UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 02/2026

PADRÃO DE RESPOSTAS DA PROVA ESCRITA
Área: Matemática
Número de Inscrição do Candidato: ________

QUESTÃO 1:

a) (1,5 pontos): Modelo de resposta

A resposta deverá conter, pelo menos:

1. A conceituação de integral indefinida de uma função real de uma variável real como anti-derivada (primitiva).
2. O enunciado e a demonstração da fórmula de integração por substituição.
3. O enunciado e a demonstração da fórmula de integração por partes.
4. Um exemplo de integral indefinida resolvida pelo método de substituição.
5. Um exemplo de integral indefinida resolvida pelo método de integração por partes.

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 5 (seções 5.2 e 5.3) e Capítulo 7 (seção 7.2).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 1. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 5 (seções 5.4 e 5.5) e Capítulo 7 (seção 7.1).

b) (1,0 ponto): Modelo de resposta (basta uma das duas opções abaixo)

Opção 1: Aplicando a substituição $x = \sqrt{5}\sin(t)$, obtém-se que $dx = \sqrt{5}\cos(t)\,dt$. Ainda

$$5 - x^2 = 5 - 5\sin^2(t) = 5(1 - \sin^2(t)) = 5\cos^2(t).$$

Tomando $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ têm-se que

$$\sqrt{5 - x^2} = \sqrt{5\cos^2(t)} = \sqrt{5}|\cos(t)| = \sqrt{5}\cos(t).$$

Assim

$$\begin{aligned} x^3 \cdot \sqrt{5 - x^2}\,dx &= 5\sqrt{5}\sin^3(t) \cdot \sqrt{5}\cos(t) \cdot \sqrt{5}\cos(t)\,dt = 25\sqrt{5}\sin^3(t)\cos^2(t)\,dt. \\ &= 25\sqrt{5}\sin(t)\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt = 25\sqrt{5}\sin(t)\,[1 - \cos^2(t)]\cos^2(t)\,dt \\ &= 25\sqrt{5}\sin(t)\,[\cos^2(t) - \cos^4(t)]dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$I = \int x^3 \cdot \sqrt{5 - x^2}\,dx = 25\sqrt{5}\int [\cos^2(t) - \cos^4(t)]\sin(t)\,dt.$$

Substituindo $u = \cos(t)$, têm-se que $du = -\sin(t)\,dt$ e assim

$$I = 25\sqrt{5}\int [\cos^2(t) - \cos^4(t)]\sin(t)\,dt$$
$$= -25\sqrt{5}\int [u^2 - u^4]du = -25\sqrt{5}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right) + C$$
$$= -\frac{25\sqrt{5}}{3}\cos^3(t) + 5\sqrt{5}\cos^5(t) + C,$$

em que C é a constante de integração.

Voltando à substituição $x = \sqrt{5}\sin(t)$, têm-se que $\sin(t) = \frac{x}{\sqrt{5}}$ e então,

$$\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t) = 1 - \frac{x^2}{5} = \frac{5 - x^2}{5},$$

logo,

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{5}}.$$

Portanto

$$I = \int x^3 \cdot \sqrt{5 - x^2}\,dx = -\frac{25\sqrt{5}}{3}\cos^3(t) + 5\sqrt{5}\cos^5(t) + C$$
$$= -\frac{25\sqrt{5}}{3}\left[\frac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{5}}\right]^3 + 5\sqrt{5}\left[\frac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{5}}\right]^5 + C$$
$$= -\frac{25\sqrt{5}}{3}\frac{(5 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{5}} + 5\sqrt{5}\frac{(5 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{25\sqrt{5}} + C$$
$$= -\frac{5}{3}(5 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(5 - x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Opção 2: Aplicando a substituição $u = x^2$, obtém-se que $du = 2xdx$. Assim

$$x^3 \cdot \sqrt{5 - x^2}\,dx = x^2 x\sqrt{5 - x^2}dx = \frac{u\sqrt{5 - u}}{2}du.$$

Logo

$$I = \int x^3 \cdot \sqrt{5 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int u\sqrt{5 - u}\,du.$$

Aplicando a substituição $v = 5 - u$, tem-se que $dv = -du$ e $u = 5 - v$. Logo

$$I = \frac{1}{2}\int (5 - v)\sqrt{v}\,(-dv) = \frac{-1}{2}\int \left[5\sqrt{v} - v\sqrt{v}\right]dv = \frac{-1}{2}\int \left[5v^{1/2} - v^{3/2}\right]dv$$
$$= \frac{-1}{2}\left[5v^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} - v^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5}\right] + C = -\frac{5}{3}v^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}v^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= -\frac{5}{3}(5 - u)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(5 - u)^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{5}{3}(5 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(5 - x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Existem outras substituições que podem ser realizadas, por exemplo, $x = \sqrt{5}\cos t$, ou $u = 5 - x^2$, ou ainda, $u = (5 - x^2)^{3/2}$. Todas serão analisadas e avaliadas.

QUESTÃO 2:

a) (1,5 pontos): Modelo de resposta

A resposta deve conter, pelo menos:

1. A definição de máximos e mínimos (absolutos e/ou relativos) de uma função real de duas variáveis reais.

2. A interpretação geométrica dos pontos de máximo e mínimo (absolutos e/ou relativos) como pontos em que o plano tangente ao gráfico da função é paralelo ao plano xy.

3. O enunciado do Teorema do Valor Extremo Absoluto.

4. O enunciado do teorema que indica que os extremos relativos de uma função são os pontos em que as derivadas parciais da função são ambas nulas

5. O enunciado do Teorema do Teste da Derivada Segunda, que permite classificar pontos críticos como pontos de mínimo relativo, máximo relativo ou de sela.

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 13 (seção 13.8).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 2. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 14 (seção 14.7).

b) (1,0 ponto): Modelo de resposta

Como as derivadas parciais de f, dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^2 - 15 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 54,$$

estão bem definidas, os pontos críticos de f são tais que

$$\begin{cases} 15x^2 - 15 = 0 \\ 6y^2 - 54 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \end{cases}.$$

Logo, os pontos críticos da função são

$$P_1(1,3), \quad P_2(1,-3), \quad P_3(-1,3), \quad P_4(-1,-3).$$

Como as derivadas de segunda ordem de f são

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y,$$

tem-se que

$$\Delta(x,y) = \det\begin{bmatrix} 30x & 0 \\ 0 & 12y \end{bmatrix} = 360xy.$$

Assim, pelo Teste da Derivada Segunda:

$$\Delta(P_1) = \Delta(1,3) = 360 \cdot 1 \cdot 3 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = 30 \cdot 1 > 0,$$

$$P_1 \text{ é ponto de mínimo relativo;}$$

$$\Delta(P_2) = \Delta(1,-3) = 360 \cdot 1 \cdot (-3) < 0, \qquad P_2 \text{ é ponto de sela;}$$

$$\Delta(P_3) = \Delta(-1,3) = 360 \cdot (-1) \cdot 3 < 0, \qquad P_3 \text{ é ponto de sela;}$$

e

$$\Delta(P_4) = \Delta(-1,-3) = 360 \cdot (-1) \cdot (-3) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) = 30 \cdot (-1) < 0,$$

$$P_4 \text{ é ponto de máximo relativo.}$$

Portanto, o único ponto de mínimo relativo de f é $P_1(1,3)$ e o único ponto de máximo relativo de f é $P_4(-1,-3)$.

QUESTÃO 3:

a) (1,5 pontos): Modelo de resposta

A resposta deve conter, pelo menos:

1. As definições de núcleo e de imagem de uma transformação linear.
2. Os resultados que indicam que o núcleo de uma transformação linear $T: V \to W$ é um subespaço vetorial de V e que a imagem de T é um subespaço vetorial de W.
3. O enunciado do teorema da dimensão do núcleo e da imagem de uma transformação linear.
4. Pelo menos um exemplo resolvido sobre núcleo e imagem de uma transformação linear

Referências:

- ANTON, H. e RORRES, C. Álgebra linear com aplicações. São Paulo: Ed. Bookman, 2001. Capítulo 8 (seção 8.1).
- BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. São Paulo: Harbra, 2000. Capítulo 5 (seção 5.3).

b) (1,0 ponto): Modelo de Resposta

Suponha que $T: V \to W$ é uma transformação linear injetora e seja $v \in N(T)$. Logo

$$T(v) = \vec{0}_W.$$

Como, por propriedades, $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ têm-se que

$$T(v) = T(\vec{0}_V).$$

Como T é injetora, por hipótese, obtém-se que $v = \vec{0}_V$.

Portanto, $N(T) = \{\vec{0}_V\}$, ou seja, o núcleo de T é o subespaço nulo do domínio.

Reciprocamente, suponha que $T: V \to W$ é uma transformação linear tal que $N(T) = \{\vec{0}_V\}$. Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Logo

$$T(v_1) - T(v_2) = \vec{0}_W$$

e, por linearidade,

$$T(v_1 - v_2) = \vec{0}_W.$$

Logo, por definição, $v_1 - v_2 \in N(T)$. Como, por hipótese, $N(T) = \{\vec{0}_V\}$, obtém-se que

$$v_1 - v_2 = \vec{0}_V,$$

ou seja,

$$v_1 = v_2.$$

Portanto, $T(v_1) = T(v_2)$ implica que $v_1 = v_2$ e T é injetora.

QUESTÃO 4: Modelo de resposta

A resposta deve conter, pelo menos:

1. As definições de convergência e divergência de uma série numérica, a partir da convergência Sequência de Somas Parciais de uma série numérica.
2. As definições de convergência absoluta e condicional de uma série numérica.
3. Pelo menos um exemplo de uma série numérica convergente e um exemplo de uma série numérica divergente.
4. O enunciado e aplicação de dois critérios de convergências de séries numéricas, a ser escolhido pelos candidatos dentre os expostos pela literatura.

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 9 (seções 9.3, 9.4, 9.5 e 9.6).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 2. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 11 (seções 11.2, 11.3, 11.4, 11.5 e 11.5).

Assinaturas do documento

Código para verificação: **01E5T4PH**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

JARBAS CLEBER FERRARI (CPF: 951.XXX.489-XX) em 09/02/2026 às 12:36:28
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:36:56 e válido até 30/03/2118 - 12:36:56.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMDMxNTJfMzE1M18yMDI2XzAxRTVUNFBI ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00003152/2026** e o código **01E5T4PH** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.