PROCESSO SELETIVO – 07/2026

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 1

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ não nulos. Pela distributividade, pela homogeneidade e pela simetria do produto escalar, e usando $\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$, temos

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.\end{aligned}$$

Na Figura 1, os vetores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma origem e formam o ângulo θ. O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ liga a extremidade de $\vec{v}$ à de $\vec{u}$, formando o lado oposto a esse ângulo.

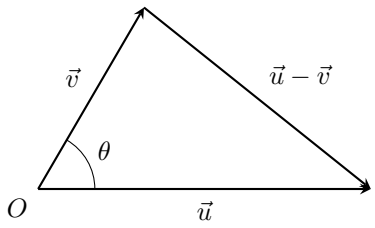


Figura 1: Triângulo de lados $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$, com ângulo θ entre os dois primeiros.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo da Figura 1, obtemos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Comparando as duas expressões, obtemos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta, \qquad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right), \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Nos casos colineares, a fórmula é verificada diretamente: se $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, com $\lambda \neq 0$, o quociente vale 1 para $\lambda > 0$ e -1 para $\lambda < 0$, correspondendo respectivamente aos ângulos 0 e π.

Como $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| > 0$, o sinal do produto escalar é o mesmo de $\cos\theta$. Assim, temos os seguintes casos:

(i) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então $\cos\theta > 0$, o que implica $0° \le \theta < 90°$.

(ii) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então $\cos\theta < 0$, o que implica $90° < \theta \le 180°$.

(iii) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\cos\theta = 0$, o que implica $\theta = 90°$. Portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Se um dos vetores for nulo, a fórmula não se aplica e o ângulo não é definido.

Referências: Stewart [2], sec. 12.3, p. 722; Leithold [7], sec. 14.2, p. 796.

Membros da Banca:

Avaliador 1 (nome e assinatura)	Avaliador 2 (nome e assinatura)
Avaliador 3 (nome e assinatura)	Presidente da Banca (nome e assinatura)

Pág. 01 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

PROCESSO SELETIVO – 07/2026

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 2

A função $f(r) = \sqrt{1 + r^4}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $1 + r^4 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Definindo

$$G(u) = \int_1^u f(r)\, dr,$$

o Teorema Fundamental do Cálculo garante que G é diferenciável e

$$G'(u) = f(u) = \sqrt{1 + u^4}.$$

Como $F(x) = G(x^2)$ e $x \mapsto x^2$ é diferenciável, a regra da cadeia fornece

$$F'(x) = G'(x^2)\, 2x = 2x\sqrt{1 + (x^2)^4} = 2x\sqrt{1 + x^8}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

As hipóteses utilizadas são a continuidade do integrando e a diferenciabilidade do limite superior. O resultado também vale quando $x^2 < 1$, pois a integral é entendida com a orientação usual dos limites.

Referências: Stewart [1], sec. 5.3, p. 364; Anton [5], sec. 5.6, p. 370; Guidorizzi [3], sec. 11.5, p. 306.

Membros da Banca:

Avaliador 1 (nome e assinatura)	Avaliador 2 (nome e assinatura)
Avaliador 3 (nome e assinatura)	Presidente da Banca (nome e assinatura)

Pág. 02 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

PROCESSO SELETIVO – 07/2026

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 3

Sejam a o raio da base e h a altura do cilindro. Uma seção pelo eixo do cilindro fornece

$$a^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2, \qquad h = 2\sqrt{r^2 - a^2}, \qquad 0 < a < r.$$

A área total, incluindo as duas bases, é

$$A = 2\pi ah + 2\pi a^2 = 4\pi a\sqrt{r^2 - a^2} + 2\pi a^2.$$

Introduzindo $u = a^2/r^2$, com $0 < u < 1$, obtemos

$$A(u) = 2\pi r^2 \left(u + 2\sqrt{u(1-u)}\right).$$

Assim,

$$A'(u) = 2\pi r^2 \left(1 + \frac{1-2u}{\sqrt{u(1-u)}}\right).$$

Nos pontos críticos,

$$2u - 1 = \sqrt{u(1-u)}.$$

É necessário que $u > 1/2$. Elevando ao quadrado,

$$(2u-1)^2 = u(1-u) \quad \Longleftrightarrow \quad 5u^2 - 5u + 1 = 0.$$

As raízes são $(5 \pm \sqrt{5})/10$, mas somente

$$u_* = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

satisfaz a equação antes de elevarmos ao quadrado. A função A estende-se continuamente a $[0,1]$, com $A(0) = 0$ e $A(1) = 2\pi r^2$. Como u_* é seu único ponto crítico interior e

$$u_*(1-u_*) = \frac{1}{5},$$

temos

$$A(u_*) = 2\pi r^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \pi r^2(1+\sqrt{5}) > 2\pi r^2.$$

Portanto, a maior área é

$$A_{\max} = \pi r^2(1+\sqrt{5}),$$

atingida quando

$$a = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \qquad h = 2r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Solução alternativa. Sejam a o raio e h a altura do cilindro. Sua área total é $A = 2\pi a^2 + 2\pi ah$. Na seção que contém o eixo do cilindro, ilustrada na Figura 2, o retângulo tem largura $2a$ e altura h. A distância do centro até um vértice do retângulo é r, de modo que o teorema de Pitágoras fornece $a^2 + h^2/4 = r^2$.

Pág. 03 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

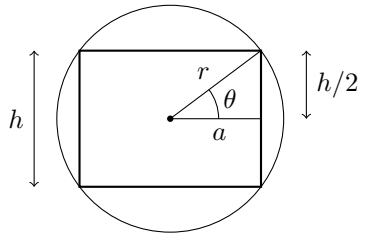


Figura 2: Seção axial do cilindro inscrito na esfera. O triângulo retângulo tem catetos a e $h/2$, hipotenusa r e ângulo θ entre os lados de comprimentos a e r.

Usando o ângulo θ indicado na Figura 2, parametrizamos as dimensões por $a = r\cos\theta$ e $h/2 = r\sin\theta$, com $0 < \theta < \pi/2$. Assim,

$$A(\theta) = 2\pi r^2\big(\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\big).$$

Derivando e fatorando, obtemos

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= 4\pi r^2\big(\cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\big) \\ &= 4\pi r^2\cos^2\theta\,(1 - t^2 - t), \qquad t = \tan\theta. \end{aligned}$$

Como t cresce de zero a $+\infty$ e $1 - t^2 - t$ é estritamente decrescente para $t > 0$, a derivada muda de positiva para negativa na única raiz positiva,

$$t_* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Esse ponto fornece o máximo global. Usando $\cos^2\theta = 1/(1+t^2)$, $1 + 2t_* = \sqrt{5}$ e $t_*^2 = 1 - t_*$, encontramos

$$A_{\max} = 2\pi r^2\frac{1 + 2t_*}{1 + t_*^2} = \frac{4\pi r^2\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \pi r^2(1 + \sqrt{5}).$$

Referências: Stewart [1], sec. 4.7, p. 308; Anton [5], sec. 4.5, p. 303.

Membros da Banca:

Avaliador 1 (nome e assinatura)	Avaliador 2 (nome e assinatura)
Avaliador 3 (nome e assinatura)	Presidente da Banca (nome e assinatura)

Pág. 04 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

PROCESSO SELETIVO – 07/2026

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 4

Pela fórmula da soma de uma série geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Tomando $q = -x^2$, segue que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Nesse intervalo, a convergência é absoluta, pois $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{2n}$ é geométrica de razão menor que 1. Para $x = 1$ ou $x = -1$, os termos são $(-1)^n$, que não tendem a zero; portanto, a série diverge nos dois extremos. Para $|x| > 1$, os termos também não tendem a zero. Assim, o raio de convergência é $R = 1$ e o intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

Referências: Stewart [2], sec. 11.9, p. 674; Leithold [7], sec. 13.2, p. 752; Anton [6], sec. 9.10 , p. 681; Guidorizzi [3], sec. 16.3, p. 480.

Membros da Banca:

Avaliador 1 (nome e assinatura)	Avaliador 2 (nome e assinatura)
Avaliador 3 (nome e assinatura)	Presidente da Banca (nome e assinatura)

Pág. 05 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

PROCESSO SELETIVO – 07/2026

Área de Conhecimento: Matemática

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 5

O conjunto cujo volume desejamos calcular é

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 2ax\right\}, \qquad a > 0.$$

A segunda desigualdade equivale a

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

isto é, o interior da esfera de centro $(a,0,0)$ e raio a. A primeira descreve a região acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Em coordenadas esféricas, adotamos

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

com $\rho \geq 0$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. A condição do cone torna-se

$$\rho\cos\varphi \geq \rho\sin\varphi.$$

Para $\rho > 0$, isso equivale a $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. A condição da esfera fornece

$$\rho^2 \leq 2a\rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad 0 \leq \rho \leq 2a\sin\varphi\cos\theta.$$

Como o limite superior deve ser não negativo, podemos tomar $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. A origem também pertence a E e não afeta o cálculo do volume. Portanto, usando o elemento de volume $dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\sin\varphi\cos\theta} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin^4\varphi\,d\varphi\right). \end{aligned}$$

A primeira integral é

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

Para a segunda, usamos a identidade

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{8}\cos(4\varphi).$$

Assim,

$$\int_0^{\pi/4}\sin^4\varphi\,d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} + \frac{\sin(4\varphi)}{32}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}.$$

Logo, o volume é

$$V = \frac{8a^3}{3}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}\right) = \frac{a^3}{9}(3\pi - 8).$$

Referências: Stewart [2], sec. 15.9, p. 927; Guidorizzi [4], sec. 5.5, p. 204.

Membros da Banca:

Avaliador 1 (nome e assinatura)	Avaliador 2 (nome e assinatura)
Avaliador 3 (nome e assinatura)	Presidente da Banca (nome e assinatura)

Pág. 06 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

Referências

[1] STEWART, James. *Cálculo*. Volume 1. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Tradução da 8ª edição norte-americana.

[2] STEWART, James. *Cálculo*. Volume 2. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Tradução da 8ª edição norte-americana.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. Volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. Volume 3. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[5] ANTON, Howard. *Cálculo: um novo horizonte*. Volume 1. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

[6] ANTON, Howard. *Cálculo: um novo horizonte*. Volume 2. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

[7] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica*. Volume 2. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

Pág. 07 de 07 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044753/2026 e o código 85MFM0F4.

Assinaturas do documento

Código para verificação: **85MFM0F4**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

JARBAS CLEBER FERRARI (CPF: 951.XXX.489-XX) em 09/11/2026 às 12:57:26
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:36:56 e válido até 30/03/2118 - 12:36:56.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNDQ3NTNfNDQ3NjNfMjAyNl84NU1GTTBGNA== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00044753/2026** e o código **85MFM0F4** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.