Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática - DMAT

GABARITO

TIPO: Concurso Público EDITAL: 005/2025 ÁREA: Matemática

1	d	21	d
2	d	22	b
3	a	23	c
4	d	24	b
5	c	25	d
6	b	26	d
7	e	27	e
8	e	28	b
9	a	29	d
10	a	30	a
11	b	31	c
12	c	32	c
13	a	33	a
14	c	34	a
15	d	35	a
16	d	36	d
17	b	37	a
18	c	38	e
19	b	39	c
20	b	40	a

Assinaturas do documento

Código para verificação: **8J614HIH**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

LUIZ GUSTAVO CORDEIRO (CPF: 009.XXX.079-XX) em 01/12/2025 às 13:44:40
Emitido por: "AC Final do Governo Federal do Brasil v1", emitido em 05/06/2025 - 20:52:51 e válido até 05/06/2026 - 20:52:51.
(Assinatura Gov.br)

SIDNEI FURTADO COSTA (CPF: 012.XXX.493-XX) em 01/12/2025 às 13:54:07
Emitido por: "SGP-e", emitido em 11/07/2019 - 13:45:55 e válido até 11/07/2119 - 13:45:55.
(Assinatura do sistema)

FERNANDO DEEKE SASSE (CPF: 545.XXX.419-XX) em 01/12/2025 às 14:04:03
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:43:04 e válido até 30/03/2118 - 12:43:04.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNDczOTZfNDc0MjdfMjAyNV84SjYxNEhJSA== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00047396/2025** e o código **8J614HIH** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.

Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática - DMAT

MODELOS DE RESPOSTA

TIPO: Concurso Público | EDITAL: 005/2025 | ÁREA: Matemática

1

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Falso. Contraexemplo: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável e int$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$.

II. Verdadeiro. Teorema 6, Capítulo V de LIMA (2014).

III. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Falso. Contraexemplo: Se $A_n = (-1/n, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap A_n = \{0\}$, que é fechado.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Falso. Contraexemplo: $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ e $Y = [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Então $\overline{X} = [0,1]$, $\overline{Y} = [0,1]$ e $X \cap Y = \varnothing$.‘

2

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo VII de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Seja $a \in \overline{A}$ e (a_n) uma sequência em A tal que $\lim a_n = a$. Como f é contínua, $f(a) = \lim f(a_n) = \lim 0 = 0$.

II. Verdadeiro. Corolário do Teorema 10, Capítulo VII de LIMA (2014).

III. Conteúdo utilizado: Capítulo VII de LIMA (2014).

   Verdadeiro. $X' = \varnothing$ implica X discreto, e toda função definida em um conjunto discreto é contínua.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo VII de LIMA (2014).

   Verdadeiro. $f(I)$ deve ser um intervalo contido em $\mathbb{Z}$. Logo é degenerado (reduz-se a um ponto).

3

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 6 de GUIDORIZZI (2019).

O campo vetorial é

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\,y\,\vec{\imath} - (x^2+y^2)\,x\,\vec{\jmath} + (a^3+z^3)\,\vec{k},$$

e a curva C é o círculo

$$x^2+y^2=a^2, \qquad z=0,$$

orientado positivamente (sentido antihorário visto de cima). Usemos a parametrização padrão do círculo:

$$\vec{r}(t) = (x(t),y(t),z(t)) = (a\cos t,\ a\sin t,\ 0), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Então

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ 0).$$

No círculo temos $x^2+y^2=a^2$ e $z=0$, de modo que

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) = (a^2y(t),\ -a^2x(t),\ a^3) &= \big(a^2(a\sin t),\ -a^2(a\cos t),\ a^3\big)\\ &= (a^3\sin t,\ -a^3\cos t,\ a^3).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = (a^3\sin t,\ -a^3\cos t,\ a^3)\cdot(-a\sin t,\ a\cos t,\ 0)$$

$$= a^3\sin t(-a\sin t) + (-a^3\cos t)(a\cos t) + a^3\cdot 0 = -a^4(\sin^2 t+\cos^2 t) = -a^4.$$

Portanto,

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(-a^4)\,dt = -a^4\,(2\pi) = -2\pi a^4.$$

4

Referências: GARCIA, A e LEQUAIN, Y. Elementos de Álgebra. 5a ed. IMPA, 2008.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo V de GARCIA e LEQUAIN (2008).

Lembre-se de que $D_n = \langle a,b \mid a^n = b^2 = 1, ba = a^{n-1}b\rangle$, em que a representa uma rotação de $\frac{2\pi}{n}$ e b uma reflexão. Por indução se mostra que $ba^k = a^{kn-k}b = a^{n-k}$ para todo $k\in\mathbb{Z}$.

Temos n elementos da forma a^k e n elementos da forma a^kb, com $0\le k<n$.

Para os elementos da forma a^kb, note que

$$(a^kb)^2 = (a^kb)(a^kb) = a^k(ba^k)b = a^k(a^{n-k}b)b = a^nb^2 = 1,$$

logo $|a^kb| = 2$ para todo k.

Para os elementos da forma a^k, temos que $|a^k|$ é o menor inteiro positivo tal que $k|a^k|$ é múltiplo de n, ou seja, $|a^k| = \dfrac{n}{\mathrm{mdc}(n,k)}$. Assim,

$$\sum_{k=0}^{n-1}|a^k| = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{\mathrm{mdc}(n,k)}$$

Agrupamos os termos da soma acima de acordo com o valor de $e = \mathrm{mdc}(n,k)$. Note que $e = \mathrm{mdc}(n,k)$ se, e somente se, $k = md$ para algum $m < n/e$ (pois tomamos $k < n$) com $\mathrm{mdc}\left(\frac{n}{e}, m\right) = 1$. Assim, para cada e, há exatamente $\varphi\left(\frac{n}{e}\right)$ valores de k tais que $\mathrm{mdc}(n,k) = e$ e $0 \leq k < n$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{g\in D_n} |g| &= \sum_{k=0}^{n-1} |a^k| + \sum_{k=0}^{n-1} |a^k b| \\ &= \sum_{e|n} \frac{n}{e}\varphi\left(\frac{n}{e}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \\ &= \sum_{d|n} d\varphi(d) + 2n,\end{aligned}$$

em que fizemos a substituição $d = n/e$ na última linha.

5

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:

Conteúdo utilizado: Capítulo 10 de GUIDORIZZI (2019).

Pelo Teorema da Divergência,

$$\oint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV,$$

sendo V o volume do tetraedro:

$$V = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}.$$

Como

$$\vec{F} = (P,Q,R) = \left(x^3y,\ x^2y^2,\ x^2yz\right),$$

temos

$$\nabla\cdot\vec{F} = (3x^2y + 2x^2y + x^2y) = 6x^2y.$$

O tetraedro pode ser descrito por

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad 0 \leq z \leq 1-x-y.$$

Assim,

$$\oint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 6x^2y\,dz\,dy\,dx.$$

Integremos em z:

$$\int_0^{1-x-y} 6x^2y\,dz = 6x^2y(1-x-y).$$

Então

$$\oint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^1\int_0^{1-x} 6x^2y(1-x-y)\,dy\,dx.$$

Integremos em y:

$$\int_0^{1-x} 6x^2y(1-x-y)\,dy = 6x^2\int_0^{1-x}\left(y(1-x) - y^2\right)dy.$$

Calculemos cada integral:

$$\int_0^{1-x} y(1-x)\,dy = (1-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = (1-x)\frac{(1-x)^2}{2},$$

$$\int_0^{1-x} y^2\,dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} = \frac{(1-x)^3}{3}.$$

Portanto,

$$\int_0^{1-x} \left(y(1-x) - y^2\right) dy = (1-x)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{(1-x)^3}{6}.$$

e

$$\int_0^{1-x} 6x^2 y(1-x-y)\,dy = 6x^2 \cdot \frac{(1-x)^3}{6} = x^2(1-x)^3.$$

Calculemos finalmente a integral em x:

$$\oint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \frac{1}{60}\,.$$

6

Referências: BOLDRINI, José Luis. Et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 5 de BOLDRINI (1986).

Segue direto das definições de matriz de mudança de base e de matriz de uma transformação linear.

7

Referências: BOLDRINI, José Luis. Et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 4 de BOLDRINI (1986).

As colunas da matriz de mudança de base da base B_1 para a base B_2, $I_{B_2}^{B_1}$, são as coordenadas dos vetores de B_1 na base B_2. Resta notar que

$$(1,1) = 2(-2,8) + 5(1,-3)$$

e

$$(1,-1) = 1(-2,8) + 3(1,-3)$$

8

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

a) Conteúdo utilizado: Capítulo IX de LIMA (2014).

   Falso. Por exemplo, tomando $F(x) = x^2\sin(x^{-3})$ em $x \neq 0$ e $F(0) = 0$, e $f = F'$. Então f não é integrável em nenhum intervalo contendo 0 (pois $f(x) = 2x\sin(x^{-3}) - 3x^{-4}\cos(x^{-3})$ ao redor de 0, que tem variação ilimitada.)

b) Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

   Falso. Tome $f(x) = \sin(x^3)/(x^2+1)$. A sua derivada é $f'(x) = \dfrac{3x^2\cos(x^3)}{x^2+1} - \dfrac{\sin(x^3)2x}{(x^2+1)^2}$, e seu limite no infinito não existe.

c) Conteúdo utilizado: Capítulo IX de LIMA (2014).

Falso. Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = \dfrac{1}{n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ 1 \text{ caso contrário} & \end{cases}.$$

Então o conjunto D dos pontos de descontinuidade de f é $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, que é infinito contável. Pelo Teorema 20 da Seção IX.6 e a discussão que o precede, D tem medida nula e f é integrável.

d) Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

Falso. Tome $f(x) = x + \dfrac{1}{1+e^x}$. Então $f(x) \neq x$, e

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Note que

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{1+e^x} < \frac{1}{1} = 1,$$

logo

$$|f'(x)| = \left|1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right| = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 1.$$

e) Conteúdo utilizado: Capítulo IX de LIMA (2014).

Verdadeiro. Como $f(x) \geq 0$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. De fato, se existisse $c \in [a,b]$ com $f(c) > 0$, então pela continuidade de f haveria um intervalo aberto I contendo c tal que $f(x) > f(c)/2 > 0$ para todo $x \in I$. Assim, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_I f(x)dx \geq f(c)|I|/2 > 0$, um absurdo.

Portanto, $f = 0$. Dada g como no enunciado, temos $fg = 0$ integrável, e $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b 0dx = 0$.

9

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:

Conteúdo utilizado: Capítulo 7 de GUIDORIZZI (2019).

Consideremos o campo

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0),$$

definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Em coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, temos

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}, \frac{r\cos\theta}{r^2}\right) = \left(-\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\cos\theta}{r}\right).$$

Usando os vetores unitários $\vec{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\vec{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$, obtemos

$$\vec{F} = \frac{1}{r}\,\vec{e}_\theta.$$

Ou seja, $\vec{F}$ é tangente às circunferências centradas na origem, com módulo $1/r$. Seja C a circunferência de raio 1 centrada na origem, orientada no sentido anti-horário:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Então

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

e

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \left(-\frac{\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}\right) = (-\sin t, \cos t).$$

Logo,

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Portanto,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Assim, existe uma curva fechada envolvendo a origem, com índice $+1$, para a qual a integral de linha vale 2π. Mostremos que o valor independe da forma de γ (com índice $+1$). Escrevendo

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

temos, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

ou seja, o campo é *irrotacional* em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. No entanto, o domínio não é simplesmente conexo (tem um "buraco" na origem). Nessa situação, embora $\nabla \times \vec{F} = 0$ em todo ponto do domínio, o campo *não* é conservativo globalmente e integrais de linha em curvas fechadas podem ser não nulas. Sejam γ e C curvas fechadas suaves, ambas contidas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, envolvem a origem exatamente uma vez (índice $+1$) e são homotopicamente equivalentes dentro do domínio (uma pode ser deformada na outra sem cruzar a origem). Como o rotacional é zero em todo o domínio perfurado, a integral de linha é invariante por homotopia que não cruza a singularidade, de modo que

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

10

Referências: BOLDRINI, José Luis. Et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 5 de BOLDRINI (1986).

Como $\dim(\text{im}(T)) = 2$, do Teorema do Núcleo e da Imagem, concluímos que $\dim(\ker(T)) = 3$.

11

Referências: BOLDRINI, José Luis. et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 6 de BOLDRINI (1986).

$$\begin{aligned}(T - T^2 + T^{-1})v &= Tv - T^2v + T^{-1}v \\ &= 2v - 2^2v + 2^{-1}v \\ &= (2 - 4 + 1/2)v \\ &= -\frac{3}{2}v\end{aligned}$$

12

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Verdadeiro. Corolário 2 do Teorema 4, Capítulo VIII de LIMA (2014).

II. Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo. Seja $X = \{0\} \cup (1, +\infty)$. A função $f : X \to \mathbb{R}$, definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 2$, se $x > 1$, é contínua e $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{int}(X)$, mas não é constante.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo: $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$. Tem-se $f'(0) = 0$, mas f é crescente em $(-1, 1)$.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo: $f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $(-1, 1)$, mas $f''(0) = 0$.

13

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.2, Projeto Euclides, IMPA, 2015

Modelo de resposta:

I. Não-orientável. Exemplo 35 da Seção V.14 de LIMA (2015).

II. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2015).

Orientável. Seja S o conjunto de matrizes 3×3 de posto 1. Então as suas 3 colunas são múltiplas umas das outras, e não todas nulas. Assim, temos o atlas dado pelas funções

$$\phi, \psi, \theta \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S$$

em que

$$\phi(v, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} v & \alpha v & \beta v \end{bmatrix}$$
$$\psi(v, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha v & v & \beta v \end{bmatrix}$$
$$\theta(v, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha v & \beta v & v \end{bmatrix}.$$

Se $\phi(v, \alpha, \beta) = \psi(w, \gamma, \delta)$, então

$$\begin{bmatrix} v & \alpha v & \beta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma w & w & \delta w \end{bmatrix},$$

logo

- $w = \alpha v$.
- $v = \gamma w = \gamma \alpha v$, ou seja, $\gamma = \alpha^{-1}$.
- $\beta v = \delta w = \delta \alpha v$, ou seja, $\delta = \beta \alpha^{-1}$.

Assim, a função de transição $\psi^{-1}\phi$ é dada por

$$\psi^{-1}\phi(v, \alpha, \beta) = (\alpha v, \alpha^{-1}, \beta\alpha^{-1}).$$

Calculando o Jacobiano dessa função, temos

$$J_{\psi^{-1}\phi} = \begin{bmatrix} \alpha I_3 & v & 0 \\ 0 & -\alpha^{-2} & 0 \\ 0 & -\beta\alpha^{-2} & \alpha^{-1} \end{bmatrix},$$

cujo determinante é $\det(J) = -1$.

Similarmente, se $\phi(v, \alpha, \beta) = \theta(w, \gamma, \delta)$ então $w = \beta v$, $v = \gamma w = \gamma\beta v$, logo $\gamma = \beta^{-1}$, e $\alpha v = \delta w = \delta\beta v$, logo $\delta = \alpha\beta^{-1}$. Assim, a função de transição $\theta^{-1} \circ \phi$ é dada por

$$\theta^{-1}\phi(v, \alpha, \beta) = (\beta v, \beta^{-1}, \alpha\beta^{-1}),$$

cujo Jacobiano

$$J_{\theta^{-1}\phi} = \begin{bmatrix} \beta I_3 & 0 & v \\ 0 & 0 & -\beta^{-2} \\ 0 & \beta^{-1} & \alpha\beta^{-2} \end{bmatrix}$$

tem determinante $\det J_{\theta^{-1}\phi} = 1$

Por fim, se $\psi(v, \alpha, \beta) = \theta(w, \gamma, \delta)$ então $w = \beta v$, $\alpha v = \gamma w = \gamma\beta v$, logo $\gamma = \alpha\beta^{-1}$, e $\alpha v = \delta w = \delta\beta v$, logo $\delta = \beta^{-1}$. O Jacobiano

$$J_{\theta^{-1}\psi} = \begin{bmatrix} \beta I_3 & 0 & v \\ 0 & \beta^{-1} & -\alpha\beta^{-2} \\ 0 & 0 & -\beta^{-2} \end{bmatrix}$$

tem determinante -1.

Note que determinantes negativos aparecem somente nas funções de transição envolvendo ψ. Trocando ψ por $\psi' = -\psi$, que também é uma parametrização local de mesma imagem que ψ, invertemos esses sinais negativos nas Jacobianas de trocas de coordenadas.

Deste modo, $\{\phi, \psi', \theta\}$ é um atlas coerente para S, que é orientável.

III. Não-orientável. Esta é a cópia canônica do plano projetivo real em $\mathbb{R}^4$. Vide Exemplo 40 da Seção V.14 de LIMA (2015).

IV. Não-orientável.

Pelo Exemplo 39 da Seção V.14 de LIMA (2015), M não é orientável. Pelo (segundo parágrafo do) Exemplo 36 da mesma seção, $\mathbb{S}^1 \times M$ também não é orientável.

14

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 11 de GUIDORIZZI (2019).

O rotacional de F em σ é

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial z}x, \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}e^{x^2+y^2+z^2}, \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\\ &= (2ye^{x^2+y^2+z^2}, -2xe^{x^2+y^2+z^2}, 2)\\ &= (2ye, -2xe, 2).\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{n}dS = \oint_{\partial\sigma}\vec{F}\cdot dr,$$

em que $\partial\sigma$ é a curva fronteira de σ, que é o círculo unitário no plano $z = 0$. Parametrizando $\partial\sigma$ por $r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, com $t \in [0, 2\pi]$, temos

$$\oint_{\partial\sigma}\vec{F}\cdot dr = \int_0^{2\pi}\vec{F}(r(t))\cdot r'(t)dt.$$

Calculando $F(r(t))$ e $r'(t)$, temos

$$\vec{F}(r(t)) = (-\sin t, \cos t, e),$$
$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Assim,

$$\vec{F}(r(t))\cdot r'(t) = (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + e\cdot 0 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Portanto,

$$\oint_{\partial\sigma}\vec{F}\cdot dr = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi.$$

Logo,

$$\iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{n}dS = 2\pi.$$

15

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 10 de GUIDORIZZI (2019).

Note que $\nabla\cdot\vec{F} = y^2 + xz + (1 - y^2 - xz) = 1$. Pelo Teorema da Divergência, temos

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})dV,$$

onde V é o volume da semiesfera. O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$, então o volume da semiesfera de raio 1 é $\frac{2}{3}\pi$. Portanto,

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iiint_V 1dV = \text{Volume}V = \frac{2}{3}\pi.$$

16

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

   Falso. Contraexemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin(1/x) + x/2$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Tem-se que $f'(0) = 1/2$, mas f não é crescente em nenhuma vizinhança de 0.

II. Verdadeiro. Observação 1, após o Teorema 1, Capítulo VIII de LIMA (2014).

III. Conteúdo utilizado: Capítulo VIII de LIMA (2014).

   Falso. Continuidade não implica derivabilidade.

IV. Verdadeiro. Exemplo 29, Seção 4, Capítulo VIII de LIMA (2014).

17

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 8 de GUIDORIZZI (2019).
Pelo Teorema de Green,

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

onde D é a região limitada por γ (o losango $|x| + |y| \leq 1$). Calculamos as derivadas parciais:

$$Q(x,y) = 3x^4y^2 + 5x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 + 5,$$

$$P(x,y) = 4x^3y^3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12x^3y^2.$$

Logo,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (12x^3y^2 + 5) - 12x^3y^2 = 5.$$

Assim, a integral de linha reduz-se a

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D 5\,dA = 5\,\text{área}(D).$$

A região D é o losango de vértices $(-1,0), (0,-1), (1,0), (0,1)$, que pode ser descrito por $|x| + |y| \leq 1$. A área desse losango é bem conhecida, mas podemos calcular: Devido à simetria, basta considerar o primeiro quadrante, onde $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$ (um triângulo de base e altura iguais a 1). A área desse triângulo é

$$\text{área no } 1^\circ \text{ quadrante} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

O losango é a união de 4 cópias desse triângulo, logo

$$\text{área}(D) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Portanto,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 5 \cdot 2 = 10.$$

18

Referências: GARCIA, A e LEQUAIN, Y. Elementos de Álgebra. 5a ed. IMPA, 2008.

Referências: HEFEZ, A. Curso de Álgebra. 4a ed. v.1, IMPA, 2010.

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo I de GARCIA e LEQUAIN (2008).

   $\mathbb{R}$ tem grupo de automorfismos trivial.

   Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um isomorfismo, então f é monótona, pois

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff \exists z((y-x) = z^2) \\ &\iff \exists z(f(y-x) = f(z^2)) \\ &\iff \exists z(f(y) - f(x) = f(z)^2) \\ &\iff \exists w(f(y) - f(x) = w^2) && \text{(pois } f \text{ é sobrejetora)} \\ &\iff f(x) \leq f(y). \end{aligned}$$

   Assim, f é uma bijeção monótona em $\mathbb{R}$, e é um fato elementar e bem-conhecido que isso implica que ela é contínua. Por exemplo, o Exercício VII.16 do "LIMA, E. L., Curso de Análise v.1" diz que f se estende continuamente para $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Mas daí essa extensão contínua é a própria f.

   Além disso, $f(1) = 1$, pois f é isomorfismo de anel. Por indução direta, se mostra que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e f ser isomorfismo de anel implica que o mesmo vale para $n \in \mathbb{Q}$, e por continuidade se obtém $f = I$.

II. Conteúdo utilizado: Capítulo 9 de HEFEZ (2010).

   $\mathbb{C}$ não tem grupo de automorfismos trivial.

   Por exemplo, a conjugação complexa é um automorfismo não-trivial de $\mathbb{C}$.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo I de GARCIA e LEQUAIN (2008).

   $\mathbb{Z}[i]$ não tem grupo de automorfismos trivial.

   Idem ao caso de $\mathbb{C}$.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo I de GARCIA e LEQUAIN (2008).

   $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ não tem grupo de automorfismos trivial.

   Similarmente aos casos anteriores, a "conjugação" $f\colon \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, definida por

$$f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2} \qquad (a, b \in \mathbb{Z})$$

   é um automorfismo não-trivial de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

19

Referências: BOLDRINI, José Luis. Et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 4 de BOLDRINI (1986).

Basta escalonar a matriz cujas linhas são os vetores v_1, v_2 e v_3 ou verificar que
$(2, -1, 3) = 2(1, 0, 1) - (0, 1, -1)$
$(2, -3, 5) = 2(1, 0, 1) - 3(0, 1, -1)$
$(3, 2, 1) = 3(1, 0, 1) + 2(0, 1, -1)$

20

Referências: BOLDRINI, José Luis. et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Somente o item I é verdadeiro. Para os itens falsos, considere qualquer operador em $\mathbb{R}^n$ implementado (na base canônica) por uma matriz triangular superior $E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ 0 & b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ que não seja diagonalizável.

I. Verdadeiro. Teorema 7.2.3 de BOLDRINI (1986).

II. Conteúdo utilizado: Capítulo 7 de BOLDRINI (1986).

Falso. O operador implementado pela matriz E não é diagonalizável, mas seu polinômio característico $p_E(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots$ completamente fatorável.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo 7 de BOLDRINI (1986).

Falso. Tome qualquer matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ com entradas diagonais distintas de modo que $D+E$ também possua entradas diagonais distintas. Então $-D$ e $D+E$ são diagonalizáveis, (pois seus autovalores são as suas respectivas n entradas diagonais, todas distintas), mas $-D+(D+E) = E$ não o é.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo 7 de BOLDRINI (1986).

Falso. O operador E não é diagonalizável, mas é representado na base canônica por uma matriz triangular superior, e por uma triangular inferior invertendo a ordem dos vetores da base canônica.

21

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 9 de GUIDORIZZI (2019).

Representamos a superfície como um nível de uma função escalar:

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 3xy - 9 = 0.$$

O plano tangente à superfície $F(x, y, z) = 0$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dado por

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0,$$

sempre que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Calculemos o gradiente:

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \big(2x + 3y,\ 4y + 3x,\ 2z\big).$$

Em $P = (1, -1, 3)$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,-1,3) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1,3) = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -4 + 3 = -1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Portanto,

$$\nabla F(1,-1,3) = (-1,\ -1,\ 6).$$

A equação do plano tangente é

$$(-1,\ -1,\ 6) \cdot (x-1,\ y+1,\ z-3) = 0,$$

isto é,

$$-1(x-1) - 1(y+1) + 6(z-3) = 0.$$

Simplificando:

$$-x - y + 6z - 18 = 0.$$

ou

$$x + y - 6z + 18 = 0.$$

22

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Verdadeiro. Teorema 4, Capítulo VII de LIMA (2014).

II. Conteúdo utilizado: Capítulo VII de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo: defina $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, se $x < 0$ e $f(x) = 1$, se $x \geq 0$, e considere a união enumerável de conjuntos fechados $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$.

III. Verdadeiro. Corolário do Teorema 11, Capítulo VII de LIMA (2014).

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo VII de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo: $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

23

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 9 de GUIDORIZZI (2019).
A área de uma superfície parametrizada $\sigma(u,v)$ sobre um domínio D no plano (u,v) é dada por

$$A = \iint_D \left\| \sigma_u \times \sigma_v \right\| du\, dv,$$

sendo

$$\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \qquad \sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}.$$

A parametrização é

$$\sigma(u,v) = (u, v, 2-u-v).$$

Portanto,

$$\sigma_u = \frac{\partial}{\partial u}(u,v,2-u-v) = (1,0,-1),$$
$$\sigma_v = \frac{\partial}{\partial v}(u,v,2-u-v) = (0,1,-1).$$

Calculamos o produto vetorial:

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1) - \mathbf{j}(1\cdot(-1) - (-1)\cdot 0) + \mathbf{k}(1\cdot 1 - 0\cdot 0),$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = (1,1,1).$$

A norma é

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

Observemos que essa norma é constante em todo o domínio D. O domínio D no plano (u,v) é o disco unitário:

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}.$$

Portanto,

$$A = \iint_D \sqrt{3}\, du\, dv = \sqrt{3}\iint_D 1\, du\, dv = \sqrt{3}\,\text{Área}(D).$$

A área do disco unitário é π, logo

$$A = \sqrt{3}\,\pi.$$

24

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:

Conteúdo utilizado: Capítulo 10 de GUIDORIZZI (2019).

Podemos parametrizar a superfície S por

$$\vec{r}(x,y) = \big(x,\ y,\ 1-x^2-y^2\big), \qquad (x,y) \in D = [0,1]\times[0,1].$$

Os vetores tangentes são os vetores derivadas parciais:

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1,\ 0,\ -2x), \qquad \vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0,\ 1,\ -2y).$$

Um vetor normal não unitário à superfície é dado pelo produto vetorial

$$\vec{n}\, dS = \vec{r}_x \times \vec{r}_y\, dx\, dy.$$

Calculamos:

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \vec{\imath}(0\cdot(-2y) - (-2x)\cdot 1) - \vec{\jmath}(1\cdot(-2y) - (-2x)\cdot 0) + \vec{k}(1\cdot 1 - 0\cdot 0).$$

Ou seja,

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (2x,\ 2y,\ 1),$$

de modo que

$$\vec{n}\, dS = (2x,\ 2y,\ 1)\, dx\, dy.$$

Na superfície, $z = 1 - x^2 - y^2$, mas como $\vec{F}$ não depende explicitamente de z nas duas primeiras componentes, temos simplesmente

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) = \big(5,\ x^2 + y^2,\ -xy\big).$$

Portanto, $\vec{F} \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)$ e

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) = (5,\ x^2 + y^2,\ -xy) \cdot (2x,\ 2y,\ 1)$$

$$= 5 \cdot 2x + (x^2 + y^2) \cdot 2y + (-xy) \cdot 1 = 10x + 2y(x^2 + y^2) - xy.$$

Então o fluxo é

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 \big[10x + 2y(x^2 + y^2) - xy\big]\, dx\, dy.$$

25

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Seja $I = [a, b]$ com $a < b$ irracionais e $\{r_1, r_2, \ldots\}$ uma enumeração dos racionais em I. Seja I_1, obtido a partir de I removendo-se de I um intervalo aberto com extremidades irracionais, de modo que sobrem dois intervalos fechados e $r_1 \notin I_1$. Seja I_2, obtido a partir de I_1, removendo-se um intervalo aberto com extremidades irracionais de cada um dos intervalos fechados que compõem I_1, de modo que sobrem quatro intervalos fechados e $r_2 \notin I_2$. Prosseguindo desta forma, o conjunto $K = \bigcap_{k=1} I_k$ é um conjunto de Cantor sem nenhum número racional. Em particular, K é fechado e não-enumerável. Portanto, $A = \mathbb{R} - K$ é aberto, contém $\mathbb{Q}$ e tem complementar não-enumerável.

II. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Se $a \in A$, então para todo $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A$ é aberto. Logo existe $\epsilon' > 0$ tal que $(a - \epsilon', a + \epsilon') \subseteq (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A$. Como em $(a - \epsilon', a + \epsilon')$ há pontos diferentes de a, $a \in A'$.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Teorema de Bolzano-Weiertrass.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Falso. Contraexemplo: $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$.

26

Referências: LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 7a ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Seção 12 de LIMA (2008).

Falsa. Tome $V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$ e $E = \mathbb{R} \times \{0\}$, que é invariante por T.

Se G é outro subespaço tal que $V = E \oplus G$, então G é gerador por um único vetor (a, b) com $b \neq 0$. Mas se G também for invariante por T, então $T(a, b) = (b, 0) = \lambda(a, b)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Comparando as últimas entradas, vemos que $0 = \lambda b$, e como $b \neq 0$ então $\lambda = 0$. Mas daí, comparando as primeiras entradas, $b = \lambda a = 0$, um absurdo.

II. Conteúdo utilizado: Seção 12 de LIMA (2008).

Falsa. Tome $V = \mathbb{R}^3$ e $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Para mostrar que não existem E_1, E_2 ou E_1, E_2, E_3 como neste item, basta mostrar que todo subespaço próprio T-invariante E está contido em $\{0\} \times \mathbb{R}^2$. De fato, se E é T-invariante mas não está contido neste subespaço, então existe $v = (x, y, z) \in E$ com $x \neq 0$. Mas daí

- $(0, 0, 1) = \dfrac{1}{x} T^2 v$,
- $(0, 1, 0) = \dfrac{1}{x}(Tv - y(0, 0, 1))$, e
- $(1, 0, 0) = \dfrac{1}{x}(v - y(0, 1, 0) - z(0, 0, 1))$

pertencem a E, logo $E = \mathbb{R}^3$, que não é próprio.

III. Verdadeiro. Lema 1 da seção A.3 de LIMA (2008).

IV. Verdadeiro. Teorema 12.1 de LIMA (2008).

27

Referências: BOLDRINI, José Luis. et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Referências: LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 7a ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.

Modelo de resposta:

a) Conteúdo utilizado: Seção 6 de LIMA (2008).

Falso. Tome $V = \mathbb{R}^2$, A o operador identidade e $B(x, y) = (y, x)$. Então $\ker(A) = \ker(B) = \{0\}$ e $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(B) = \mathbb{R}^2$. Mas caso existisse P como no enunciado, teríamos que

$$PBP^{-1} = A = I,$$

logo

$$B = P^{-1} I P = I,$$

o que é uma contradição.

b) Conteúdo utilizado: Seção 12 de LIMA (2008).

Falso. O operador $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, -x)$ tem polinômio característico $p_T(x) = x^2 + 1$, logo não tem autovalores reais. Mas $T^2 = -I$, que tem o autovalor -1.

c) Conteúdo utilizado: Apêndice de LIMA (2008).

Falso. Em termos matriciais, tomando T, N_1, D_1, N_2, D_2 implementados pelas matrizes

- $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
- $\begin{bmatrix} N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,
- $\begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
- $\begin{bmatrix} N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e
- $\begin{bmatrix} D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

temos N_1 e N_2 nilpotentes, D_1 e D_2 diagonalizáveis, mas $T = N_1 + D_1 = N_2 + D_2$.

d) Conteúdo utilizado: Seção 12 de LIMA (2008).

Falso. Tome $A = 0$ e B qualquer operador com um subespaço não invariante (e.g. $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = (y, x)$).

e) Conteúdo utilizado: Capítulo 7 de BOLDRINI (1986).

Verdadeiro. O único autovalor de T é 0. Como $T \neq 0$, então o autoespaço associado a esse autovalor é proprio. Logo, V não é gerado por autovetores de T, que portanto não é diagonalizável.

28

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:

Conteúdo utilizado: Capítulo 11 de GUIDORIZZI (2019).

De acordo com o Teorema de Stokes,

$$\iint_\sigma (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

sendo que $\partial\sigma$ é a curva borda da superfície σ, orientada de modo compatível com a normal escolhida (aqui, normal apontando para cima). A superfície é dada por

$$\sigma(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2), \quad u^2 + v^2 \leq 1.$$

Logo, a borda $\partial\sigma$ é o círculo

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad z = 2 - 1 = 1,$$

ou seja, o círculo de raio 1 no plano $z = 1$. Como a normal aponta para cima, a orientação positiva de $\partial\sigma$ é no sentido anti-horário visto de cima. Tomemos a parametrização usual:

$$\vec{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 1), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Então

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

Dado

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 2x + y),$$

ao longo de $\partial\sigma$ temos $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, logo

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \big(\sin t,\ \cos t,\ 2\cos t + \sin t\big).$$

O integrando é

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = (\sin t,\ \cos t,\ 2\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

Portanto,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t) + (2\cos t + \sin t) \cdot 0 = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos(2t).$$

ou

$$\oint_{\partial\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sin(4\pi) - \sin 0}{2} = 0.$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_\sigma (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

29

Referências: GARCIA, A e LEQUAIN, Y. Elementos de Álgebra. 5a ed. IMPA, 2008.

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulos I e II de GARCIA e LEQUAIN (2008).

Verdadeiro. Pelo Teorema I.3.8., $K[X]$ é euclideano e, pelo Teorema II.2.2, é principal.

II. Conteúdo utilizado: Capítulo II de GARCIA e LEQUAIN (2008).

Falso. O ideal $I = (X, Y) \subset F[X, Y]$ não é principal.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo II de GARCIA e LEQUAIN (2008).

Verdadeiro. Segue direto das definições e do fato de que $K[X]$ é DFU.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulos I e II de GARCIA e LEQUAIN (2008).

Falso. Tome qualquer corpo k, $R = k[Z]$ e $K = F = k(Z)$ o corpo de frações de R (em que Z é uma variável qualquer, diferente de X, como na Proposição II.3.9.).

Primeiro, considere a inclusão canônica f de k em $F[X] = k(Z)[X]$. Pelo Exercício I.5.10 (propriedade universal dos aneis de polinômios), f se estende unicamente para um homomorfismo de $R = k[Z]$ em $F[X]$ de modo que $f(Z) = Z + X$. Pelo mesmo exercício/propriedade, f se estende unicamente para um homomorfismo de $R[X]$ em $F[X]$ de modo que $f(X) = X$.

Mais diretamente, $f\colon R[X] = k[Z, X] \to F[X] = k(Z)[X]$ é definido por

$$f(p(Z, X)) = p(Z + X, X),$$

que é claramente injetivo: Sua imagem é a própria cópia de $R[X]$ em $F[X]$, e a sua inversa aí é dada por $f^{-1}(p(Z,X)) = p(Z-X,X)$

Suponha que f se estendesse para um homomorfismo injetor em $K[X]$. Como $Z \in K$ é inversível em $K \subseteq K[X]$, então $f(Z)$ deveria ser inversível em $F[X]$. Mas $f(Z) = Z + X$, que não é inversível em $F[X]$ (visto que é um polinômio de grau 1). Absurdo.

30

Referências: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2019

Modelo de resposta:

Conteúdo utilizado: Capítulo 10 de GUIDORIZZI (2019).

A forma local (pontual) da equação da continuidade, sem fontes nem sumidouros, é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r},t) + \nabla \cdot \big(\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\big) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Seja $V \subset \Omega$ um volume fixo (não se move com o fluido), com superfície de bordo $S = \partial V$ e vetor normal externo $\vec{n}$. Integramos a equação local sobre V:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v})\right] dV = 0.$$

Separando os termos:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v})\, dV = 0.$$

Como o volume V é fixo no espaço, podemos trocar a derivada temporal com a integração:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{r},t)\, dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v})\, dV = 0.$$

Aplicamos o Teorema da Divergência ao segundo termo:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v})\, dV = \oint_S \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\cdot \vec{n}\, dS.$$

Substituindo na expressão anterior obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{r},t)\, dV + \oint_S \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\cdot \vec{n}\, dS = 0, \quad \forall V \subset \Omega.$$

31

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Falso. O que vale é a recíproca. Contraexemplo: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

II. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Seja X um conjunto denso em $\mathbb{R}$. Se $\mathbb{R} - X$ contivesse algum intervalo (a,b), existiria $z \in X$ tal que $a < z < b$, pois X é denso em $\mathbb{R}$, o que implicaria que $z \in \mathbb{R} - X$. Reciprocamente, suponha que $\mathbb{R} - X$ tenha interior vazio. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tem-se que $(a,b) \not\subseteq \mathbb{R} - X$. Logo, existe $z \in (a,b)$ tal que $z \notin \mathbb{R} - X$, ou seja, $z \in X$. Isso mostra que o X é denso em $\mathbb{R}$.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

Verdadeiro. Os conjuntos $X_i = \{i + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$, $i \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, são enumeráveis, dois a dois disjuntos e densos em $\mathbb{R}$.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo V de LIMA (2014).

Verdadeiro. Seja $x \in X$. Como $x \notin X'$, existe um intervalo aberto I_x, centrado em x, tal que $I_x \cap X = \{x\}$. Disso segue que todos os pontos de X são isolados e, portanto, X é enumerável.

32

Referências: ANTON, H., RORRES, C., Álgebra linear com aplicações. 10a ed. Bookman, 2012.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulo 8 de ANTON e RORRES (2012).
Sejam $B = \{u_1, u_2\}$ e $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde

$$u_1 = (1, -1), \quad u_2 = (0, 1), \quad v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, -1).$$

Então

$$[T]_{BB'} = \big([T(u_1)]_{B'},\, [T(u_2)]_{B'}\big). \tag{1}$$

Como $T(x, y) = (x - y, x + y, y)$, temos

$$[T(u_1)] = \begin{bmatrix} 1-(-1) \\ 1-1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$[T(u_2)] = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 0+1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

As eqs. (2) e (3) podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = [T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = [T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

e

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

33

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo X de LIMA (2014).

   Falso. Tome $f_n = 0$ em $(0,1)$ e $(-1)^n$ em $\{0,1\}$).

II. Conteúdo utilizado: Capítulo X de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Seja $(f_{n_k})_{n_k}$ a subsequência uniformemente convergente e f seu limite. Como $(f_{n_k})_{n_k}$ é não-decrescente, então $f_{n_k} \leq f$ para todo k.

   Dado $\epsilon > 0$, tome K tal que $f(x) - \epsilon < f_{n_k}(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e $k \geq K$. Então, para qualquer $n \geq n_K$ e qualquer $x \in X$, tome k tal que $n \leq n_k$, de modo que

$$f(x) - \epsilon < f_{n_K}(x) \leq f_n(x) \leq f_{n_k}(x) \leq f(x),$$

   ou seja, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ uniformemente em X. Isso mostra que $f_n \to f$ uniformemente em X.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo X de LIMA (2014).

   Verdadeiro. A demonstração é completamente análoga à do teste do termo geral para séries numéricas: Como a série converge uniformemente, então a sequência das somas parciais é uniformemente de Cauchy

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo X de LIMA (2014).

   Verdadeiro. Sabe-se que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, logo a série converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

   Por outro lado, para qualquer $M > 0$ e qualquer $x > 0$, temos

$$\left| \sum_{n=0}^{M} \frac{x^n}{n!} - e^x \right| = \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{M+1}}{(M+1)!}.$$

   Para qualquer x suficientemente grande, o valor acima é > 1.

   Assim, para qualquer M existe x tal que $\left| \sum_{n=0}^{M} \dfrac{x^n}{n!} - e^x \right| > 1$, logo a série não é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Referências: LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 7a ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Seções 7 e 8 de LIMA (2008).

Verdadeiro. Utilizando representações matriciais, basta demonstrar o mesmo fato para matrizes. Mais ainda, basta mostrar isto para matrizes do tipo $E_{pq} = \left[\delta_{ip}\delta_{jq}\right]_{ij}$ (com 1 na célula (p, q) e 0 nas demais), pois estas geram os espaços de matrizes (de uma ordem fixa). Se $p = q$, então E_{pp} já é projeção. Se $p \neq q$, então as matrizes E_{pp} e $E_{pp} + E_{pq}$ são projeções e $E_{pq} = (E_{pp} + E_{pq}) - E_{pp}$.

II. Conteúdo utilizado: Seções 7 e 8 de LIMA (2008).

Verdadeiro. Pelo Teorema 7.2, uma projeção é um operador X que satisfaz $X^2 = X$. Basta verificar essa igualdade com $X = PQ$ e $X = P + Q - PQ$:

$$
\begin{aligned}
(PQ)^2 &= (PQ)(PQ) && \text{(por definição)}\\
&= P(QP)Q \\
&= P(PQ)Q && \text{(por hipótese)}\\
&= P^2Q^2 \\
&= PQ && \text{(pois } P \text{ e } Q \text{ são projeções)}
\end{aligned}
$$

A verificação de que $(P + Q - PQ)^2 = P + Q - PQ$ é completamente análoga.

III. Conteúdo utilizado: Seções 7 e 8 de LIMA (2008).

Verdadeiro. Temos que

$$P_1 + \cdots + P_k = I.$$

Multiplicando por P_i à esquerda dos dois lados:

$$P_iP_1 + P_iP_2 + \cdots + P_iP_k = P_iI = P_i.$$

Por hipótese, $P_iP_j = 0$ para $j \neq i$, logo todos os termos do lado esquerdo são cancelados, exceto P_iP_i, ou seja,

$$P_iP_i = P_i,$$

o quê significa que P_i é projeção, pelo Teorema 7.2.

IV. Conteúdo utilizado: Seções 7 e 8 de LIMA (2008).

Verdadeiro. Similarmente ao item I, basta notar que

$$
\begin{aligned}
(P_1 + \cdots + P_k)^2 &= (P_1 + \cdots + P_k)(P_1 + \cdots + P_k)\\
&= P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_k^2 + \sum_{i \neq j} P_iP_j\\
&= P_1 + P_2 + \cdots + P_k + 0\\
&= P_1 + P_2 + \cdots + P_k,
\end{aligned}
$$

logo $P_1 + \cdots + P_k$ é projeção, pelo Teorema 7.2.

35

Referências: LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 7a ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Seção 6 de LIMA (2008).

Notemos que

$$\begin{aligned} B(A(x,y)) &= B(x+2y, 2x+3y, 3x+4y) \\ &= (-3(x+2y)+2(2x+3y), 2(x+2y)-(2x+3y)) \\ &= (x,y)\,, \end{aligned}$$

para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de modo que B é um inversa à esquerda para A.

36

Referências: BOLDRINI, José Luis. Et al. Álgebra Linear. Harbra. SP. 3a ed. 1986.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulos 6 e 7 de BOLDRINI (1986).

Autovetores associados a autovalores distintos são LI.

37

Referências: GARCIA, A e LEQUAIN, Y. Elementos de Álgebra. 5a ed. IMPA, 2008.

Modelo de resposta:
Conteúdo utilizado: Capítulos VI e VII de GARCIA e LEQUAIN (2008).

O grupo A_5 tem ordem 60 (Proposição VI.6.3.1) e não é solúvel (Exemplo VII.2.7.5)

Pelo Teorema de Burnside (Exemplo VII.2.7.3) grupos cuja ordem é da forma $p^a q^b$, com p e q primos, são solúveis. Assim, grupos não-solúveis devem ter ordem divisível por pelo menos três primos distintos. As únicas possibilidades para $n < 60$ são $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Nas duas situações, $n = pqr$, com p, q, r primos distintos. Vamos provar que, nestas situações, um grupo G de ordem n possui algum subgrupo normal de ordem prima.

Se $n = 42 = 6 \cdot 7$, então pelo 3º Teorema de Sylow (Teorema VI.2.12) a quantidade de 7-subgrupos de Sylow divide 6 e é congruente a 1 $\mod 7$, logo deve ser 1. Assim, existe um único 7-subgrupo de Sylow N, que deve ser normal.

Similarmente, se $n = 30 = 6 \cdot 5$, então a quantidade de 5-subgrupos de Sylow divide 6 e é congruente a 1 $\mod 5$, logo deve ser 1 ou 6. Similarmente, como $n = 3 \cdot 10$. A quantidade de 3-subgrupos de Sylow divide 10 e é congruente a 1 $\mod 3$, logo deve ser 1 ou 10. Se qualquer uma dessas quantidades for 1, então existe um subgrupo normal de ordem prima, do mesmo modo que no caso anterior. Caso contrário, existem 6 5-subgrupos de Sylow distintos e 10 3-subgrupos de Sylow distintos. Note que os 5-subgrupos de Sylow, sendo cíclicos de ordem prima e distintos, têm interseção (dois-a-dois) trivial. Assim, a união desses 5-subgrupos contém $6 \cdot (5-1)+1 = 25$ elementos: a unidade do grupo e outros 24 elementos de ordem 5. Similarmente, a união dos 3-subgrupos de Sylow é formada pela unidade e outros 20 elementos de ordem 3. Mas então temos $24 + 20 = 44$ elementos distintos no nosso grupo de ordem $n = 30$, um absurdo.

Portanto, em qualquer situação, o grupo G contém algum subgrupo normal de ordem prima, digamos p. Seja N esse subgrupo normal. Então N é solúvel (pois é cíclico, logo abeliano), e G/N é um grupo de ordem menor qr, com q e r primos distintos e cíclicos. Logo, G/N é solúvel (como já vimos acima). Pelo Teorema VII.2.8.2, G é solúvel.

38

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

Conteúdo utilizado: Capítulos IV e IX de LIMA (2014).

Defina $x_n = (n+1)\cdots(2n) = \prod_{k=1}^{n}(n+k) = n^n \prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. Então

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{x_n}}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

que é uma soma de Riemann à direita da função $f(x) = \ln(1+x)$ no intervalo $[0,1]$ (com respeito à partição $(0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1)$). Assim, tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt[n]{x_n}}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = [(1+x)\ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$

Tomando exponenciais (e usando a continuidade da função exponencial), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n} = e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e}.$$

39

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.2, Projeto Euclides, IMPA, 2015

Modelo de resposta:

I. Conteúdo utilizado: Capítulo VI de LIMA (2015).

Verdadeiro. Sejam G o gráfico de f e χ sua função característica. Tome qualquer intervalo I contendo $f(A)$ e $B = A \times I$. Então $G \subseteq A \times I$. Para mostrar que G tem volume zero, devemos mostrar que χ é integrável em B e $\int_B \chi(x)dx = 0$ (conforme a definição de volume na Seção VI.3).

Ora, como f é integrável, então seu conjunto D de descontinuidades em A tem medida nula (Teorema 4 da Seção VI.3). Seja $E = A \setminus D$ o conjunto dos pontos de continuidade de f. Note que os pontos de descontinuidade de χ em $E \times I$ são exatamente os pontos do gráfico de f. Mas como f é contínua em E, então para cada ponto de descontinuidade $(x_0, f(x_0))$ de χ em $E \times I$ e para cada $\varepsilon > 0$ existe um bloco fechado I com extremos racionais e contendo x_0 tal que se $x, y \in I$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, ou seja, $f(I)$ está contido em um intervalo J de comprimento menor ou igual a ϵ. Assim, obtemos duas coleções enumeráveis de blocos fechados $I_1, I_2, \ldots$ cobrindo E e $J_1, J_2, \ldots$ de comprimento $\leq \epsilon$ tais que $f(I_k) \subseteq J_k$. Caso necessário, podemos modificar $I_1, I_2, \ldots$ para que seus interiores sejam disjuntos (trocando I_2 por uma união de blocos que formem $I_2 \setminus \text{int}(I_1)$, e similarmente para $I_3, I_4 \ldots$). Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ em $E \times I$ está contido na união dos blocos $I_k \times J_k$, que satisfazem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_k \times J_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_k)\epsilon = |A|\epsilon.$$

Logo, o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ em $E \times I$ tem medida nula. Já o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ em $D \times I$ está contido $D \times I$, que também tem medida nula pois D o tem. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ em B tem medida nula , logo χ é integrável em B (Teorema 4 da Seção VI.3).

Pelo Teorema da Integração Iterada (ou Teorema de Fubini), temos que

$$\int_B \chi(x)dx = \int_A \left(\int_I \chi_{\{f(a)\}}(y)dy\right) da = \int_A 0da = 0,$$

logo G tem volume zero.

II. Conteúdo utilizado: Capítulo VI de LIMA (2015).

Falso. Basta tomar $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ como sendo a função característica dos números racionais em $[0,1]$. Seu gráfico está contido no conjunto $[0,1] \times \{0,1\}$, que tem volume nulo, logo o mesmo tem volume nulo. Mas f não é integrável ("'LIMA, E. L., Curso de Análise v.1", Exemplo 1 da Seção IX.1).

III. Conteúdo utilizado: Capítulo VI de LIMA (2015).

Falso. Utilizando Fubini e troca de variáveis, se tem $V_{m+1} = 2V_m \int_0^1 (1-t^2)^{m/2} dt$.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo VI de LIMA (2015).

Verdadeiro. Primeiro, note que f é limitada: Existe N tal que $|f(x) - f_N(x)| < 1$ para todo $x \in A$. Como f_N é limitada, então f também o é.

Dado $\epsilon > 0$, tome N tal que $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ para todo $x \in A$ e $k \geq N$. Então, para qualquer partição P suficientemente fina de A, podemos aproximar integrais superiores por somas superiores com respeito a P, de modo que

$$\left| \overline{\int_A} f(x)dx - \overline{\int}_A f_k(x)dx \right| \leq 2\epsilon + \sum_{B \in P} |\sup f(B) - \sup f_k(B)| \operatorname{vol}(B)$$

Mas como $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ para todo $x \in A$, então $f(x) < \epsilon + f_k(x) \leq \epsilon + \sup f_k(B)$ sempre que $x \in B \in P$. Logo, $\sup f(B) \leq \epsilon + \sup f_k(B)$. Por simetria, $\sup f_k(B) \leq \epsilon + \sup f(B)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \overline{\int_A} f(x)dx - \overline{\int}_A f_k(x)dx \right| &\leq 2\epsilon + \sum_{B \in P} \epsilon \operatorname{vol}(B) \\ &= \epsilon(2 + \operatorname{vol}(A)) \end{aligned}$$

para qualquer $k \geq N$. Isso mostra que $\overline{\int_A} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_A f_k(x)dx$. A outra igualdade é provada similarmente.

40

Referências: LIMA, E. L., Curso de Análise v.1, Projeto Euclides, IMPA, 2014

Modelo de resposta:

I. Verdadeiro. Teorema 22, Cap IV de LIMA (2014).

II. Conteúdo utilizado: Capítulo IV de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo: $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$, $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$ produz série convergente mas (a_n) não é monótona.

III. Conteúdo utilizado: Capítulo IV de LIMA (2014).

Falso. Contraexemplo: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

IV. Conteúdo utilizado: Capítulo IV de LIMA (2014).

Verdadeiro. Use o teste da comparação.

Assinaturas do documento

Código para verificação: **8P23DWZ7**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

LUIZ GUSTAVO CORDEIRO (CPF: 009.XXX.079-XX) em 01/12/2025 às 13:44:01
Emitido por: "AC Final do Governo Federal do Brasil v1", emitido em 05/06/2025 - 20:52:51 e válido até 05/06/2026 - 20:52:51.
(Assinatura Gov.br)

SIDNEI FURTADO COSTA (CPF: 012.XXX.493-XX) em 01/12/2025 às 13:54:07
Emitido por: "SGP-e", emitido em 11/07/2019 - 13:45:55 e válido até 11/07/2119 - 13:45:55.
(Assinatura do sistema)

FERNANDO DEEKE SASSE (CPF: 545.XXX.419-XX) em 01/12/2025 às 14:04:03
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:43:04 e válido até 30/03/2118 - 12:43:04.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNDczOTZfNDc0MjdfMjAyNV84UDIzRFdaNw== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00047396/2025** e o código **8P23DWZ7** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.