

Investigamos a localização e o emaranhamento em caminhadas quânticas discretas no tempo com defeitos de fase na origem, isto é, uma caminhada dirigida por moeda quântica que introduz uma fase relativa entre estados de spin em  $j = 0$  das demais moedas na rede. Partindo do estado inicial local dado por  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ , mostramos numericamente que somente parte do estado é localizado em torno da origem e que o emaranhamento ao longo do tempo não possui limite assintótico. A intensidade da localização é dada pela diferença de fase entre a moeda na origem e as demais moedas, sendo máxima para uma diferença de fase  $\eta = \pi$  em uma média de 2016 q-bits iniciais.

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim

Coorientador: Rafael Camargo Rodrigues de Lima

Joinville, 2020

ANO  
2020

ANTÔNIO MACIEL DA SILVA | LOCALIZAÇÃO E EMARANHAMENTO EM  
CAMINHADAS QUÂNTICAS COM DEFEITO DE FASE



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## LOCALIZAÇÃO E EMARANHAMENTO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS COM DEFEITO DE FASE

ANTÔNIO MACIEL DA SILVA

JOINVILLE, 2020

**ANTÔNIO MACIEL DA SILVA**

**Localização e Emaranhamento em Caminhadas Quânticas  
com Defeito de Fase**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim

Coorientador:

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima

**JOINVILLE - SC  
2020**

da Silva, Antônio Maciel

Localização e Emaranhamento em Caminhadas Quânticas com Defeito de Fase / Antônio Maciel da Silva. - Joinville - 2020. 50 p.

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2020.

1. Caminhadas quânticas. 2. Defeito de fase. 3. Localização. 4. Emaranhamento. I. Amorim, Edgard Pacheco Moreira II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação. III. Título.

# Localização e Emaranhamento em Caminhadas Quânticas com Defeito de Fase

por

**Antonio Maciel da Silva**

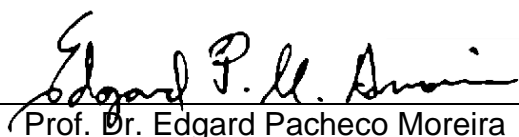
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

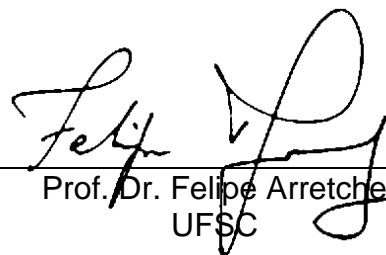
Área de concentração em “Física”  
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA  
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

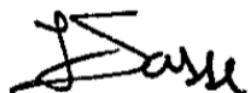
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira  
Amorim  
CCT/UDESC  
(Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Felipe Arretche  
UFSC



Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse  
CCT/UDESC

**Joinville, SC, 13 de abril de 2020.**

## AGRADECIMENTOS

Ao **Deus Trino** que tem sido muito gracioso comigo e me ajudou em todos os momentos, me fortalecendo e encorajando por meio de sua palavra. Sem Ele nada sou.

À minha querida esposa, **Vanizia Barboza da Silva Maciel**, que esteve comigo em todo momento me dando apoio espiritual e emocional. Por suas orações, conselhos e paciência. De fato você foi muito importante em todo este processo.

À minha amada e querida filha, **Hadassa Maciel Barboza**, que sempre trouxe muita alegria para mim. Seu sorriso alegra meu dia e seus abraços me fortalecem.

Aos meus queridos pais, **Francisco Simões da Silva**, e **Maria Creusa Marques da Silva** que são muito importantes para mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. **Edgard Pacheco Moreira Amorim**, por sua paciência, dedicação e por me apresentar esta área de pesquisa tão fascinante e proporcionar muito aprendizado tanto em caminhadas quânticas quanto em linguagem de programação Fortran.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. **Rafael Camargo Rodrigues de Lima**, pelas dicas de programação em Python.

Aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Física (PPGF) que contribuíram de forma significativa para meu aperfeiçoamento intelectual.

Aos técnicos Susele e Sidnei que sempre estiveram dispostos a oferecer ajuda quando precisei.

## RESUMO

da Silva, A. M.: *Localização e Emaranhamento em Caminhadas Quânticas com Defeito de Fase*. Dissertação de Mestrado (Universidade do Estado de Santa Catarina, 2020). 50 p.

Investigamos a localização e o emaranhamento em caminhadas quânticas discretas no tempo com defeitos de fase na origem, isto é, uma caminhada dirigida por moeda quântica que introduz uma fase relativa entre estados de spin em  $j = 0$  das demais moedas na rede. Partindo do estado inicial local dado por  $1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ , mostramos numericamente que somente parte do estado é localizado em torno da origem e que o emaranhamento ao longo do tempo não possui limite assintótico. A intensidade da localização é dada pela diferença de fase entre a moeda na origem e as demais moedas, sendo máxima para uma diferença de fase  $\eta = \pi$  em uma média de 2016 q-bits iniciais.

**Palavras-chave:** caminhadas quânticas; defeitos de fase; localização; emaranhamento.

## ABSTRACT

da Silva, A. M.: *Localization and Entanglement in Quantum Walks with Phase Defect*. Master Thesis (Santa Catarina State University, 2020). 50 p.

We investigate the localization and entanglement in one-dimensional discrete time quantum walks with phase defects at origin position, i.e., a walk driven by a quantum coin which introduces a relative phase between spin states at  $j = 0$  from the others one on the lattice. From an initial local state given by  $1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ , we show that just part of the state remains localized around the origin and the entanglement over time does not have asymptotic limit. The intensity of the localization is given by the phase difference between the coin in the origin and the remaining coins, being maximum for a phase difference  $\eta = \pi$  averaged over 2,016 initial qubits.

**Key-words:** quantum walks; phase defects; localization; entanglement.

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Distribuição de probabilidade clássica. Retirado de [10] com modificações. .	12
1.2	Em (a) Alice representa um caminhante clássico e (b) Bob representa um caminhante quântico. Retirado de [12] com modificações. . . . .	13
1.3	Interferômetro de Mach-Zehnder. . . . .	14
1.4	Esquema interferométrico. . . . .	15
2.1	Esfera de Bloch. Retirado de [10]. . . . .	19
2.2	Representação ilustrativa da evolução temporal do estado interno do caminhante quântico partindo da posição $j = 0$ com estado inicial $ \uparrow\rangle$ para dois passos no tempo. . . . .	25
2.3	Distribuição de probabilidade de uma caminhada quântica partindo do estado inicial $ \uparrow\rangle \otimes  0\rangle$ numa caminhada Hadamard de 100 passos. . . . .	26
2.4	(a) Distribuição de probabilidade numa caminhada Hadamard partindo de um estado inicial $ \Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\rangle + i \downarrow\rangle) \otimes  0\rangle$ (em azul) após 100 passos e numa caminhada clássica (em vermelho) para comparação. (b) Dispersão ao longo do tempo da caminhada quântica (em azul) e clássica (em vermelho). . . . .	27
3.1	Em (a) temos a distribuição de probabilidade, (b) a probabilidade na origem e (c) o emaranhamento para uma caminhada Hadamard. Em (d) temos a distribuição de probabilidade, (e) probabilidade na origem e (f) emaranhamento para a caminhada Hadamard com defeito Fourier na origem. . . . .	37
3.2	Distribuição de probabilidade para (a) $t = 50$ e (b) $t = 49$ . . . . .	37
3.3	(a)-(f) Distribuição de probabilidade e (g)-(l) emaranhamento para uma caminhada Hadamard com defeito de fase tal que $\eta = \pi$ (preto), $\pi/2$ (vermelho), $\pi/4$ (azul), $\pi/8$ (amarelo), $\pi/16$ (verde) e $\pi/64$ (azul-marinho). . . . .	39
3.4	Probabilidade na origem para a (a) caminhada Hadamard e (b) caminhada Hadamard com defeitos de fase $\eta = \pi$ (preto), $\pi/4$ (vermelho), $\pi/8$ (amarelo) e $\pi/64$ (azul). . . . .	40
3.5	Probabilidade na origem em função do defeito de fase $\eta$ . . . . .	40
3.6	(a) Distribuição de probabilidade e (b) emaranhamento para uma caminhada Hadamard com q-bit que gera emaranhamento máximo para 100 passos no tempo. . . . .	41



3.7	Intensidade da probabilidade em $j = 0$ para uma caminhada Hadamard de 100 passos com defeito na origem tal que a fase $\eta = \pi$ (preto), $\pi/2$ (vermelho) e $\pi/64$ (azul-marinho) partindo do estado local cujo q-bit gera máximo emaranhamento numa caminhada Hadamard. . . . .	42
3.8	(a)-(f) Distribuição de probabilidade e (g)-(l) emaranhamento para uma caminhada Hadamard com defeitos de fase tal que $\eta = \pi$ (preto), $\pi/2$ (vermelho), $\pi/4$ (azul), $\pi/8$ (amarelo), $\pi/16$ (verde) e $\pi/64$ (azul-marinho). . . . .	43
3.9	(a) Distribuição de probabilidade e (b) emaranhamento para uma caminhada Hadamard a partir de uma média de 2016 q-bits iniciais. . . . .	44
3.10	(a) Probabilidade média para 2016 q-bits iniciais numa caminhada Hadamard com defeito de fase tal que $\eta = \pi$ (preto), $\pi/2$ (vermelho), $\pi/4$ (azul), $\pi/8$ (amarelo), $\pi/16$ (verde) e $\pi/64$ (azul-marinho). (b) Emaranhamento médio para $\eta = \pi$ (preto) e $\pi/64$ (azul-marinho). (c) Dispersão média para $\eta = \pi$ (preto), $\pi/2$ (vermelho) e azul para a caminhada Hadamard. . . . .	45
3.11	Probabilidade na origem em função do defeito de fase $\eta$ para o q-bit $ \psi_C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\rangle -  \downarrow\rangle)$ dado pela equação 3.5 (preto), uma média de 2016 q-bits (azul) e o q-bit $ \psi_C\rangle = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \uparrow\rangle + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \downarrow\rangle$ dado pela equação 3.6 (vermelho). . . . .	45

# LISTA DE TABELAS

1.1	Distribuição de probabilidade para os cinco primeiros passos em uma caminhada clássica com $p = q = 1/2$ . . . . .	12
1.2	Distribuição de probabilidade para cinco passos em uma caminhada quântica. . . . .	15
3.1	Evolução do estado inicial dado pela equação (3.5) para quatro passos numa caminhada Hadamard e Hadamard com defeito de fase Fourier na origem. . . . .	35
3.2	Intensidade da probabilidade para diferentes posições numa caminhada Hadamard com defeito Fourier na origem em 10 e 11 passos de tempo respectivamente para posições $j$ pares e ímpares. . . . .	38

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Caminhada Aleatória Clássica e Quântica . . . . .	11
1.2	Organização da Dissertação . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Modelo Teórico</b>	<b>17</b>
2.1	O Estado Interno do Caminhante Quântico . . . . .	17
2.2	Estado Inicial Local . . . . .	19
2.3	Matrizes de Pauli e Rotações na Esfera de Bloch . . . . .	20
2.4	Moedas Quânticas . . . . .	22
2.5	Evolução Temporal do Estado da Caminhada Quântica . . . . .	24
2.6	Distribuição de Probabilidade e Dispersão . . . . .	25
2.7	Emaranhamento na Caminhada Quântica . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>33</b>
3.1	Estado inicial local com defeito Fourier na origem . . . . .	34
3.2	Estado inicial local variando a fase da moeda na origem . . . . .	38
3.3	Localização e alto emaranhamento variando a fase . . . . .	41
3.4	Localização e emaranhamento médios . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

## 1.1 Caminhada Aleatória Clássica e Quântica

Para apresentarmos de maneira didática a caminhada aleatória quântica, primeiro precisamos recorrer a caminhada aleatória clássica. Citada pela primeira vez na literatura por Pearson [1], a caminhada clássica é regida pelo lançamento de uma moeda e descreve a probabilidade de encontrar um caminhante clássico em uma rede de posições discretas. Existe uma vasta gama de aplicações das caminhadas clássicas, dentre elas podemos citar a resolução de problemas de otimização [2], na implementação do método de Monte Carlo para a solução da equação de Schrödinger de muitos corpos [3], em teoria de fractais [4], na descrição do movimento Browniano [5], em física de polímeros [6] e na modelagem matemática do movimento de animais na biologia [7].

Um caminhante clássico partindo da origem sobre uma rede unidimensional desloca-se para esquerda ou para direita em função do resultado aleatório do lançamento de uma moeda num jogo de cara e coroa. Se o resultado for cara ele será deslocado para direita e se for coroa será deslocado para esquerda. O deslocamento é discreto e o passo do caminhante terá sempre o mesmo comprimento  $l$ . A escolha de cara (direita) ou coroa (esquerda) é aleatória. Assim, se a probabilidade de sair cara for  $p \in [0, 1]$ , a probabilidade de sair coroa será de  $q = 1 - p$ . Para uma moeda justa, ou seja, com a mesma probabilidade de sair cara ou coroa, temos que  $p = q = 1/2$ . Após  $t$  passos no tempo, a probabilidade

de encontrar o caminhante clássico em uma certa posição  $j$  é dada por uma distribuição binomial [8],

$$P(j, t) = \frac{t!}{[(t+j)/2]![(t-j)/2]!} p^{(t+j)/2} q^{(t-j)/2}, \quad (1.1)$$

cujas probabilidades do caminhante clássico ao longo dos cinco primeiros passos estão na tabela 1.1.

t/j	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		3/8		3/8		1/8		
4		1/16		1/4		3/8		1/4		1/16	
5	1/32		5/32		5/16		5/16		5/32		1/32

Tabela 1.1: Distribuição de probabilidade para os cinco primeiros passos em uma caminhada clássica com  $p = q = 1/2$ .

No limite de muitos passos, a distribuição de probabilidade dada pela equação 1.1 se torna uma distribuição de probabilidade Gaussiana [9] dada por

$$\mathcal{P}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)/2\sigma^2} dx, \quad (1.2)$$

onde  $\mathcal{P}(x)dx$  é a probabilidade de encontrar o caminhante no intervalo entre  $x$  e  $x + dx$  após  $t$  passos de comprimento  $l$ . A dispersão é dada por  $\sigma = 2l\sqrt{tpq}$  e a posição média por  $\mu = (p - q)tl$ . Para uma moeda justa, isto é,  $p = q = 1/2$  e  $l = 1$  temos que  $\mu = 0$  e  $\sigma = \sqrt{t}$ . Portanto, na caminhada clássica, a dispersão é diretamente proporcional a raiz de  $t$ .

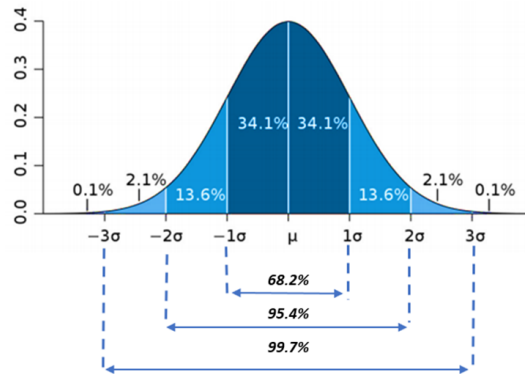


Figura 1.1: Distribuição de probabilidade clássica. Retirado de [10] com modificações.

Na Fig. (1.1) temos a distribuição de probabilidade do caminhante clássico para

muitos passos. Podemos inferir que existe uma probabilidade de aproximadamente 68.2% de encontrarmos o caminhante clássico entre  $\mu \pm \sigma$ . Se for observado a tabela (1.1) em comparação com a distribuição de probabilidade na Fig. (1.1) podemos concluir que existe maior probabilidade de encontrarmos o caminhante clássico em torno da origem e, quanto mais afastada da origem for uma dada posição, menor será a probabilidade de encontrarmos o caminhante clássico nela.

A caminhada quântica surgiu em 1993 com Aharonov, Davidovich e Zagury, pensando em um análogo quântico a caminhada aleatória clássica [11]. Tal caminhada é caracterizada por amplitudes de probabilidade e pelo princípio da superposição. O caminhante quântico é uma partícula com um grau de liberdade interno, por exemplo, um elétron ou um fóton, colocado em uma rede regular de posições onde cada posição é um grau de liberdade externo. A dinâmica do caminhante quântico depende de dois operadores: a moeda quântica e o operador de translação condicional. Ao serem aplicados num dado estado, o primeiro coloca o estado interno do caminhante em uma nova superposição de estados e o segundo condiciona a translação ao novo estado interno. Estes dois se unem formando o operador de evolução temporal do sistema. Para deixar este assunto mais claro, na Fig. (1.2) tem-se um exemplo com dois personagens que serão chamados de Alice e Bob. Alice representa um caminhante clássico, enquanto Bob representa o quântico.

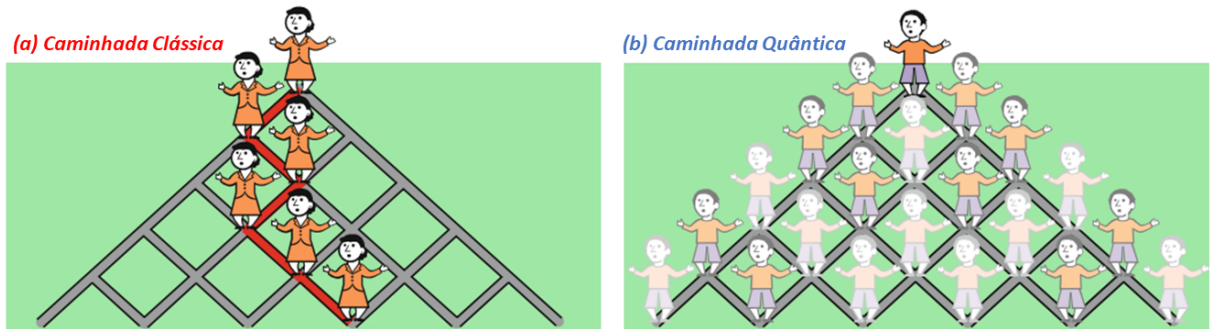


Figura 1.2: Em (a) Alice representa um caminhante clássico e (b) Bob representa um caminhante quântico. Retirado de [12] com modificações.

Alice pode ir para direita ou esquerda em função do resultado do lançamento de uma moeda (cara ou coroa) como já foi comentado. Mas com Bob é bem diferente, pois por ele ser quântico suas diferentes amplitudes de probabilidade podem ser colocadas em superposição, isto é, em uma combinação linear de estados. Isso significa que, em vez de ir para direita ou esquerda, a moeda quântica coloca-o em uma superposição, ou seja, ele vai para direita e esquerda ao mesmo tempo, portanto, ele se espalha ao longo das

posições. Repare que o brilho de Bob é menos ou mais intenso em certas posições do que em outras e, isso acontece porque suas amplitudes de probabilidades sofrem interferência destrutiva e construtiva. Para melhor compreender como isso acontece, podemos analisar o interferômetro de Mach-Zehnder na Fig. 1.3.

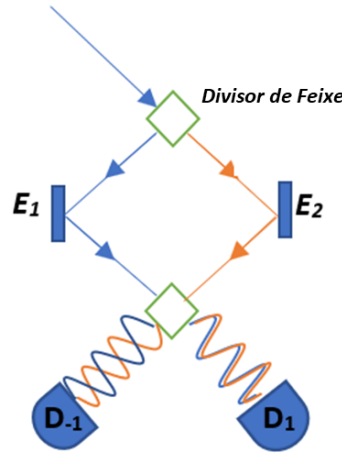


Figura 1.3: Interferômetro de Mach-Zehnder.

O interferômetro de Mach-Zehnder é composto por divisores de feixe (beam splitters - BS), dois espelhos refletores ( $E_1$  e  $E_2$ ) e os detectores ( $D_{-1}$  e  $D_1$ ) para medir a intensidade da luz [13, 14]. Quando a luz passa pelo BS é dividida em duas partes, pois uma é transmitida e a outra é refletida formando entre si um ângulo de  $\pi/2$ <sup>1</sup>. Cada vez que a luz é refletida pelo BS ou pelo espelho refletor, ela ganha uma adição de fase de  $\pi/2$ . Portanto a metade do feixe (em azul) que chega no detector  $D_{-1}$  possui uma fase de  $3\pi/2$  enquanto que a outra metade (em vermelho) chega com fase  $\pi/2$  acarretando assim em uma interferência destrutiva. Já no detector  $D_1$ , ambas chegam com fase  $\pi$  gerando assim uma interferência construtiva.

Agora, suponhamos um arranjo com vários BS conforme mostra a Fig. (1.4). Neste caso, o feixe é análogo ao caminhante quântico que se espalha por todas as posições a medida que o sistema evolui no tempo e a intensidade com que ela chega em cada posição relaciona-se com sua distribuição de probabilidade. Enquanto o interferômetro de Mach-Zehnder trata de uma onda clássica, quando tratamos o comportamento de um único fóton no mundo quântico, temos a caminhada quântica, pois neste contexto, ele interfere consigo mesmo. A tabela (1.2) representa a distribuição de probabilidade do caminhante

<sup>1</sup>A. Zeilinger [15] demonstra que podemos obter vários ângulos entre a luz refletida e transmitida por meio de um divisor de feixe.

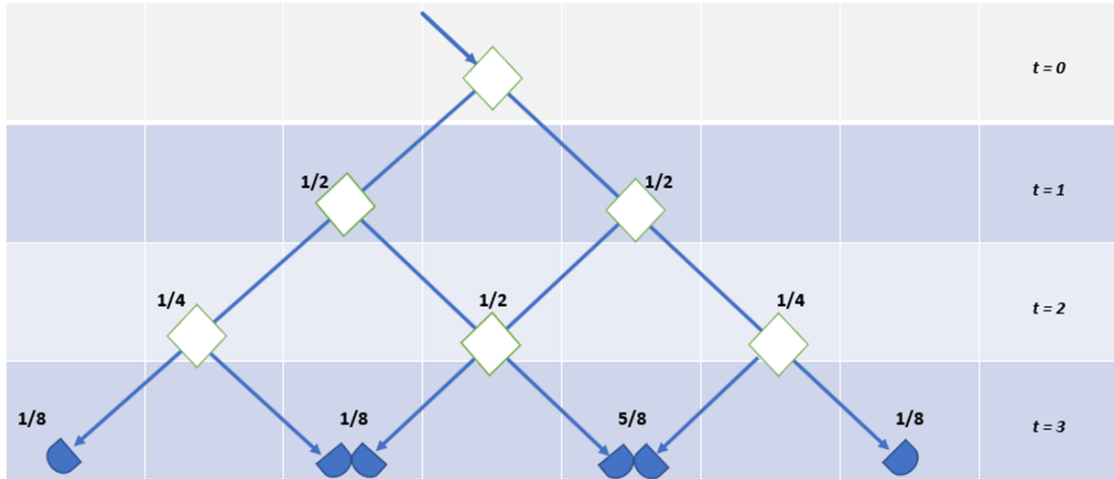


Figura 1.4: Esquema interferométrico.

quântico para cinco passos.

t/j	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		1/8		5/8		1/8		
4		1/16		1/8		1/8		5/8		1/16	
5	1/32		5/32		1/8		1/8		17/32		1/32

Tabela 1.2: Distribuição de probabilidade para cinco passos em uma caminhada quântica.

Relacionando as tabelas (1.1) e (1.2) vemos que a caminhada clássica e quântica começam a divergir a partir do terceiro passo. Uma característica muito importante da caminhada quântica é que ela possui dispersão quadraticamente superior a clássica, ou seja, enquanto a dispersão da caminhada clássica é  $\sigma \propto \sqrt{t}$ , a quântica é  $\sigma \propto t$ . A caminhada quântica também possui uma outra característica que não tem analogia com o caso clássico, ou seja, uma correlação quântica entre os graus de liberdade interno e externo do caminhante quântico conhecida como emaranhamento quântico, que surge a partir da sua translação condicionada ao estado interno do caminhante [10, 16–18]. É importante ressaltar que poderíamos recuperar a caminhada clássica se a cada passo de tempo efetuássemos uma medida da posição do caminhante quântico (colapso da função de onda) e pudéssemos continuar a caminhada a partir da posição medida.

Existem diversas aplicações das caminhadas quânticas das quais podemos destacar a formulação de algoritmos de busca quântica [19], o estudo de oscilações de neutrinos [20], o desenvolvimento de novos protocolos de teletransporte [21], em problemas de percolação



[22], o estudo de transporte em nanoestruturas [23], a tomada de decisão humana [24], na fotossíntese [25], a produção de entropia [26] dentre outras aplicações. Além disso, as caminhadas quânticas podem ser implementadas experimentalmente de diferentes maneiras [12].

## 1.2 Organização da Dissertação

No capítulo 2, apresentamos o modelo teórico das caminhadas quânticas. Inicialmente demonstramos como chegar na representação geométrica de um q-bit e sua visualização na esfera de Bloch e definimos um estado local. Logo após, apresentamos a relação entre as matrizes de Pauli e rotações na esfera de Bloch. A partir desta demonstração construímos a representação geral das moedas quânticas. Em seguida, mostramos como se dá a evolução temporal do caminhante quântico. Por fim, tratamos da distribuição de probabilidade, dispersão e emaranhamento.

No capítulo 3, apresentamos os resultados obtidos neste trabalho. Começamos definindo o que é uma caminhada quântica com defeito, ou seja, com uma moeda quântica Fourier na origem e Hadamard nas demais posições da rede. Logo após, mostramos como se dá a distribuição de probabilidade e emaranhamento para 100 passos no tempo nesse contexto. Após isso, variamos a fase da moeda na origem e analisamos a distribuição de probabilidade e o emaranhamento para dois q-bits diferentes e por último fizemos o mesmo estudo partindo de uma média de 2016 estados iniciais.

Por fim, no capítulo final são apresentados os pontos mais importantes da pesquisa e algumas sugestões de continuidade para esse trabalho.

## CAPÍTULO 2

# MODELO TEÓRICO

### 2.1 O Estado Interno do Caminhante Quântico

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo matemático das caminhadas quânticas. O estado do caminhante unidimensional  $|\Psi\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$ , onde  $\mathcal{H}_C$  é o espaço das moedas e  $\mathcal{H}_P$  é o espaço das posições. O espaço das moedas é bidimensional, complexo e descrito por vetores ortonormais que podem ser representado na base  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ . Já o espaço das posições é um espaço infinito e contável representado na base  $\{\dots, |j-1\rangle, |j\rangle, |j+1\rangle, \dots\}$  tal que  $j$  é inteiro [27]. O estado interno do caminhante quântico é um q-bit<sup>1</sup>, representado por:

$$|\psi_C\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle, \quad (2.1)$$

onde pela condição de normalização tem-se que:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (2.2)$$

na qual  $a$  e  $b$  representam amplitudes de probabilidade complexas assim,  $|a|^2$  fornece a probabilidade de encontrar o estado  $|\uparrow\rangle$  e  $|b|^2$  a probabilidade de encontrar  $|\downarrow\rangle$ . Os estados

---

<sup>1</sup>Um q-bit é um sistema de dois estados ou dois níveis na mecânica quântica. Trata-se de um sistema que pode existir em qualquer superposição de dois estados quânticos fisicamente distinguíveis. Por exemplo, um elétron terá seu estado interno (q-bit) como uma combinação linear dos kets  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ .

$|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  tem as seguintes representações matriciais:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Podemos representar a equação (2.1) em coordenadas polares da seguinte forma [28, 29]:

$$|\psi_C\rangle = r_a e^{i\beta_a} |\uparrow\rangle + r_b e^{i\beta_b} |\downarrow\rangle, \quad (2.4)$$

onde  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $\beta_a$  e  $\beta_b$  são parâmetros reais. Na equação (2.4), colocando  $e^{i\beta_a}$  em evidência, obtemos:

$$|\psi_C\rangle = e^{i\beta_a} [r_a |\uparrow\rangle + r_b e^{i(\beta_b - \beta_a)} |\downarrow\rangle]. \quad (2.5)$$

É importante observar que podemos remover o parâmetro  $e^{i\beta_a}$  conhecido como fator de fase global [30], pois ele não interfere na medida do q-bit como podemos ver a seguir:

$$|e^{i\beta_a} a|^2 = e^{-i\beta_a} e^{i\beta_a} a^* a = a^* a = |a|^2, \quad (2.6)$$

o mesmo acontece com  $b$ . Então podemos reescrever (2.5) da seguinte forma:

$$|\psi_C\rangle = r_a |\uparrow\rangle + r_b e^{i\beta} |\downarrow\rangle, \quad (2.7)$$

em que  $\beta = \beta_b - \beta_a$  é a diferença de fase, ou ainda, fase relativa entre os estados  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Da condição de normalização temos que:

$$\langle\psi_C|\psi_C\rangle = r_a^2 + r_b^2 = 1, \quad (2.8)$$

cuja solução pode ser dada por  $r_a = \cos\theta$  e  $r_b = \sin\theta$ . Assim a equação (2.7) pode ser reescrita como

$$|\psi_C\rangle = \cos\theta |\uparrow\rangle + \sin\theta e^{i\beta} |\downarrow\rangle. \quad (2.9)$$

Pela equação (2.9) vemos que se  $\theta = 0$  obtemos  $|\psi_C\rangle = |\uparrow\rangle$ , e quando  $\theta = \pi/2$  temos que  $|\psi_C\rangle = |\downarrow\rangle$ . Assim para  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  com  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  obtemos todos os estados internos do caminhante quântico. Logo para chegarmos na definição da esfera de Bloch

basta fazermos  $\theta = \alpha/2$  com  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Portanto a equação (2.9) pode ser escrita como:

$$|\psi_C\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\downarrow\rangle, \quad (2.10)$$

que é a equação geométrica do estado interno do caminhante quântico representado na esfera de Bloch (2.1) com  $\alpha \in [0, \pi]$  e  $\beta \in [0, 2\pi]$ .

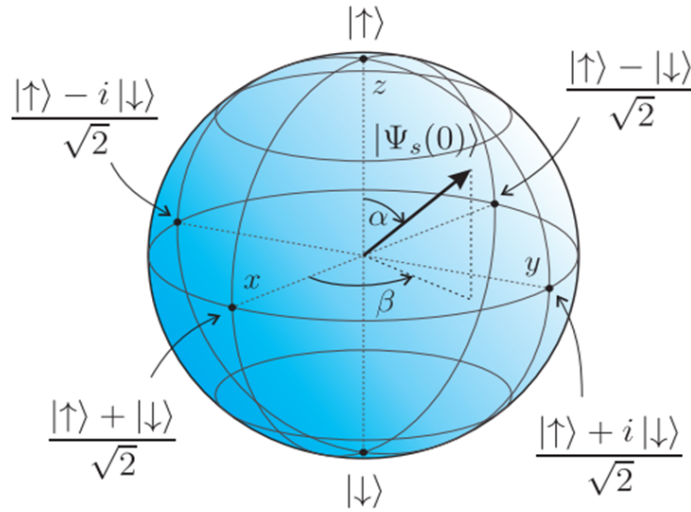


Figura 2.1: Esfera de Bloch. Retirado de [10].

Vemos que cada ponto da esfera de Bloch representa um estado interno diferente do caminhante quântico. Os pontos do Equador correspondem a uma superposição igualitária entre spin  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Para entender melhor como a esfera de Bloch se relaciona com o estado interno do caminhante quântico é interessante olharmos para os seguintes exemplos. Primeiramente tomando  $\alpha = 0$  e  $\beta \in \{0, 2\pi\}$  na Eq. (2.10), temos que  $|\psi_C\rangle = |\uparrow\rangle$  ou ainda,  $\alpha = \beta = \pi/2$ , temos que  $|\psi_C\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ . Logo, observamos que para os ângulos  $\alpha = 0$  e  $\beta$  arbitrário, o estado inicial é  $|\uparrow\rangle$ , mas quando  $\alpha = \beta = \pi/2$  obtemos uma superposição igualitária entre os estados de spin  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , mas com uma diferença de fase  $\pi/2$  entre eles, como pode ser visto na Fig. (2.1).

## 2.2 Estado Inicial Local

O caminhante quântico é uma partícula de spin-1/2, ou seja, o grau de liberdade interno é dado por um sistema de dois níveis e o grau de liberdade externo é a posição,

portanto a representação geral para um estado inicial do caminhante quântico é dado por,

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_C\rangle \otimes f(j) |j\rangle \quad (2.11)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [a(j, 0) |\uparrow\rangle + b(j, 0) |\downarrow\rangle] \quad (2.12)$$

tal que  $a(j, 0) = f(j) \cos(\alpha/2)$  e  $b(j, 0) = f(j)e^{i\beta} \sin(\alpha/2)$ , obedecendo a condição de normalização  $\sum_j [|a(j, 0)|^2 + |b(j, 0)|^2] = 1$ . Para obtermos o estado inicial local basta tomar  $f(j) = \delta(j)$  na equação 2.12, ou seja,

$$|\Psi_L(0)\rangle = |\psi_C\rangle \otimes |0\rangle, \quad (2.13)$$

cuja posição inicial corresponde a  $j = 0$ .

## 2.3 Matrizes de Pauli e Rotações na Esfera de Bloch

As matrizes de Pauli são definidas por um conjunto de matrizes complexas 2x2 hermitianas e unitárias<sup>2</sup> dadas por [30, 31]:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$I \equiv \sigma_x^2 \equiv \sigma_y^2 \equiv \sigma_z^2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

quando exponenciadas dão origem a importantes classes de matrizes unitárias de rotação, que atuam sobre o vetor de Bloch rotacionando-o em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  [29]. Os operadores de rotação são definidos como:

---

<sup>2</sup>Uma matriz  $A$  é dita hermitiana quando  $A = A^\dagger$  e unitária quando  $A^{-1} = A^\dagger$  onde  $A^\dagger$  é a transposta conjugada de  $A$ .

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2}, \quad (2.18)$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2}, \quad (2.19)$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2}, \quad (2.20)$$

onde  $X, Y$  e  $Z$  são as matrizes de Pauli (2.14), (2.15) e (2.16).

Para uma função  $F(A)$ , tal que  $A^\dagger A = AA^\dagger = I$ , podemos expandir  $F(A)$  em uma série de Taylor da seguinte forma [32]:

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + \dots, \quad (2.21)$$

onde  $a_n$  é apenas um coeficiente de expansão. Então para uma função exponencial do tipo  $e^{iA\theta}$ , temos que:

$$e^{iA\theta} = I + i\theta A - \frac{\theta A^2}{2!} - i\frac{\theta A^3}{3!} + \frac{\theta A^4}{4!} + i\frac{\theta A^5}{5!} \dots, \quad (2.22)$$

mas  $A^k = I$  para  $k$  par, logo

$$e^{iA\theta} = \left(1 - \frac{\theta}{2!} + \frac{\theta}{4!} + \dots\right) I + i\left(\theta - \frac{\theta}{3!} + \frac{\theta}{5!} + \dots\right) A = \cos \theta I + i \sin \theta A. \quad (2.23)$$

Portanto a partir da equação (2.23) e das matrizes de Pauli, os operadores de rotação ficam definidos como

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Um operador arbitrário unitário de um q-bit pode ser escrito de várias formas, como

uma combinação de rotações, junto com mudanças de fases globais do q-bit. Sendo  $U$  uma operação unitária sobre um q-bit, existem números reais  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  tais que [30]

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta), \quad (2.27)$$

onde  $e^{i\alpha}$  é um fator de fase global. Reescrevendo em termos dos operadores de rotação  $R_y$  e  $R_z$ , temos que

$$U = e^{i\alpha} \begin{bmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

O operador  $U$  pode ser utilizado para construir de forma exata qualquer moeda quântica como será visto na próxima seção [30].

## 2.4 Moedas Quânticas

Na introdução, fizemos uma analogia entre a caminhada clássica e quântica. Foi demonstrado que podemos obter a probabilidade do caminhante clássico ir para direita ou para esquerda por meio do lançamento de uma moeda. Já a moeda quântica consiste num operador que atua no estado interno do caminhante, e ao aplicá-la sobre esse estado interno estamos rotacionando-o na esfera de Bloch, levando de um q-bit a outro, ou seja, indo de uma superposição de estados de spin a uma outra. Portanto a moeda quântica é um operador de rotação na esfera de Bloch que pertence ao grupo  $SU(2)$  sendo definida como:

$$\hat{C} = c_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + c_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + c_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + c_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\rangle \langle\downarrow|. \quad (2.29)$$

Podemos escrever a moeda quântica geral a partir da equação (2.28) fazendo  $\alpha = \pi$ ,  $\cos(\gamma/2) = \sqrt{q}$ ,  $\beta = 2\theta$  e  $\delta = 2\phi + \pi$ . Assim,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{\uparrow\uparrow} & c_{\uparrow\downarrow} \\ c_{\downarrow\uparrow} & c_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{1-q}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-q}e^{i\phi} & -\sqrt{q}e^{-i(\theta+\phi)} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

tal que  $0 \leq q \leq 1$ , nos informa o quão justa é a moeda, assim quando  $q = 1/2$  temos uma superposição igualitária de spin  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , mas para  $q \neq 1/2$  temos uma moeda tendenciosa. Já os parâmetros  $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$  nos informam a fase relativa entre  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ .

Em especial, duas moedas largamente usadas na literatura são a Hadamard e Fourier. Vamos começar explorando primeiramente a moeda Hadamard. Essa moeda é obtida por meio da equação (2.30), tal que  $q = 1/2$  e  $\theta = \phi = 0$ . Assim temos,

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Vamos aplicar a moeda Hadamard a um q-bit  $|\uparrow\rangle$ , temos:

$$\hat{H} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.32)$$

Agora vamos analisar com detalhes o que aconteceu com o q-bit ao aplicarmos a moeda Hadamard sobre ele. O estado inicial era  $|\uparrow\rangle$  e no final ficamos com uma superposição igualitária entre  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , portanto sofreu uma rotação de  $\pi/2$  em  $\alpha$  e de 0 em  $\beta$  na esfera de Bloch. Uma moeda Hadamard pode simular fisicamente o efeito de um campo magnético não-uniforme aplicado sobre um feixe de partículas de spin-1/2 separando as componentes  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  sem diferença de fase entre elas, tal como no experimento de Stern-Gerlach.

Para obtermos a moeda Fourier basta substituirmos  $q = 1/2$  e  $\theta = \phi = \pi/2$  na equação 2.30, logo temos,

$$\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

e aplicando-a ao mesmo q-bit, temos

$$\hat{F} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.34)$$

Ao aplicarmos a moeda Fourier, vemos que ela causou uma rotação de  $\pi/2$  em  $\alpha$  e  $\beta$  na esfera de Bloch, levando o q-bit  $|\uparrow\rangle$  para o estado na equação (2.34). O termo  $i$  significa que temos uma fase relativa entre  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  de  $\pi/2$ . Fisicamente, uma moeda Fourier pode ser interpretada como um meio-divisor de feixe, no qual metade da intensidade é transmitida sem diferença de fase e a outra metade é refletida com uma diferença de fase de  $\pi/2$  correspondendo a uma propagação ortogonal em relação a parte do feixe transmitida, assim como no interferômetro de Mach-Zehnder.



Neste caso, podemos como exemplo, atribuir a um dado fóton que incida pela direita sobre o meio-divisor de feixes na posição 0, o estado interno dado por  $|\uparrow\rangle$ . Logo, ao ser transmitido temos que parte do feixe incidirá à direita no próximo meio-divisor na posição 1 sem diferença de fase em relação ao feixe inicial. Já a parte refletida, incidirá à esquerda no meio-divisor na posição  $-1$  com uma fase em relação ao feixe transmitido de  $\pi/2$ . Finalmente, podemos considerar ainda que ao passar pelo primeiro divisor o resultado será então, um novo estado dado pela equação (2.34) correspondendo a uma superposição igualitária entre  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  com uma diferença de fase de  $\pi/2$ .

## 2.5 Evolução Temporal do Estado da Caminhada Quântica

A evolução temporal de um estado  $|\Psi(n)\rangle$  da caminhada quântica em tempo discreto após  $n$  passos no tempo é dado por,

$$|\Psi(n)\rangle = \mathcal{T} \prod_{t=1}^n \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (2.35)$$

onde  $\mathcal{T}$  indica que o produtório é ordenado temporalmente e,

$$U(t) = \hat{S}(\hat{C} \otimes \hat{I}_p), \quad (2.36)$$

tal que  $U(t)$  é o operador de evolução temporal composto pelo operador de translação condicional  $\hat{S}$ , a moeda quântica  $\hat{C}$  e o operador identidade nas posições  $\hat{I}_p$ . Vimos que a moeda, faz com que o estado interno sofra uma rotação na esfera de Bloch, mas após isso, para que o caminhante quântico tenha suas amplitudes de probabilidade deslocadas utilizamos o operador de translação condicional,

$$\hat{S} = \sum_j \left( |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |j+1\rangle \langle j| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |j-1\rangle \langle j| \right), \quad (2.37)$$

que faz com que a parte  $|\uparrow\rangle$  do estado se desloque para a posição vizinha à direita e a parte  $|\downarrow\rangle$  se desloque para a posição vizinha à esquerda, ou seja, a translação para a direita e esquerda está condicionada às amplitudes  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  respectivamente.

Na Fig. (2.2), podemos visualizar o que acontece com o estado do caminhante quântico  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  ao evolui-lo no tempo. Ao aplicarmos o operador evolução temporal, o operador moeda atua sobre esse estado causando uma rotação na esfera de Bloch colocando-o (por











Tempo	Posição(j)				
	-2	-1	0	1	2
0					
1					
	Translação de spin down(verde) para esquerda				Translação de spin up(azul) para direita.
2					
			 + 		

Figura 2.2: Representação ilustrativa da evolução temporal do estado interno do caminhante quântico partindo da posição  $j = 0$  com estado inicial  $|\uparrow\rangle$  para dois passos no tempo.

exemplo) em uma superposição igualitária de  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Feito isso, é a vez do operador de translação condicional entrar em ação, deslocando o  $|\uparrow\rangle$  para direita que inicialmente em  $j = 0$  vai para  $j = 1$  e o  $|\downarrow\rangle$  para esquerda vai para a posição  $j = -1$ .

## 2.6 Distribuição de Probabilidade e Dispersão

Afim de ilustrarmos a evolução temporal da caminhada quântica, suponha um estado inicial  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  que evolui por meio de uma moeda Hadamard. Ao aplicarmos o operador de evolução unitária para um passo de tempo (equação 2.36) temos que

$$|\Psi(1)\rangle = \hat{U} |\Psi(0)\rangle \quad (2.38)$$

$$= \hat{S}(\hat{C} \otimes \hat{I}_P)(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \quad (2.39)$$

$$= \hat{S}(\hat{H} |\uparrow\rangle \otimes \hat{I}_P |0\rangle) \quad (2.40)$$

$$= \hat{S} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \otimes |0\rangle \quad (2.41)$$

$$= \hat{S} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \otimes |0\rangle \quad (2.42)$$

$$= \hat{S} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \otimes |0\rangle \quad (2.43)$$

$$= \hat{S} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right] \otimes |0\rangle, \quad (2.44)$$

e aplicando agora o operador de deslocamento condicional,

$$|\Psi(1)\rangle = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |j+1\rangle\langle j| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |j-1\rangle\langle j|) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right] \otimes |0\rangle \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |0+1\rangle\langle 0| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |0-1\rangle\langle 0| \right), \quad (2.46)$$

resultando em

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle \right). \quad (2.47)$$

Portanto ao aplicarmos o operador de evolução temporal em um estado inicial  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  em uma caminhada Hadamard, obtemos como resultado uma probabilidade de 50% de encontrarmos  $|\uparrow\rangle$  na posição  $j = 1$  e 50% de chance de obtermos  $|\downarrow\rangle$  na posição  $j = -1$  após o primeiro passo. Se fizermos esse processo sucessivas vezes, obtendo um novo estado no tempo  $t$  a partir do estado em  $t-1$ , obtemos a distribuição de probabilidade assimétrica da Fig. (2.3). Essa assimetria está relacionada ao fato do estado inicial do caminhante ser apenas  $|\uparrow\rangle$ , assim existe uma maior concentração no lado direito da distribuição de probabilidade, já que o operador de translação condicional desloca  $|\uparrow\rangle$  para direita e  $|\downarrow\rangle$  para esquerda.

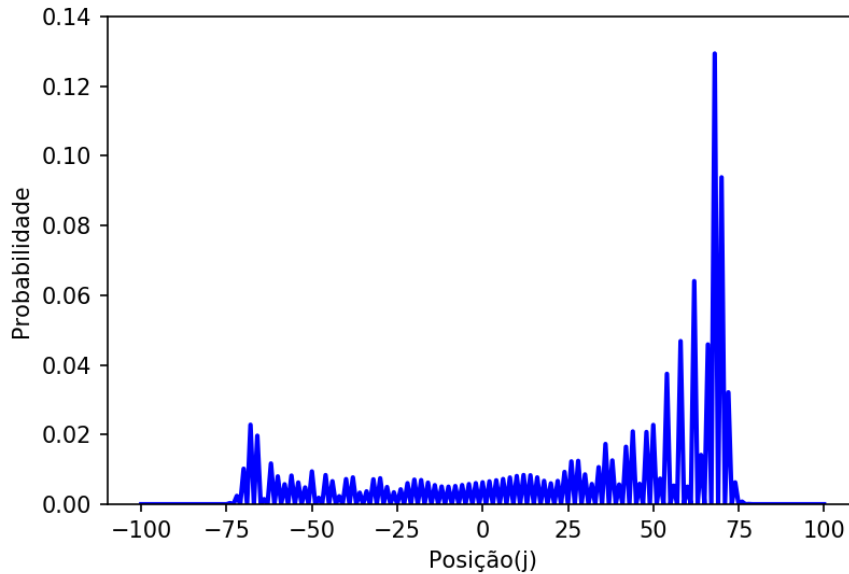


Figura 2.3: Distribuição de probabilidade de uma caminhada quântica partindo do estado inicial  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  numa caminhada Hadamard de 100 passos.

Portanto, podemos escrever que a probabilidade em cada posição num certo tempo, é

dada por

$$P(j, t) = |a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2, \quad (2.48)$$

e a dispersão ao longo do tempo é definida como,

$$\sigma^2(t) = \sum_j j^2 P(j, t) - \left( \sum_j j P(j, t) \right)^2. \quad (2.49)$$

A caminhada clássica tem dispersão difusiva, ou seja,  $\sigma(t) \propto \sqrt{t}$ . Já na caminhada quântica temos uma dispersão balística, isto é,  $\sigma(t) \propto t$ . Na Fig. (2.4) temos uma comparação entre (a) as distribuições de probabilidade clássica e quântica acompanhadas de suas (b) respectivas dispersões obtidas via simulação numérica. Observe que estamos considerando um estado inicial que leva à uma distribuição simétrica numa caminhada Hadamard. Vemos então que, as distribuições de probabilidades numa caminhada quântica para uma mesma moeda podem ser simétricas ou assimétricas dependendo do estado inicial e, suas dispersões são quadraticamente superiores às clássicas [33].

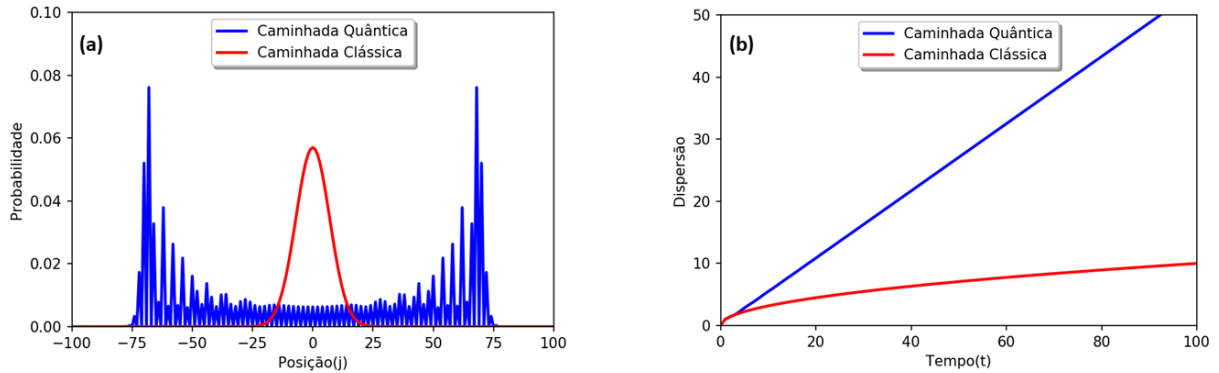


Figura 2.4: (a) Distribuição de probabilidade numa caminhada Hadamard partido de um estado inicial  $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$  (em azul) após 100 passos e numa caminhada clássica (em vermelho) para comparação. (b) Dispersão ao longo do tempo da caminhada quântica (em azul) e clássica (em vermelho).

## 2.7 Emaranhamento na Caminhada Quântica

As formulações da mecânica quântica são muito conhecidas por meio de vetores de estados, mas existe outra alternativa para representar um estado de um sistema quântico chamado de matriz densidade ou operador densidade [30]. O operador densidade é definido como misto quando escrito da seguinte forma:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.50)$$

onde  $p_i$  é a probabilidade de encontrar o sistema em um estado  $|\Psi_i\rangle$ , e definido como puro quando escrito como:

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|. \quad (2.51)$$

No contexto da caminhada quântica o emaranhamento expressa a correlação entre o grau de liberdade interno (spin) e externo (posição), sendo que seu estado inicial é puro e bipartido, ou seja, descrito como o produto tensorial de dois subsistemas, isto é, spin e posição. Qualquer estado emaranhado pode ser escrito na forma de uma expressão bi-ortogonal tendo a seguinte forma [34]:

$$|\Psi(A, B)\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |\alpha_k\rangle \otimes |\beta_k\rangle, \quad (2.52)$$

onde  $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_k\rangle$  e  $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_k\rangle$  são estados ortogonais dos subsistemas A e B, com coeficientes  $c_i$  real e positivo. Neste caso o subsistema A representa o espaço das moedas e o subsistema B representa o espaço das posições.

A quantificação do emaranhamento é dada por meio da entropia de *von Neumann*, que é análoga a entropia clássica de Shannon, e é definida como [35]:

$$S = -Tr[\rho \log_2 \rho] = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.53)$$

onde  $Tr$  é o traço que corresponde a soma dos elementos da diagonal de uma matriz,  $\rho$  é o operador densidade e  $\lambda_i$  são os autovalores de  $\rho$ . Assim para um estado geral do caminhante quântico dado por:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j [a(j, t) |\uparrow\rangle + b(j, t) |\downarrow\rangle] \otimes |j\rangle, \quad (2.54)$$

e sabendo que o estado do caminhante quântico é puro, temos:

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \quad (2.55)$$

$$= \sum_j (a(j, t) |\uparrow\rangle + b(j, t) |\downarrow\rangle) (a^*(j, t) \langle\uparrow| + b^*(j, t) \langle\downarrow|) \otimes |j\rangle \langle j| \quad (2.56)$$

$$= \sum_j [|a(j, t)|^2 |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + a(j, t)b^*(j, t) |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + a^*(j, t)b(j, t) |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + |b(j, t)|^2 |\downarrow\rangle \langle\downarrow|] \otimes |j\rangle \langle j|, \quad (2.57)$$

tomando as equações em (2.3) e suas transpostas conjugadas ficamos com:

$$|\uparrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$|\uparrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$|\downarrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

$$|\downarrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Assim a equação (2.57) pode ser reescrita como:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \sum_j |a(j, t)|^2 & \sum_j a(j, t)b^*(j, t) \\ \sum_j a^*(j, t)b(j, t) & \sum_j |b(j, t)|^2 \end{pmatrix} \otimes |j\rangle \langle j|. \quad (2.62)$$

Para dois sistemas A e B, cujo estado seja descrito por um operador densidade  $\rho_{AB}$  é definido o operador densidade reduzido  $\rho_A$ , tal que:

$$\rho_A \equiv tr_B(\rho_{AB}), \quad (2.63)$$

em que  $tr_B$  é uma operação conhecida como traço parcial sobre B. O traço parcial é definido por [30]:

$$tr_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| tr_B(|b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| \langle b_2|b_1\rangle, \quad (2.64)$$

onde  $|a_1\rangle$  e  $|a_2\rangle$  são quaisquer dois vetores do espaço de A e  $|b_1\rangle$  e  $|b_2\rangle$  são quaisquer dois vetores do espaço B.

Assim podemos reescrever a equação (2.62) por meio das equações (2.64) e (2.63) tomando o traço parcial no espaço das posições e o operador densidade reduzido no espaço das moedas. Logo:

$$\rho_C(t) = \begin{pmatrix} \sum_j |a(j,t)|^2 & \sum_j a(j,t)b^*(j,t) \\ \sum_j a^*(j,t)b(j,t) & \sum_j |b(j,t)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \Gamma(t) \\ \Gamma^*(t) & B(t) \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

tal que  $A(t) = \sum_j |a(j,t)|^2$ ,  $B(t) = \sum_j |b(j,t)|^2$ ,  $\Gamma(t) = \sum_j a(j,t)b^*(j,t)$  e  $\Gamma^*(t) = \sum_j a^*(j,t)b(j,t)$ .

Calculando os autovalores da matriz (2.65), temos:

$$\det \left[ \begin{pmatrix} A(t) & \Gamma(t) \\ \Gamma^*(t) & B(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & \lambda(t) \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (2.66)$$

Lembrando que  $A(t) + B(t) = 1$ , podemos escrever que:

$$\lambda(t)^2 - \lambda(t) + A(t)(1 - A(t)) - |\Gamma(t)|^2 = 0, \quad (2.67)$$

cuja solução é dada por:

$$\lambda(t)_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - A(t)(1 - A(t)) + |\Gamma(t)|^2}. \quad (2.68)$$

Portanto podemos reescrever a entropia de *von Neumann* da seguinte forma:

$$S_E(t) = -Tr[\rho_c(t)\log_2\rho_c(t)] = -\lambda_+(t)\log_2\lambda_+(t) - \lambda_-(t)\log_2\lambda_-(t), \quad (2.69)$$

onde  $\rho_c(t)$  é a matriz densidade reduzida no espaço das moedas e  $\lambda_\pm(t)$  seus autovalores.

Assim ao usarmos a equação (2.69) para calcularmos o emaranhamento na caminhada quântica temos que para  $S_E = 0$  o emaranhamento é nulo, se  $0 < S_E < 1$  é parcial e quando  $S_E = 1$  temos emaranhamento máximo. Para o primeiro caso, temos como exemplo,

$$|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle. \quad (2.70)$$

Esse estado possui os termos da matriz densidade reduzida tal que  $\sum_j |a(j,t)|^2 = 1$  e

$\sum_j |b(j, t)|^2 = 0$ . Logo a partir da equação (2.65), temos:

$$\rho_C(0) = \begin{bmatrix} A(0) & \Gamma(0) \\ \Gamma^*(0) & B(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

que possui autovalores dados pela equação (2.68), ou seja,  $\lambda_+(0) = 1$  e  $\lambda_-(0) = 0$ . Aplicando  $\lambda_{\pm}(0)$  em (2.69) ficamos com:

$$S_E(0) = -1\log_2 1 - 0\log_2 0 = 0. \quad (2.72)$$

Neste primeiro caso, temos emaranhamento nulo, pois o estado já está definido como  $|\uparrow\rangle$  na posição  $j = 0$  (produto de estados). Um exemplo de estado parcialmente emaranhado é,

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2} [(|\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle + (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle) + |\uparrow\rangle \otimes |2\rangle)]. \quad (2.73)$$

Calculando a matriz densidade reduzida, temos:

$$\rho_C(0) = \begin{bmatrix} A(0) & \Gamma(0) \\ \Gamma^*(0) & B(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

que possui autovalores dado por  $\lambda_+(0) = 3/4$  e  $\lambda_-(0) = 1/4$ , portanto,

$$S_E(0) = -(0.75)\log_2(0.75) - (0.25)\log_2(0.25) \approx 0.811278. \quad (2.75)$$

Ao observarmos a equação (2.73) vemos que em parte dela existe alguma correlação. Por exemplo, se olharmos para o estado na posição  $j = 2$ , sabemos que a única possibilidade de estado é  $|\uparrow\rangle$  ou para  $j = -2$  temos  $|\downarrow\rangle$ . No entanto, na posição  $j = 0$  podemos ter  $|\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$ . Por fim, chegamos ao exemplo de um estado totalmente emaranhado dado por

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle), \quad (2.76)$$

cujo os termos da matriz densidade reduzida são  $\sum_j |a(j, t)|^2 = \sum_j |b(j, t)|^2 = 1/2$ . Assim a matriz densidade reduzida no espaço das moedas deste sistema é dada por:

$$\rho_C(0) = \begin{bmatrix} A(0) & \Gamma(0) \\ \Gamma^*(0) & B(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$



tendo autovalores  $\lambda_+(0) = \lambda_-(0) = 0.5$ , portanto,

$$S_E(0) = -(0.5)\log_2(0.5) - (0.5)\log_2(0.5) = 1. \quad (2.78)$$

Neste caso o emaranhamento é máximo, pois medir  $|\uparrow\rangle$  na posição  $j = 1$  implica em termos  $|\downarrow\rangle$  na posição  $j = -1$ .

## CAPÍTULO 3

# RESULTADOS

No contexto de caminhadas quânticas, um defeito de fase consiste numa moeda quântica em uma certa posição com os parâmetros  $\theta$  e  $\phi$  que determinam sua fase, diferentes das demais moedas da rede. Na literatura, existem alguns trabalhos que mostram que a introdução de apenas um defeito de fase causa uma localização parcial do estado. Essa localização é dependente da posição do defeito, das moedas utilizadas e do estado inicial [36, 37]. Por exemplo, ao introduzirmos um defeito Fourier na origem ( $\theta = \phi = \pi/2$ ) em meio a uma caminhada Hadamard, temos uma localização da distribuição de probabilidade na origem. O mesmo resultado pode ser obtido fazendo uma caminhada Fourier e introduzindo uma moeda Hadamard na origem ( $\theta = \phi = 0$ ) como defeito.

Apesar de existir um trabalho recente sobre a relação entre localização e emaranhamento em caminhadas quânticas com fases desordenadas [38], num contexto de defeito de fase essa relação ainda carece de investigação. Sendo assim, na próxima seção vamos analisar o comportamento da distribuição de probabilidade e emaranhamento para um estado local cujo q-bit leva a uma distribuição de probabilidade assimétrica considerando um defeito de fase Fourier na origem. Na seção seguinte, faremos a mesma análise variando a fase da moeda na origem para o mesmo q-bit anterior. Em seguida, consideraremos o q-bit que leva ao emaranhamento máximo variando a fase da moeda na origem. E por último, analisaremos localização e emaranhamento para uma média de 2016 q-bits iniciais, a fim de observarmos comportamentos e tendências gerais.

### 3.1 Estado inicial local com defeito Fourier na origem

As moedas quânticas podem depender das posições e do tempo  $\hat{C}(j, t)$ , do tempo  $\hat{C}(t)$  ou apenas das posições  $\hat{C}(j)$  [39]. Neste trabalho nossas moedas dependem apenas das posições  $\hat{C}(j)$ , ou seja, é uma moeda que deve atuar como Fourier na posição zero e nas demais posições deve ser Hadamard. A partir disso criamos uma moeda defeituosa definida por,

$$\hat{C}(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\delta(j)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i-1 \\ i-1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

em que,

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0 \\ 0, & \text{se } j \neq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Portanto para  $\delta(j) = 1$  e somando as duas matrizes obtemos a moeda Fourier, mas se  $\delta(j) = 0$  nos resta apenas a matriz Hadamard.

Agora o próximo passo é determinar as amplitudes de probabilidades defeituosas para criarmos uma relação de recorrência para o procedimento numérico deste trabalho. Partindo de um q-bit genérico e da nossa moeda defeituosa (3.1) chegamos nas seguintes amplitudes de probabilidades para os spins  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ :

$$a(j, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}a(j-1, t-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}b(j-1, t-1)[1 + \delta(j-1)(i-1)], \quad (3.3)$$

$$b(j, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}a(j+1, t-1)[1 + \delta(j-1)(i-1)] + \frac{1}{\sqrt{2}}b(j+1, t-1)[-1 + 2\delta(j+1)]. \quad (3.4)$$

Existem alguns trabalhos na literatura que tratam de localização em caminhadas quânticas com defeitos de fase [36, 37]. No entanto, a abordagem deles é diferente da nossa, já que os autores usam uma moeda Hadamard multiplicada por uma fase, isto é,  $e^{i\theta}H$ . Portanto, a moeda defeituosa deles é diferente da nossa, já que a partir desse defeito de fase não é possível escrever uma moeda Fourier. Além disso, é importante ressaltar que eles não tratam da influência dos defeitos no emaranhamento do sistema. Portanto nosso trabalho é diferente dos demais no formato da moeda defeituosa, na avaliação do

q-bit que gera máximo emaranhamento e por investigar os efeitos de uma caminhada com defeito de fase tomando uma média de 2016 q-bits.

Para fazermos uma análise da distribuição de probabilidade nas posições e do emaranhamento ao longo do tempo, vamos considerar o seguinte estado inicial local,

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (3.5)$$

com a mesma probabilidade de medir estados  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , mas com uma diferença de fase de  $\pi$  entre eles. Na tabela (3.1), vemos o estado inicial e a evolução temporal desse estado para os passos iniciais numa caminhada Hadamard e, também para uma caminhada Hadamard mas com um único defeito Fourier na origem.

---

#### **Evolução da Caminhada Hadamard**

---

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$$

$$|\Psi(1)\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle$$

$$|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle)$$

$$|\Psi(3)\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\rangle \otimes |-3\rangle + (-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |-1\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$|\Psi(4)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-|\downarrow\rangle \otimes |-4\rangle + (|\uparrow\rangle - 2|\downarrow\rangle) \otimes |-2\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |2\rangle)$$

---

#### **Evolução da Caminhada Hadamard com defeito Fourier na origem**

---

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$$

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{2}[(-|\downarrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |-1\rangle + (|\uparrow\rangle - i|\uparrow\rangle) \otimes |1\rangle]$$

$$|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(|\downarrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \otimes |-2\rangle + (|\downarrow\rangle + i|\uparrow\rangle - (i|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)) \otimes |0\rangle + (|\uparrow\rangle - i|\uparrow\rangle) \otimes |2\rangle]$$

$$|\Psi(3)\rangle = \frac{1}{4}[(-|\downarrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |-3\rangle + (|\uparrow\rangle - i(|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle)) \otimes |-1\rangle + (|\downarrow\rangle + i(|\downarrow\rangle + 2|\uparrow\rangle)) \otimes |1\rangle + (|\uparrow\rangle - i|\uparrow\rangle) \otimes |3\rangle]$$

$$|\Psi(4)\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}[(-|\downarrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \otimes |-4\rangle + (|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle + i(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)) \otimes |-2\rangle + (-|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle - 3i(-|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)) \otimes |0\rangle + (|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle + i(-|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)) \otimes |2\rangle + (|\uparrow\rangle - i|\uparrow\rangle) \otimes |4\rangle]$$


---

Tabela 3.1: Evolução do estado inicial dado pela equação (3.5) para quatro passos numa caminhada Hadamard e Hadamard com defeito de fase Fourier na origem.

O estado inicial dado pela equação (3.5) numa caminhada Hadamard, produz uma

distribuição de probabilidade assimétrica com maior concentração de probabilidade à esquerda ( $j < 0$ ). Ao ser adicionado o defeito de fase Fourier na origem, a distribuição de probabilidade passa a ter caráter simétrico com concentrações de probabilidade menores nas extremidades e uma forte interferência construtiva na origem. Podemos ver isso já no quarto passo na tabela 3.1, enquanto a probabilidade de medir a partícula em  $j = 0$  é  $1/8$  na caminhada Hadamard, ao introduzirmos o defeito Fourier, essa probabilidade sobe para  $5/8$ . Também podemos ver que, a probabilidade de medir fora da origem para  $j < 0$  é  $6/8$  e para  $j > 0$  é  $1/8$  na caminhada Hadamard, enquanto é de  $3/16$  tanto para  $j < 0$  quanto  $j > 0$ , considerando o defeito Fourier na origem. Portanto, vemos que a moeda Fourier introduz uma fase de  $\pi/2$  entre os estados  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  a cada passo de tempo, acumulando uma interferência construtiva na origem enquanto nas extremidades a probabilidade é cada vez menor.

Na Fig. (3.1) temos a distribuição de probabilidade, a probabilidade na origem em função do tempo e a evolução temporal do emaranhamento para o estado inicial dado pela equação (3.5) em 100 passos de tempo numa caminhada sem defeito (a-c) e com defeito (d-f). Ao ser inserido o defeito Fourier na origem, a distribuição de probabilidade deixa o comportamento assimétrico de (a) e passa a ser confinada parcialmente neste ponto como mostra a figura (d). Já em (b), a probabilidade na origem cai a zero exponencialmente devido a efeitos de interferência destrutiva, mas para a caminhada defeituosa passa a oscilar fortemente no tempo como visto em (e). Em (c) e (f) vemos a comparação do emaranhamento ao longo do tempo nos dois casos. Para os 100 primeiros passos, o emaranhamento para a caminhada Hadamard oscila entre 0.85 e 0.90 e a medida que o número de passos aumenta, ele converge no limite assintótico em  $t \rightarrow \infty$ , para um valor constante [40, 41]. Já no segundo caso, isto é, para a caminhada Hadamard com defeito na origem temos que o emaranhamento oscila entre 0.62 e 0.94, mas ao contrário do primeiro caso, não atinge nenhum limite assintótico e permanece oscilando entre estes dois valores.

Como dito na Fig. (3.1) vemos que a probabilidade na origem (e), assim como o emaranhamento (f), oscilam fortemente a cada passo de tempo. Para melhor entendermos esse comportamento, na Fig. (3.2) escolhemos dois passos de tempo seguidos. É possível ver que, quando os passos são pares, tal como em (a)  $t = 50$ , a distribuição de probabilidade está concentrada na origem assim como no estado inicial ( $t = 0$ ), mas nos passos ímpares, tal como em (b)  $t = 49$ , a distribuição de probabilidade concentra-se nas posições  $\pm 1$ .

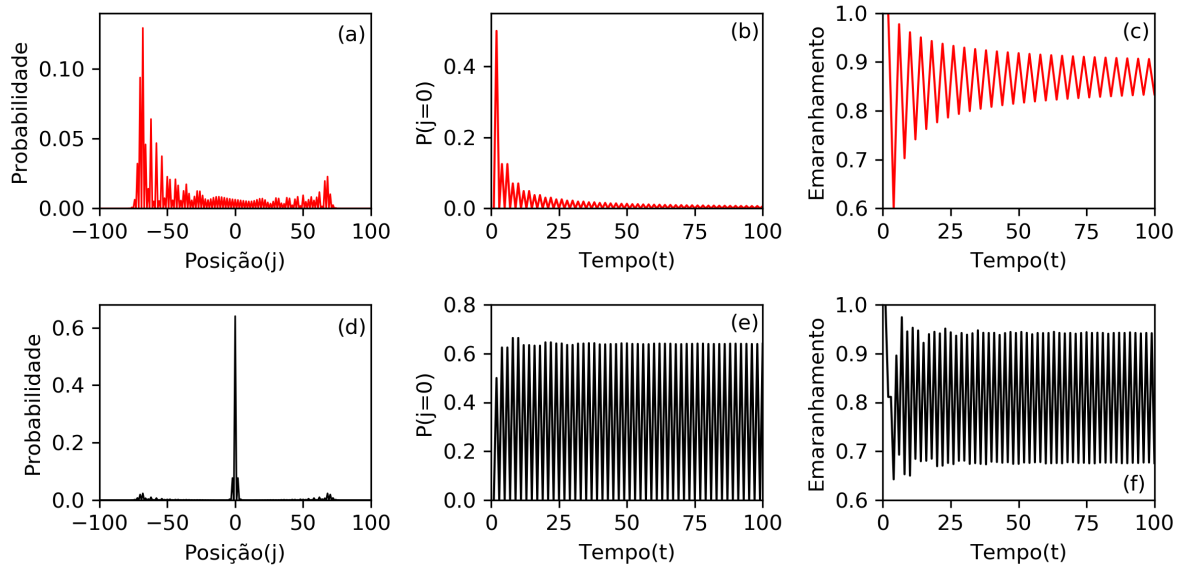


Figura 3.1: Em (a) temos a distribuição de probabilidade, (b) a probabilidade na origem e (c) o emaranhamento para uma caminhada Hadamard. Em (d) temos a distribuição de probabilidade, (e) probabilidade na origem e (f) emaranhamento para a caminhada Hadamard com defeito Fourier na origem.

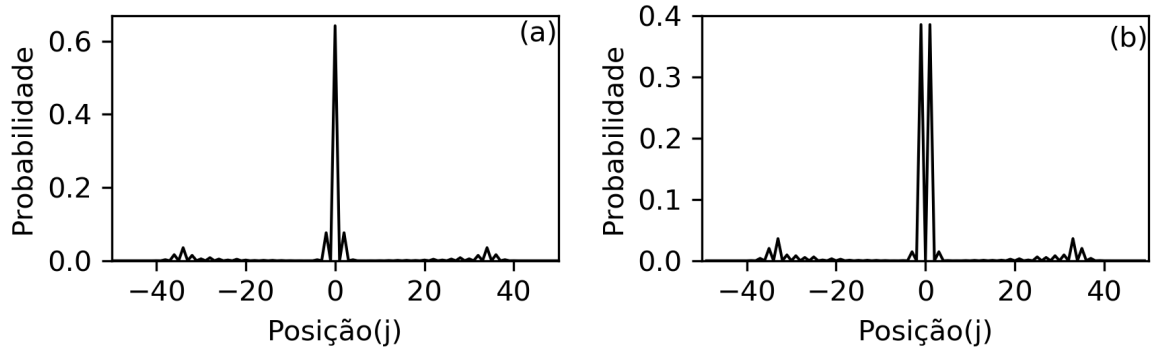


Figura 3.2: Distribuição de probabilidade para (a)  $t = 50$  e (b)  $t = 49$ .

O estado inicial do caminhante quântico parte da origem das posições e após o primeiro passo é dividido entre as posições  $\pm 1$  ficando com valor zero em  $j = 0$  como mostrado na tabela (1.1). No passo seguinte, o estado que se encontra nas posições  $\pm 1$  voltará a se interferir construtivamente concentrando-se novamente na origem. Em outras palavras, esse comportamento é facilmente explicável pela própria dinâmica da caminhada: partindo de um estado local, em passos de tempo pares, o estado só ocupa posições pares da rede, enquanto em passos de tempo ímpares, ele só ocupa posições ímpares da rede, já que para qualquer passo de tempo as amplitudes de probabilidade são calculadas de  $j = -t$  até  $t$  de duas em duas posições.

Uma caminhada Hadamard com defeito de fase na origem localiza parcialmente a pro-

babilidade nesta posição e parte do estado continua a se dispersar. Será que é possível quantificar o quanto da distribuição de probabilidade fica localizada e quanto dispersa? Na tabela (3.2) temos a probabilidade em diferentes posições pares para  $t = 10$  e ímpares para  $t = 11$  de uma caminhada Hadamard com defeito Fourier na origem. Portanto, a localização vista na distribuição de probabilidade é em torno da origem, mas majoritariamente na origem. O restante do estado se dispersa com o passar do tempo ao longo das demais posições.

j	0	$\pm 2$	$\pm 4$	$\pm 6$	$\pm 8$	$\pm 10$
$P(j, t = 10)$	0.6641	0.0742	$< 10^{-4}$	0.0557	0.0371	0.0010
j	$\pm 1$	$\pm 3$	$\pm 5$	$\pm 7$	$\pm 9$	$\pm 11$
$P(j, t = 11)$	0.3887	0.0176	0.0024	0.0659	0.0249	0.0005

Tabela 3.2: Intensidade da probabilidade para diferentes posições numa caminhada Hadamard com defeito Fourier na origem em 10 e 11 passos de tempo respectivamente para posições  $j$  pares e ímpares.

Considerando os 10 primeiros passos de tempo, podemos estimar a probabilidade que se dispersa como  $P_d(t = 10) = 1 - \sum_{j=-2}^2 P(j, t = 10)$ , obtendo aproximadamente 19% da probabilidade enquanto 15% do estado está localizado em  $j = \pm 2$  e 66% na origem. A mesma análise pode ser feita para passos ímpares variando o somatório de  $j = -3$  até  $j = 3$  obtendo o mesmo resultado. É importante destacar que o pico da probabilidade na origem é muito instável para os primeiros passos, mas a medida que avançamos no tempo ele se estabiliza com valor aproximado de 64%.

### 3.2 Estado inicial local variando a fase da moeda na origem

Outro aspecto que pode ser investigado é a mudança na distribuição de probabilidade e emaranhamento ao ser inserida uma moeda com uma fase diferente da Fourier na origem. Vamos considerar que  $\eta = \theta = \phi$  representa a fase do defeito dado por uma nova moeda. Ao mudar a fase da moeda na origem, será que o emaranhamento oscilará entre valores menores, maiores ou ficará igual? Como se comportará a intensidade da localização?

Os cálculos numéricos na Fig. (3.3) (a)-(f) nos mostram a distribuição de probabilidade para  $\eta = \pi, \pi/2, \pi/4, \pi/8, \pi/16$  e  $\pi/64$ . A medida que a fase diminui vemos que o pico da probabilidade na origem também decresce, tendendo para uma distribuição de probabilidade de uma caminhada Hadamard. Consequentemente, vemos que existe grande concentração da localização do estado na origem para os defeitos dados por (a)  $\eta = \pi$  e (b)  $\pi/2$ , sendo aproximadamente 64%. Na Fig. (3.3) (g)-(l) temos o emaranhamento para os

mesmos defeitos de fase citados acima. Para o defeito de fase (g)  $\eta = \pi$  o emaranhamento possui o maior intervalo de oscilação em comparação aos demais. Vemos que a medida que diminuimos o defeito de fase na origem, a amplitude de oscilação diminui até tendermos novamente ao limite assintótico.

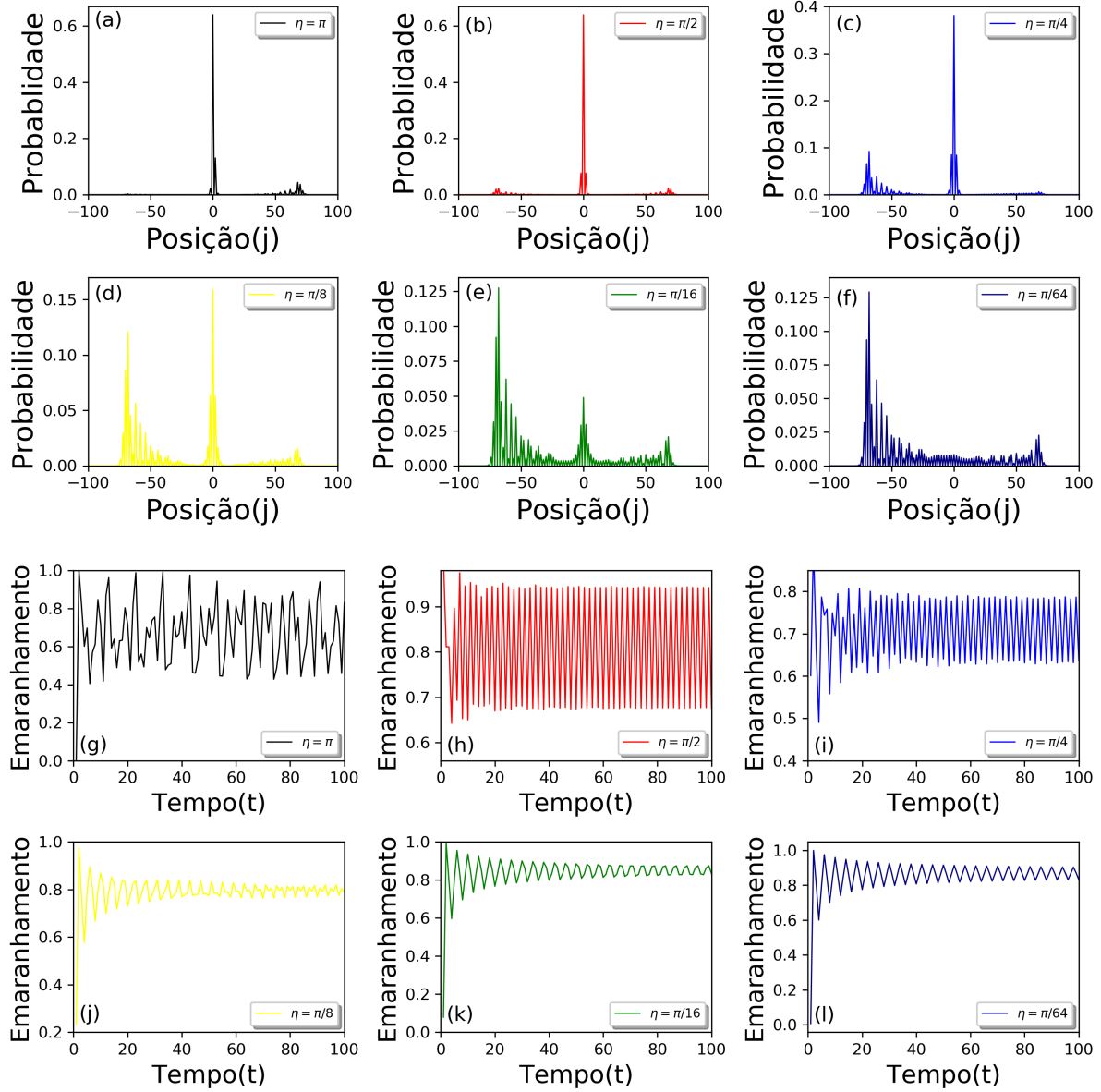


Figura 3.3: (a)-(f) Distribuição de probabilidade e (g)-(l) emaranhamento para uma caminhada Hadamard com defeito de fase tal que  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/2$  (vermelho),  $\pi/4$  (azul),  $\pi/8$  (amarelo),  $\pi/16$  (verde) e  $\pi/64$  (azul-marinho).

Na Fig. (3.4) vemos como a intensidade da probabilidade na origem varia ao longo do tempo para a (a) caminhada Hadamard e para uma (b) caminhada Hadamard com diferentes defeitos de fase na origem. Em (a) vemos que o pico da distribuição de probabilidade na origem cai aproximadamente a zero rapidamente. Por outro lado, ao serem



inseridos os defeitos de fase  $\eta = \pi, \pi/4, \pi/8$  e  $\pi/64$ , em (b) vemos que a probabilidade na origem possui maior amplitude de oscilação ao longo do tempo quanto maior for a fase da moeda na origem, o que é consistente com a localização mais significativa para fases maiores. A medida que a fase diminui ( $\eta = \pi/64$ ), a intensidade no pico da distribuição de probabilidade na origem cai de tal forma que volta a ter praticamente a mesma forma da caminhada Hadamard sem defeito de fase.

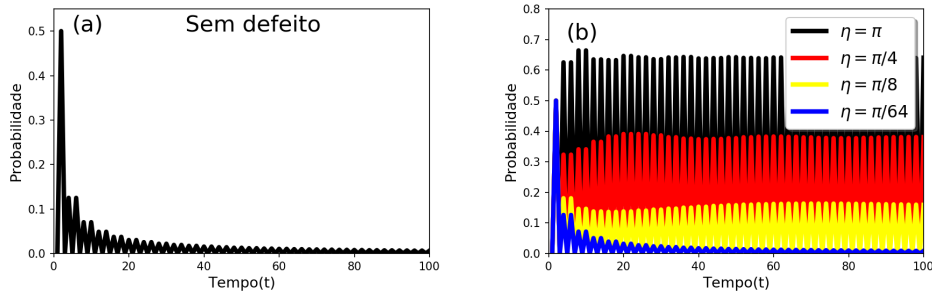


Figura 3.4: Probabilidade na origem para a (a) caminhada Hadamard e (b) caminhada Hadamard com defeitos de fase  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/4$  (vermelho),  $\pi/8$  (amarelo) e  $\pi/64$  (azul).

Como vimos na Fig. (3.3) o pico da distribuição de probabilidade na origem depende do defeito de fase inserido na caminhada, na Fig. (3.5) verificamos que o pico da probabilidade na origem se comporta de forma periódica, ou seja, a caminhada Hadamard é recuperada a cada  $\eta = 2\pi k$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

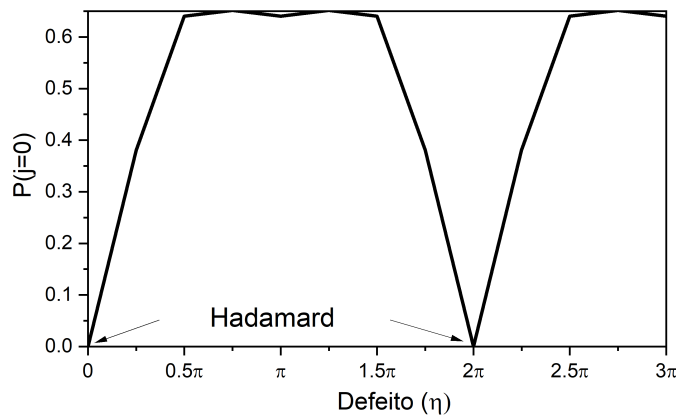


Figura 3.5: Probabilidade na origem em função do defeito de fase  $\eta$ .

Vimos até o momento que defeitos de fase na origem tendem a localizar de forma parcial a distribuição de probabilidade e o emaranhamento perde o limite assintótico oscilando sempre entre dois estados. Para passos pares, a distribuição de probabilidade se concentra em grande parte na origem quanto maior for a fase da moeda na origem. Já

para passos ímpares, divide-se entre as posições  $\pm 1$ . Também foi verificado que a medida que diminuimos o defeito de fase na origem, a amplitude de oscilação no emaranhamento diminui de tal forma que quando o defeito é muito pequeno, a distribuição de probabilidade e emaranhamento voltam a ter o comportamento de uma caminhada Hadamard sem defeito.

### 3.3 Localização e alto emaranhamento variando a fase

No contexto de uma caminhada Hadamard com defeito de fase na origem, será que é possível obtermos localização com alto emaranhamento? Primeiro, já sabemos que defeitos de fase na origem geram localização da distribuição de probabilidade na origem. Segundo, existe um q-bit que gera emaranhamento máximo [40, 41] que é dado por,

$$|\psi_C\rangle = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|\downarrow\rangle. \quad (3.6)$$

Na Fig. (3.6) em (a) temos a distribuição de probabilidade para uma caminhada Hadamard com o estado inicial local cujo q-bit é dado pela equação (3.6). Em (b) é dado o emaranhamento ao longo do tempo. Diferente do q-bit da equação (3.5), que gera uma distribuição de probabilidade que se concentra ao lado esquerdo ( $j < 0$ ) para uma caminhada Hadamard, o q-bit que produz emaranhamento máximo tem distribuição de probabilidade simétrica.

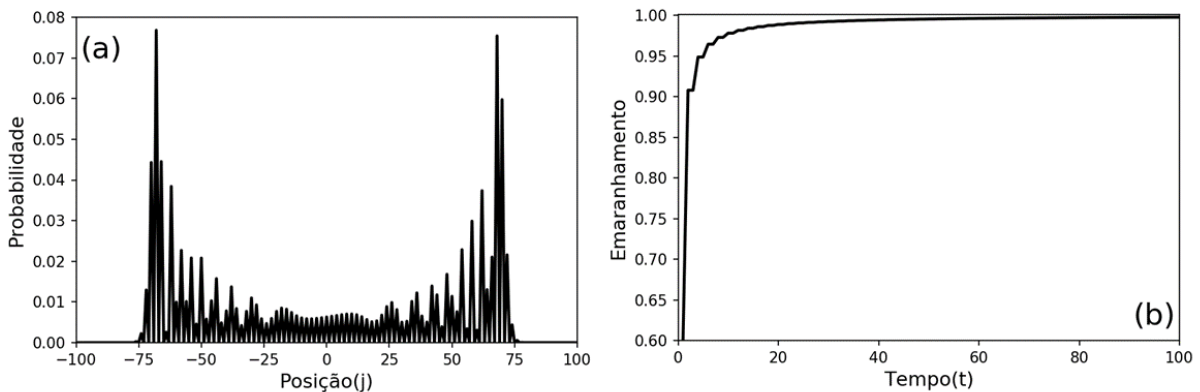


Figura 3.6: (a) Distribuição de probabilidade e (b) emaranhamento para uma caminhada Hadamard com q-bit que gera emaranhamento máximo para 100 passos no tempo.

É fácil deduzir que se juntarmos ambas as coisas, isto é, unir o defeito de fase na origem com o q-bit que gera máximo emaranhamento, poderemos obter localização com

alto emaranhamento. Na Fig. (3.7) mostramos a intensidade da localização na origem partindo desse q-bit em uma caminhada Hadamard para os defeitos de fase tal que  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/2$  (vermelho) e  $\pi/64$  (azul-marinho) em 100 passos no tempo.

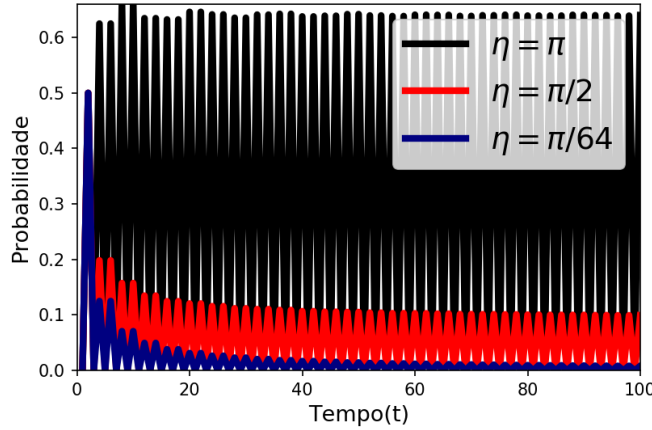


Figura 3.7: Intensidade da probabilidade em  $j = 0$  para uma caminhada Hadamard de 100 passos com defeito na origem tal que a fase  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/2$  (vermelho) e  $\pi/64$  (azul-marinho) partindo do estado local cujo q-bit gera máximo emaranhamento numa caminhada Hadamard.

Na Fig. (3.8) (a-e), vemos a distribuição de probabilidade após 100 passos de tempo para diferentes fases da moeda na origem iniciando a caminhada a partir de um estado local cujo q-bit é dado pela equação (3.6). Temos um comportamento semelhante ao mostrado na Fig. (3.3), isto é, a intensidade da probabilidade na origem cai a medida que a fase do defeito diminui e ambos os casos possuem aproximadamente 64% do pico para o defeito  $\eta = \pi$ , além de alta amplitude de oscilação no emaranhamento. No entanto, os dois q-bits diferem para os demais defeitos, por exemplo, para  $\eta = \pi/2$  o primeiro q-bit ainda permanece com 64% de probabilidade localizada na origem, enquanto o segundo tem uma queda substancial para aproximadamente 10%.

Ao realizarmos uma caminhada Hadamard partindo do q-bit dado pela equação (3.6) e ao inserir um defeito de fase  $\eta = \pi$  na origem, obtemos máxima localização da probabilidade na origem, porém o emaranhamento deixará de ser máximo e possuir limite assintótico, como na caminhada Hadamard. Ao variar o defeito de fase na origem, fazendo com que  $\eta$  seja cada vez menor, diminuimos a localização e aumentamos o emaranhamento, como pode ser visto na Figura (3.8) de (a)-(l). Portanto, observamos que para dois q-bits diferentes, ao variar a fase da moeda na origem, podemos mudar de forma significativa o comportamento da localização e emaranhamento. Como esse comportamento é muito sensível ao q-bit inicial, se quisermos quantificar propriedades e tendências gerais,

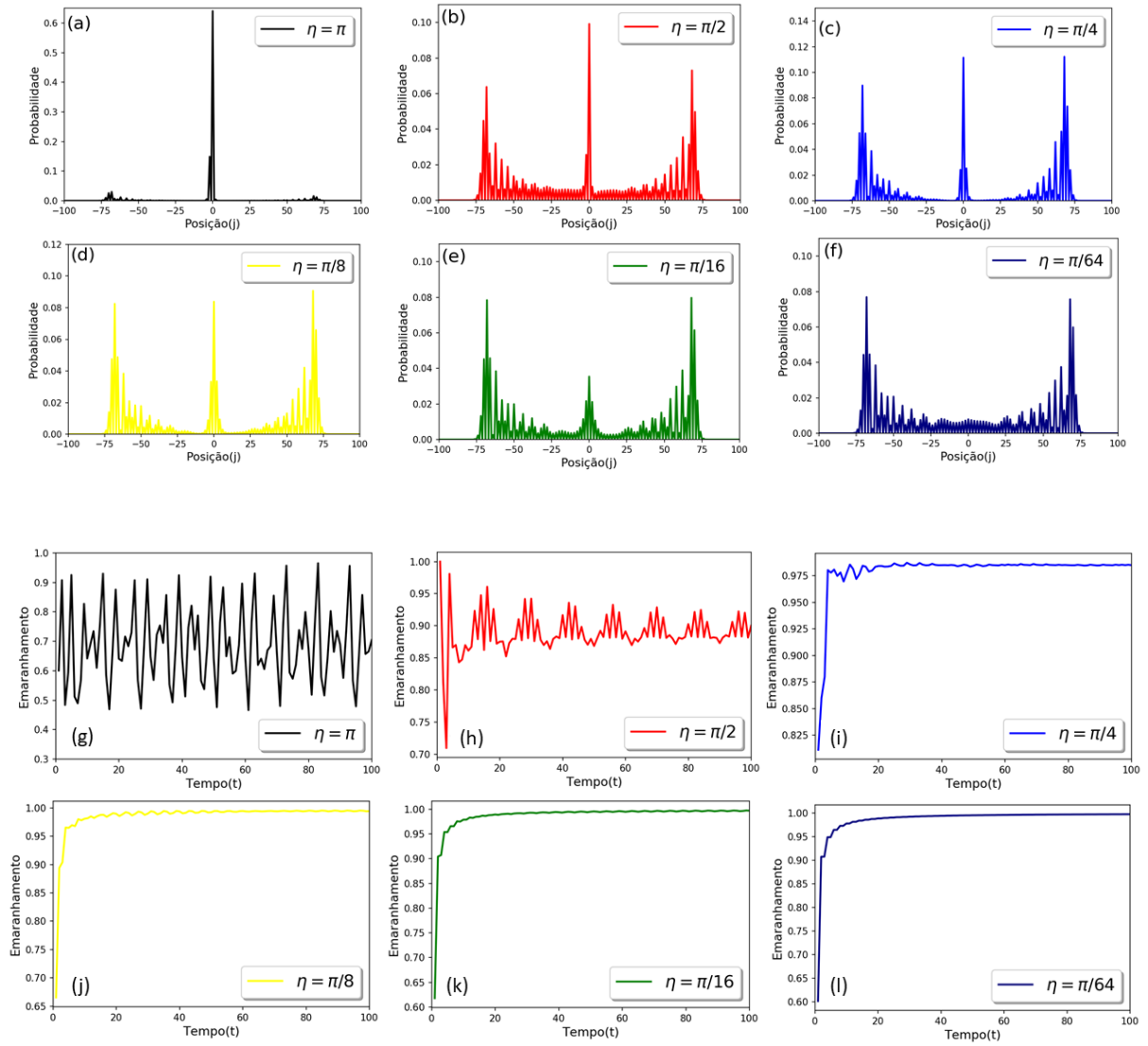


Figura 3.8: (a)-(f) Distribuição de probabilidade e (g)-(l) emaranhamento para uma caminhada Hadamard com defeitos de fase tal que  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/2$  (vermelho),  $\pi/4$  (azul),  $\pi/8$  (amarelo),  $\pi/16$  (verde) e  $\pi/64$  (azul-marinho).

é interessante analisar uma média para muitos q-bits sobre toda a esfera de Bloch.

### 3.4 Localização e emaranhamento médios

Para uma compreensão geral do comportamento da caminhada quântica com defeito de fase na origem, vamos analisar como se comporta a distribuição de probabilidade, emaranhamento e a dispersão em uma média de vários q-bits iniciais. Assim, para o cálculo da distribuição de probabilidade média de  $N = 2016$  q-bits iniciais em um tempo arbitrário ao longo das posições  $j$ , temos

$$\langle |\Psi(j, t)|^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{|a_i(j, t)|^2 + |b_i(j, t)|^2}{N}, \quad (3.7)$$

onde os termos do lado direito são a distribuição de probabilidade média de se encontrar o caminhante com spin *up* e *down*, respectivamente, com índice *i* variando para todos os q-bits considerados. Já a dispersão média é dada por

$$\langle \sigma(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i(t)}{N}, \quad (3.8)$$

e por último, o emaranhamento médio neste contexto é definido como

$$\langle S_E(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{S_E^i(t)}{N}. \quad (3.9)$$

Na Fig. (3.9) vemos que a caminhada Hadamard média é simétrica, pois a simetria (ou assimetria) da distribuição de probabilidade depende do q-bit inicial, ou seja, enquanto um q-bit leva a uma maior probabilidade à esquerda, outro leva à direita, portanto numa média temos que a distribuição de probabilidade é simétrica. O emaranhamento possui limite assintótico, ou seja, ele oscila em um intervalo cada vez menor de tal forma que quando  $t \rightarrow \infty$ , temos apenas um único valor para o emaranhamento.

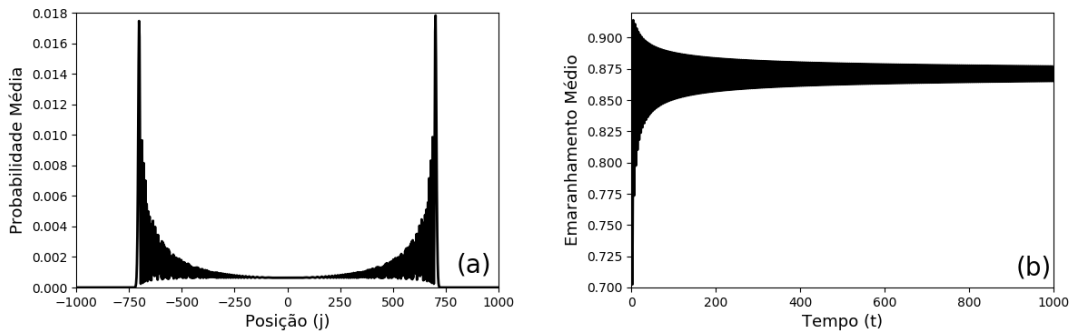


Figura 3.9: (a) Distribuição de probabilidade e (b) emaranhamento para uma caminhada Hadamard a partir de uma média de 2016 q-bits iniciais.

Na Fig. (3.10) em (a) temos a distribuição de probabilidade média para os diferentes defeitos de fase na origem. Vemos que a interferência construtiva na origem é maior para o defeito de fase  $\eta = \pi$  (preto) atingindo o valor aproximado de 64% e a medida que  $\eta$  diminui, o pico da probabilidade cai até que a caminhada Hadamard seja restaurada. Em (b) temos que o emaranhamento médio perde seu limite assintótico ao ser inserido o defeito cuja fase  $\eta = \pi$ , passando a oscilar entre os valores 0.6 e 0.85. Esta amplitude de

oscilação é máxima e a medida que diminuimos o  $\eta$ , o emaranhamento torna a ter limite assintótico. Em (c) temos a dispersão média para diferentes defeitos de fase na origem e para  $\eta = \pi$  (preto) temos a menor inclinação da dispersão e a medida que diminuimos a fase do defeito, ela tende a da caminhada Hadamard, como esperado.

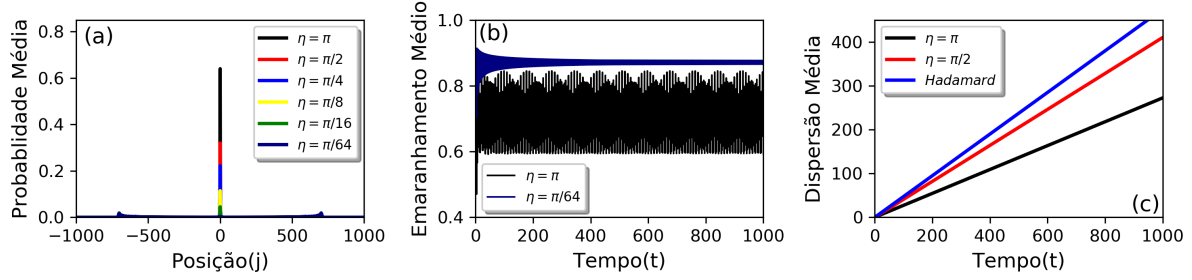


Figura 3.10: (a) Probabilidade média para 2016 q-bits iniciais numa caminhada Hadamard com defeito de fase tal que  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/2$  (vermelho),  $\pi/4$  (azul),  $\pi/8$  (amarelo),  $\pi/16$  (verde) e  $\pi/64$  (azul-marinho). (b) Emaranhamento médio para  $\eta = \pi$  (preto) e  $\pi/64$  (azul-marinho). (c) Dispersão média para  $\eta = \pi$  (preto),  $\pi/2$  (vermelho) e azul para a caminhada Hadamard.

Por último, na Fig. (3.11) mostramos a intensidade do pico da probabilidade na origem em função do  $\eta$ , comparando o comportamento dos dois q-bits dados pelas equações (3.5) e (3.6) com a média. O primeiro q-bit apresenta um platô em torno de 64%, de maneira distinta do q-bit dado pela equação (3.6) que possui um pico para  $\eta = \pi$ . Vemos ainda que em média, o pico da probabilidade é de aproximadamente 64% a cada defeito de fase  $\eta = k\pi$ , onde  $k$  é inteiro ímpar.

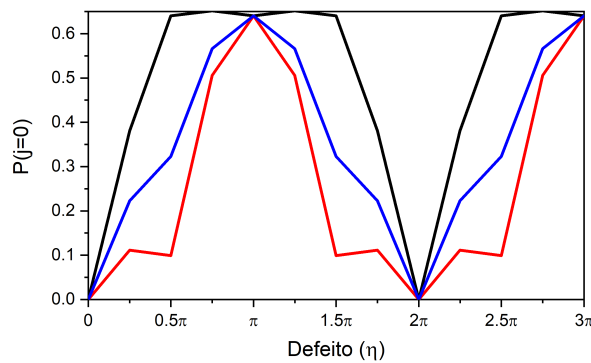


Figura 3.11: Probabilidade na origem em função do defeito de fase  $\eta$  para o q-bit  $|\psi_C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$  dado pela equação 3.5 (preto), uma média de 2016 q-bits (azul) e o q-bit  $|\psi_C\rangle = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|\downarrow\rangle$  dado pela equação 3.6 (vermelho).

## CAPÍTULO 4

# CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigamos a localização na distribuição de probabilidade e o comportamento do emaranhamento ao longo do tempo em caminhadas quânticas com diferentes defeitos de fase na origem. Este defeito de fase é introduzido por uma moeda cuja fase é diferente das demais moedas da rede.

Iniciamos o estudo a partir de um q-bit particular em uma caminhada Hadamard sem e com defeitos de fase. Ao ser inserido o defeito, obtivemos a localização parcial da distribuição de probabilidade e observamos que há perda do limite assintótico no emaranhamento. Também analisamos como se distribui a probabilidade em torno da origem para passos pares e ímpares, afim de quantificar o quanto da probabilidade fica localizada e quanto permanece dispersando. Verificamos que cerca de 81% da probabilidade fica localizada tomando um defeito de fase cujo  $\eta = \pi/2$  em 10 passos no tempo. A partir disto, variamos a fase do defeito e vimos que o pico da probabilidade se comporta de forma periódica, ou seja, a caminhada Hadamard é sempre restaurada para  $\eta = 2\pi k$  para  $k$  inteiro. Em seguida, fizemos as mesmas análises para uma caminhada cujo q-bit leva ao emaranhamento máximo obtendo uma situação de localização com alto emaranhamento.

Por último, a fim de termos uma visão geral do comportamento da caminhada com defeitos de fase, realizamos a mesma análise para uma média de 2016 q-bits iniciais e verificamos que em média o pico da probabilidade é atingido a cada defeito de fase  $\eta = k\pi$ , onde  $k$  é inteiro ímpar tendo valor máximo de aproximadamente 64%.

Ainda existem assuntos a serem investigados dentro do contexto de localização por meio de defeitos de fase. Por exemplo, como se comportaria a distribuição de probabilidade e o emaranhamento ao ser inseridos defeitos de fases em tempos posteriores? Será que uma caminhada quântica defeituosa por meio de moedas tendenciosas tem maior poder de localização da probabilidade? O que esperaríamos de defeitos de fase simétricos ou seguindo alguma lei de distribuição ao longo da rede? Esperamos que este trabalho contribua para pesquisas futuras.



# BIBLIOGRAFIA

- <sup>1</sup>K. Pearson, «The problem of the random walk», *Nature* **72**, 294 (1905).
- <sup>2</sup>B. A. Berg, «Locating global minima in optimization problems by a random-cost approach», *Nature* **361**, 708–710 (1993).
- <sup>3</sup>D. Ceperley e B. Alder, «Quantum monte carlo», *Science* **231** (1986).
- <sup>4</sup>C. Anteneodo e W. Morgado, «Critical scaling in standard biased random walks», *Phys. Rev. Lett.* **99**, 180602 (2007).
- <sup>5</sup>I. Stewart, «Mathematics: Where drunkards hang out», *Nature* **413**, 686–687 (2001).
- <sup>6</sup>P.-G. De Gennes, *Scaling concepts in polymer physics* (Cornell university press, 1979).
- <sup>7</sup>E. A. Codling, M. J. Plank e S. Benhamou, «Random walk models in biology», *Journal of the Royal Society Interface* **5**, 813–834 (2008).
- <sup>8</sup>F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics* (Waveland Press, 2009).
- <sup>9</sup>S. R. Salinas, *Introdução a física estatística vol. 09* (Edusp, 1997).
- <sup>10</sup>A. C. O. Junior, «Caminhadas Quânticas a Partir de Estados Deslocalizados», tese de mestrado (UDESC, 2018).
- <sup>11</sup>Y. Aharonov, L. Davidovich e N. Zagury, «Quantum random walks», *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
- <sup>12</sup>J. Wang e K. Manouchehri, *Physical implementation of quantum walks* (Springer, 2013).
- <sup>13</sup>L. Mach, «Ueber einen interferenzrefraktor», *Zeitschrift für Instrumentenkunde* **12**, 89–93 (1892).
- <sup>14</sup>L. Zehnder, *Ein neuer interferenzrefraktor* (Springer, 1891).
- <sup>15</sup>A. Zeilinger, «General properties of lossless beam splitters in interferometry», *Am. J. Phys* **49**, 882–883 (1981).
- <sup>16</sup>R. Vieira, «Emaranhamento em Caminhadas Quânticas Desordenadas», tese de mestrado (UDESC, 2014).
- <sup>17</sup>Y. Ide, N. Konno e T. Machida, «Entanglement for Discrete-time Quantum Walks on the Line», *Quantum Info. Comput.* **11**, 855–866 (2011).
- <sup>18</sup>R. Eryiğit e S. Gündüç, «Time exponents of asymptotic entanglement of discrete quantum walk in one dimension», *International Journal of Quantum Information* **12**, 1450036 (2014).

- <sup>19</sup>N. Shenvi, J. Kempe e K. B. Whaley, «Quantum random-walk search algorithm», *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- <sup>20</sup>G. Di Molfetta e A. Pérez, «Quantum walks as simulators of neutrino oscillations in a vacuum and matter», *New Journal of Physics* **18**, 103038 (2016).
- <sup>21</sup>Y. Wang, Y. Shang e P. Xue, «Generalized teleportation by quantum walks», *Quantum Inf. Process.* **16**, 221 (2017).
- <sup>22</sup>K. R. Motes, A. Gilchrist e P. P. Rohde, «Quantum random walks on congested lattices and the effect of dephasing», *Scientific reports* **6**, 19864 (2016).
- <sup>23</sup>H. Bougroura et al., «Quantum-walk transport properties on graphene structures», *Physical Review A* **94**, 062331 (2016).
- <sup>24</sup>J. R. Busemeyer, Z. Wang e J. T. Townsend, «Quantum dynamics of human decision-making», *Journal of Mathematical Psychology* **50**, 220–241 (2006).
- <sup>25</sup>G. S. Engel et al., «Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems», *Nature* **446**, 782–786 (2007).
- <sup>26</sup>A. Vallejo et al., «Entropy production in the quantum walk», *Physical Review A* **99**, 032319 (2019).
- <sup>27</sup>J. Kempe, «Quantum random walks: an introductory overview», *Contemporary Physics* **44**, 307–327 (2003).
- <sup>28</sup>N. S. Yanofsky e M. A. Mannucci, *Quantum computing for computer scientists* (Cambridge University Press, 2008).
- <sup>29</sup>I. Glendinning, «The bloch sphere», em QIA Meeting TechGate (2005).
- <sup>30</sup>M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information* (Cambridge university press, 2010).
- <sup>31</sup>J. J. Sakurai e J. Napolitano, *Mecânica quântica moderna* (bookman, 2013).
- <sup>32</sup>N. Zettili, *Quantum mechanics: concepts and applications*, 2003.
- <sup>33</sup>A. C. Orthey Jr e E. P. M. Amorim, «Connecting velocity and entanglement in quantum walks», *Physical Review A* **99**, 032320 (2019).
- <sup>34</sup>C. H. Bennett et al., «Concentrating partial entanglement by local operations», *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- <sup>35</sup>J. Maziero, «Entendendo a entropia de von Neumann», *Revista brasileira de Ensino de Física* **37**, 1314 (2015).
- <sup>36</sup>R. Zhang, P. Xue e J. Twamley, «One-dimensional quantum walks with single-point phase defects», *Physical Review A* **89**, 042317 (2014).
- <sup>37</sup>T. Chen e X. Zhang, «The defect-induced localization in many positions of the quantum random walk», *Scientific reports* **6**, 25767 (2016).
- <sup>38</sup>M. Zeng e E. H. Yong, «Discrete-Time Quantum Walk with Phase Disorder: Localization and Entanglement Entropy», *Sci. Rep.* **7** (2017).
- <sup>39</sup>R. Vieira, E. P. M. Amorim e G. Rigolin, «Entangling power of disordered quantum walks», *Phys. Rev. A* **89**, 042307 (2014).
- <sup>40</sup>G. Abal et al., «Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions», *Phys. Rev. A* **73**, 042302 (2006).

- 
- <sup>41</sup>A. C. Orthey e E. P. M. Amorim, «Asymptotic entanglement in quantum walks from delocalized initial states», *Quantum Information Processing* **16**, 224 (2017).