$

Para simetrias não equatoriais, a expressão para Ψ 134 deve levar em conta não apenas o ângulo de emissão em relação à normal, também a orientação azimutal da trajetória do fóton, já que o desvio observado passa a depender também da projeção desse ângulo no plano de movimento do fóton, em vez de depender apenas de um único ângulo fixo no equador.

Para encontrar a curvatura da luz, considera-se um hot-spot localizado em uma colatude θ e ângulo azimutal $\phi = \omega t$. Tal como ilustrado na Figura ??, é definido um sistema de coordenadas no qual o eixo de rotação está alinhado ao eixo z e o eixo x está alinhado ao ângulo azimutal em $\phi = 0$ no equador da estrela. No sistema de coordenadas existem dois vetores, k e n , que têm origem no hot-spot e apontam para o observador e para a normal à superfície. Existe ainda o vetor unitário $\hat{\beta}$, que aponta a direção do movimento do hot-spot devido a rotação da estrela.

Define-se os vetores k, n e β de acordo com

$$\begin{aligned} \hat{n} &= [\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)] \\ \hat{k} &= [\sin(i), 0, \cos(i)] \\ \hat{\beta} &= [\cos(90 - \phi), \sin(90 - \phi), 0] = [-\sin(\phi), \cos(\phi), 0]. \end{aligned} \quad (135)$$

Como estabelecido anteriormente, o referencial do observador os fótons são emitidos com

ângulo α e chegam ao observador depois de uma curvatura adicional ψ , de modo que é possível encontrar $\cos(\psi)$ ao realizar o produto de vetores

$$\cos(\psi) = \hat{k} \cdot \hat{n} = \cos(i)\cos(\theta) + \sin(i)\sin(\theta)\cos(\phi). \quad (136)$$

Define-se um vetor \hat{k}_i na direção inicial do fóton. Como as órbitas na métrica de Schwarzschild são 'planas', podemos obter as componentes deste vetor pelo sistema

$$\begin{cases} \cos \alpha = \hat{k}_i \cdot \hat{n} \\ \cos(\psi - \alpha) = \hat{k}_i \cdot \hat{k} \\ \det [\hat{k} \ \hat{n} \ \hat{k}_i] = 0 \end{cases} \quad (137)$$

O fóton deixa a estrela a partir de $\cos(\alpha) = \hat{k}_i \cdot \hat{n}$ e, devido a curvatura, chega a $\cos(\psi) = \hat{k} \cdot \hat{n}$ e \hat{k}, \hat{k}_i e \hat{n} são coplanares. Então, \hat{k}_i pode ser escrito como

$$\hat{k}_i = A\hat{k} + B\hat{n}, \quad (138)$$

mas, pelo sistema,

$$\begin{cases} \cos(\psi) = \hat{k} \cdot \hat{n} \\ \cos(\alpha) = \hat{k}_i \cdot \hat{n} \\ \cos(\psi - \alpha) = \hat{k}_i \cdot \hat{k} \end{cases} \quad (139)$$

de forma que

$$\hat{k}_i \cdot \hat{n} = A\cos(\psi) + B = \cos(\alpha), \quad (140)$$

$$\hat{k}_i \cdot \hat{k} = A + B\hat{n} \cdot \hat{k} = A + B\cos(\psi) = \cos(\psi - \alpha), \quad (141)$$

e

$$\cos(\psi - \alpha) = A(1 - \cos^2(\psi)) + \cos(\alpha)\cos(\psi). \quad (142)$$

Tem-se então a relação

$$A\sin^2(\psi) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\psi)}. \quad (143)$$

Substituindo em $B = \cos(\alpha) - A\cos(\psi)$, tem-se que

$$B = \frac{\sin(\psi - \alpha)}{\sin(\psi)}. \quad (144)$$

De modo que

$$\hat{k}_i = \frac{\sin(\alpha)\hat{k} + \sin(\psi - \alpha)\hat{n}}{\sin(\psi)}. \quad (145)$$

Para encontrar $\hat{k}_i = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$, pode-se usar os vetores encontrados na equação 135, de modo que

$$\begin{aligned} \hat{k}_i &= \left(\frac{\sin(\alpha)\sin(i) + \sin(\psi - \alpha)\sin(\theta)\cos(\phi)}{\sin(\psi)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi - \alpha)}{\sin(\psi)}, \frac{\sin(\alpha)\cos(i) + \sin(\psi - \alpha)\cos(\theta)}{\sin(\psi)} \right). \end{aligned}$$

Expressando ξ em termos de α, ψ, i e ϕ , tem-se que

$$\begin{aligned} \cos(\xi) &= \hat{k}_i \cdot \hat{\beta} = \left(\frac{\sin(\alpha)\sin(i) + \sin(\psi - \alpha)\sin(\theta)\cos(\phi)}{\sin(\psi)} \right) \cdot [-\sin(\phi)] \\ &\quad + \frac{\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi - \alpha)}{\sin(\psi)} \cdot \cos(\phi) \\ &= -\frac{\sin(\phi)\sin(\alpha)\sin(i)}{\sin(\psi)}. \end{aligned} \quad (146)$$

A curvatura final é dada por

$$\begin{aligned} \psi &= \int_1^0 -\frac{1}{R} \left[\frac{1}{b^2 R^2} - \frac{(1 - 2Mu/R)}{R^2/u^2} \right]^{1/2} du \\ &= \int_0^1 \hat{b} \left[1 - \hat{b}^2 u^2 \left(1 - \frac{2Mu}{R} \right) \right]^{-1/2} du, \end{aligned} \quad (147)$$

ao definir $u = R/r$ e $\hat{b} = b/R$. O valor máximo de ψ ocorre quando o parâmetro de impacto é máximo. Para determinar tal valor, considera-se $\alpha = \pi/2$ para fôtons que são emitidos externamente à esfera de fôtons e $\alpha = \alpha_{crit}$ para aqueles são emitidos de regiões mais internas. Tem-se então que

$$b_{\max} = \frac{R \cdot \sin(90)}{\sqrt{1 - 2M/R}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2M/R}} \quad (148)$$

para $R > 3M$. E, para $R \leq 3M$,

$$b_{\max} = \frac{1}{\sqrt{B^{-2}(3M)}} = 3\sqrt{3}M, \quad (149)$$

uma vez que $B^{-2}(3M) = \frac{1}{27M^2}$. Para $R > 3M$ a estrela está fora da esfera de fôtons ($r = 3M$) e fôtons emitidos tangencialmente podem escapar, sofrendo uma curvatura extrema. Para $R \leq 3M$,

a estrela está dentro ou na esfera de fótons e a condição de escape é $\alpha < \alpha_{crit}$. O valor máximo de ψ pode ser obtido ao considerar essas condições, de modo que

$$\begin{aligned}\psi_{\max} &= \int_0^1 \hat{b}_{\max} \left[1 - \hat{b}_{\max}^2 u^2 \left(1 - \frac{2Mu}{R} \right) \right]^{-1/2} du \\ &= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{2M}{R} \right) - u^2 \left(1 - \frac{2Mu}{R} \right) \right]^{-1/2} du\end{aligned}\quad (150)$$

para a condição de $R > 3M$. Para $R \leq 3M$,

$$\psi_{\max} = \int_0^1 \left[\frac{R^2}{27M^2} - u^2 \left(1 - \frac{2Mu}{R} \right) \right]^{-1/2} du. \quad (151)$$

Por definição, o fluxo que chega até o observador é dado por $dF = I_{obs}d\Omega$, em que I_{obs} é a intensidade observada, $d\Omega$ é o ângulo sólido da imagem no céu do observador. O ângulo sólido é dado por

$$\begin{aligned}d\Omega &= dA_{obs}/D^2 \\ &= bdbd\varphi/D^2\end{aligned}\quad (152)$$

onde b é o parâmetro de impacto e φ é o ângulo azimutal que corresponde à rotação em k e D é a distância entre a estrela e o observador.

Pode-se descrever a área do hot-spot emissor na superfície da estrela no referencial do observador a partir das coordenadas (ψ, φ)

$$\begin{aligned}dS &= R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= R^2 \sin(\psi) d\psi d\varphi.\end{aligned}\quad (153)$$

Diferenciando a equação 133 em relação a α tem-se

$$db = \frac{R \cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 - 2M/R}} \quad (154)$$

e, ao substituir na equação para o ângulo sólido 152, obtém-se

$$d\Omega = \left(\frac{R \sin(\alpha)}{\sqrt{1 - 2M/R}} \right) \left(\frac{R \cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 - 2M/R}} \right) d\varphi = \frac{R^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha d\varphi}{1 - 2M/R}. \quad (155)$$

Da equação 147, tem-se que

$$\frac{d\psi}{d\hat{b}} = \frac{d\psi}{db} \cdot \frac{db}{d\hat{b}} = \frac{d\psi}{db} \cdot R \quad (156)$$

Como $\hat{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-2M/R}}$, é possível reescrever $d\alpha$ em termos de ψ , tal que

$$d\alpha = \left(\frac{d\hat{b}}{d\psi} \right)^{-1} d\hat{b} = \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-2M/R}} \right)^{-1} d\hat{b}. \quad (157)$$

$$\text{Substituindo } d\hat{b} = \left(\frac{d\psi}{d\hat{b}} \right)^{-1} d\psi, \\ d\alpha = \frac{\sqrt{1 - 2M/R}}{\cos(\alpha)} \left(\frac{d\psi}{d\hat{b}} \right)^{-1} d\psi. \quad (158)$$

Substituindo na equação 152, encontra-se

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{1 - 2M/R} \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \frac{d\alpha}{d\psi} \\ = \frac{dS \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2M/R}} \frac{\sin \alpha}{\sin \psi \cos \alpha} \frac{1}{d\psi/d\hat{b}} \quad (159)$$

em que

$$\frac{d\psi}{d\hat{b}} = \int_0^1 \left[1 - \hat{b}^2 u^2 \left(1 - \frac{2Mu}{R} \right) \right]^{-3/2} du. \quad (160)$$

5.1.2 Rotação

Na Seção 3.1.2, ao definir a métrica que descreve o espaço-tempo externo à estrela, estabeleceu-se as condições de estacionariedade, já que a métrica utilizada é a de Schwarzschild. No entanto, realisticamente, todas as estrelas de nêutrons possuem rotação - esta, inclusive, é uma condição necessária para elas produzam curvas de luz. Para estrelas com altas rotações, é necessário considerar um espaço-tempo que incorpore a deformação da estrela em uma forma oblata. Entretanto, para estrelas com rotação lenta, é possível negligenciar esses efeitos.

Adotando o referencial que acompanha a rotação da estrela, o hot-spot emissor, de área dS_{em} , libera fôtons que partem sob um ângulo α' medido em relação à direção normal à superfície no referencial comóvel. Essas grandezas conectam-se às suas equivalentes no referencial do observador por meio da propriedade de que a projeção da área do hot-spot sobre um plano perpendicular à direção de emissão dos fôtons permanece invariante sob transformações de Lorentz;

$$dS \cos \alpha = dS_{em} \cos \alpha_{em}. \quad (161)$$

É possível relacionar os ângulos α e α' através de

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + v/c}{1 + (v/c) \cos \alpha}, \quad (162)$$

em que $v/c = \beta$ e considera a aberração abordada na Seção 3.4. A equação 159 toma a forma de

$$d\Omega = \frac{dS_{em} \cos \alpha_{em}}{\sqrt{1 - 2M/R}} \frac{\sin \alpha}{\sin \psi \cos \alpha} \frac{1}{d\psi/d\hat{b}} \\ = \frac{dS_{em} \eta}{\sqrt{1 - 2M/R}} \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \frac{1}{d\psi/d\hat{b}}. \quad (163)$$

em que η é o fator Doppler, que pode ser obtido através de

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \beta}{1 + (\beta) \cos \alpha} = \left(\frac{1 + \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^{-1} \cdot \frac{\cos \alpha + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (164)$$

ao simplificar, obtém-se

$$\eta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \alpha}. \quad (165)$$

Mas, da equação 146, tem-se que

$$\eta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \xi} \quad (166)$$

em que $\beta = v/c$ é a velocidade do hot-spot medida em um referencial não-rotativo. A velocidade tangencial v em ponto na colatitude θ em uma estrela girando com um período P é dada por

$$v = \frac{2\pi r}{P}, \quad (167)$$

em que $r = R \sin(\theta)$. Na métrica de Schwarzschild, o tempo próprio ($d\tau$) e o tempo coordenado (dt) se relacionam através de

$$d\tau = \sqrt{1 - 2M/R} dt. \quad (168)$$

A velocidade medida por um observador estático no infinito é corrigida pelo redshift gravitacional

$$v_{\text{obs}} = \frac{dl}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = v_{\text{local}} \cdot \sqrt{1 - 2M/R}, \quad (169)$$

em que

$$\begin{aligned} v_{\text{local}} &= \frac{2\pi R \sin \theta}{P} \quad (\text{velocidade no referencial da estrela}) \\ v_{\text{obs}} &= \frac{2\pi R \sin \theta}{P} \sqrt{1 - 2M/R} \quad (\text{velocidade observada}) \end{aligned} \quad (170)$$

No referencial não-local,

$$\beta = \frac{v_{\text{local}}}{c} = \frac{2\pi R \sin \theta}{P c}. \quad (171)$$

Define-se então o fluxo de energia conservado

$$I_{\text{obs}} d\Omega_{\text{obs}} v_{\text{obs}} = I_{\text{em}} d\Omega_{\text{em}} v_{\text{em}}. \quad (172)$$

Substituindo as transformações de v e $d\Omega$, tem-se

$$I_{\text{obs}} \left(\frac{d\Omega_{\text{em}}}{\eta^2(1 - 2M/R)} \right) \left(v_{\text{em}} \sqrt{1 - 2M/R} \eta \right) = I_{\text{em}} d\Omega_{\text{em}} v_{\text{em}} \quad (173)$$

Simplificando,

$$\frac{I_{\text{obs}}}{\eta^3(1-2M/R)^{3/2}} = I_{\text{em}}. \quad (174)$$

Usando $v_{\text{obs}} = v_{\text{em}}\sqrt{1-2M/R}\eta$, obtém-se

$$\frac{I_{\text{obs}}}{v_{\text{obs}}^3} = \frac{I_{\text{em}}}{v_{\text{em}}^3}. \quad (175)$$

O fluxo observado (dF_0) é dado por

$$dF_0 = \frac{I_{\text{obs}} d\Omega}{D^2} \quad (176)$$

substituindo I_{obs} e $d\Omega$, tem-se que

$$dF_o = \left[if(\alpha_{\text{em}})(1-2M/R)^{3/2}\eta^3 \right] \left[\frac{dS \cos \alpha \sin \alpha}{(1-2M/R) \sin \psi (d\psi/d\hat{b})} \right] \frac{1}{D^2}, \quad (177)$$

em que $if(\alpha_{\text{em}})$ é a intensidade emitida expressa em termos do ângulo de emissão. Simplificando $(1-2M/R)^{3/2} \times (1-2M/R)^{-1} = (1-2M/R)^{1/2}$ e fazendo $dS_{\text{em}} \cos(\alpha') = dS \cos(\alpha)$, obtém-se

$$dF_o = \frac{dS_{\text{em}}}{D^2} if(\alpha_{\text{em}})(1-2M/R)\eta^4 \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \frac{1}{d\psi/d\hat{b}} \quad (178)$$

em que dS_{em} é a área do hot-spot projetada e corrigida pela distância D e η^4 é o fator Doppler considerando a intensidade e ângulo sólido.

De acordo com (CADEAU et al., 2007), a abordagem da rotação para estrelas de nêutrons combina uma métrica estática (Schwarzschild para RG e Just para STT) com transformações relativísticas especiais para os efeitos de rotação e é conhecida como Schwarzschild-plus-Doppler (S+D) no contexto da RG e Just-plus-Doppler (J+D) para a STT. Também é importante notar que, para estrelas de nêutrons em rotação rápida, tipicamente acima de 300-400 Hz, a aproximação de uma estrela esférica e o uso de uma métrica estática podem não ser suficientes para realizar a modelagem precisa dos perfis de pulso. Neste trabalho, considerou-se a abordagem feita por (OTTONI et al., 2024), na qual os autores consideraram a transformação de um referencial que co-rotaciona com a estrela para um referencial logo acima da superfície da estrela. Para traduzir as propriedades da luz do referencial que gira com a estrela para o referencial próximo à sua superfície é preciso aplicar uma transformação da relatividade especial, conhecido como boost de Lorentz. Essa transformação é necessária porque o hot-spot está de movendo em velocidades que podem ser relativísticas, alterando a direção em que a luz é emitida. Neste ponto são incorporados os efeitos de aberração da luz, conceito abordado na Seção 3.4 e o efeito Doppler, abordado na mesma seção. Além disso, o atraso de Shapiro, abordado na Seção 3.6, e o redshift gravitacional, abordado na Seção 3.5, são incorporados.

É necessário destacar que o problema abordado neste trabalho não considera os efeitos de rotação do espaço-tempo no exterior da estrela; a métrica continua sendo esfericamente simétrica. Além disso, não será considerado o achatamento da estrutura da estrela devido à rápida rotação, embora este seja um efeito importante a ser considerado a depender da análise a ser feita, como destaca (CADEAU et al., 2007). Como o intuito deste trabalho é analisar o comportamento das curvas de luz e os efeitos gravitacionais para diferentes compacidades e configurações geométricas, a aproximação esférica continua sendo pertinente e funciona bem.

5.1.3 Fluxo para dois hot-spots antipodais

Estando definida a geometria do problema para um hot-spot na superfície da estrela e a expressão final para o fluxo recebido pelo observador, é possível estender essa análise para o modelo de pulsares. Como visto na Seção 2.3, pulsares são estrelas de nêutrons que emitem pulsos de radiação através de feixes que estão alinhados ao seu eixo magnético. Devido às características dessa emissão (Figura 5), é natural que se defina a emissão que parte de um hot-spot que está localizado antipodal ao primeiro hot-spot definido. O fluxo obtido na equação 178 ainda é válido para um hot-spot antipodal, sendo necessário realizar alguns ajustes na geometria da emissão.

Primeiramente, considerando que o hot-spot original está posicionado em θ_c , ϕ_c , o hot-spot antipodal deve estar posicionado posicionado em $\pi - \theta_c$, $\pi + \phi_c$. A título de exemplo, se o primeiro hot-spot está no equador $\theta_c = 90$, $\phi_c = 0$, o hot-spot antipodal deverá estar posicionado em $\theta_c = 90$, $\phi_c = 180$.

Além do ajuste na geometria do problema, é necessário considerar a mudança nas variáveis angulares. Da equação 136, é necessário considerar a nova colatitude do hot-spot, de modo que

$$\begin{aligned}\cos \psi' &= \cos(\pi - \theta_c) \cos i + \sin(\pi - \theta_c) \sin i \cos(\pi + \phi_c). \\ &= -\cos \theta_c \cos i - \sin \theta_c \sin i \cos \phi_c.\end{aligned}\tag{179}$$

A velocidade do hot-spot antipodal tem um sinal oposto $\beta' = -\beta$ à velocidade do inicial. Portanto, o ângulo ξ' entre a direção de emissão e o movimento é dada por

$$\cos \xi' = -\cos \xi = \frac{\sin i \sin \alpha \sin \phi_c}{\sin \psi'},\tag{180}$$

de modo que o fator Doppler é dado por

$$\eta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \xi}\tag{181}$$

e o ângulo de emissão $\cos(\alpha')$ é dado por

$$\cos(\alpha_{em}) = \eta' \cos(\alpha).\tag{182}$$

Tal que o fluxo ajustado para o hot-spot antipodal é dado por

$$dF'_o = \frac{dS_{\text{em}}}{D^2} i f(\alpha'_{\text{em}}) (1 - 2M/R) (\eta')^4 \frac{\sin \alpha'}{\sin \psi'} \frac{1}{d\psi'/d\hat{b}'} . \quad (183)$$

O fluxo total observado é a soma das contribuições de ambos os hot-spots:

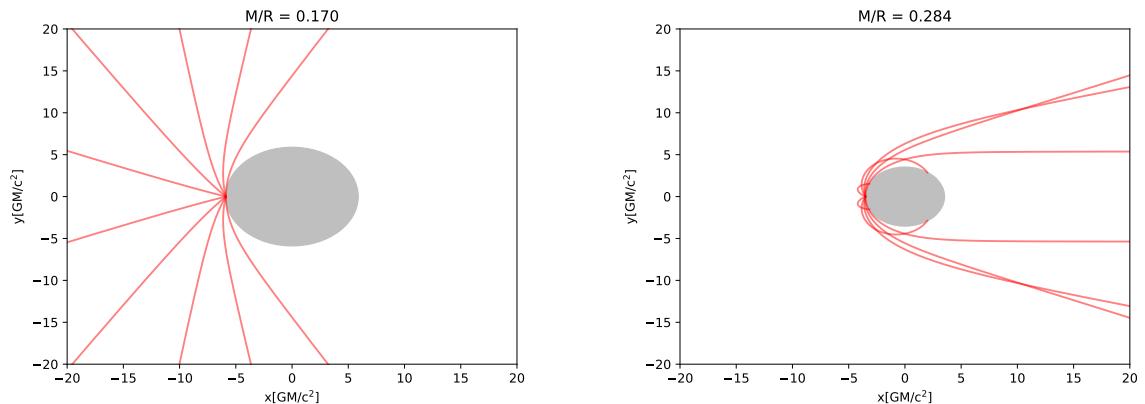
$$F_o^{\text{total}} = F_o(\theta_c, \phi_c) + F'_o(\pi - \theta_c, \pi + \phi_c) . \quad (184)$$

5.2 MÚLTIPLAS IMAGENS

Estrelas de nêutrons supercompactas e ultracompactas apresentam efeitos de curvatura da luz tão extremos que regiões da sua superfície podem produzir múltiplas imagens para um mesmo observador distante. Nessas estrelas, fôtons emitidos em diferentes direções a partir de um mesmo ponto podem ser desviados pela gravidade, seguir órbitas separadas e convergir para o observador, criando réplicas de uma mesma região emissora, como ilustrado na Figura 15. Esse fenômeno, análogo ao fenômeno de lentes gravitacionais cósmicas, não apenas amplifica o brilho observado, mas também o fluxo das curvas de luz.

Figura 15 – Trajetórias de fôtons emitidos da face oposta de uma estrela de diferentes compacidades (M/R). As curvas em vermelho correspondem a geodésicas emitidas de diferentes latitudes da estrela de nêutrons, ilustradas em vista superior, com a linha de visada do observador alinhada ao eixo x e o hot-spot localizado na face oposta. O aumento da compacidade modifica as trajetórias dos fôtons, que, apesar disso, continuam alcançando o mesmo observador.

(a) Estrela de nêutrons com massa $M \approx 1.4M_\odot$ (b) Estrela de nêutrons com massa $M \approx 2.1M_\odot$



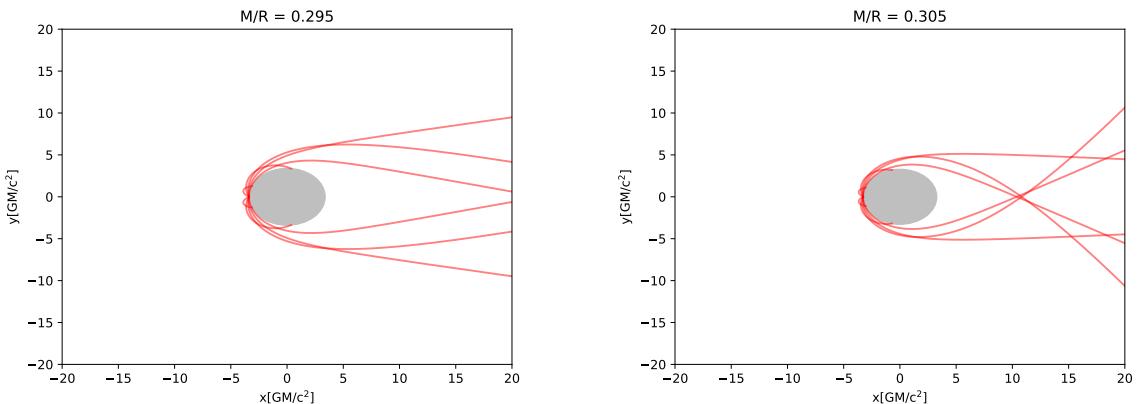
Fonte: A autora.

Primeiramente, é necessário que se defina quais estrelas são supercompactas e quais estrelas são ultracompactas. Para determinar a compacidade dessas estrelas, é necessário inverter as equações 150 e 151 para determinar o valor da razão M/R para qual $\psi_{\max}(M/R) > \pi$, condição que surge diretamente da geometria da curvatura da luz, já que ψ_{\max} é o maior ângulo de deflexão possível para um fôton emitido da superfície $r = R$ que ainda pode chegar a um observador

distante. $\psi_{max}(M/R) = \pi$ em $M/R \approx 0.284$, de modo que $\psi_{max}(M/R) > \pi$ para $M/R > 0.284$. Para estrelas altamente compactas, encontra-se $\psi_{max}(M/R) = 2\pi$ para $M/R \approx 0.3$, de modo que $\psi_{max}(M/R) > 2\pi$ para $M/R \gtrsim 0.3$, indicando que todos os pontos na estrela produzem múltiplas imagens, como ilustrado na Figura 16. O último resultado indica que para estrelas ultracompactas, $\psi_{max} = \infty$, ou seja, o ângulo de deflexão da luz não possui um limite superior, e toda a superfície da estrela se torna visível para o observador e produz infinitas imagens de um mesmo ponto em sua superfície, associadas às trajetórias dos fótons que orbitam a estrela, em alguns casos múltiplas vezes, antes de escapar para o infinito.

Figura 16 – Trajetória de fótons emitidos de um hot-spot localizado na face oposta ao observador. Em casos mais extremos, a deflexão extrema faz com trajetórias distintas sejam projetadas no mesmo plano e se interceptem visualmente.

(a) Estrela de nêutrons com massa $M \approx 2.18M_\odot$ (b) Estrela de nêutrons com massa $M \approx 2.25M_\odot$



Fonte: A autora.

Para determinar os ângulos de curvatura da luz para todas as imagens pode-se utilizar uma característica fundamental da métrica de Schwarzschild que, devido à simetria esférica já demonstrada anteriormente, define as trajetórias dos fótons, ou seja, as geodésicas nulas, como confinadas em órbitas planas devido à conservação do momento angular ℓ . Essa propagação plana permite parametrizar todas as trajetórias possíveis utilizando apenas o ângulo de deflexão (ψ) no plano orbital e calcular os ângulos de chegada dos fótons. Invertendo a equação 136, é possível encontrar o ângulo de deflexão correspondente e determinar a imagem primária (ψ), que deve estar no intervalo $[0, \pi]$, de modo que

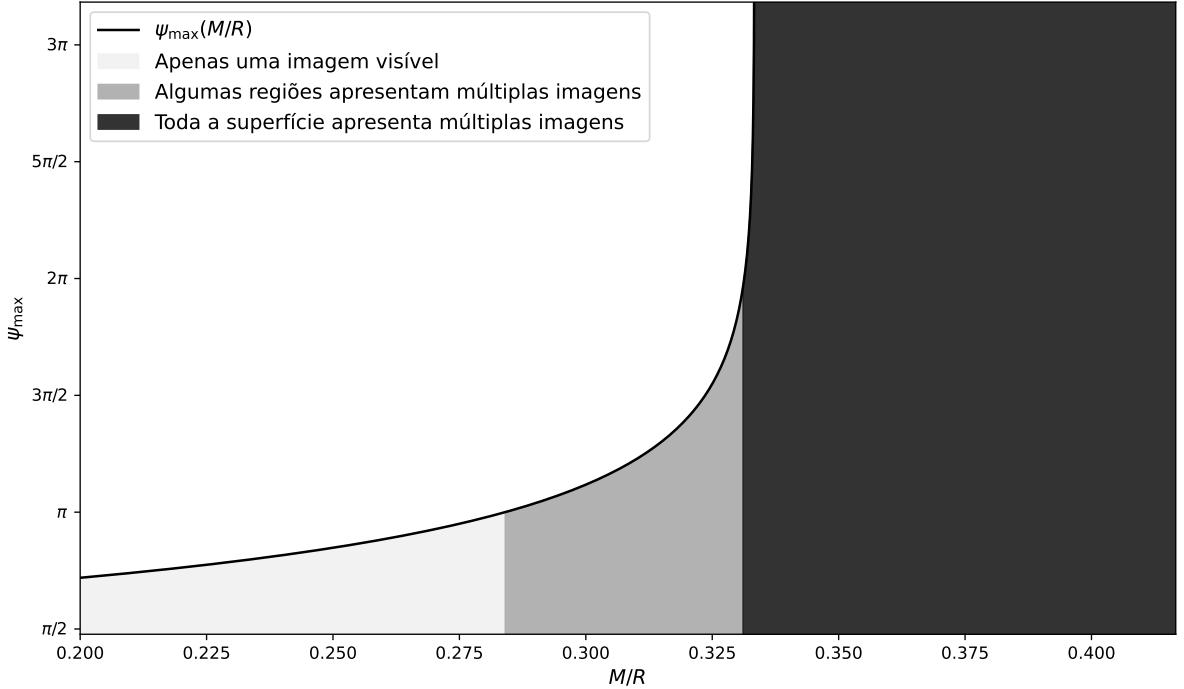
$$\psi = \arccos[\cos(\psi)] \quad (185)$$

e corresponde à trajetória direta ao observador. Como a função cosseno é periódica, com período de 2π , as soluções para múltiplas imagens é, então,

$$\psi_n = 2\pi n \pm \psi, \quad (186)$$

e apenas $\psi_n \leq \psi_{max}$ são visíveis.

Figura 17 – Relação entre ψ_{max} (eixo y) e a compacidade M/R (eixo x). Em baixas compacidades apenas parte da superfície é visível, enquanto para $M/R \gtrsim$ a deflexão diverge, tornando tornando toda a estrela observável e apresentando múltiplas imagens de cada ponto.



Fonte: A autora.

Estando definidos os valores de n para os quais se aplicam a condição $\psi_n \leq \psi_{max}$, é necessário determinar $\alpha_n(\psi_n)$, $d\psi_n/d\hat{b}$ e η_n para cada uma das imagens. Como as estrelas são super e ultracompatas, é necessário que $\alpha_n(\psi_n)$ seja determinado numericamente. É interessante notar que, apesar de a teoria permitir que estrelas $M/R > 0.331$ apresentem infinitas imagens, apenas as duas primeiras imagens são visíveis para um observador em $r \rightarrow \infty$. Isso se dá devido a alguns fatores como a intensidade decrescente da contribuição de cada imagens para o fluxo observado, já que ela diminui exponencialmente com n , e isso leva a uma limitação observational, já que o brilho de cada imagem $n \geq 2$ é extremamente fraco. Além disso, as contribuições dessas imagens são desprezíveis quando comparadas ao erro numérico ou à sensibilidade de observação. A figura 17 apresenta os valores de compacidade para as quais são observadas múltiplas imagens. Para valores $M/R > 0.331$ as órbitas se tornam mais e mais instáveis devido à alta compacidade. Em $M/R = 0.5$ o objeto não apresenta nenhuma imagem visível, indicando a existência de um buraco negro.

Para múltiplas imagens a equação 183 se torna, então,

$$dF'_o = \frac{dS_{em}}{D^2} \sum_n i f(\alpha_{em})(1 - 2M/R) \eta_n^4 \frac{\sin \alpha_n}{\sin \psi} \frac{1}{d\psi/d\hat{b}}. \quad (187)$$

devendo ser integrada sobre a área do hot-spot.

5.3 MODELAGEM DO FLUXO NA STT

A modelagem do fluxo para a STT é baseada na incorporação dos efeitos relativísticos como curvaturas na luz, efeito Doppler e atraso de Shapiro, que são modificados pela presença do campo escalar. Sob a hipótese que fótons se movem através de geodésicas nulas, a lagrangiana da métrica de Just é dada por

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu, \quad (188)$$

em que p^α é o quadrimomento do fóton através da trajetória $x^\alpha = (ct, \rho, \theta, \phi)$, também parametrizada pelo parâmetro afim λ . Para geodésicas nulas ($ds^2 = 0$), a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-f^{b/a} \dot{t}^2 + f^{-b/a} \dot{\rho}^2 + \rho^2 f^{1-b/a} \dot{\phi}^2 \right). \quad (189)$$

As equações do movimento podem ser obtidas utilizando as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (190)$$

para cada coordenada da métrica. Essas equações possuem duas constantes do movimento relacionadas à energia ϵ e ao momento angular h , que surgem das equações para as coordenadas t e ϕ , e são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \epsilon f^{-b/a}, \\ \dot{\phi} &= h \rho^{-2} f^{b/a-1}, \end{aligned} \quad (191)$$

que, quando combinadas, levam à equação radial

$$\dot{\rho}^2 = \epsilon^2 - \frac{h^2}{\rho^2} f^{2b/a-1}. \quad (192)$$

Como os frames das métricas se relacionam através de

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\phi) g_{\mu\nu} \quad (193)$$

em que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a métrica no frame de Jordan, as equações do movimento são dadas por

$$\begin{aligned} dt/d\lambda &= A^{-2} \epsilon f^{-b/a}, \\ d\rho/d\lambda &= A^{-4} [c^2 \epsilon^2 - (h/\rho)^2 f^{2b/a-1}], \\ d\theta/d\lambda &= 0, \\ d\psi/d\lambda &= A^{-2} (h/\rho^2) f^{b/a-1}. \end{aligned} \quad (194)$$

É interessante notar que a relação entre ψ e o ângulo azimutal ϕ pode ser estabelecida devido à simetria esférica do problema, já que o fóton se move em um plano, dado por $\theta = \pi/2$. Tal como

na métrica de Schwarzschild, o parâmetro de impacto, lá dado por $b = \ell/e$, pode ser igualmente definido pelas duas constantes do movimento $\sigma \equiv h/\varepsilon$. O ângulo de emissão do fóton é dado por

$$\tan(\alpha) = \left[\frac{p^\psi p_\psi}{p^\rho p_\rho} \right]^{1/2}. \quad (195)$$

Tal como na métrica de Schwarzschild, é interessante expressar α em termos do parâmetro de impacto, de modo que

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{\rho f^{(b/a-1)/2} p^\phi}{p^t} \\ &= \frac{\sigma}{\rho} f^{-(b/a-1)/2} A^2. \\ &= \frac{\sigma}{\rho_s} \left(1 - \frac{a}{\rho_s} \right)^{(b/a-1)/2} \end{aligned} \quad (196)$$

em que ρ_s é o raio da estrela nas coordenadas de Just no frame de Einstein. (SILVA; YUNES, 2019) obtiveram a integral que expressa o ângulo ψ e generaliza a expressão encontrada para a RG

$$\begin{aligned} \psi &= 2 \sin \alpha \int_0^1 x [1 - \bar{a}_s(1 - x^2)]^{b/a-1} \{ (1 - \bar{a}_s)^{2b/a-1} \\ &\quad - (1 - x^2)^2 [1 - \bar{a}_s(1 - x^2)]^{2b/a-1} \sin^2 \alpha \}^{-1/2} \, dx. \end{aligned} \quad (197)$$

em que $x = \sqrt{1-y}$ e $y \equiv \rho_s/\rho$. Como demonstrado no contexto da RG, a curvatura da trajetória do fóton depende do ângulo de emissão e da compacidade da estrela. Na STT, a curvatura dependerá, também, da carga escalar do espaço-tempo. A parte visível da superfície da estrela é definida a partir de $\alpha = \pi/2$, que define o raio de luz emitido tangencialmente à direção radial na superfície da estrela e, para estrelas pouco compactas, ψ pode adquirir um valor próximo ao de α . À medida que a compacidade da estrela aumenta, a curvatura das trajetórias dos fótons também aumenta, e $\psi > \pi$ é um valor esperado. Fisicamente, isso significa que podem existir regiões na superfície oposta ao observador que podem emitir dois ou mais fótons que percorrem trajetórias distintas até o observador. Como discutido na Seção 5.2, esse fenômeno é chamado de múltiplas imagens e será tratado, também, no regime da STT.

O delay de Shapiro, cuja expressão foi obtida por (SILVA; YUNES, 2019) para o contexto da STT, é dado por

$$\Delta t(\sigma) = t(\sigma) - t(\sigma = 0), \quad (198)$$

que define a diferença entre o tempo de viagem de um fóton com parâmetro de impacto σ e um fóton emitido radialmente ($\sigma = 0$). Os autores obtém a expressão ao realizar a integração da equação geodésica temporal ($dt/d\lambda$) e da equação radial ($d\rho/d\lambda$) combinadas para expressar $dt/d\rho$. O atraso é obtido através da integração numérica de $dt/d\rho$ do raio da ENs até o infinito e sua expressão final é dada por

$$\begin{aligned}\Delta t = & (2\rho_s/c) \int_0^1 dx [1 - \bar{a}_s(1 - x^2)]^{-b/a} (1 - x^2)^{-2} \\ & \times [[\{1 - (1 - x^2)^2(1 - \bar{a}_s)^{1-2b/a} \\ & \times [1 - \bar{a}_s(1 - x^2)]^{2b/a-1} \sin^2 \alpha\}^{-1/2} - 1]]].\end{aligned}\quad (199)$$

Fisicamente, o atraso de Shapiro influencia no tempo de chegada dos fótons, o que impacta diretamente a forma temporal do fluxo observado, especial quando há múltiplas imagens, onde o efeito é mais pronunciado.

Estando definidas essas variáveis, a modelagem do fluxo segue aquela apresentada na Seção 5.1, na qual se define $\cos(\psi) = k \cdot n$, dado por

$$\cos(\psi) = \cos(i) \cos(\theta) + \sin(i) \sin(\theta) \cos(\phi_s), \quad (200)$$

em que i_s é o ângulo entre a linha de visão do observador e o eixo de rotação, θ é a colatitude do hot-spot e ϕ_s é a sua fase de rotação. O ângulo ξ , que se encontra entre k_0 e β (Figura 11), é dado por

$$\cos(\xi) = \frac{\beta \cdot k_0}{\beta} = -\left(\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\psi_s)}\right) \sin(i_o) \sin(\phi_s), \quad (201)$$

onde β é o vetor velocidade do hot-spot. O fluxo observado é definido em termos da energia E de acordo com

$$dF_E = I(E, \alpha) d\Omega,$$

onde $I(E, \alpha)$ é a intensidade no infinito e $d\Omega$ é o ângulo sólido. (SILVA; YUNES, 2019) expressão o fluxo observado através de

$$dF = A_s^2 (1 - a/\rho_s)^{b/a} \delta^5 \cos(\alpha) \frac{d \cos(\alpha)}{d \cos(\psi)} \frac{dA'}{D^2} I(\alpha_{em}) \quad (202)$$

onde dA' é a área do hot-spot projetada em um plano perpendicular à direção de propagação do fóton, $\cos(\alpha_{em}) = \delta \cos(\alpha)$ e δ é o fator Doppler. O fluxo normalizado é dado por

$$F = A_s^2 (1 - \bar{a}_s)^{b/a} \delta^5 \cos(\alpha) \frac{d \cos(\alpha)}{d \cos(\psi)}, \quad (203)$$

com a normalização sendo dada por $I'_0 dA' / D^2$. Novamente, para dois *hot-spots* antipodais, o fluxo é dado por

$$F_T = F_{ant}(i, \pi - \theta, \pi + \phi_s, \bar{a}_s, \bar{b}_s) + F_0(i, \theta, \phi_s, \bar{a}_s, \bar{b}_s) \quad (204)$$

em que $\bar{a}_s \equiv a/\rho_s$ e $\bar{b}_s \equiv b/\rho_s$. A condição de visibilidade do spot pode ser obtida através do cálculo numérico da equação 197 ao definir $\alpha = \pi/2$, de modo que $\psi_c \equiv \psi(\alpha = \pi/2)$. A parte visível da superfície da estrela é definida como

$$\delta f \equiv \frac{A_s^2 \rho_s^2 (1 - \bar{a}_s)^{1-b/a} \int_0^{\psi_c} \int_0^{2\pi} d\psi' d\phi \sin \psi'}{4\pi A_s^2 \rho_s^2 (1 - \bar{a}_s)^{1-b/a}} = \frac{1 - \cos(\psi_c)}{2}. \quad (205)$$

de modo que $\cos(\psi) > \cos(\psi_c)$ deve ser verdadeiro para que o hot-spot seja visível. Para o hot-spot antipodal, a condição é $\cos(\psi) > -\cos(\psi_c)$.

$$\delta = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \xi)}, \quad (206)$$

No limite Newtoniano, $\psi_c = \pi/2$ e metade da superfície da estrela é visível para o observador. Para estrelas relativísticas, $\cos(\psi_c) < 0$ (SILVA; YUNES, 2019).

5.4 MODELAGEM NUMÉRICA DAS CURVAS DE LUZ

Tabela 1 – Parâmetros físicos e adimensionais de diferentes modelos: compacidade M/R , a massa gravitacional normalizada pela massa solar M/M_\odot ; o raio estelar R (em km); o raio físico ρ_s (em km) obtido no frame de Jordan; o fator conforme A_s ; a carga escalar Q ; e o parâmetro \bar{a}_s .

Nome	M/R	M/M_\odot	R/km	ρ_s/km	A_s	Q	\bar{a}_s
RG	0.275	2.033	10.918	10.918	1	0	0.550
	0.285	2.107	10.918	10.918	1	0	0.570
	0.295	2.181	10.918	10.918	1	0	0.590
	0.305	2.255	10.918	10.918	1	0	0.610
STT1	0.275	2.033	10.918	12.001	0.95	0.5	0.559
	0.285	2.107	10.918	12.028	0.95	0.5	0.578
	0.295	2.181	10.918	12.059	0.95	0.5	0.597
	0.305	2.255	10.918	12.088	0.95	0.5	0.616
STT2	0.275	2.033	10.918	10.934	1.05	0.5	0.614
	0.285	2.107	10.918	10.965	1.05	0.5	0.634
	0.295	2.181	10.918	10.998	1.05	0.5	0.654
	0.305	2.255	10.918	11.033	1.05	0.5	0.674

Nesta seção, será apresentada a modelagem numérica empregada para calcular os perfis de pulso de estrelas de nêutrons ultracompatas no contexto da RG e da STT. A implementação, feita utilizando Python, escrita por Rafael Camargo Rodrigues de Lima e adaptada pela autora, se baseia nos trabalhos de (SILVA; YUNES, 2019) e (OTTONI et al., 2024), considerando os efeitos relativísticos de atraso temporal, Doppler relativístico e aberraçao.

A modelagem se baseia na equação do fluxo diferencial observado de um hot-spot de tamanho finito sobre a superfície da estrela, conforme apresentado na equação 203 através de

$$F(\phi) = F_0 A_s^2 (1 - \bar{a}_s)^{b/a} \int_S \delta^5 \cos \alpha \sin \alpha \frac{d\alpha}{d\psi} d\psi d\phi. \quad (207)$$

A integração é feita sobre a área visível do hot-spot, considerando tanto a imagem direta (primeira imagem) quanto, a depender da compacidade da estrela, uma segunda imagem, como discutido na Seção 5.2.

O módulo principal contém a função que calcula o fluxo ao longo da fase rotacional da estrela ($\phi/2\pi$). Para tal, o fluxo é obtido via integração numérica sobre o ângulo ψ , sendo este delimitado pela geometria do hot-spot e pelos limites de visibilidade. A curvatura da luz é computada em um módulo que implementa a equação 197. O módulo calcula a contribuição de cada ponto visível da superfície da estrela, que depende da inversão numérica da equação 197, $\alpha(\psi)$, e a derivada $d\alpha/d\psi$. O atraso temporal, abordado na Seção 3.6, é calculado pela equação 199 e o resultado é incorporado no cálculo da fase rotacional ϕ . O fator Doppler relativístico é incorporado através da equação 206.

Os parâmetros estelares para as diferentes configurações simuladas estão detalhadas na Tabela 1. Para as simulações em STT, foram considerados dois modelos principais, aqui designados como STT1 e STT2. Ambos os modelos assumem uma carga escalar $Q = 0.5$, mas consideramos valores diferentes para o fator conforme na superfície da estrela (A_s); para STT1, foi considerado um fator conforme $A_s = 0.95$ e para o modelo STT2 foi considerado o fator $A_s = 1.05$. O modelo RG, por sua vez, possui $Q = 0$ e $A_s = 1$.

A análise foi feita considerando estrelas de nêutrons com compacidade (M/R) variando entre 0.275 e 0.305, regimes que variam entre estrelas supercompactas e ultracompatas, permitindo a análise de efeitos gravitacionais, incluindo a formação de múltiplas imagens de um mesmo hot-spot quando $M/R > 0.284$, influenciando o formato das curvas de luz.

6 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados numéricos para os perfis de pulso de raios-X emitidos por hot-spots na superfície de estrelas de nêutrons supermassivas. Nas seções subsequentes os resultados serão apresentados para diferentes parâmetros como o tamanho do hot-spot, sua posição na superfície da estrela, a configuração geométrica do sistema, o número de hot-spots e estrelas com alta rotação. A menos que seja explicitado, a frequência de rotação da estrela foi considerada como $\nu = 0$ Hz para isolar efeitamente geométricos.

6.1 TAMANHO DO HOT-SPOT

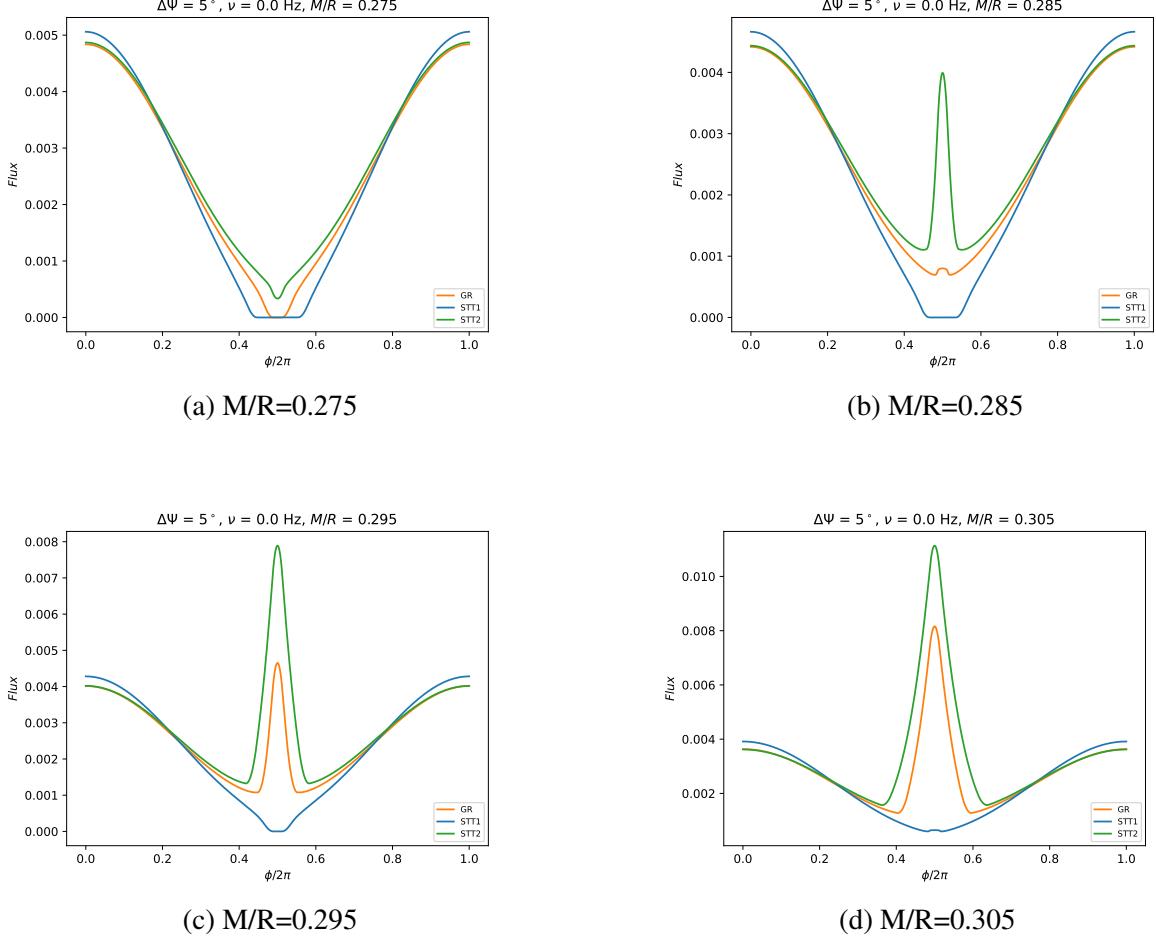
Nesta seção, investigamos a influência do tamanho angular do hot-spot nos perfis de pulso observados. As Figuras 18, 19, 20 e ?? apresentam as curvas de luz para um hot-spot com semiaberturas $\Delta\psi = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ e 20° , respectivamente. Para essas configurações, a estrela é observada equatorialmente ($i = 90^\circ$) e o hot-spot está localizado em uma colatitude $\theta = 90^\circ$.

Para compacidades menores ($M/R \lesssim 0.28$), o observador enxerga essencialmente apenas a face frontal da estrela, de modo que, quando o hot-spot está na face oposta, os fôtons não alcançam sua linha de visão, levando a uma diminuição no fluxo observado (Figura 18a, 19a, 20a e 21a). Já para compacidades mais elevadas ($M/R \geq 0.284$), fôtons emitidos do hot-spot que está oculto geometricamente podem ser curvados ao redor da estrela e tornam-se visíveis para o observador; o ângulo de emissão crítico (α_{crit}) cresce para além de $\pi/2$, permitindo a visibilidade da região oposta à linha de visão. Nestes casos, observa-se um aumento no fluxo exatamente quando o hot-spot está diretamente oposto ao observador, indicando que a deflexão gravitacional é forte o suficiente para que a trajetória desses fôtons seja curvada em direção ao observador.

Observa-se, de maneira geral, que o aumento do tamanho do hot-spot resulta em um aumento na amplitude do fluxo total recebido, tal como esperado, já que uma área emissora maior contribui com um fluxo maior de fôtons. O tamanho do hot-spot também pode suavizar algumas características das curvas de luz que são mais agudas para hot-spots cujo tamanho $\Delta\psi \approx 5^\circ$, devido à integração do fluxo sobre um região mais limitada.

As diferenças entre os modelos RG, STT1 e STT2 são evidentes e se tornam mais acentuadas com o aumento da razão M/R . Nos modelos STT1, o fluxo tende a ser menor em comparação com a RG para a mesma compacidade e tamanho do hot-spot. Fisicamente, isso implica que o campo escalar efetivamente reduz o fator conforme, A_s , e altera a curvatura de modo a aumentar o redshift gravitacional. Com isso, fôtons chegam ao observador com menor energia e menor intensidade. Por outro lado, nos modelos STT2 o fluxo tende a ser maior, resultado que explicita a influência do campo escalar, através do fator conforme (A_s) e da carga escalar Q , sobre a métrica do espaço-tempo externo à estrela, afetando o ângulo de deflexão da luz. Aqui, o acoplamento escalar gera um aumento no fator conforme, o que pode reduzir o redshift efetivo ou aumentar a região visível do hot-spot. O campo escalar também modifica o

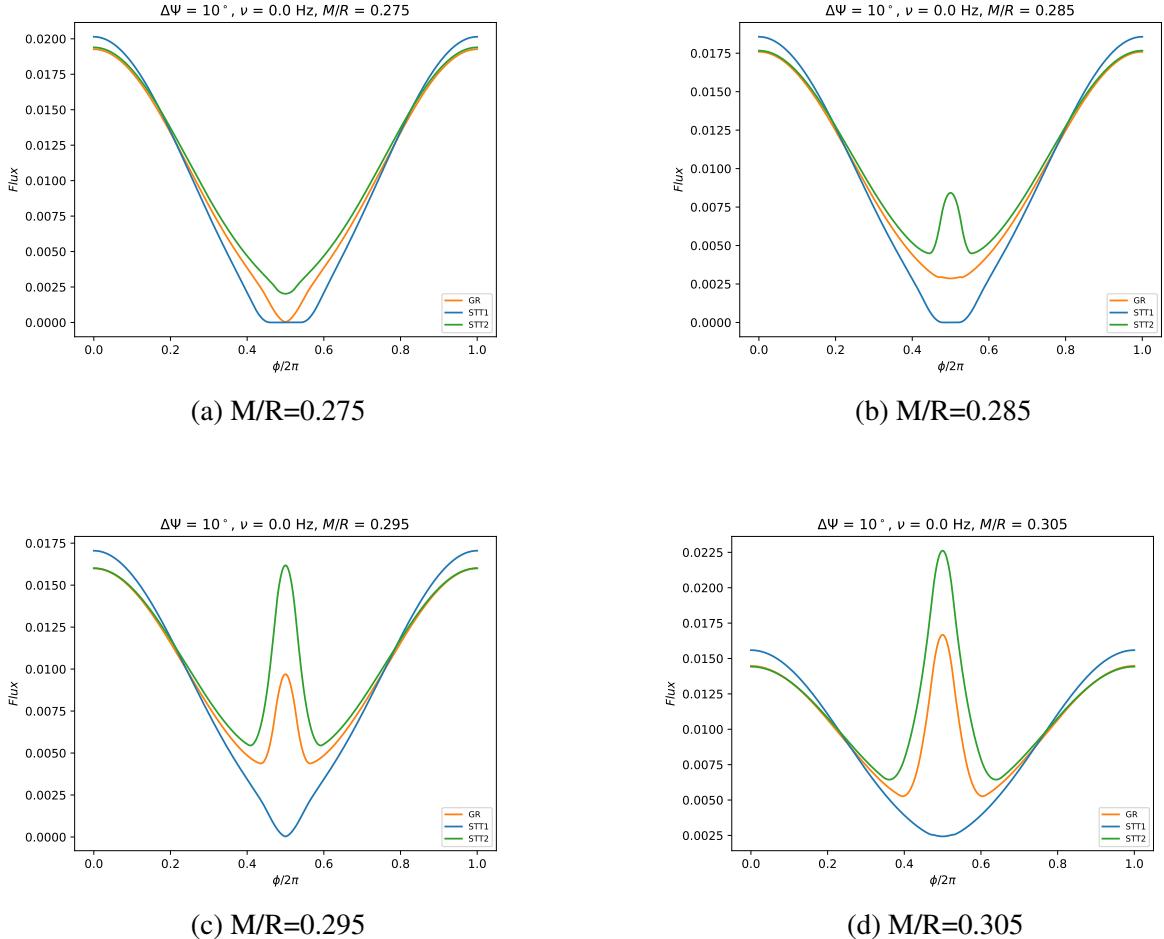
Figura 18 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\Psi = 5^\circ$, configuração característica de hot-spots pontuais. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.



termo de deflexão da luz, permitindo que mais fótons escapem e ampliando a área aparente da estrela vista pelo observador.

Para valores de compacidade mais elevados, como $M/R = 0.285, 0.295$ e 0.305 , os perfis de pulso exibem distorções significativas; na configuração equatorial ($i = \theta = 90$) a fase rotacional $\phi/2\pi = 0.5$ corresponde ao momento em que o hot-spot está diretamente na direção oposta ao observador. Nesta fase, os efeitos gravitacionais se tornam evidentes com a contribuição de picos mais alongados, que indicam a segunda imagem do hot-spot. Nas Figuras 18d, 19d, 20d, 21, para $M/R=0.305$, é possível observar como as curvas de luz para RG, SST1 e STT2 divergem mais significativamente. O modelo SST1 apresenta um mínimo de fluxo mais profundo, indicando uma menor visibilidade do hot-spot quando ele está diretamente oposto ao observador. Já o STT2 apresenta um mínimo mais raso, o que indica a formação de imagens secundárias mais brilhantes em comparação com a RG. Também é interessante notar que para compacidades maiores, o fluxo está minimamente visível, indicando que pelo menos uma parte da face da

Figura 19 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\psi = 10^\circ$. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.



estrela oposta ao observador está visível. Este comportamento está alinhado às discussões de (OTTONI et al., 2024), que apontam que um fator conforme menor $A_s < 1$, como no SST1, pode intensificar a ocultação do hot-spot, enquanto $A_s > 1$ pode favorecer sua visibilidade e ampliar os efeitos de múltiplas imagens quando $M/R \geq 0.284$.

Figura 20 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\Psi = 15^\circ$. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.

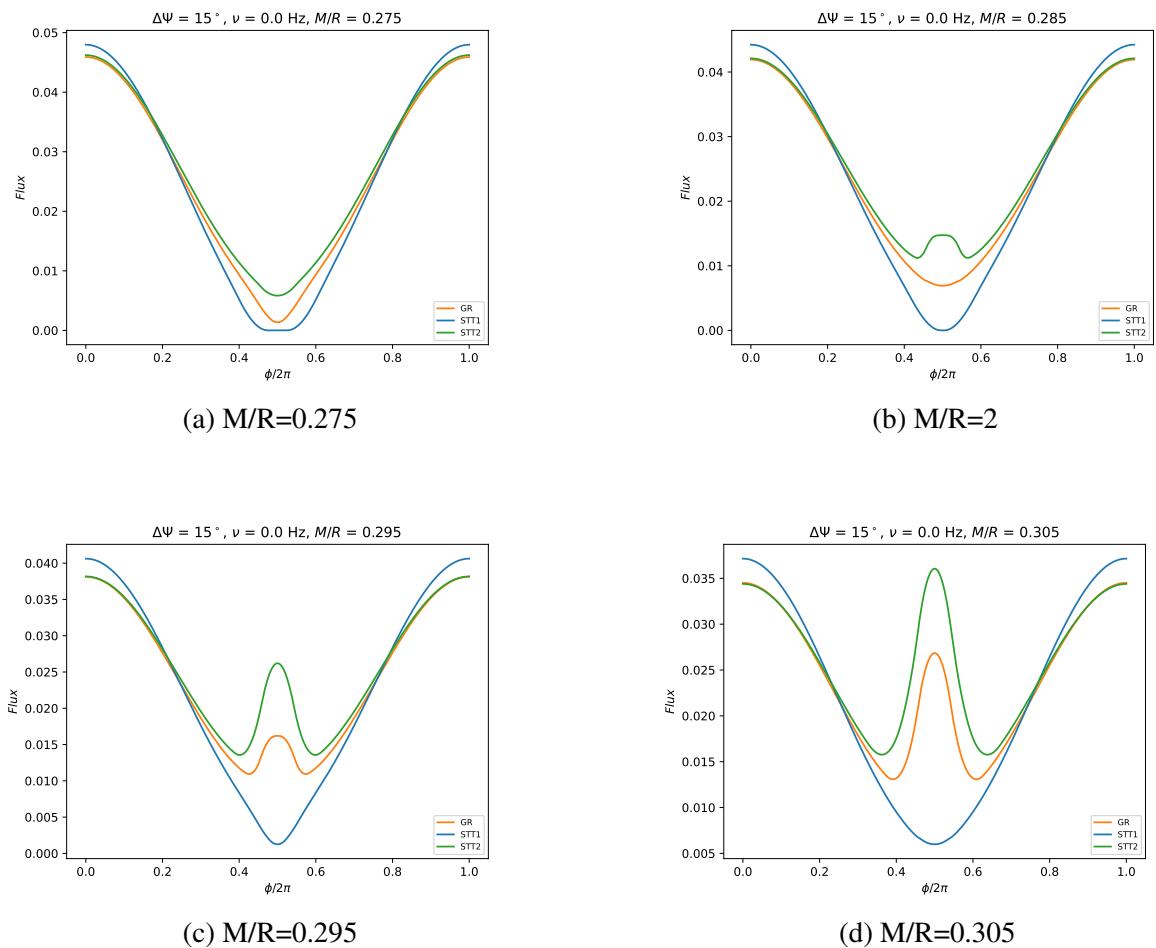
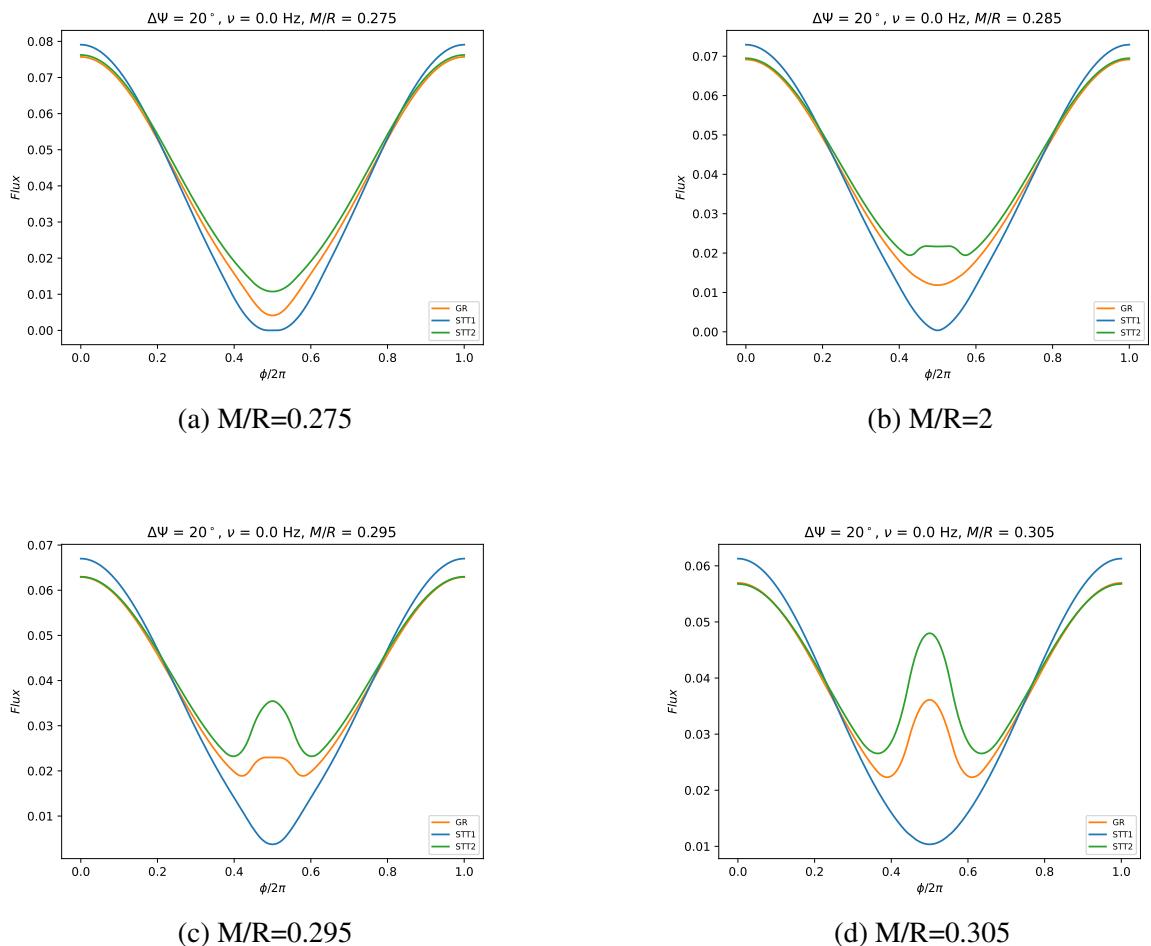


Figura 21 – Fluxo para diferentes compacidades considerando um hot-spot de semi-abertura $\Delta\psi = 20^\circ$. O fluxo em laranja considera o modelo RG; o fluxo em azul considera o modelo SST1; o fluxo em verde considera o modelo STT2. As subfiguras indicam diferentes compacidades: (a) $M/R=0.275$; (b) $M/R=0.285$; (c) $M/R=0.295$; (d) $M/R=0.305$.



6.2 POSIÇÃO DO HOT-SPOT NA SUPERFÍCIE DA ESTRELA

A influência da colatitude (θ) do hot-spot no perfil de pulso é explorada nas Figuras 22, 23 e 24. Nestas simulações, a semiabertura do hot-spot foi fixada em $\Delta\psi = 10^\circ$ e a inclinação do observador em $i = 90^\circ$ e abordamos as colatitudes $\theta = 80^\circ$, 60° e 45° . A geometria do sistema, definida por i , θ e a fase ϕ_s determina o ângulo entre a normal e a superfície no hot-spot, e a linha de visão do observador, como apresentado na equação 5.1.1.

A variação da colatitude do hot-spot altera significativamente a modulação e a forma geral da curva de luz. Quando o hot-spot está mais próximo do equador, como no caso de $\theta = 80^\circ$ na Figura 22, os efeitos de ocultação do hot-spot e de múltiplas imagens durante a fase em que o hot-spot está do lado oposto ao observador ($\phi/2\pi \approx 0.5$) são mais acentuados, o que resulta em uma variação maior na amplitude do perfil de pulso. Na Figura 22a, o fluxo apresenta um mínimo mais claro para STT1 e RG, indicando o afastamento do hot-spot. À medida que a compacidade da estrela se eleva, como nas Figuras 22b o fluxo se torna constante e mais acentuado para RG e STT2, enquanto o modelo STT1 ainda apresenta um mínimo próximo de zero, indicando a invisibilidade do hot-spot quando ele se afasta do observador. Quando a compacidade é mais extrema, como na Figura 22d, todos os modelos apresentam fluxo constante, mas apenas RG e STT2 indicam a existência de múltiplas imagens.

À medida que o hot-spot se move para latitudes mais altas, como na Figura 23 em que $\theta = 60^\circ$, se torna mais clara a influência da posição da região emissora no fluxo observado e na deflexão da luz. Nas Figuras 23a e 23b, para as compacidades $M/R = 0.275$ e $M/R = 0.285$ respectivamente, o fluxo é constante para todos os modelos, mas não há a presença de múltiplas imagens quando o hot-spot está diretamente oposto ao observador. Para $M/R = 0.295$, representado na Figura 23c, a amplitude do fluxo é um pouco maior e o modelo STT2 apresenta uma leve curvatura na luz emitida pelo hot-spot quando ele está na fase $\phi/2\pi = 0.5$, indicando uma segunda imagem sendo observada. Quando a estrela é ultracomposta, representada na Figura 23d, os fluxos para RG e STT2 exibem um pico duplo, indicando a presença mais acentuada de uma segunda imagem, enquanto o modelo STT1 possui um mínimo mais aprofundado.

Para $\theta = 45^\circ$ na Figura 24, o hot-spot está sempre em uma região mais visível para o observador posicionado no plano equatorial e a modulação da curva de luz tende a ser menos extrema, uma vez que o hot-spot permanece visível por uma fração maior do período rotacional e sua projeção na linha de visão do observador varia de forma menos drástica, resultando em um fluxo constante e curvas de luz menos acentuadas. Na Figura 24a, a modulação da curva de luz é a menor entre todas as Figuras 22-24, com um mínimo mais suave, e as diferenças de amplitude entre os modelos são mais sutis, mesmo que ainda presentes. No caso mais extremo, como na Figura 24d, o mínimo do fluxo é o menor de todos os casos que abordamos para ultracompaçade. No entanto, STT1 ainda resulta no menor fluxo e STT2 exibe um leve platô na fase $\phi/2\pi = 0.5$, indicando que há a presença, mesmo que sutil, de uma segunda imagem.

As Figuras 22, 23 e 24, em conjunto, demonstram que, para um observador que se

encontra em um plano equatorial, a colatitude do hot-spot é determinante para a forma do perfil de pulso e para a visualização de efeitos gravitacionais. Além disso, a posição em que a região emissora está posicionada afeta a proeminência dos efeitos da STT, com as maiores diferenças surgindo quando o hot-spot está posicionado na face oposta ao observador. Estes resultados estão em concordância com aqueles de (OTTONI et al., 2024) sobre a influência da geometria na manifestação de efeitos das STTs.

Figura 22 – Fluxo de um hot-spot em colatitude $\theta = 80^\circ$ na superfície da estrela. O hot-spot está próximo ao equador, mas ainda um pouco deslocado em direção ao polo norte da estrela.

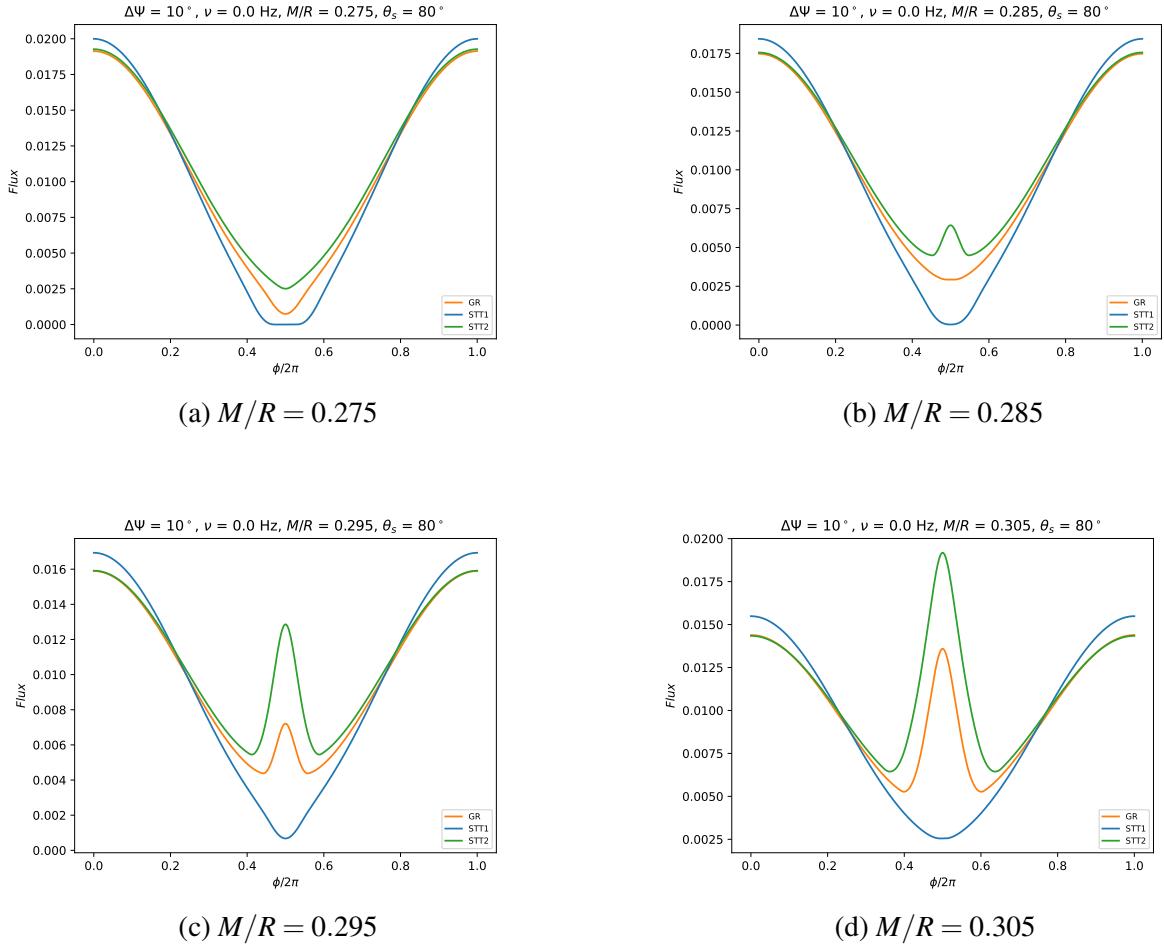


Figura 23 – Fluxo de um hot-spot em colatitude $\theta = 60^\circ$ na superfície da estrela. O hot-spot está deslocado 30° acima do equador, em uma região intermediária.

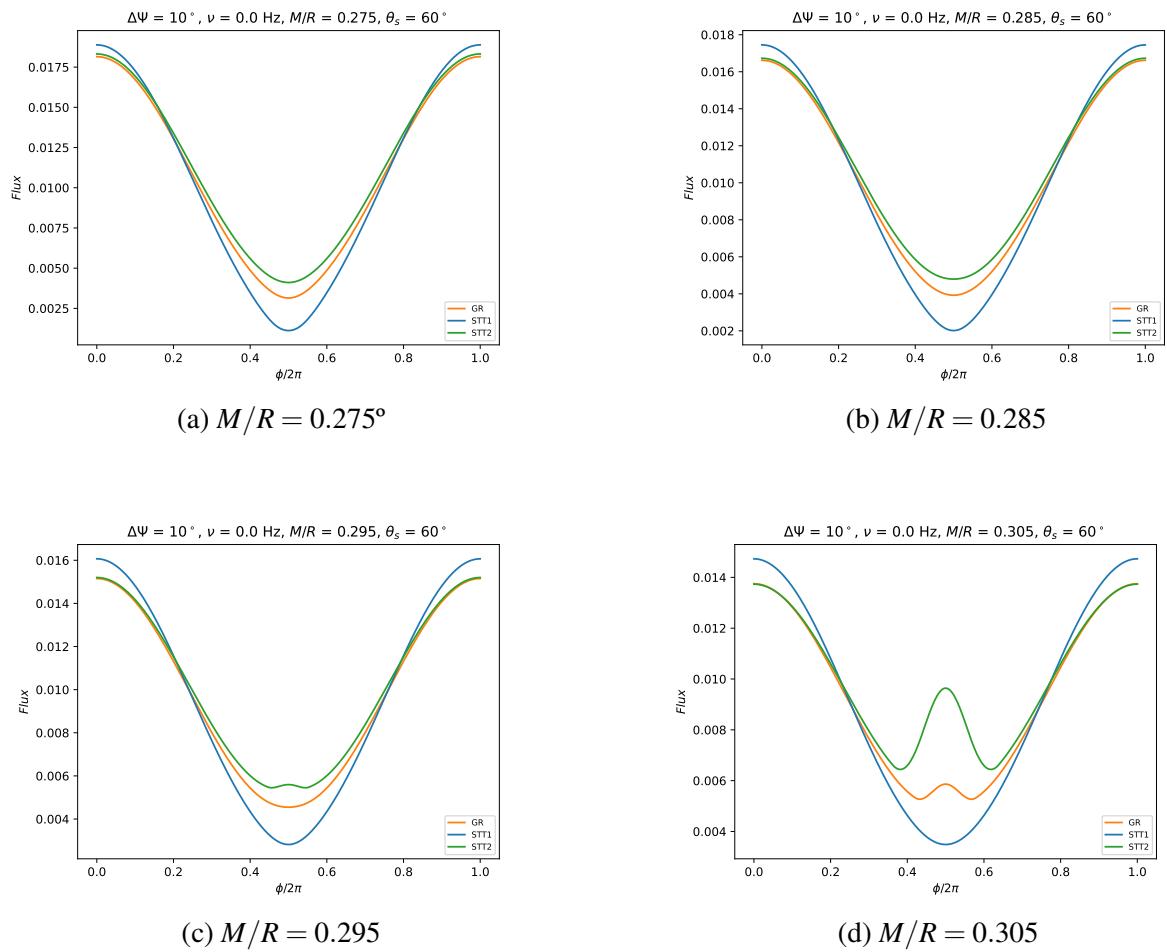
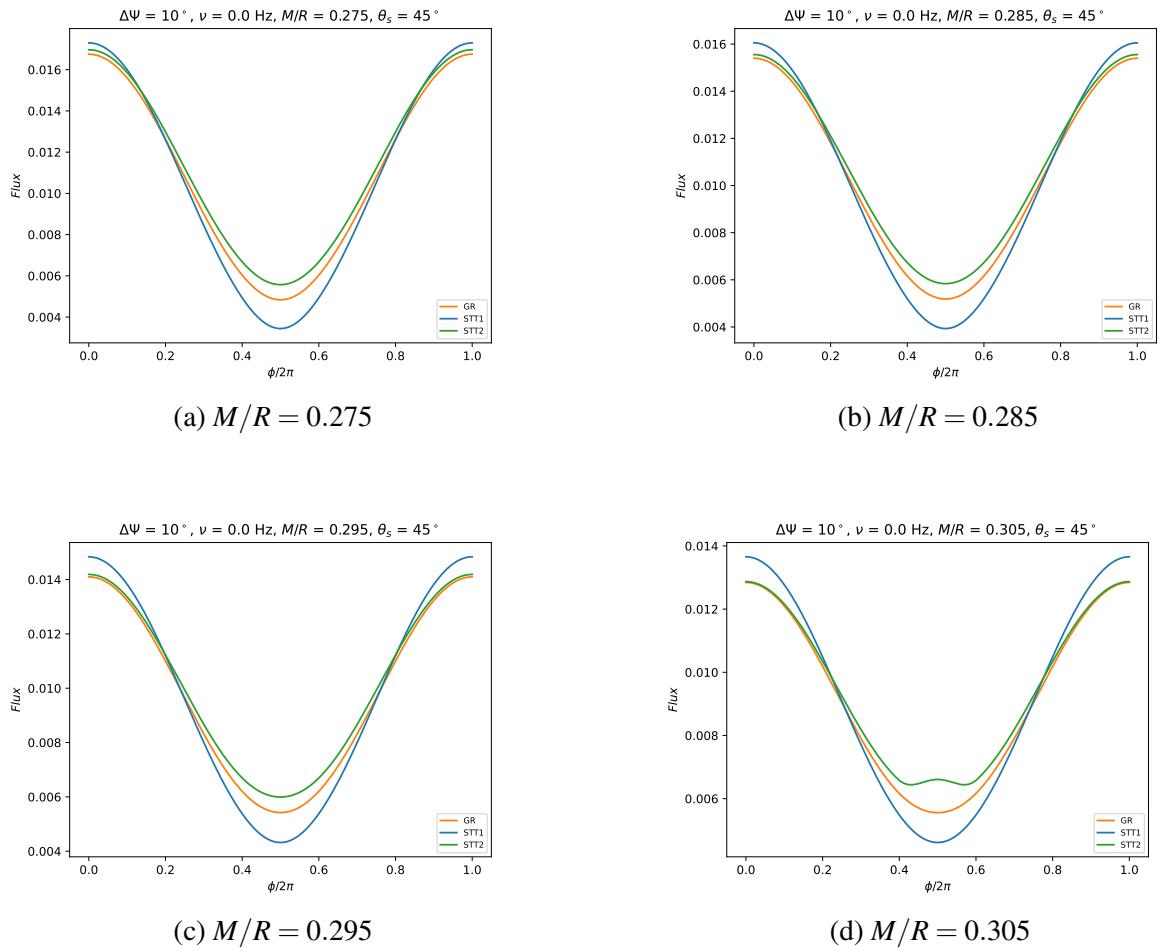


Figura 24 – Fluxo de um hot-spot em colatitude $\theta = 45^\circ$ na superfície da estrela. O hot-spot está localizado exatamente entre o polo e o equador da estrela.



6.3 DIFERENTES CONFIGURAÇÕES PARA A GEOMETRIA DO PROBLEMA.

Nesta seção, analisamos como diferentes configurações geométricas (i , θ) afetam os perfis de pulso. As Figuras 25, 26 e 27 apresentam curvas de luz para um hot-spot de semiabertura $\Delta\psi = 10^\circ$ e configuração $i = 180^\circ - \theta$. As configurações abordadas são cenários onde o observador tem uma linha de visão desalinhada com o equador da estrela e o hot-spot se encontra em latitudes não equatoriais.

Na configuração abordada na Figura 25 o hot-spot nunca está completamente no lado oposto ao observador, mas também nunca está diretamente em sua direção. Na Figura 25a, o modelo STT1 apresenta o menor fluxo que indica a ocultação total do hot-spot, com o modelo RG apresentando também um mínimo próximo a zero, mas mais suave, indicando a invisibilidade momentânea da região emissora. Aqui, STT2 apresenta fluxo constante, indicando a visibilidade constante do hot-spot. Quando consideramos uma compacidade acima de $M/R \geq 0.284$, como na Figura 25b para $M/R = 0.285$, o modelo RG apresenta picos muito pequenos na fase $\phi/2\pi = 0.5$, indicando uma segunda imagem mínima e o modelo STT2 uma segunda imagem proeminente, enquanto STT1 continua indicando a ocultação total do hot-spot. Ao passo que a compacidade aumenta, como na Figura 25c, tanto para RG, quanto para STT2 há a presença de um segundo pico de amplitude maior, indicando a presença da segunda imagem, e o modelo STT1 apresenta uma suavização em seu mínimo. Na compacidade $M/R = 0.305$, indicada na Figura 25d, o fluxo para o modelo STT1 tem seu mínimo suavizado, enquanto os fluxos para RG e STT2 apresentam picos apresentam picos secundários maiores, indicando que a luz que deixa a região emissora, quando ela está na face oposta da superfície da estrela, é altamente curvada.

Na Figura 26, em que $i = 150^\circ$, $\theta = 30^\circ$, os fluxos para $M/R = 0.275$ e $M.R = 0.285$ (Figuras 26a e 26b) os fluxos apresentam um comportamento parecido com aqueles da Figura 25 mas com amplitudes menores. À medida que a compacidade aumenta, o fluxo passa a apresentar uma forma mais achatada e a segunda imagem do hot-spot é presente para RG e STT2, e o fluxo para STT1 indica que o hot-spot permanece na região invisível por um período menor. Na Figura 26c, o aumento da compacidade gera um pico secundário mais suave para RG e STT2, enquanto STT1 passa a apresentar um fluxo quase constante. Na maior compacidade, exibida na Figura 26d todos os modelos indicam um fluxo contínuo, com STT1 apresentando uma menor amplitude, enquanto RG e STT2 apresentam uma segunda imagem completamente visível e brilhante.

Quando o hot-spot está próximo a um dos polos, como no caso de $\theta = 10^\circ$, e o observador tem uma linha de visão quase oposta, $i = 170^\circ$, caso ilustrado na Figura 27, a modulação do fluxo ao longo do período rotacional é reduzida. Isso ocorre devido mudança menos drástica da projeção da área visível do hot-spot e sua distância angular em relação à linha de visão. Para a Figura 27a, o perfil de pulso para STT1 é quase plano, indicando a baixa visibilidade da região emissora. RG apresenta um fluxo compatível com a rotação da estrela, em que o hot-spot está visível e, com a rotação, se torna invisível para o observador, indicando que não há a presença

de múltiplas imagens. Na Figura 27b essa tendência se mantém. Os perfis de pulso de STT1 se mantém plano e próximo de zero, enquanto o fluxo de RG passa a ser plano, mas ainda assim visível e o modelo STT2 apresenta um pico em $\phi/2\pi = 0.5$, indicando que uma quantidade maior de fótons chega até o observador. Com o aumento da compacidade, como na Figura 27c, o modelo STT2 sofre um aumento sutil no fluxo, enquanto RG sofre um aumento significativo no fluxo, exibindo um pico em $\phi/2\pi = 0.5$. Os picos que surgem na para essa configuração não é uma segunda imagem, mas sim uma manifestação da geometria adotada.

As diferenças entre os modelos RG, STT1 e STT2 permanecem mesmo sob essas configurações; o modelo STT1 apresenta um fluxo observado menor e o modelo STT2 apresenta um fluxo maior em relação à RG. As formas das curvas de luz, especialmente para valores $M/R \geq 0.285$, continuam a exibir características distintas, evidenciando como a carga escalar Q e o fator A_s influenciam a geometria do espaço-tempo de Just e, consequentemente, a propagação dos fótons. Para $i = 135^\circ$, representado na Figura 25, a modulação é maior em comparação ao caso quase polar (Figura 27) e a contribuição da segunda imagem é claramente visível para estrelas ultracompatas.

Figura 25 – Fluxo de um hot-spot para $i = 135^\circ$. Nesse cenário, o observador está abaixo do equador, próximo ao polo sul, inclinado 45° em relação ao equador.

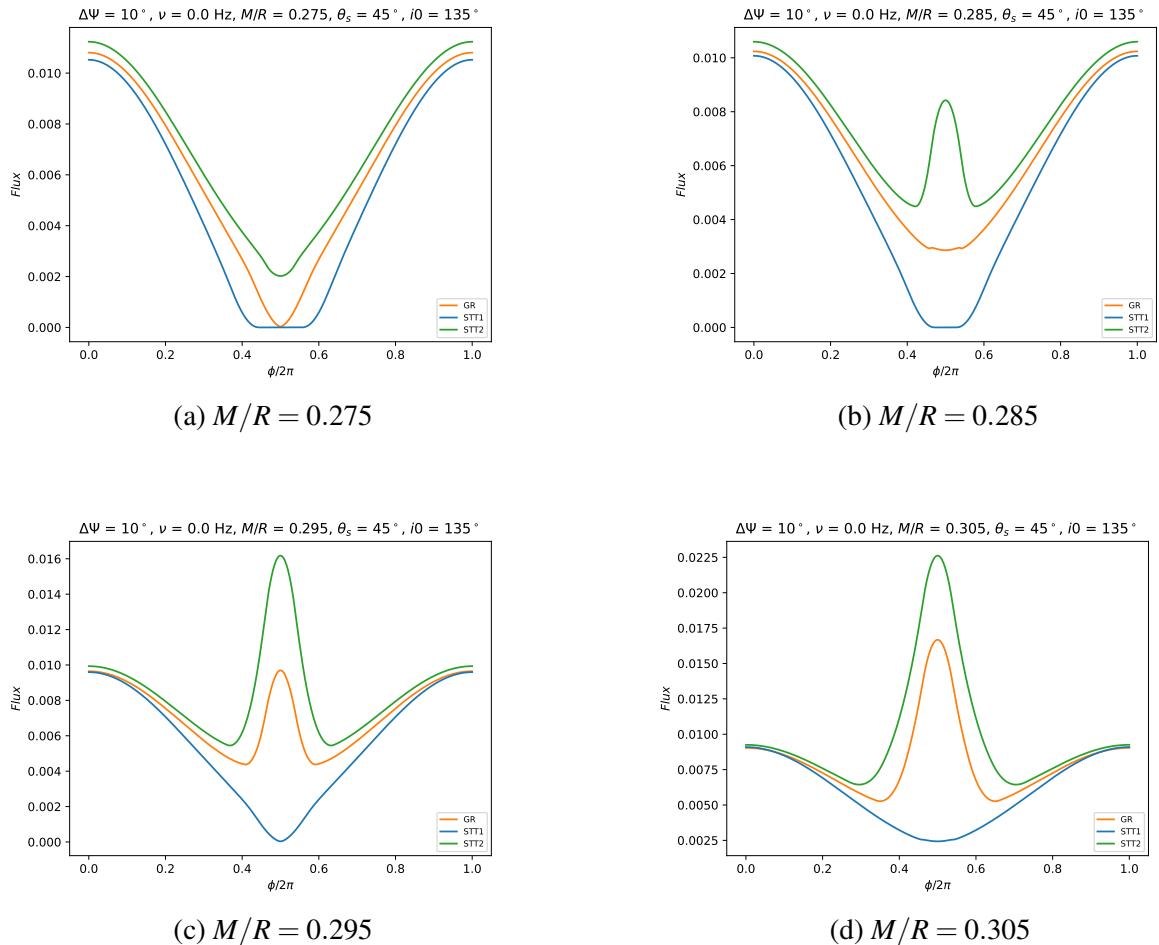


Figura 26 – Fluxo de um hot-spot para $i = 150^\circ$. O observador está hemisfério sul da estrela, próximo ao polo, mas inclinado 30° acima dele.

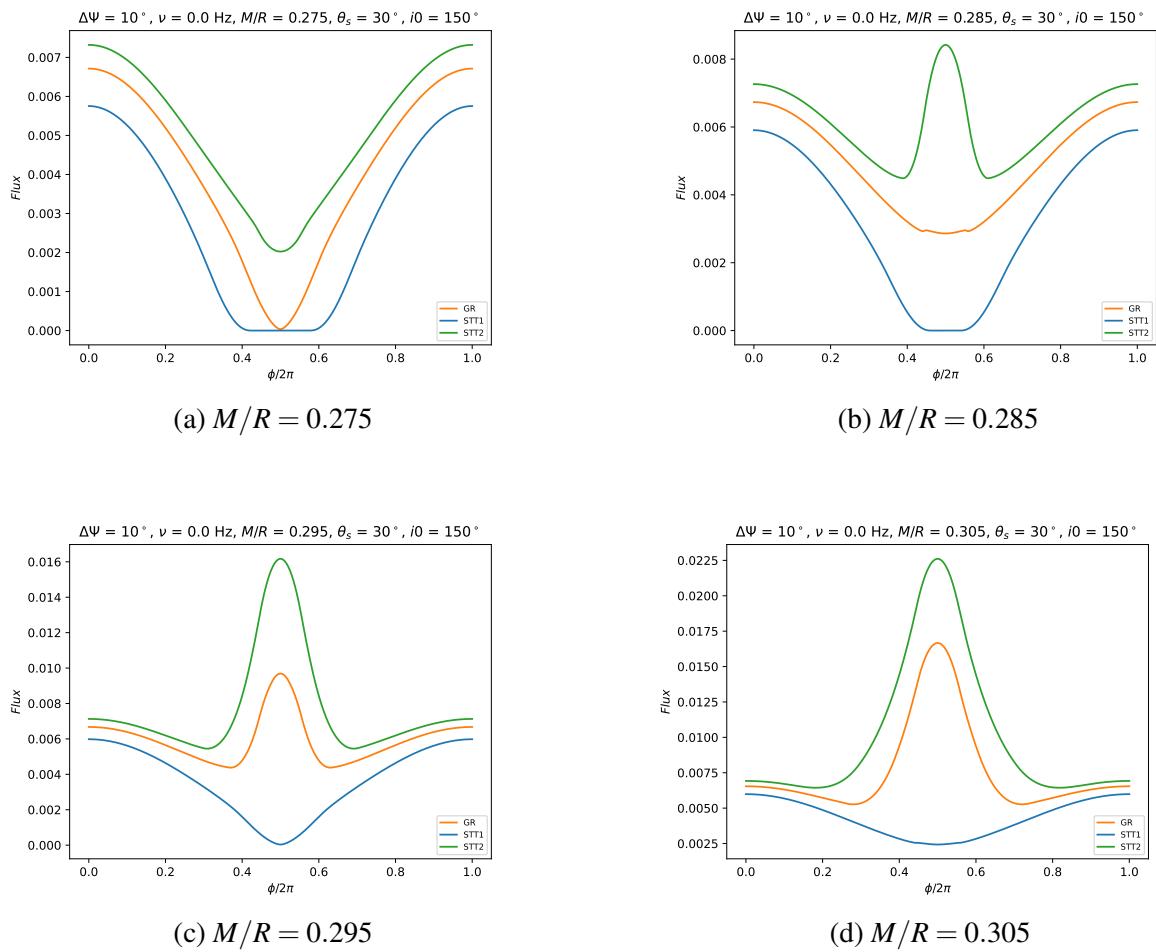
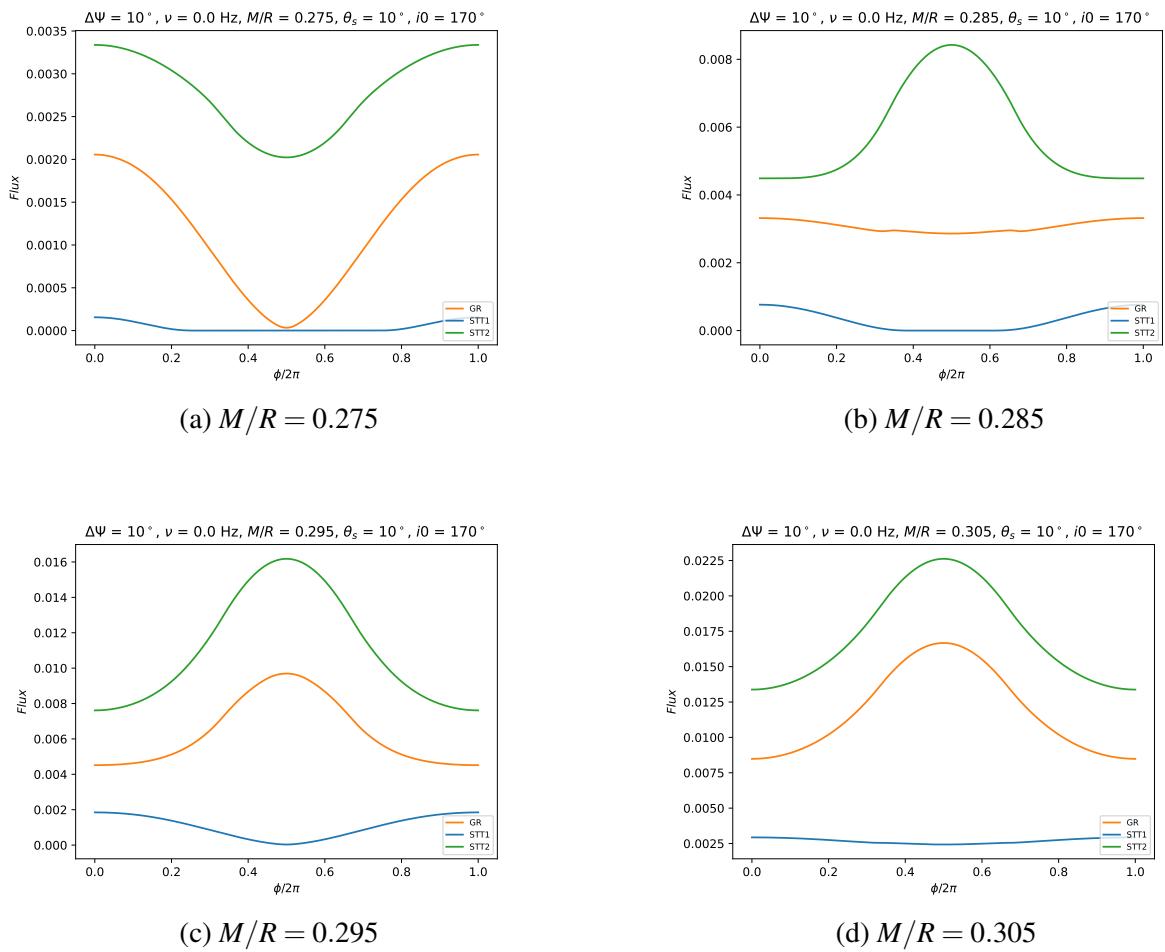


Figura 27 – Fluxo de um hot-spot para $i = 170^\circ$. O observador está praticamente alinhado ao polo sul da estrela, apenas 10° acima dele.



6.4 DOIS HOT-SPOTS

Nesta seção investigamos a presença de dois hot-spots antipodais na superfície da estrela, configuração associada aos pulsares. As Figuras 28, 29 e 30 apresentam os perfis de pulso para os modelos RG, STT1 e STT2, respectivamente, considerando diferentes compacidades ($M/R = 0.275 \rightarrow 0.305$). Assumiu-se que o hot-spot primário, aqui definido como aquele que está diretamente na linha de visão do observador, possui parâmetros similares aos das seções anteriores ($\Delta\psi = 10^\circ, i = 90^\circ, \theta = 60^\circ$), e o segundo hot-spot está localizado na posição antipodal, conforme descrito na Seção 5.1.3 através das equações 179-184. Essa abordagem é análoga à discutida por (SILVA; YUNES, 2019) e (SOTANI, 2017).

A introdução de um segundo hot-spot antipodal resulta, tipicamente, em perfis de pulso com dois picos principais por período de rotação, que correspondem à máxima visibilidade de cada hot-spot. A forma exata e a amplitude relativa desses picos dependem da geometria de visualização e dos efeitos gravitacionais. Na Figura 28 analisamos a presença de dois hot-spots para o modelo RG. As curvas tracejadas indicam o fluxo individual de cada hot-spot e a linha contínua indica a soma dos fluxos. Na Figura 28a, o fluxo exibe dois picos de amplitude similar, em que cada pico é a contribuição do hot-spot que está geometricamente mais favorável ao observador. Ou seja, eles refletem o efeito de farol característico dos pulsares, como abordado na Seção 2.3. Além disso, a superposição das emissões dos dois hot-spots garante que o fluxo total nunca seja nulo. Quando aumentamos a compacidade da estrela, como na Figura 28b, o fluxo do segundo hot-spot tem vales menos profundos, e o fluxo total começa a apresentar uma pequena modulação. Na Figura 28c a forma dos picos individuais de cada hot-spot começa a se alargar devido à maior visibilidade causada pelo desvio da luz. O segundo hot-spot apresenta picos em $\phi/2\pi = 0$ e $\phi/2\pi = 1$, indicando a presença de múltiplas imagens. O fluxo total reflete isso através da presença de picos também nos extremos da fase. Para estrelas ultracompatas, como o caso analisado na Figura 28d, os efeitos de curvatura da luz são mais severos. Os picos nos extremos da fase de rotação do segundo hot-spot são mais acentuados e o fluxo total é visivelmente distorcido, apresentando um platô maior e picos maiores nos extremos de fase.

Na Figura 29 foram considerados dois hot-spots antipodais no tratamento do modelo STT1. A principal diferença entre este e o modelo RG é uma redução geral na amplitude do fluxo para todas as compacidades. Na Figura 29a o fluxo é similar àquele para RG, mas com uma intensidade menor. O fluxo do segundo hot-spot tem vales mais profundos e o fluxo total uma amplitude menor. Para a Figura 29b o fluxo do segundo hot-spot tem um mínimo um pouco menor, enquanto os fluxos para o primeiro hot-spot e o total permanecem com as mesmas características. Já na Figura 29c, o fluxo tem as mesmas características da Figura 28a, o que destaca o influência do fator conforme A_s na modelagem do fluxo, tal como apontado por (OTTONI et al., 2024), uma vez que, aqui, a compacidade $M/R = 0.295$ apresenta a mesma configuração para uma estrela de menor compacidade no outro regime. Já na Figura 29d é notável a diferença entre os fluxos, com o segundo hot-spot apresentando uma mudança significativa em

sua estrutura; o fluxo possui vales mais profundos e uma amplitude menor. O fluxo total também apresenta uma amplitude menor, indicando uma menor intensidade na luz observada.

Para o modelo STT2, apresentado na Figura 30, o fluxo é maior em comparação com RG e STT1. Na Figura 30a o perfil dos dois picos é semelhante ao da RG e STT1 em sua estrutura geral, mas com uma amplitude maior que ambos. Na Figura 30b o aumento do fluxo em relação aos outros regimes se mantém. Os vales entre os picos são menos profundos, indicando uma contribuição mais forte da luz do hot-spot na face oposta ao observador. Já na Figura 30c, os fluxos apresentam mudanças mais drásticas. Os picos principais do fluxo total são mais intensos que àqueles para RG (Figura 28c) e o vale entre os picos é significativamente preenchido. Nas extremidades da fase de rotação aparecem dois picos menores, indicando a superposição das imagens de ambos os hot-spots. Na compacidade mais extrema, exibida na Figura 30d, o vale entre os picos principais é mais profundo e alongado, permanecendo constante entre $\phi/2\pi \approx 0.2$ e $\phi/2\pi \approx 0.8$. Além disso, o fluxo mínimo do primeiro hot-spot quando ele está na região oposta ao observador ($\phi/2\pi \approx 0.5$) aumenta sutilmente de ≈ 0.53 para ≈ 0.58 , indicando que uma quantidade maior de fôtons chega até o observador. No entanto, observamos uma aparente diminuição no pico do segundo hot-spot quando ele está na direção do observador. Isso indica que, embora o desvio da luz seja ainda maior, essa geometria específica pode alterar a quantidade de fôtons que chegam até o observador. Os raios de luz podem estar sendo desviados de forma mais extrema e, possivelmente, uma fração maior deles seja defletida para regiões afastadas da linha de visão do observador. Além disso, conforme a compacidade aumenta, a superfície da estrela se aproxima mais da região crítica da esfera de fôtons, discutida na Seção 5.1 e ilustrada na Figura 11. As trajetórias da luz que se aproximam dessa região são altamente instáveis e sensíveis à pequenas variações, fazendo com que os fôtons sejam capturados pelo campo gravitacional da estrela (aqui, consideramos que esses fôtons não são reemitidos) e retornam para sua superfície, ou podem ser espalhados de forma a não chegar ao observador com a mesma intensidade. Além disso, os termos geométricos da equação do fluxo 204, que relacionam o ângulo de emissão com o ângulo observado ($\frac{d \cos \alpha}{d \cos \psi}$), dependem de como os raios são curvados. Para configurações mais extremas, esse termo pode se comportar de maneira não monotônica, levando à variações mais drásticas no fluxo observado.

Nas Figuras 28 (RG), 29 (STT1) e 30 (STT2), observa-se que para o modelo STT1, tanto o pico primário quanto o secundário apresentam comportamentos similares para as compacidades comparadas e são significativamente semelhantes ao fluxo de RG para compacidades menores. No modelo STT2, os picos sofrem alterações na sua amplitude máxima e também na largura e simetria dos picos em comparação à RG. Essas alterações aumentam para valores de compacidade maiores, onde os efeitos gravitacionais afetam a trajetória da luz e a visibilidade para ambos os hot-spots. (OTTONI et al., 2024) ressaltam que as diferenças entre as teorias se tornam mais evidentes quando o hot-spot transita na região oposta na linha de visão do observador, quando ocorre o desvio máximo da luz. Os resultados para STT1 e STT2 destacam o efeito do fator A_s e concordam com àqueles obtidos por (OTTONI et al., 2024) e (SOTANI, 2017).

Figura 28 – Fluxo para dois hot-spots antipodais em diferentes compacidades para RG. Nessa configuração, o observador está no plano equatorial, enquanto os hot-spots estão localizados em latitudes intermediárias.

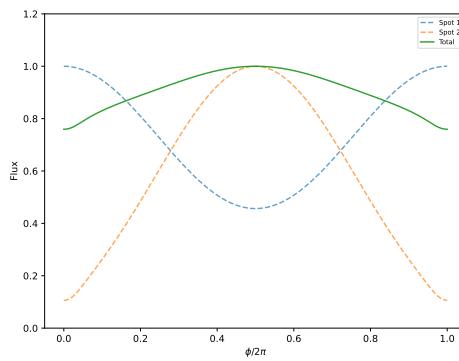
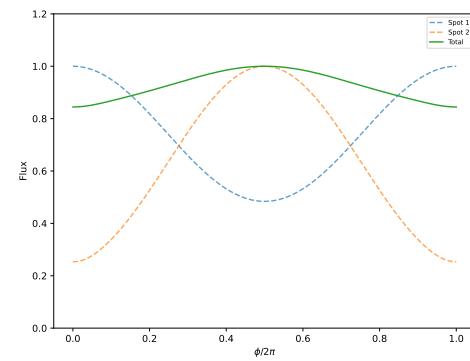
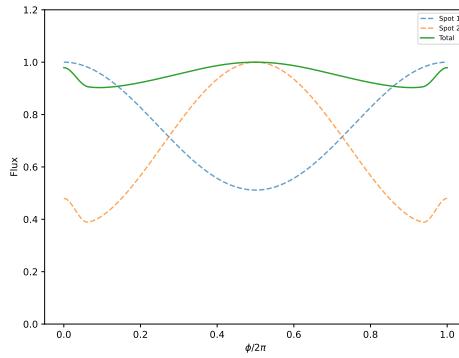
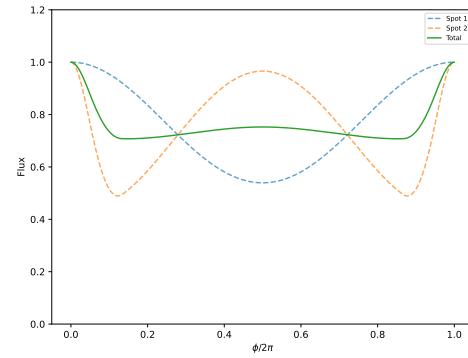
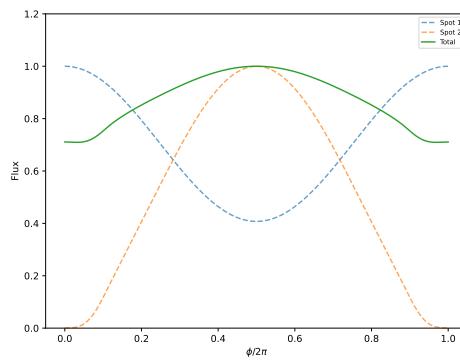
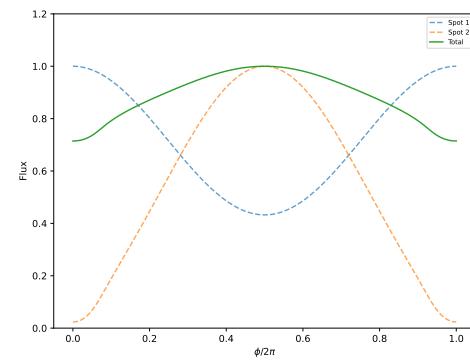
(a) $M/R = 0.275$ (b) $M/R = 0.285$ (c) $M/R = 0.295$ (d) $M/R = 0.305$

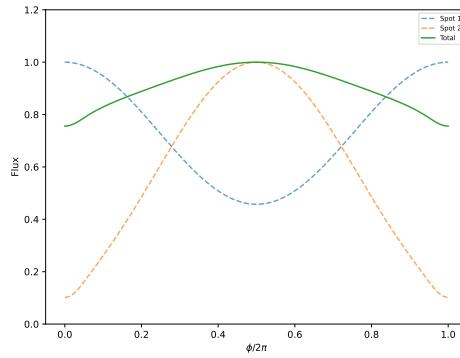
Figura 29 – Fluxo para dois hot-spots antipodais para diferentes compacidades para STT1. O observador está no plano equatorial, enquanto os hot-spots estão localizados em latitudes intermediárias.



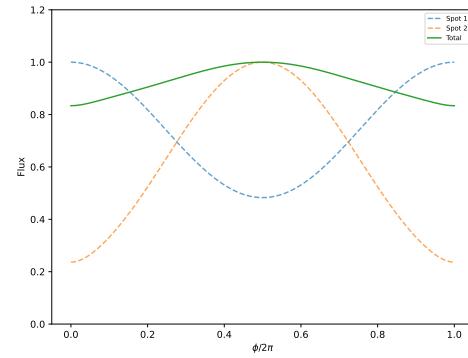
(a) $M/R = 0.275$



(b) $M/R = 0.285$

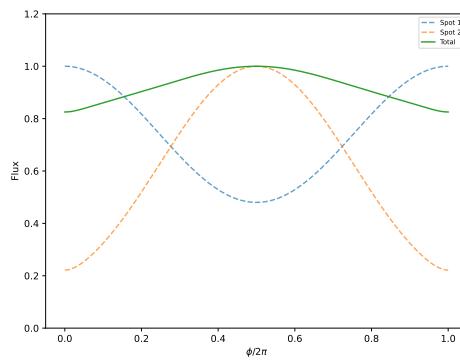
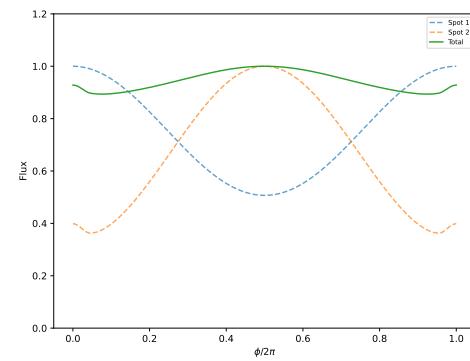
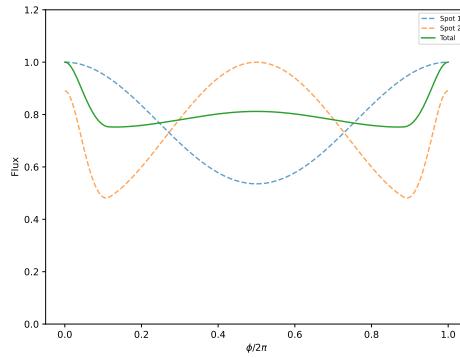
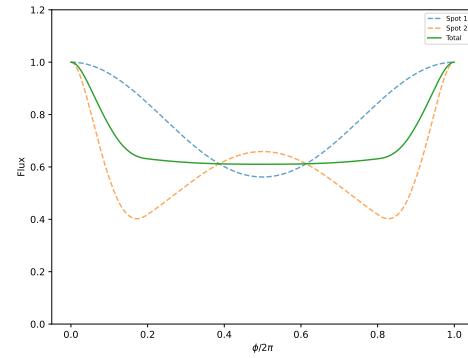


(c) $M/R = 0.295$



(d) $M/R = 0.305$

Figura 30 – Fluxo para dois hot-spots antipodais para diferentes compacidades para STT2. O observador está no plano equatorial, enquanto os hot-spots estão localizados em latitudes intermediárias.

(a) $M/R = 0.275$ (b) $M/R = 0.285$ (c) $M/R = 0.295$ (d) $M/R = 0.305$

6.5 ROTAÇÃO

Nesta seção, são incorporados os efeitos devido à rotação da estrela de nêutrons, analisando como o efeito Doppler relativístico, a aberração da luz e o atraso de Shapiro influenciam os perfis de pulso e as diferenças entre os modelos RG, STT1 e STT2. Consideramos um hot-spot com semiabertura $\Delta\psi = 10^\circ$ e duas frequências de rotação: $v = 250 \text{ Hz}$ (Figuras 31-34) e uma mais extrema $v = 700 \text{ Hz}$ (Figuras 35-38).

Para cada frequência, foram exploradas duas configurações geométricas: (I) $i = 60^\circ, \theta = 30^\circ$ e (II) $i = \theta = 80^\circ$, e duas compacidades, $M/R=0.275$ e $M/R=0.305$. O fluxo é calculado utilizando a equação 207, que inclui o efeito Doppler δ (equação 206) e o atraso de Shapiro na fase de observação (abordado da seção 5.4). O atraso não modifica a intensidade intrínseca da radiação emitida, mas afeta o instante de chegada dos fótons ao observador. A consequência é um deslocamento e fase da curva de luz, já que os fótons emitidos em diferentes direções percorrem trajetórias com tempos de viagem distintos, fazendo com que a mesma emissão seja registrada em instantes diferentes (característica do efeito de múltiplas imagens).

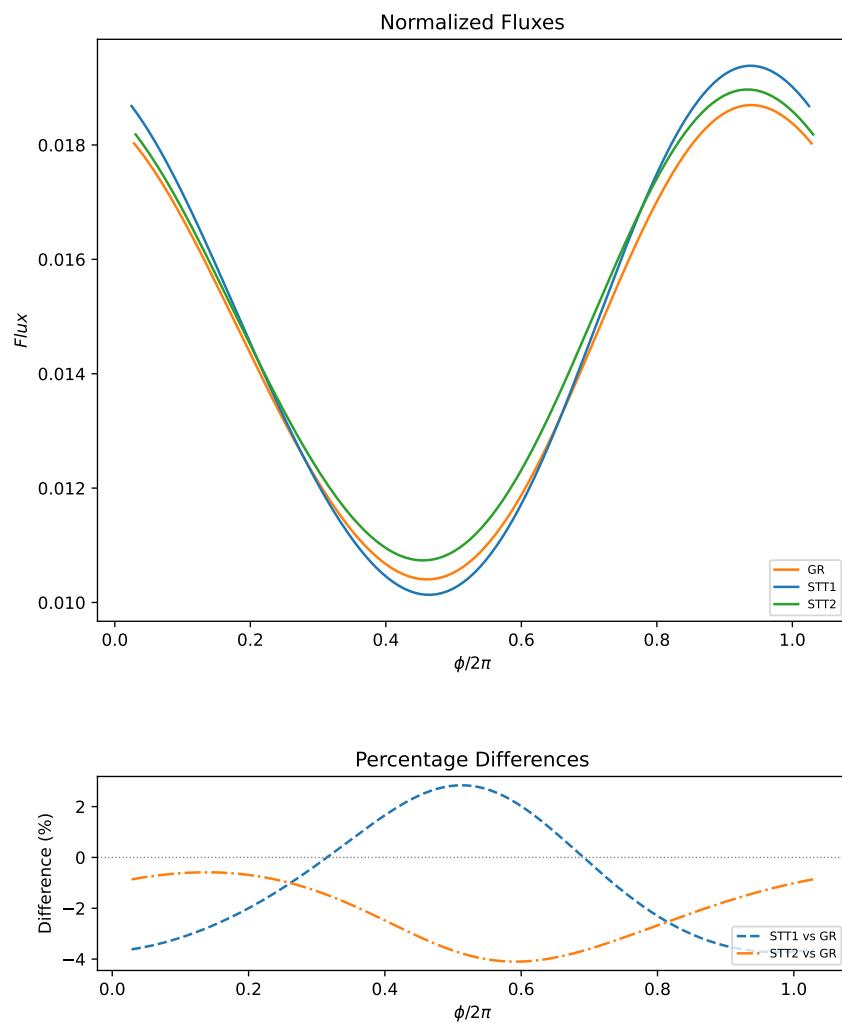
Ao comparar os resultados para a frequência $v = 250 \text{ Hz}$ com a frequência $v = 700 \text{ Hz}$ (Figura 35) para a mesma geometria e compacidade ($i = 60^\circ, \theta = 30^\circ, M/R = 0.275$), é possível observar que o aumento da frequência de rotação intensifica a assimetria dos pulsos. Os picos de fluxo se tornam mais agudos e a diferença de amplitude entre a aproximação e o afastamento do hot-spot é maior para $v = 700 \text{ Hz}$. As diferenças percentuais entre os modelos também são afetadas, sendo cerca -2% entre STT1 e RG, enquanto para STT2 e RG chega a aproximadamente 2% para $v = 250 \text{ Hz}$. Já para $v = 700 \text{ Hz}$, essas diferenças são maiores, com STT1 vs RG chegando a -2.5% e STT2 vs RG quase 2.5%, e a forma da curva de diferença, indicada no painel inferior de cada uma das figuras, também se modifica, refletindo a influencia do efeito Doppler.

A geometria de visualização, tal como nas configurações estáticas, também influência os fluxos. Para a configuração $i = 60^\circ, \theta = 30^\circ$, onde o hot-spot está em uma latitude média e o observador também, a modulação do pulso é significativa, indicando que o efeito Doppler gera uma distorção no formato do pulso. Para a configuração quase equatorial ($i = \theta = 80^\circ$) os efeitos de distorção da luz interagem com os efeitos rotacionais. Nesta geometria, para $M/R=0.305$ (Figura 34) as diferenças percentuais entre os modelos podem ser muito grandes, especialmente durante as fases em que o hot-spot está na face oposta ao observador ($\phi/2\pi \approx 0.5$). A Figura 34 mostra que as diferenças excedem -50% para STT1 vs RG e chegam a +50% para STT2 vs RG. Para $v = 700 \text{ Hz}$ e $M/R=0.305$ (Figura 38) as diferenças são ainda mais extremas, com STT1 vs RG chegando a quase -300% e STT2 vs RG a mais de 100% em certas fases. Esses resultados são consistentes com aqueles de (OTTONI et al., 2024), que destacam que as diferenças entre teorias se tornam mais evidentes quando o hot-spot transita pela região oposta ao observador, onde o desvio da luz é máximo. A rotação acentua essas diferenças devido ao efeito Doppler.

A compacidade da estrela também desempenha um papel significativo neste caso. Nas figuras 32 e 36, para $M/R = 0.305$ as diferenças percentuais entre STT e RG são maiores que para as

Figura 31 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $\nu = 250\text{Hz}$. O observador está em uma inclinação intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A estrela tem compacidade $M/R = 0.275$.

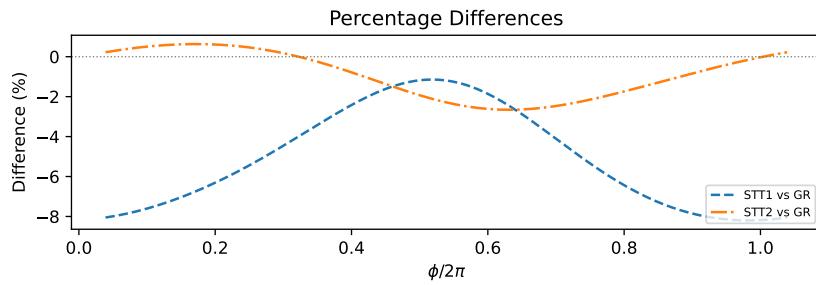
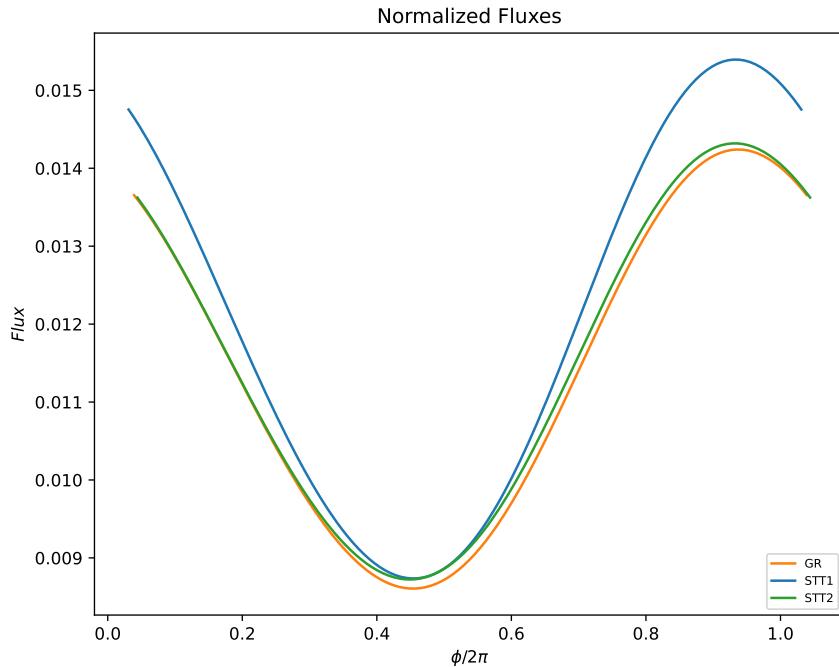
$$\Delta\Psi = 10^\circ, \nu = 250 \text{ Hz}, i_0 = 60.0^\circ, \theta_s = 30.0^\circ$$



$M/R=0.275$

Figura 32 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 250\text{Hz}$. O observador está em uma inclinação intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A estrela tem compacidade $M/R = 0.305$.

$$\Delta\Psi = 10^\circ, v = 250 \text{ Hz}, i_0 = 60.0^\circ, \theta_s = 30.0^\circ$$



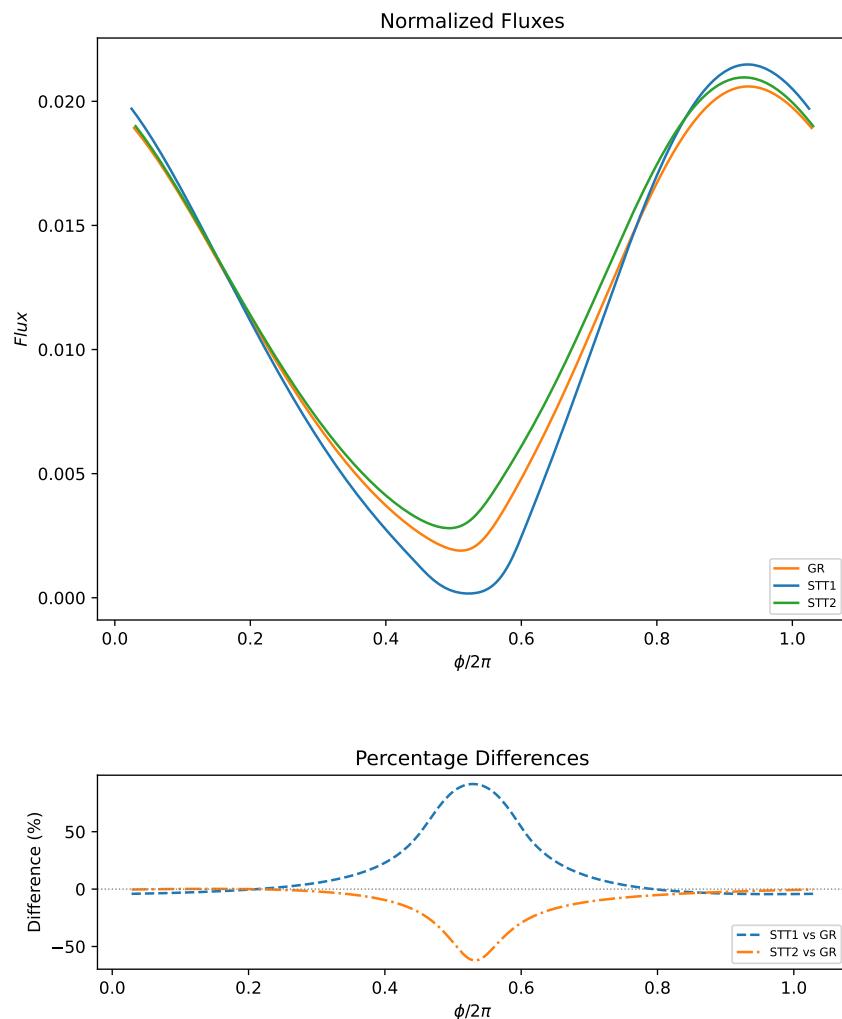
$$M/R=0.305$$

Figuras 31 e 35, para $M/R = 0.275$. Para $i = \theta = 80^\circ$, a alta compacidade combinada com a rotação leva a variações no fluxo mais pronunciadas e a grandes desvios percentuais (Figuras 34 e 38), como já mencionado anteriormente. Isso ocorre porque, neste regime, a luz do hot-spot na região oposta ao observador é afetada fortemente tanto pela deflexão da luz, quanto pelo efeito Doppler. A inclusão da rotação não apenas torna o modelo mais realista, mas também introduz novas maneiras de entender as diferenças entre RG e STT.

Os efeitos Doppler e de atraso de Shapiro são dependentes da métrica do espaço-tempo, o que os torna ferramentas importantes no estudo dos modelos. Como a STT modifica a métrica de

Figura 33 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $v = 250\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão localizados em planos quase equatoriais. A estrela tem compacidade $M/R = 0.275$.

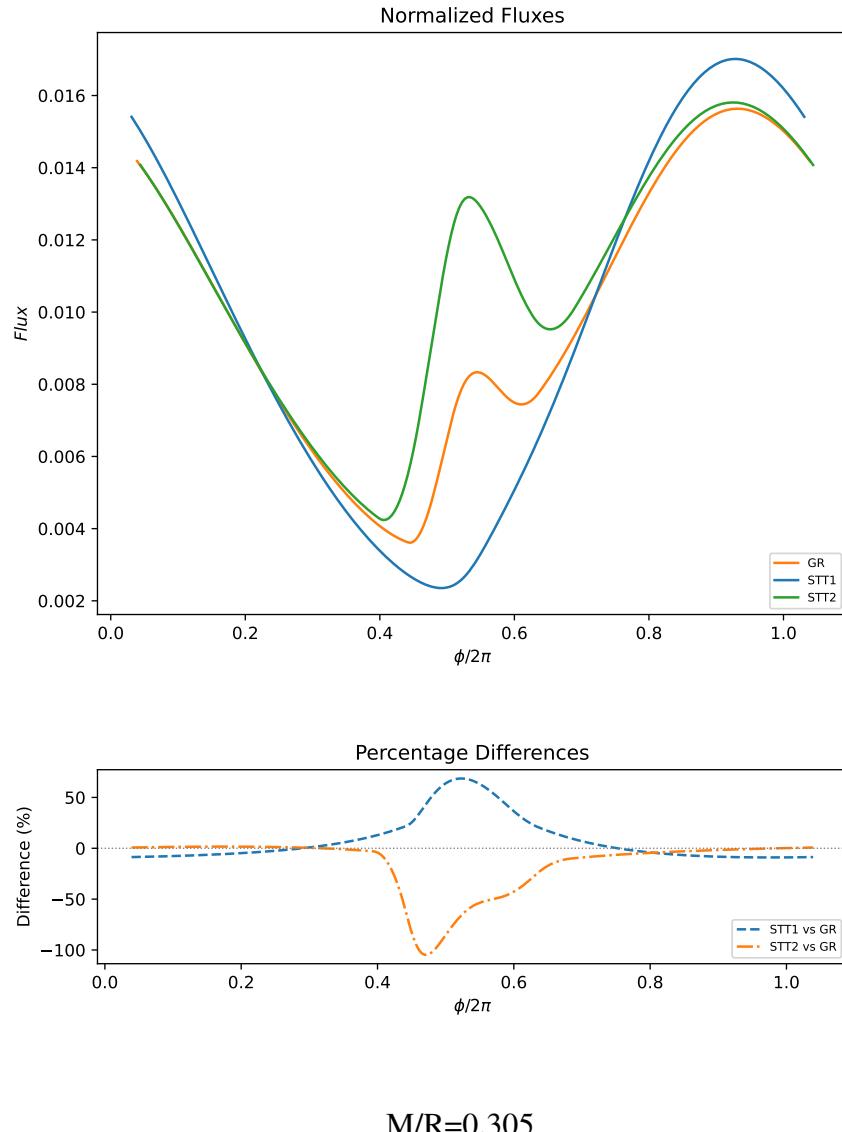
$$\Delta\Psi = 10^\circ, v = 250 \text{ Hz}, i_0 = 80.0^\circ, \theta_s = 80.0^\circ$$



$M/R=0.275$

Figura 34 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $\nu = 250\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão em planos quase equatoriais. A compacidade considerada é $M/R = 0.305$.

$$\Delta\Psi = 10^\circ, \nu = 250 \text{ Hz}, i_0 = 80.0^\circ, \theta_s = 80.0^\circ$$

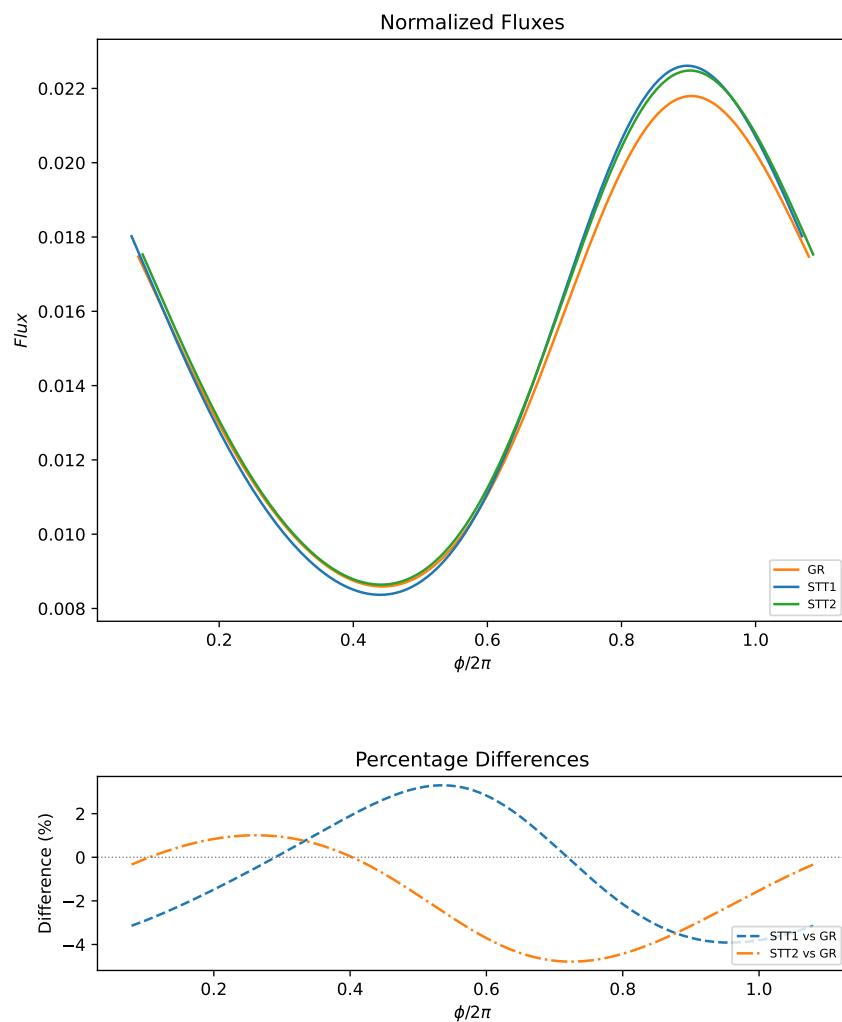


$$M/R=0.305$$

Just através dos parâmetros Q e A_s , os fatores de boost e os atrasos temporais são diferentes. Isso leva a diferenças na forma, na amplitude e na fase dos fluxos. Nossos resultados demonstram que as maiores divergências entre as teorias na presença de rotação ocorrem para altas compacidades e em geometrias onde o hot-spot está na região da superfície da estrela oposta ao observador. Estes resultados estão em concordância com a análise e resultados de (OTTONI et al., 2024).

Figura 35 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $\nu = 700\text{Hz}$. O observador tem uma linha de visão intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A compacidade considerada é $M/R = 0.275$.

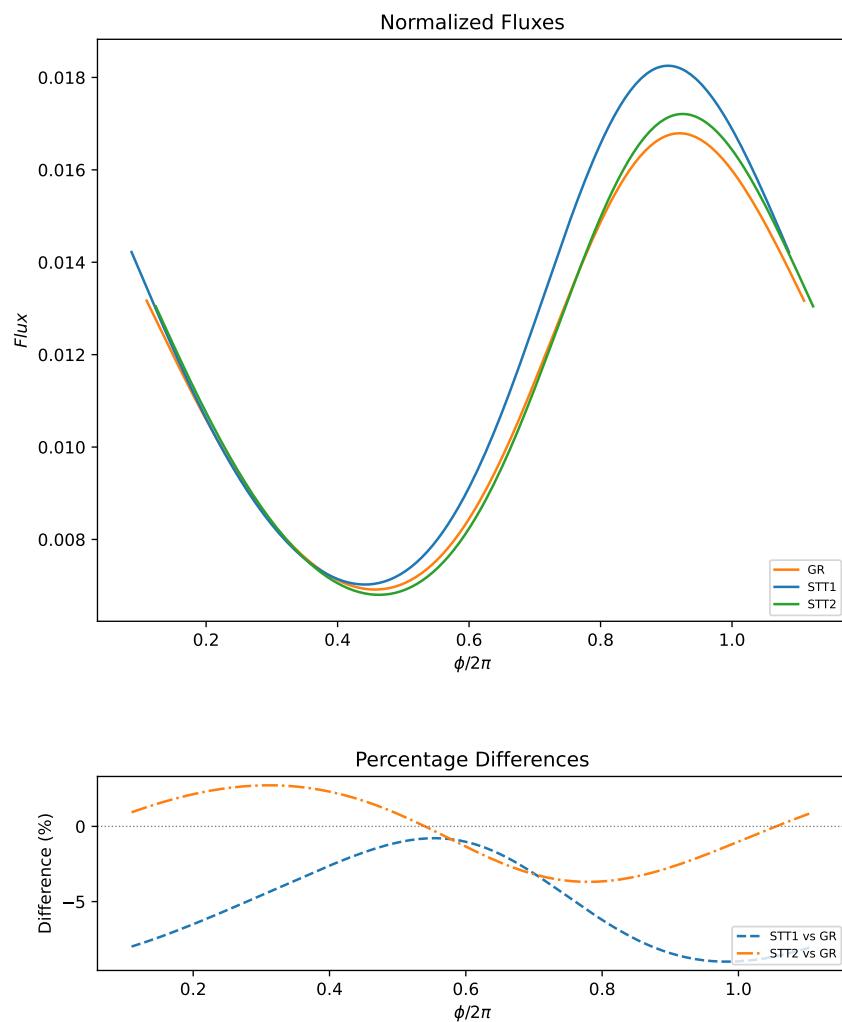
$$\Delta\Psi = 10^\circ, \nu = 700 \text{ Hz}, i_0 = 60.0^\circ, \theta_s = 30.0^\circ$$



$M/R=0.275$

Figura 36 – Fluxo de um hot-spot em $i = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $\nu = 700\text{Hz}$. O observador tem uma linha de visão intermediária, enquanto o hot-spot está localizado próximo ao polo da estrela. A compacidade considerada é $M/R = 0.305$.

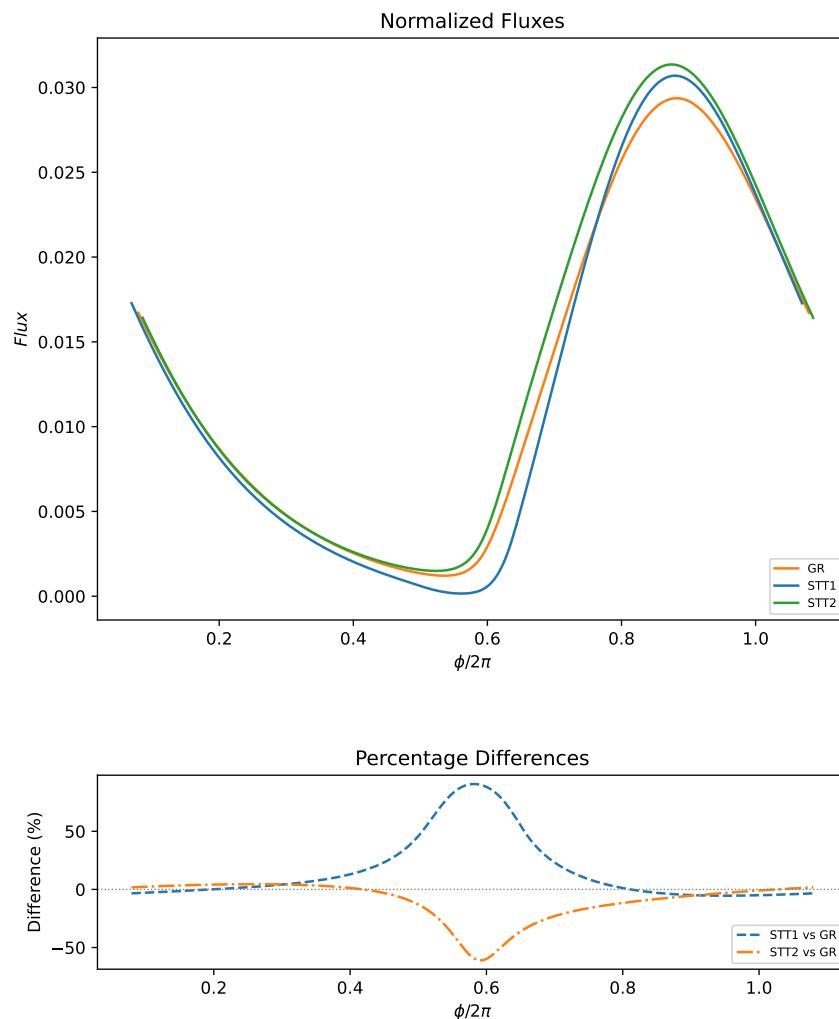
$$\Delta\Psi = 10^\circ, \nu = 700 \text{ Hz}, i_0 = 60.0^\circ, \theta_s = 30.0^\circ$$



$M/R=0.305$

Figura 37 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $\nu = 700\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão em planos quase equatoriais. A compacidade considerada é $M/R = 0.275$.

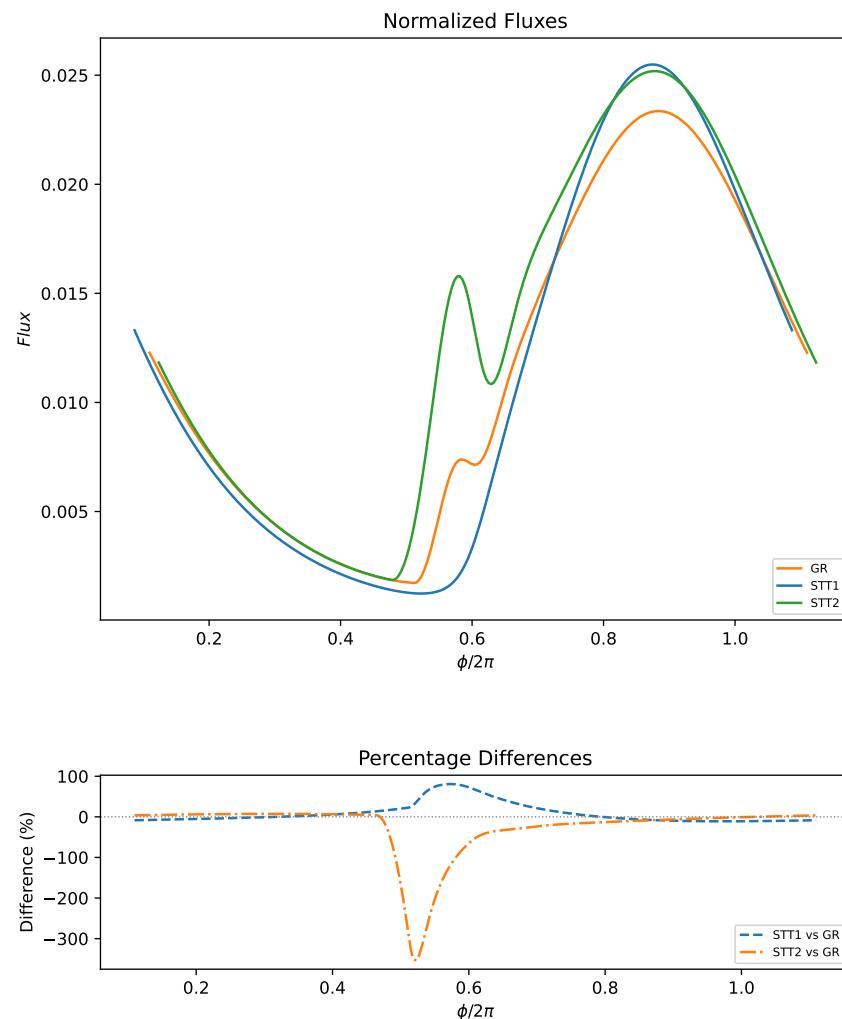
$$\Delta\Psi = 10^\circ, \nu = 700 \text{ Hz}, i_0 = 80.0^\circ, \theta_s = 80.0^\circ$$



$M/R=0.275$

Figura 38 – Fluxo de um hot-spot em $i = 80^\circ$, $\theta = 80^\circ$. A estrela rotaciona com frequência $\nu = 700\text{Hz}$. Tanto o observador, quanto o hot-spot estão em planos quase equatoriais. A compacidade considerada é $M/R = 0.305$.

$$\Delta\Psi = 10^\circ, \nu = 700 \text{ Hz}, i_0 = 80.0^\circ, \theta_s = 80.0^\circ$$



$M/R=0.305$

6.6 DISCUSSÃO

Os resultados apresentados neste trabalho buscaram analisar a sensibilidade dos perfis de pulso de raios-X emitidos por hot-spots em estrelas de nêutrons supermassivas a parâmetros estelares, como a compacidade da estrela, geométricos e à teoria da gravidade considerada. A análise comparativa entre RG e os modelos específicos da STT evidencia os desvios observáveis que podem, inicialmente, ser utilizados para sondar a natureza da gravitação em regimes de campo forte.

Todavia, embora a comparação entre a RG e os modelos de gravidade tensor-escalar revele tais desvios observáveis em tais regimes, é importante reconhecer que efeitos sistemáticos associados à propriedades como a presença da atmosfera, sua composição, a geometria do hot-spot e até mesmo a rápida rotação da estrela podem introduzir degenerescências capazes de mascarar as assinaturas. Esses limites poderiam ser contornados com uma combinação da análise das curvas de luz com medidas espectrais, polarimétricas e temporais, aliadas a observações de alta precisão (objetivos de missões como NICER (NASA, 2025), Athena (ESA, 2025) e eXTP (eXTP Consortium, 2025)).

Os modelos STT1 e STT2 produziram perfis de pulso distintos daqueles da RG mesmo para uma mesma compacidade. O modelo STT1 tendeu a diminuir o fluxo e acentuar seus mínimos, enquanto o STT2 tendeu a aumentar o fluxo e alterar a morfologia dos picos e vales. Essas diferenças são mais evidentes em regimes de alta compacidade ($M/R \geq 0.284$), onde há a formação de múltiplas imagens.

Os resultados obtidos são consistentes com as previsões de (OTTONI et al., 2024), que ressaltaram o potencial de estrelas altamente compactas para a realização de testes de STTs. As diferenças percentuais observadas para os casos mais extremos que abordamos, como aqueles para $M/R \geq 0.295$, especialmente com rotação, apoiam essa visão. (SILVA; YUNES, 2019) também encontraram desvios marcantes da RG devido ao campo escalar, afetando a forma do perfil de pulso. Nossa trabalho considera como os parâmetros Q e A_s especificamente modulam essas diferenças dentro do formalismo da métrica de Just.

Além disso, embora (SOTANI, 2017) tenha enfatizado a compacidade como o principal determinante da forma do pulso na STT, com o campo escalar afetando indiretamente ao alterar a relação M-R, ou mais diretamente a razão F_{min}/F_{max} , nossos resultados mostram que, para uma mesma compacidade M/R no frame de Jordan, a modificação direta da geometria do espaço-tempo pelos parâmetros Q e A_s induz alterações na forma global do pulso, e não apenas na razão F_{min}/F_{max} .

A adição de rotação introduziu assimetrias e modificações de fase nos perfis de pulso, com as diferenças entre RG e STT permanecendo presentes e, em determinados casos, como o de estrelas ultracompatas, sendo amplificadas. Entretanto, o trabalho de (CADEAU et al., 2007) aponta que, para estrelas em rotação rápida, especialmente aquelas com frequência acima de 300 Hz, o efeito dominante é a forma oblata da estrela, fazendo com que o tratamento através de uma

métrica esfericamente simétrica possa levar a erros na determinação dos parâmetros. Em nosso trabalho, isso implica que, embora nossos resultados capturem os efeitos cinemáticos da rotação, eles não incluem o impacto da alteração da estrutura da estrela, que é crucial para um modelo completo para pulsares rápidos, principalmente para a STT, já que uma fração das diferenças observadas entre os modelos pode vir apenas da geometria oblata e dos efeitos rotacionais, podendo mascarar sinais da escalarização.

Atualmente, observações de pulsares de raios-X por missões como NICER (NASA, 2025) já fornecem perfis de pulso de alta precisão, como para os pulsares PSR J0030+0451 (MILLER et al., 2019) e PSR J0740+6620 (DITTMANN et al., 2024; SALMI et al., 2024). Esses dados permitem restringir massa e raio de estrelas de nêutrons, mas ainda não discriminam de forma clara entre RG e SSTs. Nossos resultados por si só não são suficientes para excluir qualquer um dos modelos aqui citados. O que se pode excluir, de forma robusta e incluindo outros tipos de análises, seriam algumas faixas de α_0 (que diz respeito ao acoplamento escalar-matéria) e de β (relacionado à curvatura do acoplamento) e, portanto, de Q e A_s .

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como principal objetivo investigar emissões de raios-X provenientes de hot-spots localizados na superfície de estrelas de nêutrons supermassivas e ultracompactas. O foco central residiu na comparação e análise de regimes compactos e ultracompactos, a fim de compreender a formação de múltiplas imagens e as potenciais diferenças observacionais nos perfis de pulso entre a Relatividade Geral (RG) e modelos específicos da Teoria Escalar-Tensorial (STT). Para alcançar este propósito, foi empregado um modelo numérico fundamentado pelo formalismo estabelecido por (SILVA; YUNES, 2019) e (OTTONI et al., 2024). O modelo foi projetado para calcular perfis de pulso incorporando os efeitos relativísticos que influenciam na propagação dos fótons; o atraso de Shapiro, o efeito Doppler relativístico e a aberração da luz. Os parâmetros estelares para as diferentes configurações simuladas estão detalhados na Tabela 1.

Buscamos explorar o impacto de diversos parâmetros nos perfis de pulso, apresentados nas Figuras 18 a 27. Verificou-se que o tamanho do hot-spot afeta a amplitude do fluxo e pode suavizar características mais acentuadas das curvas de luz; hot-spots com aberturas maiores (Figura ?? tendem a suavizar os picos de luz que surgem devido à alta compacidade de estrelas supermassivas, enquanto aberturas menores (Figura 18) resultam em picos mais finos e pontiagudos. A posição do hot-spot (θ), bem como a posição do observador (i) (Figuras 22-27), modulam significativamente o formato e a intensidade dos pulsos observados, com configurações equatoriais (com $i = \theta \approx 90^\circ$) maximizando os efeitos de curvatura da luz, resultando em múltiplas imagens de uma mesma região, enquanto observações mais polares resultam em uma menor variação do fluxo. Observamos também que compacidades maiores ($M/R > 0.284$) resultam em fluxos mais intensos, característica que se justifica através do surgimento de múltiplas imagens.

Abordamos também a configuração de dois hot-spots antipodais na superfície da estrela, característica fortemente relacionada aos pulsares. Observamos que a estrutura do fluxo possui dois picos característicos e é significativamente sensível à compacidade da estrela, com os efeitos de curvatura da luz afetando fortemente o fluxo proveniente do hot-spot que se encontra na face oposta ao observador, resultando em múltiplas imagens dessa região. Esse comportamento se estende ao fluxo total recebido pelo observador, que pode apresentar variações mais drásticas à medida que a estrela se torna mais compacta. Os perfis de pulso dessa configuração também se mostrou sensível à teoria gravitacional abordada; o comportamento do fluxo para os modelos da STT, quando comparados com a RG, demonstra que há grande influência do fator conforme A_s em sua modelagem, com $A_s > 1.0$ (STT2) exibindo fluxos mais intensos para compacidades menores e, para compacidades maiores (Figura 30), fluxos que apontam para uma distorção extrema da luz. Por outro lado, um fator conforme $A_s < 1.0$ (STT1) (Figura 29) resulta em fluxos mais brandos, com efeitos gravitacionais menos drásticos quando comparados à RG e à STT2. Estes resultados estão em concordância com as análises de (OTTONI et al., 2024), (SOTANI, 2017) e (SILVA; YUNES, 2019).

De maneira geral, em todos os cenários investigados, os modelos STT1 (com $A_s =$

0.95 , $Q = 0.5$) e STT2 (com $A_s = 1.05$, $Q = 0.5$) produziram perfis de pulso com assinaturas distintas daquelas previstas pela RG, mesmo para uma mesma compacidade. O modelo STT1 resultou em fluxos mais atenuados e características mais sutis. Em contraste, o STT2 tendeu a apresentar fluxos mais intensos e uma morfologia que indica efeitos de curvatura da luz mais extremos. Essas diferenças foram agravadas com o aumento da compacidade e nas fases em que o hot-spot está na direção oposta ao observador, corroborando com os efeitos previstos por (OTTONI et al., 2024) a respeito da sensibilidade desses regimes.

Os resultados aqui obtidos reforçam a perspectiva de que a modelagem dos perfis de pulso de estrelas de nêutrons pode ser uma ferramenta importante para testar a gravidade em regimes de campo forte. A distinção entre RG, STT1 e STT2 com base nas características dos perfis de pulso, especialmente em regimes de alta compacidade e com rotação, aponta para observações futuras com instrumentos como o Neutron star Interior Composition Explorer (NICER), um telescópio voltado para o estudos de objetos compactos como Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros, (??) ou missões como ATHENA (??), planejada para a observação de raios-X e fenômenos de altas energias, e a Enhanced X-ray Timing and Polarimetry (eXTP), um projeto voltado para a investigação do estado da matéria em condições de extrema densidade (??) poderiam impor novos parâmetros restritivos para STT.

Apesar da abrangência dos nossos resultados, há algumas limitações que podem ser aperfeiçoadas em trabalhos futuros. A primeira delas é no tratamento de efeitos relacionados à rotação da estrela. O modelo que consideramos, tanto para RG com a métrica de Schwarzschild, quanto para a STT, com a métrica de Just, descreve um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico. Embora o formalismo aqui adotado incorpore efeitos cinemáticos da rotação, ele não considera efeitos mais realistas, como a deformação da estrela, que se torna oblata devido à alta frequência de rotação, ou os efeitos de arrasto de referencial de forma completa. Assim como apontado por (SILVA; YUNES, 2019) e (OTTONI et al., 2024), seria necessário estender a métrica para estrelas em rotação, possivelmente através de perturbações ou soluções mais completas em STT, como as de (DONEVA et al., 2013). Ou ponto a ser aperfeiçoado é o modelo do hot-spot; aqui, consideramos modelos circulares com emissão uniforme. Porém, para modelos mais realistas, seria necessário considerar distribuições de temperatura e brilho não uniformes, formas irregulares, ou até mesmo efeitos atmosféricos, que podem afetar a direção da radiação emitida.

Em termos dos modelos para a STT, nossa análise se concentra em uma classe parametrizada por Q e A_s dentro da estrutura da métrica de Just. Entretanto, outras formulações, incluindo aquelas com campos escalares massivos, poderiam retornar resultados distintos. Além disso, a aplicação de uma análise mais estatística, com dados reais ou de verossimilhança, para determinar o quão detectável são as diferenças teóricas seria um passo importante para quantificar os efeitos das STTs, como sugerido por (SILVA; YUNES, 2019) e (OTTONI et al., 2024).

Em suma, este estudo demonstra que os perfis de pulso de raios-X de estrelas de nêutrons supermassivas e ultracompatas são ferramentas importantes para a física fundamental,

principalmente para testes em ambientes de gravidade extrema. As diferenças previstas entre a Relatividade Geral e a Teoria Escalar-Tensorial, particularmente nos regimes de alta compacidade e rotação rápida, são significativas e podem oferecer perspectivas promissoras para testar não apenas o comportamento da matéria em regimes extremos, mas também regimes alternativos à Relatividade Geral.

REFERÊNCIAS

- ANTONIADIS, John et al. A massive pulsar in a compact relativistic binary. **Science**, United States, v. 340, n. 6131, p. 1233232, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.
- BERTI, Emanuele et al. Testing general relativity with present and future astrophysical observations. **Classical and Quantum Gravity**, v. 32, n. 24, p. 243001, 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1501.07274>>. Citado na página 46.
- BIELICH, Jürgen. **Compact Star Physics**: From first principles to modern research. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2020. ISBN 978-1-107-18089-5. Citado 4 vezes nas páginas 20, 25, 26 e 27.
- Blanchard, C. et al. A census of galactic spider binary millisecond pulsars with the nançay radio telescope. **AA**, v. 698, p. A239, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202453499>>. Citado na página 28.
- BURROWS, Adam. Supernova explosions in the universe. **Scientific American**, United States, v. 283, n. 2, p. 50–57, 2000. Citado na página 22.
- CADEAU, Coire et al. Light curves for rapidly rotating neutron stars. **The Astrophysical Journal**, Estados Unidos, v. 654, n. 1, p. 458–469, 2007. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609325>>. Citado 3 vezes nas páginas 66, 67 e 103.
- CAPLAN, M. E.; HOROWITZ, C. J. Colloquium: Astromaterial science and nuclear pasta. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 89, n. 4, p. 041002, October 2017. Citado na página 24.
- CARROLL, Bradley W.; OSTLIE, Dale A. **An Introduction to Modern Astrophysics**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 40.
- CARROLL, Sean M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. 2. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 54.
- COLLINS, John C.; PERRY, Malcolm J. Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks? **Physical Review Letters**, United States, v. 34, n. 21, p. 1353–1356, 1975. Citado na página 22.
- DAMOUR, Thibault; ESPOSITO-FARESE, Gilles. Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation. **Physical Review Letters**, Estados Unidos, v. 70, n. 15, p. 2220–2223, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.2220>>. Citado na página 48.
- DITTMANN, Alexander J. et al. **A More Precise Measurement of the Radius of PSR J0740+6620 Using Updated NICER Data**. 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2406.14467>>. Citado na página 104.
- DONEVA, Daniela D. et al. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. **Physical Review D**, Estados Unidos, v. 88, n. 8, p. 084060, 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1309.0605>>. Citado na página 106.

ESA. Athena (Advanced Telescope for High ENergy Astrophysics): Observatório de raios x de próxima geração da esa, projetado para investigar os fenômenos mais quentes e energéticos do universo com espectroscopia de alta resolução e imagens de campo amplo. França: [s.n.], 2025. <<https://www.the-athena-x-ray-observatory.eu/en/athena-mission>>. Citado na página 103.

eXTP Consortium. Enhanced X-ray Timing and Polarimetry mission (eXTP): Missão científica internacional dedicada ao estudo da matéria sob condições extremas de densidade, gravidade e magnetismo, com foco em estrelas de nêutrons, magnetars e buracos negros. Suíça: [s.n.], 2025. <<https://extp.astro-ge.ch/>>. Citado na página 103.

FITZPATRICK, Richard. **Survey of Modern Physics.** s.d. <<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/355/Surveyhtml/>>. Acesso em: 26 de abril de 2025. Citado na página 41.

FONSECA, Emmanuel et al. Refined mass and geometric measurements of the high-mass PSR J0740+6620. **The Astrophysical Journal Letters**, United States, v. 915, n. 1, p. L12, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.

FUJII, Yasunori; MAEDA, Kei-ichi. **The Scalar-Tensor Theory of Gravitation.** 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521811590. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 54.

GAUTAM, T. et al. Detection of the relativistic shapiro delay in a highly inclined millisecond pulsar binary psr j10124235. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 682, p. A103, February 2024. Citado na página 27.

GLENDENNING, Norman K. Neutron stars are giant hypernuclei? **The Astrophysical Journal**, United States, v. 293, p. 470–493, 1985. Citado na página 22.

GLENDENNING, Norman K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity.** 1. ed. New York: Springer, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 22.

HAENSEL, Paweł; PROSZYŃSKI, Michał; KIZILTAN, Bulent. Lev landau and the conception of neutron stars. **Physics-Uspekhi**, p. 12, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

HARTLE, James B. **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity.** 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2021. ISBN 9781316517543. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 54.

HAWKING, Stephen W.; ELLIS, George F. R. **The Large Scale Structure of Space-Time.** Cambridge: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521200165. Citado na página 34.

HORBATSCH, M. W.; BURGESS, C. P. Model-independent comparisons of pulsar timings to scalar-tensor gravity. **Classical and Quantum Gravity**, Reino Unido, v. 29, n. 24, p. 245004, 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1107.3585>>. Citado na página 52.

KAPLAN, David B.; NELSON, Ann E. Strange condensates in neutron stars. **Physics Letters B**, Netherlands, v. 175, n. 1, p. 57–63, 1986. Citado na página 22.

LANG, Kenneth R.; GINGERICH, Owen. **A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975.** 1. ed. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1979. ISBN 9780674823601. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

LATTIMER, James M.; PRAKASH, Madappa. **The Physics of Neutron Stars**. 2004. 536-542 p. Citado 5 vezes nas páginas 19, 22, 23, 24 e 25.

LICHNEROWICZ, André. The motion of mercury according to the theory of thiry and lichnerowicz. **Annales de l'Institut Henri Poincaré**, Paris, v. 14, p. 1–20, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 54.

LIMA, Rafael C.R. De et al. Evidence for 3XMM J185246.6+003317 as a massive magnetar with a low magnetic field. **Journal of High Energy Astrophysics**, v. 42, p. 52–62, jun. 2024. ISSN 22144048. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214404824000235>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.

LYNE, Andrew G.; GRAHAM-SMITH, Francis. **Pulsar Astronomy**. 4. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9780511844584. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 26.

MILLER, M. C. et al. Psr j0030+0451 mass and radius from nicer data and implications for the properties of neutron star matter. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 887, n. 1, p. L24, dez. 2019. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab50c5>>. Citado na página 104.

MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. **Gravitation**. Reprint edition. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017. 1301 p. ISBN 978-0-691-17779-3. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 54.

NANDI, Rana; BANDYOPADHYAY, Debades. Magnetised neutron star crusts and torsional shear modes of magnetars. **Journal of Physics Conference Series**, v. 420, 12 2012. Citado na página 24.

NASA. **NASA's NICER (Neutron star Interior Composition Explorer)**: Observatório espacial dedicado ao estudo da estrutura interna das estrelas de nêutrons e ao desenvolvimento de tecnologias para exploração espacial. Estados Unidos: [s.n.], 2025. <<https://science.nasa.gov/mission/nicer/>>. Citado 2 vezes nas páginas 103 e 104.

Newton, William G. A taste of pasta? **Nature Physics**, v. 9, n. 7, p. 396–397, jul. 2013. Citado na página 24.

OLAUSEN, Scott. **Light Curves of Very Compact Neutron Stars**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — University of Alberta, Edmonton, Canadá, 2008. Disponível em: <<https://era.library.ualberta.ca/items/f2ac4b92-37da-4f7a-ad20-573c2394afe3>>. Citado na página 54.

OPPENHEIMER, J. Robert; VOLKOFF, George M. On massive neutron cores. **Physical Review**, United States, v. 55, n. 4, p. 374–381, 1939. Citado na página 20.

OROSZ, Jerome A.; KUULKERS, Erik. The optical light curves of cygnus x-2 (v1341 cyg) and the mass of its neutron star. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 305, n. 1, p. 132–142, 1999. Citado na página 27.

OTTONI, Túlio et al. X-ray pulsed light curves of highly compact neutron stars as probes of scalar–tensor theories of gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 84, n. 12, p. 1337, December 2024. Citado 14 vezes nas páginas 46, 49, 54, 66, 74, 78, 82, 89, 90, 94, 98, 103, 105 e 106.

PAGE, Dany et al. Neutrino emission from cooper pairs and minimal cooling of neutron stars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 707, n. 2, p. 1131–1140, December 2009. Citado na página 24.

PAOLOZZI, A. et al. The lares mission: An opportunity to teach general relativity - frame dragging and lense-thirring effect. v. 2, p. 343–348, 01 2015. Citado na página 42.

PÖSSEL, Markus. Light, delayed: The shapiro effect and the newtonian limit. In: LOTZE, K.-H.; SIMIONATO, Silvia (Ed.). **Astronomy from 4 Perspectives: Thinking Gravitational Lensing for Teaching**. Heidelberg: Max-Planck-Institut für Astronomie, 2021. p. 42–54. Citado na página 44.

PÖSSEL, Markus. **Light, delayed: The Shapiro Effect and the Newtonian Limit**. 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2110.07016>>. Citado na página 44.

RHODES, Clifford E.; RUFFINI, Remo. Maximum mass of a neutron star. **Physical Review D**, v. 32, p. 324–327, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

SALMI, Tuomo et al. The radius of the high-mass pulsar psr j0740+6620 with 3.6 yr of nicer data. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 974, n. 2, p. 294, out. 2024. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ad5f1f>>. Citado na página 104.

SCHUTZ, Bernard. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2009. Citado na página 29.

SHAPIRO, Irwin I. Fourth test of general relativity. **Physical Review Letters**, Estados Unidos, v. 13, p. 789–791, 1964. Citado na página 44.

SILVA, Hector O.; YUNES, Nicolás. Neutron star pulse profiles in scalar-tensor theories of gravity. **Physical Review D**, United States, v. 99, 2019. Citado 8 vezes nas páginas 46, 72, 73, 74, 89, 103, 105 e 106.

SOTANI, Hajime. Pulse profiles from a pulsar in scalar-tensor gravity. **Physical Review D**, Estados Unidos, v. 96, n. 10, p. 104010, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.104010>>. Citado 4 vezes nas páginas 89, 90, 103 e 105.

SOTANI, Hajime. Light curves from highly compact neutron stars with spot size effect. **Physical Review D**, v. 71, 2020. Citado na página 54.

SOTANI, Hajime; MIYAMOTO, Umpei. Pulse profiles of highly compact pulsars in general relativity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 35, n. 23, p. 235007, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1807.09071>>. Citado na página 46.

THORNE, Kip S. **Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy**. New York: W. W. Norton & Company, 1994. Prefácio de Stephen Hawking; Introdução de Frederick Seitz. ISBN 9780393312768. Citado na página 29.

TJEMKES, S. A.; PARADIJS, J. VAN; HEUVEL, E. P. J. VAN DEN. Optical light curves of massive x-ray binaries. **Astronomy and Astrophysics**, França, v. 154, p. 77–84, 1986. Disponível em: <<https://adsabs.harvard.edu/full/1986A&26A...154...77T>>. Citado na página 27.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Rafael Camargo Rodrigues de Lima, professor(a) do curso de Mestrado Acadêmico em Física, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação/tese intitulada: **“Estudo da Emissão em Raios-X de Hot-Spots em Estrelas de Nêutrons Supermassivas: Análise de Imagens Duplas”** de autoria do(a) acadêmico Joyce Machado Oliveira.

Joinville, 30 de agosto de 2025.

Assinatura digital do(a) orientador(a):

Rafael Camargo Rodrigues de Lima