PROCESSO SELETIVO 04/2026

PADRÃO DE RESPOSTAS DA PROVA ESCRITA
Área: Matemática

QUESTÃO 1: Modelo de resposta

A resposta deverá conter, pelo menos:

1. Estudo de integrais impróprias de funções contínuas, com intervalo de integração correspondente a $[a, +\infty)$, incluindo a definição formal, resolução de exemplos e interpretação geométrica.

2. Estudo de integrais impróprias de funções contínuas, com intervalo de integração correspondente a $(-\infty, a]$, incluindo a definição formal, resolução de exemplos e interpretação geométrica.

3. Estudo de integrais impróprias de funções contínuas, com intervalo de integração correspondente a $(-\infty, +\infty)$, incluindo a definição formal, resolução de exemplos e interpretação geométrica.

4. Estudo de integrais impróprias de funções cujo integrando admite pelo menos um ponto de descontinuidade infinita (com assíntota vertical) pertencente ao intervalo de integração, incluindo a definição formal, resolução de exemplos e interpretação geométrica.

5. A seguinte análise da convergência da integral dada

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int_1^{2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \\
&= \lim_{a\to 1^+} \int_a^{2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx + \lim_{b\to +\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \\
&= \lim_{a\to 1^+} \ln(\ln|x|)\big|_a^2 + \lim_{b\to +\infty} \ln(\ln|x|)\big|_2^b\big| \\
&= \lim_{a\to 1^+} [\ln(\ln(2)) - \ln|\ln(a)|] + \lim_{b\to +\infty} [\ln(\ln(b)) - \ln|\ln(2)| \\
&= \ln(\ln(2)) - (-\infty) + \infty - \ln|\ln(2)| = +\infty + \infty = +\infty,
\end{aligned}
$$

pois quando $a \to 1^+, \ln(a) \to 0^+$ e $\ln|\ln(a)| \to -\infty$,

e quando $b \to +\infty, \ln(b) \to +\infty$ e $\ln|\ln(b)| \to +\infty$.

Portanto, a integral dada é divergente.

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 7 (Seção 7.8).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 1. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 5 (Seções 5.2, 5.3 e 5.5) e Capítulo 7 (seção 7.8).

QUESTÃO 2: Modelo de resposta

A resposta deve conter, pelo menos:

1. Estudo sobre a utilização de coordenadas cilíndricas para a resolução de integrais triplas de funções reais de três variáveis reais, incluindo o elemento diferencial de volume em cilíndricas e resolução de exemplos.

2. Estudo sobre a utilização de coordenadas esféricas para a resolução de integrais triplas de funções reais de três variáveis reais, incluindo o elemento diferencial de volume em esféricas e resolução de exemplos.

3. Aplicação da utilização de coordenadas cilíndricas e esféricas para o cálculo de integrais triplas que permitam calcular o volume e/ou a massa de sólidos tridimensionais delimitados por duas ou mais superfícies.

4. Resolução da integral tripla dada, usando coordenadas cilíndricas:

$$I=\int_{-\frac{4}{5}}^{\frac{4}{5}}\int_{-\frac{1}{5}\sqrt{16-25x^2}}^{\frac{1}{5}\sqrt{16-25x^2}}\int_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{3\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z\sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{4}{5}}\int_{1+r}^{3\sqrt{1-r^2}} 2zr^2\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{4}{5}} z^2r^2\,\Big|_{1+r}^{3\sqrt{1-r^2}}\;drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{4}{5}}\left[\left(3\sqrt{1-r^2}\right)^2r^2-(1+r)^2r^2\right]drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{4}{5}}[(9-9r^2)r^2-(1+2r+r^2)r^2]\,drd\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{4}{5}}[9r^2-9r^4-r^2-2r^3-r^4]\,drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{4}{5}}[8r^2-10r^4-2r^3]\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{8r^3}{3}-2r^5-\frac{r^4}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{4}{5}}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{8}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3-2\left(\frac{4}{5}\right)^5-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^4\right]d\theta=\left[\frac{8}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3-2\left(\frac{4}{5}\right)^5-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^4\right]\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\left[\frac{8}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3-2\left(\frac{4}{5}\right)^5-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^4\right]2\pi=\left[\frac{2^3 2^6}{3\cdot5^3}-\frac{2^{11}}{5^5}-\frac{2^7}{5^4}\right]2\pi$$

$$=\left[\frac{2^{10}\cdot5^2}{3\cdot5^5}-\frac{3\cdot2^{12}}{3\cdot5^5}-\frac{3\cdot5\cdot2^8}{3\cdot5^5}\right]\pi=\frac{9472}{9375}\pi.$$

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 14 (seção 14.6).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 2. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 15 (seções 15.7 e 15.8).

QUESTÃO 3: Modelo de resposta

A resposta deve conter, pelo menos:

1. Estudo sobre Séries de Potências, incluindo sua definição e exemplos.
2. Estudo sobre o intervalo de convergência de uma Série de Potências, incluindo exemplos de determinação do intervalo mediante a aplicação de critérios de convergência absoluta e testes nos extremos.
3. Desenvolvimento em Série de MacLaurin da função dada:

   Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   tem-se que

$$f(x) = 3x^{25} e^{-9x^{14}} + x^{18}\operatorname{sen}(3x^7) = 3x^{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-9x^{14})^n}{n!} + x^{18} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x^7)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= 3x^{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 9^n \cdot x^{14n}}{n!} + x^{18} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot x^{14n+7}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 3^{2n} \cdot x^{25} \cdot x^{14n}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot x^{18} \cdot x^{14n+7}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot x^{14n+25}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot x^{14n+25}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(2n+1)!}\right] \cdot x^{14n+25}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n+1)! + n!}{n! \cdot (2n+1)!}\right] \cdot x^{14n+25}.$$

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 9 (seção 9.8).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 2. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 11 (seções 11.8, 11.9, 11.10).

QUESTÃO 4: Modelo de resposta

A resposta deve conter, pelo menos:

1. Definição de função crescente/decrescente, ponto crítico, ponto de inflexão, máximo/mínimos relativos.
2. Teoremas sobre o teste da primeira derivada para determinar pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento e pontos extremos de uma função.
3. Teoremas sobre o teste da derivada segunda para estudar a concavidade e determinar pontos de inflexão.
4. Resolução de pelo menos um exemplo em que, a partir da lei de uma função, seja construído o seu gráfico utilizando os teoremas sobre derivadas.
5. Esboço do gráfico da função proposta, justificando as etapas de construção.

Solução da questão proposta (Etapa 5):

i) O gráfico de f tem assíntota oblíqua $y = kx + b$ se $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ e $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = -6$, o gráfico de f tem assíntota oblíqua $y = x - 6$.

ii) $f'(x) > 0 \implies f(x)$ é crescente em: $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

$f'(x) < 0 \implies f(x)$ é decrescente em: $[-4, 0]$.

iii) Valores críticos: $x = -4$, $x = 0$ e $x = 2$, pois $f'(-4) = f'(2) = 0$ e $f'(0)$ não existe.

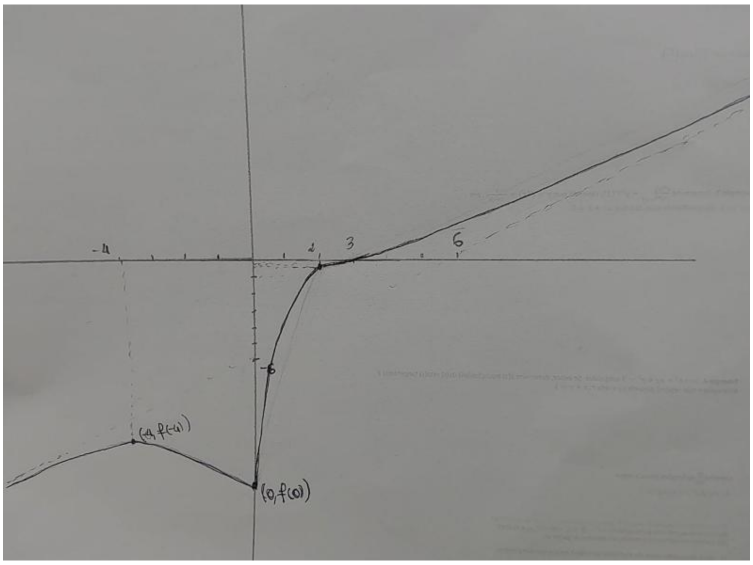
Pelo teste da primeira derivada (Anton, Bivens, Davis; 2014), o ponto $P(-4, f(-4))$ é um máximo relativo e $Q(0, f(0))$ é um ponto de mínimo relativo se a função for contínua em $x = 0$. Neste caso, como $f'(0)$ não está definido, há um "pico" em $Q(0, f(0))$.

iv) $f''(x) < 0$ (côncava para baixo) em $(-\infty, 2) - \{0\}$, pois $f'(x)$ é decrescente nesse intervalo.

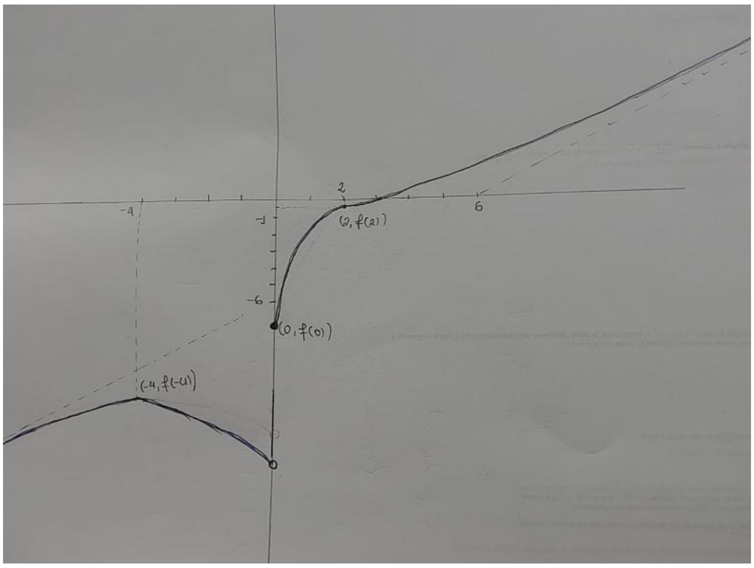
$f''(x) > 0$ (côncava para cima) em $(2, +\infty)$, pois $f'(x)$ é crescente nesse intervalo.

Assim, como há mudança de concavidade em $x = 2$, $R(2, f(2))$ é ponto de inflexão.

O esboço de um possível gráfico, que atende os requisitos supracitados quando a função f for contínua em $x = 0$, é:



O esboço de um possível gráfico que atende os requisitos supracitados quando a função f não é contínua em $x = 0$, é:



OBS: Quando f é descontínua em $x = 0$, o ponto $(0, f(0))$ pode estar situado em qualquer posição do eixo y.

Referências:

- ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Capítulo 4 (seções 4.1, 4.2, 4.3).
- STEWART, J. Cálculo. Volume 2. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Capítulo 4 (seções 4.3, 4.5).

Assinaturas do documento

Código para verificação: **J076PN6U**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

MARNEI LUIS MANDLER (CPF: 907.XXX.050-XX) em 22/06/2026 às 15:27:32
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:37:18 e válido até 30/03/2118 - 12:37:18.
(Assinatura do sistema)

GRACIELA MORO (CPF: 971.XXX.290-XX) em 22/06/2026 às 15:29:28
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:37:39 e válido até 30/03/2118 - 12:37:39.
(Assinatura do sistema)

MILAGROS NOEMI QUINTANA CASTILLO (CPF: 041.XXX.119-XX) em 22/06/2026 às 15:29:53
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:42:24 e válido até 30/03/2118 - 12:42:24.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjMwNTRfMjMwNTlfMjAyNl9KMDc2UE42VQ== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00023054/2026** e o código **J076PN6U** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.