UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

Processo Seletivo 07/2026
Prova Escrita - Gabarito

Questão 1

Caso base ($n = 1$):

Para $n = 1$, temos:

$$(A_1) \cap B = A_1 \cap B.$$

A igualdade é válida para $n = 1$.

Passo indutivo

Hipótese de indução: Assumindo que a igualdade seja válida para algum $n \geq 1$, ou seja:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B).$$

Provar a validade para $n + 1$. Temos:

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \cap B &= \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \cap B \\
&= \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B\right] \cup (A_{n+1} \cap B) \\
\text{(Aplicando a Hipótese de indução)} &= \left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right] \cup (A_{n+1} \cap B) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n+1} (A_i \cap B).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, a igualdade é válida para todo $n \geq 1$.

Bibliografia de referência:

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

Pág. 01 de 04 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044034/2026 e o código 5LFHZ631.

Questão 2

A definição indutiva dos números naturais é dada por:

(N1) $0 \in \mathbb{N}$;

(N2) Se $n \in \mathbb{N}$, então $S(n) \in \mathbb{N}$.

Adição:

$$\begin{cases} 0 + m = m, \\ S(n) + m = S(n + m). \end{cases}$$

Multiplicação:

$$\begin{cases} 0 \cdot m = 0, \\ S(n) \cdot m = m + (n \cdot m). \end{cases}$$

Bibliografia de referência:

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

Questão 3

Item a)

Suponha que R seja uma relação reflexiva e transitiva sobre um conjunto A. Provar, por indução matemática, que:

$$R^n = R, \qquad \forall n \geq 1.$$

Caso base ($n = 1$):

Pela definição, temos:

$$R^1 = R.$$

Válida para $n = 1$ pela definição.

Passo indutivo:

Hipótese de indução: Assumindo que para $n \geq 1$ a igualdade é válida:

$$R^n = R.$$

Provar que $R^{n+1} = R$. Pela definição de potência de uma relação:

$$\begin{aligned} R^{n+1} &= R^n \circ R \\ \text{(Aplicando a Hipótese de indução)} &= R \circ R. \end{aligned}$$

Como R é transitiva, temos:

Pág. 02 de 04 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044034/2026 e o código 5LFHZ631.

$$R \circ R \subseteq R.$$

Por outro lado, como R é reflexiva, para todo $(a, b) \in R$ temos $(b, b) \in R$. Assim, existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, b) \in R$, o que implica em: $(a, b) \in R \circ R$.

Portanto:

$$R \subseteq R \circ R.$$

Se $R \circ R \subseteq R$ e $R \subseteq R \circ R$ então $R = R \circ R$, logo:

$$R^{n+1} = R \circ R = R.$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática:

$$\boxed{R^n = R, \qquad \forall n \geq 1.}$$

Item b)

A igualdade não continua sendo necessariamente verdadeira quando a relação é apenas transitiva. Considere, por exemplo, o conjunto:

$$A = \{1, 2\}$$

e a relação:

$$R = \{(1, 2)\}.$$

Essa relação é transitiva, pois não existem elementos $a, b, c \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Consequentemente, a condição de transitividade é satisfeita.

Entretanto, temos:

$$R^2 = R \circ R = \varnothing,$$

pois não existe elemento $b \in A$ tal que $(1, b) \in R$ e $(b, 2) \in R$.

Assim:

$$R^2 = \varnothing \neq R.$$

Portanto, a igualdade

$$R^n = R, \qquad \forall n \geq 1$$

não é necessariamente válida para relações transitivas que não são reflexivas.

Bibliografia de referência:

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

Pág. 03 de 04 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044034/2026 e o código 5LFHZ631.

Questão 4

Sim, é possível acomodar todos os novos hóspedes sem retirar nenhum dos hóspedes atuais. Considerando que a quantidade de quartos com numeração par e a quantidade de quartos com numeração impar são infinitas, a ideia consiste em realocar os hóspedes atuais para os quartos de numeração par e acomodar os novos hóspedes nos quartos de numeração ímpar.

Definimos a função $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, que determina o novo quarto de cada hóspede, considerando separadamente os hóspedes atuais e os novos hóspedes:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \text{ representa um hóspede atual,} \\ 2x - 1, & \text{se } x \text{ representa um novo hóspede.} \end{cases}$$

Bibliografia de referência:

ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

Pág. 04 de 04 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00044034/2026 e o código 5LFHZ631.

Assinaturas do documento

Código para verificação: **5LFHZ631**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

CRISTIANO DAMIANI VASCONCELLOS (CPF: 842.XXX.186-XX) em 09/11/2026 às 11:44:28
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:36:48 e válido até 30/03/2118 - 12:36:48.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNDQwMzRfNDQwNDRfMjAyNl81TEZIWjYzMQ== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00044034/2026** e o código **5LFHZ631** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.