CONCURSO PÚBLICO - 05/2025

PADRÃO DE RESPOSTAS

Questão 1

Resolução:

A densidade de momento angular eletromagnético ($\vec{\mathscr{P}}$) é definida como:

$$\vec{\mathscr{P}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0 c^2} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$

A partir da definição de $\vec{\mathscr{P}}$ e expandindo o termo:

$$\vec{\mathscr{P}} = \frac{\vec{E} \times (v/c^2 \times \vec{E})}{\mu_0 c^2} - \frac{1}{\mu_0 c^4}\left[\vec{E} \times (\vec{v} \times \vec{E})\right]$$

O termo entre colchetes pode ser escrito como:

$$\vec{E} \times (\vec{v} \times \vec{E}) = E^2\vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{E}$$

A expressão para $\vec{\mathscr{P}}$ é (após simplificação e integração de $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$):

$$\vec{\mathscr{P}} = \frac{1}{\mu_0 c^4}\left[E^2\vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{E}\right]$$

Assim, o momento angular total ($\vec{P}$) é obtido pela integração no volume:

$$\vec{P} = \int \vec{\mathscr{P}} d\tau = \frac{1}{\mu_0 c^4}\left[\vec{v}\int E^2 d\tau - \int (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{E} d\tau\right]$$

A integral $\int E^2 d\tau$ pode ser escrita como:

$$\int E^2 d\tau = \frac{2}{\epsilon_0} U_E$$

onde U_E para a casca esférica de raio a é:

$$U_E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Devido à simetria esférica do campo $\vec{E}$, a integral vetorial $\int (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{E} d\tau$ só tem componente na direção de $\vec{v}$.

Usando o resultado de simetria para o campo de Coulomb $\vec{E}$ e um vetor constante $\vec{v}$:

$$\int (\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{E}d\tau = \frac{1}{3}\left(\int E^2 d\tau\right)\vec{v}$$

Substituindo a relação de simetria na expressão para $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c^4}\left[\vec{v}\int E^2 d\tau - \frac{1}{3}\left(\int E^2 d\tau\right)\vec{v}\right]$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c^4}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\int E^2 d\tau\right)\vec{v}$$

$$\vec{P} = \frac{2}{3\mu_0 c^4}\left(\int E^2 d\tau\right)\vec{v}$$

Usando a relação $\int E^2 d\tau = \frac{2}{\epsilon_0}U_E$ da parte anterior (1a):

$$\vec{P} = \frac{2}{3\mu_0 c^4}\left(\frac{2}{\epsilon_0}U_E\right)\vec{v} = \frac{4}{3\mu_0\epsilon_0 c^4}U_E\vec{v}$$

E usando $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$:

$$\vec{P} = \frac{4}{3}\frac{1}{(1/c^2)c^4}U_E\vec{v} = \frac{4}{3c^2}U_E\vec{v}$$

O momento é $\vec{P} = m\vec{v}$, onde a massa inercial de origem eletromagnética (m) é identificada como:

$$m = \frac{4}{3}\frac{U_E}{c^2}$$

com a energia do campo elétrico (U_E) dada por:

$$U_E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

que seja, a massa m é:

$$m = \frac{4}{3}\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a c^2}$$

Resultado final:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$

Questão 2

Resolução:

a) Não requer maiores explicações:

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \\
U &= \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(x - L\sin\theta)^2 + mgL(1-\cos^2\theta) \\
&\approx \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(x - L\theta)^2 + mgL\frac{\theta^2}{2}
\end{aligned}$$

b) Pode ser deduzido das expressões acima usando equações de Euler-Lagrange ou por uma aplicação direta da 2^a Lei de Newton, sem muitos detalhes necessários.

Os sinais invertidos (em vermelho) entre os termos de força interna nas duas equações são fundamentais, assim como os sinais das forças restauradoras (em azul) se $k_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -k_1x - k_2(x - L\theta) \\
mL^2\ddot{\theta} &= +k_2(x - L\theta) - mgL\theta
\end{aligned}$$

c) Usando a informação do enunciado ($L = mg/k_1$) obtém-se

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -(k_1 + k_2)x + \left(\frac{mgk_2}{k_1}\right)\theta \\
\frac{m^2g}{k_1}\ddot{\theta} &= k_2x - mg\left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)\theta
\end{aligned}$$

Os modos normais são obtidos usando com Anstäze:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\exp(i\omega t) \\
\theta(t) &= B\exp(i\omega t)
\end{aligned}$$

que leva a

$$\begin{aligned}
A\left(m\omega^2 - k_2 - k_1\right) + B\left(\frac{mgk_2}{k_1}\right) &= 0 \\
A\left(k_2\right) + B\frac{mg}{k_1}\left(m\omega^2 - k_2 - k_1\right) &= 0
\end{aligned}$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k_2 - k_1 & mgk_2/k_1 \\ k_2 & m\omega^2 - k_2 - k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que a solução trivial ($A = 0 = B$) não seja a única, a matriz à esquerda não pode ser inversível e, portanto, seu determinante deve ser nulo:

$$\begin{aligned} \frac{mg}{k_1}(m\omega^2 - k_2 - k_1)^2 &= \frac{mgk_2^2}{k_1} \\ (m\omega^2 - k_2 - k_1)^2 &= k_2^2 \\ m\omega^2 - k_2 - k_1 &= \pm k_2 \end{aligned}$$

o que leva a duas soluções para ω:

$$m\omega^2 = \begin{cases} k_1 + 2k_2 & =: m\omega_1^2 \\ k_1 & =: m\omega_0^2 \end{cases}$$

A substituição de cada solução em qualquer uma das equações de movimento após o Anstaz leva a dois movimentos distintos:

- Usando $m\omega_0^2 = k_1$:
$$A = +\frac{mgk_2}{k_1(2k_2 + k_1)}B$$
ou seja, A tem o mesmo sinal de B. Movimento simétrico, de frequência mais baixa ($\omega_0 < \omega_1$).

- Usando $m\omega_1^2 = k_1 + 2k_2$:
$$A = -\frac{mg}{2k_1}B$$
ou seja, A tem o sinal oposto ao de B: movimento antissimétrico, de frequência mais alta ($\omega_1 > \omega_0$).

Questão 3

Resolução:

A equação de estado de van der Waals é:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \tag{1}$$

Com essa equação, podemos escrever o seguinte para a curva BCD:

$$0 = \frac{dP}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\right) = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = -\frac{\left(P + \frac{a}{v^2}\right)}{v - b} + \frac{2a}{v^3} \tag{2}$$

Resolvendo essa equação em relação a P, obtemos:

$$P_0 = \frac{a}{v^2} - \frac{2ab}{v^3} \tag{3}$$

No ponto C temos uma derivada igual a zero, então:

$$0 = \frac{dP_0}{dv} = -\frac{2a}{v^3} + \frac{6ab}{v^4} \tag{4}$$

$$0 = \frac{2a}{v^4}(3b - v) \tag{5}$$

Para esta equação, a raiz é:

$$v_c = 3b \tag{6}$$

O valor de P correspondente, $P = P_c$ é obtido substituindo (6) em (3):

$$P_c = \frac{a}{9b^2} - \frac{2ab}{27b^3} = \frac{a}{27b^2} \tag{7}$$

Por último, a temperatura T_c da isotérmica que passa pelo ponto C é obtida substituindo (6) e (7) em (1):

$$RT_c = \frac{8a}{27b} \tag{8}$$

Agora, reescrevendo P, v e T como apresentado no enunciado, temos:

$$v = \omega v_c = 3b\omega \tag{9}$$

$$P = \pi P_c = \pi \frac{a}{27b^2} \tag{10}$$

$$RT = \tau T_c = \tau \frac{8a}{27b} \tag{11}$$

Substituindo (9), (10) e (11) em (1), obtemos:

$$\left(\pi \frac{a}{27b^2} + \frac{a}{9b^2\omega^2}\right)(3b\omega - b) = \tau \frac{8a}{27b} \tag{12}$$

Simplificando a equação, chegamos finalmente à forma universal da equação de van der Waals:

$$\boxed{\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau} \tag{13}$$

Questão 4

Resolução:

O ponto de partida é a equação de Schrödinger unidimensional e independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x) \tag{14}$$

Em seguida, considerando que $V(x)$ é constante em cada uma das regiões, podemos propor as seguintes soluções:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad x < 0 \tag{15}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \qquad 0 < x < a \tag{16}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx}, \qquad x > a \tag{17}$$

Nas regiões 1 e 3, $V(x) = 0$. Então, substituindo as Eqs. (16) e (18) na Eq. (15), obtemos:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{18}$$

Na região 2, $V(x) = -V$. Substituindo a Eq. (17) na Eq. (15), segue que:

$$\frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} - V = E \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V)}}{\hbar} \tag{19}$$

O coeficiente F corresponde à onda transmitida. Na região 3 não há onda retropropagante. A probabilidade de transmissão (da região 1 para a região 3) será dada por:

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 \tag{20}$$

Condições de contorno: as funções de onda e suas derivadas devem ser contínuas em $x = 0$ e em $x = a$.

1) Em $x = 0$:

Continuidade:

$$A + B = C + D \tag{21}$$

Derivada:

$$k(A - B) = k_2(C - D) \tag{22}$$

2) Em $x = a$:

Continuidade:

$$Ce^{ik_2a} + De^{-ik_2a} = Fe^{ika} \tag{23}$$

Derivada:

$$k_2\left(Ce^{ik_2a} - De^{-ik_2a}\right) = kFe^{ika} \tag{24}$$

Portanto, do sistema em $x = 0$ temos:

$$\begin{cases} A + B = C + D, \\ A - B = \dfrac{k_2}{k}(C - D) = \gamma\,(C - D) \end{cases} \tag{25}$$

Logo,

$$A = \frac{1}{2}\left[(\gamma + 1)\,C - (\gamma - 1)\,D\right] \tag{26}$$

Em $x = a$, adotemos as seguins notações:

$$z_0 = e^{i\,k\,a} \qquad z = e^{i\,k_2\,a} \tag{27}$$

Então:

$$\begin{cases} z\,C + \frac{1}{z}\,D = z_0\,F, \\ z\,C - \frac{1}{z}\,D = \frac{z_0}{\gamma}F \end{cases} \tag{28}$$

Portanto:

$$z\,C = \frac{1}{2}\,z_0\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)F \quad \Rightarrow \quad C = \frac{z_0}{2\gamma\,z}(\gamma + 1)F \tag{29}$$

$$\frac{1}{z}D = \frac{1}{2}\,z_0\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)F \quad \Rightarrow \quad D = \frac{z\,z_0}{2\gamma}(\gamma - 1)F \tag{30}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,\frac{z_0}{2\gamma}\left[\frac{(\gamma + 1)^2}{z} - (\gamma - 1)^2\,z\right]F \\ &= \frac{z_0}{4\gamma z}\,(\gamma + 1)^2\left[1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2 z^2\right]F \end{aligned} \tag{31}$$

Ou seja,

$$\frac{F}{A} = e^{\,i(k_2 - k)a} \cdot \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2 e^{2ik_2a}} \tag{32}$$

Portanto, a probabilidade de transmissão será:

$$T = \left[e^{\,i(k_2 - k)a} \cdot \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2 e^{2ik_2a}}\right]\left[e^{\,-i(k_2 - k)a} \cdot \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2 e^{-2ik_2a}}\right] \tag{33}$$

ou

$$T = \frac{16\gamma^2}{(\gamma+1)^4} \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^4 - 2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2 \cos(2\,k_2 a)}$$
$$= \frac{16\gamma^2}{(\gamma+1)^4} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2\right]^2 + 2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2 [1 - \cos(2\,k_2 a)]} \tag{34}$$
$$= \frac{16\gamma^2}{(\gamma+1)^4} \frac{1}{\left[\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\right]^2 + 2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2 [1 - \cos(2\,k_2 a)]}$$

Assim, a probabilidade de transmissão será máxima ($T = 1$) nos casos em que:

$$k_2\, a = n\,\pi; \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{35}$$

Ou seja:

$$\frac{\sqrt{2m(E_n + V)}}{\hbar}\, a = n\,\pi \quad \Rightarrow \quad E_n = n^2 \left(\frac{\pi^2\,\hbar^2}{2\,m\,a^2}\right) - V \tag{36}$$

Como $E_n > 0$ (conforme enunciado da questão), deveremos ter que

$$n > \sqrt{\frac{2\,m\,a^2\,V}{\pi^2\,\hbar^2}} \tag{37}$$

Portanto, os valores de energia correspondentes são:

$$E_n = n^2 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\right) - V \qquad n = n_{\min},\, n_{\min} + 1,\, n_{\min} + 2,\, \ldots \tag{38}$$

com

$$n_{\min} = \left\lfloor \sqrt{\frac{2ma^2V}{\pi^2\hbar^2}} \right\rfloor + 1 \tag{39}$$

em que $\lfloor \alpha \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a α.

Prof. André Luiz de Oliveira - presidente -

Prof. Sérgio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás -

Prof. Carlos Raphael Rocha -