

Neste trabalho de dissertação de mestrado, estudamos a dinâmica de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (EDO) não lineares, composto por quatro equações acopladas que descrevem um modelo quadridimensional do circuito de Chua. O comportamento dinâmico deste modelo foi estudado com uma abordagem experimental, utilizando a computação analógica no qual, através dos princípios da eletrônica analógica, construímos um circuito eletrônico com amplificadores operacionais (computador analógico) que soluciona (integra), a tempo contínuo, as EDOs do modelo. Após projetar e construir o circuito integrador do modelo (computador analógico), realizamos as medidas das tensões elétricas deste ao longo do tempo (as séries temporais das tensões) e analisamos os resultados obtidos, ou seja, estudo das séries temporais das variáveis do circuito analógico do modelo de Chua quadridimensional. Neste estudo, calculamos o espectro dos expoentes de Lyapunov para cada série temporal experimental de um par de parâmetros de controle do circuito. Após, construímos o plano de parâmetros do circuito com os valores do maior expoente de Lyapunov do espectro de cada série temporal. O objetivo de se obter o plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov é termos uma visão qualitativa da dinâmica do circuito, isto é, dos seus possíveis comportamentos dinâmicos: ponto de equilíbrio, periódico, caótico ou hipercaótico. Para o circuito construído, as três primeiras dinâmicas foram observadas no plano de parâmetros experimental. Apesar de o modelo quadridimensional apresentar também a dinâmica hipercaótica, no experimento tal comportamento não foi observado. Transiente caótico na borda de uma região periódica no plano de parâmetros também foi observado.

Orientador: Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque

Joinville, 2020

ANO
2020

VINICIUS FABRICIO ROMANCINI ANTUNES | COMPUTADOR ANALÓGICO DE UM
MÓDELO DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

COMPUTADOR ANALÓGICO DE UM MÓDELO DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL

VINICIUS FABRICIO ROMANCINI ANTUNES

JOINVILLE, 2020

VINICIUS FABRICIO ROMANCINI ANTUNES

**COMPUTADOR ANALÓGICO DE UM MODELO DE CHUA
QUADRIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque.

Joinville-SC

2020

ANTUNES, Vinicius Fabricio Romancini
Computador Analógio de um Modelo de Chua
Quadrídimensional / Vinicius Fabricio Romancini Antunes.
-- 2020.
78 p.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2020.

1. Caos em sistemas dinâmicos. 2. Caos experimental. 3.
Círculo caótico. 4. Computação analógica. I. Albuquerque,
Holokx Abreu . II. Universidade do Estado de Santa Catarina,
Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física. III. Título.

Computador Analógico de um Modelo de Chua Quadridimensional

por

Vinicius Fabricio Romancini Antunes

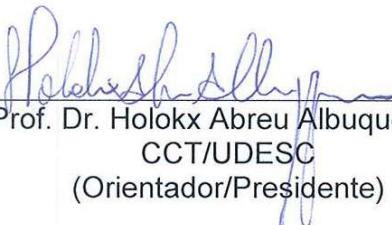
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

Área de concentração em “Física”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC
(Orientador/Presidente)


Prof. Dr. Rafael Marques da Silva
UFPR/PR

Prof. Dr. Julio César Sagás
CCT/UDESC

Joinville, SC, 4 de fevereiro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a essa etapa proporcionada por Deus.

Aos meus familiares, a minha Mãe pelo apoio essencial e inspiração, aos conselhos de meu Pai. Ao meu irmão pelas discussões científicas. A Bianca pelo companheirismo e compreensão.

Ao orientador Prof. Holokx Abreu Albuquerque pelos conselhos e ensinamentos, ao colega Anderson Hoff, pelas sugestões e análises.

Aos amigos que muito bem recepcionaram no ppgf e apreciadores de um bom chimarrão, Rafael, Henrique, Paulo, Joe, Monik, Clesio, Nathan, Lucas, Heitor e Darlene, Susele, Kelli, Eduardo. Aos colegas de laboratório, Mauro, David, Bruna, Guilherme.

A todos que de forma direta ou indireta, estiveram presentes nesta etapa, onde faltariam nomes e palavras para agradecer, deixo meu sincero: **OBRIGADO.**

Não haverá borboletas
se a vida não passar por longas metamorfoses.

Rubem Alves

RESUMO

Neste trabalho de dissertação de mestrado, estudamos a dinâmica de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (EDO) não lineares, composto por quatro equações acopladas que descrevem um modelo quadridimensional do circuito de Chua. O comportamento dinâmico deste modelo foi estudado com uma abordagem experimental, utilizando a computação analógica no qual, através dos princípios da eletrônica analógica, construímos um circuito eletrônico com amplificadores operacionais (computador analógico) que soluciona (integra), a tempo contínuo, as EDOs do modelo. Nesta abordagem circuital, existe uma correspondência direta entre as variáveis dinâmicas do circuito (tensões elétricas) com as variáveis do modelo.

Após projetar e construir o circuito integrador do modelo (computador analógico), realizamos as medidas das tensões elétricas deste ao longo do tempo (as séries temporais das tensões) e analisamos os resultados obtidos, ou seja, estudo das séries temporais das variáveis do circuito analógico do modelo de Chua quadridimensional. Neste estudo, calculamos o espectro dos expoentes de Lyapunov para cada série temporal experimental de um par de parâmetros de controle do circuito (foi obtido ao todo $4,0 \times 10^4$ séries temporais). Após, construímos o plano de parâmetros do circuito com os valores do maior expoente de Lyapunov do espectro de cada série temporal. O objetivo de se obter o plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov é termos uma visão qualitativa da dinâmica do circuito, isto é, dos seus possíveis comportamentos dinâmicos: ponto de equilíbrio, periódico, caótico ou hipercaótico. Para o circuito construído, as três primeiras dinâmicas foram observadas no plano de parâmetros experimental. Apesar de o modelo quadridimensional apresentar também a dinâmica hipercaótica, no experimento tal comportamento não foi observado. Transiente caótico na borda de uma região periódica no plano de parâmetros também foi observado.

Palavras-chave: Caos em sistemas dinâmicos; Caos experimental, Circuito caótico, Computação analógica.

ABSTRACT

In this master's thesis work, we have studied the dynamics of a system described by four coupled nonlinear ordinary differential equations (EDO), that describes a four-dimensional model of the Chua circuit. The dynamical behavior of this model was studied with an experimental approach, using analog computation in which, using the principles of analogic electronics, we have built an electronic circuit with operational amplifiers (analog computer) that solves (integrates), in a continuous time, the EDOs of the model. In this circuital approach, there is a direct correspondence between the dynamical variables of the circuit (bias voltage) with the variables of the model.

After designing and building the integrating circuit of the model (analog computer), we have measured the bias voltages of the model over time (the time series of the bias voltages) and we have analyzed the obtained results that is, the study of the time series of the variables of the analog circuit of the four-dimensional Chua model. In this study, we have calculated the spectrum of Lyapunov exponents for each experimental time series of a control parameters pair of the circuit (it was obtained a total of 4.0×10^4 time series). Then, we have constructed the parameter plane of the circuit with the values of the largest Lyapunov exponent of the spectrum of each time series. The aim of obtaining the parameter plane of the largest Lyapunov exponent is to have a qualitative view of the dynamics of the circuit, that is, of its possible dynamical behaviors: equilibrium point, periodic, chaotic or hyperchaotic. For the built circuit, the first three dynamics were observed in the experimental parameter plane. Although the four-dimensional model also present hyperchaotic dynamics, this behavior was not observed in the experiment. Transient chaos at the edge of a periodic region in the parameter plane was also observed.

Keywords: Chaos in dynamical system; Experimental chaos; Chaotic circuit; Analog computation.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Ilustração do afastamento das trajetórias para duas condições iniciais muito próximas $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$ no espaço de fase. Após um intervalo de tempo $t - 0$ o afastamento $\Delta(t)$ relaciona-se com $\Delta(0)$ através de uma exponencial temporal..... | 18 |
| 2.2 | (a) Esquema de um circuito <i>RC</i> em série com uma bateria <i>V</i> percorrido por uma corrente elétrica <i>i</i> . (b) Esquema de sistema mecânico mola-amortecedor. | 22 |
| 2.3 | (a) Esquema da estrutura de um <i>ampop</i> e (b) a representação esquemática interna do circuito integrado <i>TL072</i> (código do fabricante) contendo dois <i>ampops</i> | 25 |
| 2.4 | Representações analógicas de operações matemáticas básicas com os <i>ampops</i> | 27 |
| 3.1 | Representação esquemática do circuito de Chua | 30 |
| 3.2 | Reconstrução do diodo de Chua usando <i>ampops</i> e resistores | 30 |
| 3.3 | Curva característica corrente-tensão do diodo de Chua | 34 |
| 3.4 | Curva característica corrente-tensão do diodo de Chua e a linha de carga vermelha que mostra os pontos de intersecção | 35 |
| 3.5 | Não linearidade cúbica $g(x) = 0.03x^3 - 1.2x$ para o modelo (3.11) circuito de Chua | 37 |

| | | |
|-----|--|----|
| 3.6 | Projeções bidimensionais do atrator hipercaótico gerado pelo sistema (3.11) para os parâmetros $\gamma = 0.32, s = 0.11, a = 0.03, c = -1.3, \alpha = 30$ e $\beta = 50$ | 38 |
| 3.7 | Planos de parâmetros para o sistema (3.11). Na coluna da esquerda temos os planos para o maior expoente de Lyapunov do espectro e na coluna da direita, os planos para o segundo maior expoente do espectro. Em (a) e (b) foram mantidos $\gamma = 0.32$ e $\beta = 50$. Em (c) e (d) $\alpha = 0.03$ e $\gamma = 0.32$. Em (e) e (f) $\alpha = 0.03$ e $\beta = 50$ | 39 |
| 4.1 | Projeções tridimensionais, (a) (x, y, z) e (b) (x, y, w) , de um atrator caótico do modelo (3.11). As condições iniciais usadas foram $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ | 42 |
| 4.2 | Representação analógica do integrador da equação (4.3). (a) Integrador e somador e (b) inversor. Os ampops são representados por $u1$ e $u2$ | 44 |
| 4.3 | Esquema da implementação do circuito integrador do modelo (4.2), o computador analógico do Chua quadridimensional. Esquema desenvolvido no ambiente MULTISIM. | 47 |
| 4.4 | Projeções bidimensionais do conjunto de variáveis $(X : Y)$, $(X : Z)$, $(X : W)$, $(Y : Z)$, $(Y : W)$ e $(Z : W)$ obtidos da simulação do circuito da figura 4.3 no Multsim. Os atratores, em amarelo, são visualizados através do osciloscópio virtual, ferramenta do Multsim..... | 48 |
| 4.5 | Circuito eletrônico do esquema circuital da figura 4.3 montado numa <i>protoboard</i> . Este circuito é o integrador analógico do modelo (4.2)..... | 49 |
| 4.6 | Esquema do aparato experimental utilizado neste trabalho para estudo do circuito integrador da figura 4.5. | 50 |
| 4.7 | Bancada experimental com o circuito da figura 4.6 conectado aos filtros de entrada/saída e ao circuito de controle de condições iniciais (primeiro plano), à fonte de tensão e ao osciloscópio (ao fundo) e aos cabos do tipo <i>BNC</i> (lateral | |

| | |
|--|----|
| esquerda). A esquerda, no osciloscópio temos a projeção (X, Y) e a direita, a projeção (Y, Z) para os parâmetros ($\gamma = 0.4 V$, $s = 0.4 V$)..... | 51 |
| 4.8 Prompt de comando do DOS Windows chamando a rotina lyap_spec com os valores das <i>flags</i> para uma determinada série temporal..... | 53 |
| 4.9 Atratores experimentais obtidos da captura direta da tela do osciloscópio para os seguintes pares de variáveis, ($X : Y$), ($X : Z$), ($X : W$), ($Y : Z$), ($Y : W$) e ($Z : W$), respectivamente, para os parâmetros ($\gamma = 0.32 V$, $s = 0.11 V$)..... | 54 |
| 4.10 Plano de parâmetros experimental do maior expoente de Lyapunov obtido do circuito analógico do modelo de Chua quadridimensional. O valor do expoente segue o código de cores conforme barra de cores a direita. Os eixos estão em unidades de Volts..... | 55 |
| 4.11 Plano de parâmetros obtidos numericamente (computação digital) para o modelo (3.11). Nesta simulação estendemos os intervalos do par de parâmetros (γ, s) da figura 3.7(e)..... | 58 |
| 4.12 Plano de atratores experimentais para o par (γ, s). Cada ponto do plano de parâmetros da figura 4.10 equivale a um atrator experimental..... | 59 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO..... | 15 |
| 2 | MÉTODOS E CONCEITOS | 17 |
| 2.1 | Sistemas Dinâmicos Determinísticos | 17 |
| 2.2 | Caracterização da Dinâmica Caótica..... | 19 |
| 2.3 | Computação Analógica..... | 22 |
| 3 | O MODELO DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL..... | 31 |
| 3.1 | CIRCUITO DE CHUA..... | 31 |
| 4 | O COMPUTADOR ANALÓGICO DO CIRCUITO DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL..... | 41 |
| 4.1 | Descrição Experimental..... | 41 |
| 4.2 | Resultados Experimentais..... | 53 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 61 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS..... | 64 |
| | APÊNDICES | |
| A. | Rotina para Gerar Atrator..... | 68 |
| B. | Rotina de Comando para Saída Analógica..... | 70 |
| C. | Rotina de Varredura Automatizada da Série Experimental..... | 71 |
| D. | Rotina para Análise das Séries Experimentais pelo Pacote TISEAN. | 75 |

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Pelo formalismo clássico da Mecânica podemos descrever a dinâmica de qualquer sistema físico, independentemente do seu número de graus de liberdade, através de equações diferenciais ordinárias (EDOs) para as variáveis dinâmicas do sistema [1]. Neste formalismo, temos um problema de condição inicial, no qual para se obter a solução para as variáveis em qualquer tempo, temos que conhecer os seus valores no tempo inicial. Para sistemas físicos com poucos graus de liberdade, por exemplo, um oscilador harmônico simples, é possível encontrar uma solução analítica para as variáveis dinâmicas. Entretanto, para sistemas com vários graus de liberdade e termos não lineares nas EDOs que os descrevem, não é possível encontrar soluções analíticas e para estes casos usamos métodos computacionais para obtermos soluções numéricas para as variáveis [2, 3, 4, 5].

Obter soluções numéricas de EDOs requer algum método computacional e uma máquina, neste caso o computador, para executar as tarefas pré-determinadas de um algoritmo desenvolvido para tal fim. Os primeiros computadores criados para este objetivo (no início da década de 40) utilizavam o conceito de analogias, por exemplo, o análogo elétrico de um sistema mecânico (mais especificamente, um circuito RLC análogo a um oscilador harmônico amortecido), no qual podemos representar uma variável dinâmica qualquer de uma EDO como sendo a tensão elétrica em um circuito eletrônico. E utilizando os princípios da eletrônica analógica [6,7], construímos um computador analógico (um circuito eletrônico tal que a tensão elétrica neste circuito é uma variável contínua análoga à variável da EDO) que integra, a tempo contínuo, a EDO. Com o advento da eletrônica digital a partir da década de 60, atualmente temos os computadores digitais modernos e com os algoritmos desenvolvidos para estes computadores, obtemos soluções numéricas de EDOs por computação digital, no qual o tempo computacional é discreto [8].

Assim, descrevendo através das leis básicas da Mecânica a dinâmica de um sistema físico por um conjunto de EDOs acopladas, podemos obter as soluções das variáveis dinâmicas por computação digital ou analógica. A referência [9] propõe

uma metodologia para se construir um computador analógico que soluciona, a tempo contínuo, um conjunto de EDOs acopladas. A metodologia desenvolvida é construir um circuito eletrônico (círculo integrador), composto por amplificadores operacionais (ampops), resistores e capacitores, que faz analogia entre as variáveis dinâmicas do sistema de EDOs com tensões elétricas do circuito.

Neste trabalho de dissertação de mestrado, aplicamos a metodologia desenvolvida em [9] para construir um computador analógico de um modelo de Chua quadridimensional. O modelo é descrito por um conjunto de 4 EDOs acopladas contendo termos não lineares e 5 parâmetros de controle. A partir do computador analógico, o objetivo é construir um plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, calculado a partir das séries temporais das 4 variáveis dinâmicas do modelo. As séries temporais são as soluções numéricas, a tempo contínuo, do círculo integrador do modelo. Para apresentar o trabalho desenvolvido, dividimos esta dissertação em 5 capítulos, sendo o capítulo 1 esta Introdução. No capítulo 2 apresentamos os Métodos e Conceitos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 3 descrevemos o modelo de Chua quadridimensional estudado neste trabalho e sua obtenção a partir do modelo de Chua canônico tridimensional. No capítulo 4 apresentamos o desenvolvimento do círculo integrador e os resultados experimentais obtidos desse círculo. E finalmente, no capítulo 5 fazemos as considerações finais pertinentes aos resultados obtidos.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS E CONCEITOS

Neste capítulo apresentamos uma breve introdução aos conceitos de sistemas dinâmicos e aos métodos de análise que foram utilizados para a realização deste trabalho. Descrevemos a abordagem numérica e o método experimental por computação analógica. Para mais detalhes dos conceitos abordados, sugerimos aos leitores consultarem as referências citadas.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS DETERMINÍSTICOS

Em ciências, tem grande relevância o estudo de sistemas que variam com o tempo. A necessidade de compreender o passado bem como o estado atual, ou antever os acontecimentos futuros, é objeto de investigação nas mais variadas áreas do conhecimento. Para isso, é indispensável apresentar um conjunto de leis naturais que estabelecem um determinado estado [2, 3, 4, 5].

Sistemas dinâmicos determinísticos são sistemas (físicos, químicos, biológicos etc.) cujas variáveis (que descrevem o dado sistema e que podem estar relacionadas entre si) evoluem no tempo através de regras e equações matemáticas. Por exemplo, a partir das leis básicas da Física Clássica o determinismo de um sistema dinâmico, digamos um acoplamento de dois osciladores harmônicos [10] se apresenta através de equações diferenciais ordinárias (EDOs) acopladas, conforme descrito no conjunto de equações (2.1).

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + \kappa(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - \kappa(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (2.1)$$

para o qual $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) é a posição em função do tempo t da i -ésima partícula em relação à posição de equilíbrio, \ddot{x}_i é a derivada de segunda ordem da posição em

relação ao tempo t , m é a massa das partículas, k é constante de mola e κ a constante de acoplamento.

Em um sistema dinâmico descrito por EDOs, o tempo evolui de maneira contínua e neste caso referimos ao sistema como um fluxo. Nos casos em que o tempo se dá de uma forma discreta, assumindo valores inteiros num conjunto de equações de diferença é comum chamarmos de mapas [5]. Um exemplo de um sistema discreto, descrito por uma equação de diferença, é o mapa logístico dado pela equação (2.2), originalmente proposto como um modelo de crescimento populacional [11].

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.2)$$

onde r é a taxa de crescimento populacional e x_n é o número de indivíduos no n -ésimo intervalo de tempo discreto n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Ambos os exemplos (2.1) e (2.2), são problemas de condições iniciais, isto é, para encontrarmos as soluções numéricas das variáveis em função do tempo contínuo e discreto, respectivamente, temos que conhecer os valores de $x_1(t = 0)$ e $x_2(t = 0)$ em (2.1) ou x_0 em (2.2). Existem vários métodos numéricos para encontrarmos as soluções de (2.1). O mais utilizado é método de Runge-Kutta de 4^a ordem, com passo de integração fixo. Algumas EDOs têm soluções analíticas, como também é o caso de (2.1). Entretanto, nem sempre é possível encontrarmos soluções analíticas para as EDOs [2, 5], como veremos mais adiante para o modelo do circuito de Chua. Para o caso de mapas, o caso (2.2), a solução numérica é mais simples, uma vez que pelo método de iteração, podemos obter os valores de x_{n+1} a partir de x_n .

Quando um fluxo satisfaz as três condições: (i) contém pelo menos três variáveis independentes que evoluem no tempo; (ii) as EDOs correspondentes apresentam pelo menos uma não linearidade e (iii) duas condições iniciais muito próximas divergem exponencialmente no tempo (sensibilidade às condições iniciais) – podemos dizer que o sistema é caótico [4].

2.2 CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA CAÓTICA

Uma das principais características dos sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico é a sensibilidade às condições iniciais, observadas primeiramente por Eduard Lorenz em seu modelo de EDOs para previsões meteorológicas. Ao iniciar quase do mesmo ponto inicial (duas condições iniciais muito próximas), Lorenz viu seu computador de previsões do tempo produzir padrões que se distanciavam cada vez mais um do outro, até que toda semelhança desaparecesse [12]. Em seu artigo *“Predictability: Does a flap of butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?”*, Lorenz esclarece o conceito de efeito borboleta, em que algo como o bater de asas de uma borboleta no Brasil poderia desencadear, semanas depois, um violento tornado no Texas. Isso se devia tão somente a extrema sensibilidade às condições iniciais de um sistema como o clima [13].

Podemos analisar os diferentes comportamentos e a evolução de um sistema dinâmico por meio dos expoentes de Lyapunov: o caráter divergente, dissipativo ou conservativo do sistema, também é visto por estes expoentes, os quais descrevem a taxa temporal com que dois pontos próximos no espaço de fases se aproximam ou se afastam [14].

De maneira ilustrativa, mostramos na figura 2.1 o conceito de afastamento das trajetórias dada duas condições iniciais muito próximas $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$ no espaço de fase. $\Delta(0)$ é a distância entre duas condições iniciais e $\Delta(t)$ é a distância após um intervalo de tempo $t - 0$.

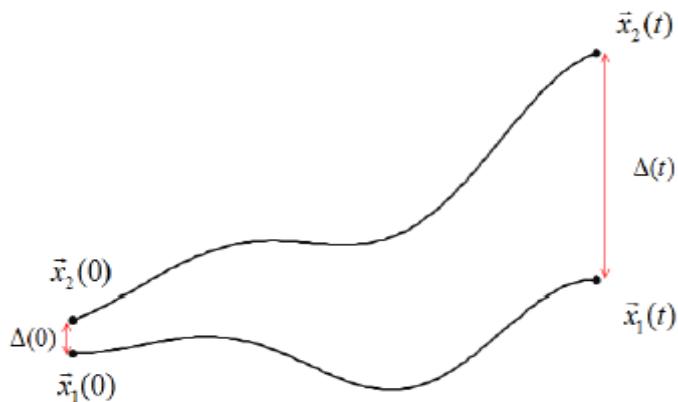


Figura 2.1: Ilustração do afastamento das trajetórias para duas condições iniciais muito próximas $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$ no espaço de fase. Após um intervalo de tempo $t - 0$ o afastamento $\Delta(t)$ relaciona-se com $\Delta(0)$ através de uma exponencial temporal.

Se a separação entre as trajetórias aumenta exponencialmente com o tempo (divergência das trajetórias), então $\Delta(t) = \Delta(0)e^{\lambda t}$ para $\lambda > 0$, o sistema possui sensibilidade às condições iniciais, portanto, apresenta um comportamento caótico, o que é afirmado com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, neste caso o expoente na direção de evolução do fluxo. Para $\lambda < 0$, temos convergência das trajetórias na direção de evolução do fluxo, assim o sistema apresenta um comportamento ponto de equilíbrio (ou ponto fixo). Para o caso $\lambda = 0$, o sistema apresenta um comportamento periódico, uma vez que dada duas trajetórias no espaço de fase, na direção de evolução do fluxo elas se mantêm paralelas.

Para um sistema dinâmico dissipativo n -dimensional a tempo contínuo (fluxo), temos o espectro dos expoentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ para uma dada dinâmica do sistema. Em termos gerais, seja o sistema dinâmico dado pela equação (2.3),

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}). \quad (2.3)$$

Se para uma dada condição inicial \vec{x}_0 o sistema (2.3) evoluir temporalmente e assintoticamente para um conjunto de pontos, definindo um volume invariante no espaço de fase, teremos um atrator. A escolha de \vec{x}_0 pode determinar para qual atrator o sistema (2.3) evoluirá. Geralmente este tipo de sistema apresenta os seguintes tipos de atratores: i) ponto de equilíbrio (um ponto no espaço de fase), ii) periódico (uma linha fechada, e que não se cruza, no espaço de fase) e iii) caótico (ocupa um volume, com dimensão fracionária, no espaço de fase).

Para o caso do sistema (2.3), cada um dos tipos de atratores mencionados acima são caracterizados por um espectro de expoentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Estes expoentes, de maneira geral, podem ser obtidos a partir da matriz Jacobiana dada por

$$J_{ij}(t) = \frac{df_i(x)}{dx_j}. \quad (2.4)$$

Esta Jacobiana define a evolução dos vetores tangentes (vetores nos espaços tangentes do espaço de fase), dados pela matriz \mathbb{Y} ,

$$\dot{\mathbb{Y}} = J\mathbb{Y}, \quad (2.5)$$

com a condição inicial $\mathbb{Y}_{ij} = \delta_{ij}$. A matriz \mathbb{Y} descreve como uma pequena alteração na condição inicial \vec{x}_0 se propaga para a posição $\vec{x}(t)$. O limite

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [\mathbb{Y}(t) \mathbb{Y}^T(t)], \quad (2.6)$$

define a matriz Λ . Os expoentes de Lyapunov λ_i são definidos como sendo os autovalores de Λ . Em um sistema dissipativo deve-se ter

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0, \quad (2.7)$$

garantindo a contratação do volume no espaço de fase do sistema.

Assim, o espectro dos expoentes de Lyapunov permite classificar os mais diversos tipos de atratores no espaço de fase. Considerando alguns dos principais exemplos para um fluxo (sistema dinâmico a tempo contínuo), pode-se ter:

- ponto de equilíbrio: tem-se todos os $\lambda_i < 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, pois o volume do espaço de fases sofre uma contração em todas as direções do fluxo, a fim de que a trajetória converja para o ponto que atrai condições iniciais próximas;
- ciclo-limite ou atrator periódico: tem-se $\lambda_1 = 0$ e os demais $\lambda_i < 0$ para $i = 2, 3, \dots, n$, sendo que o expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória fechada (ao longo do fluxo), assim o atrator se constitui em um ciclo;
- atrator quase-periódico (torus): tem-se $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{i-1} = 0$ e $\lambda_i < 0$ para $i = 3, 4, \dots, n$, de modo que as trajetórias atratoras se situam sobre uma superfície, neste comportamento tem-se a coexistência de inúmeros ciclos;
- atrator caótico: tem-se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_i < 0$ para $i = 3, 4, \dots, n$. Um expoente deve ser positivo para que exista dependência sensível às condições iniciais (na direção de evolução do fluxo), um nulo numa direção perpendicular, e os demais devem ser negativos, tal que a condição (2.7) seja verdadeira para que o sistema seja dissipativo;
- atrator hipercaótico: tem-se no mínimo dois expoentes de Lyapunov positivos, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, e os demais negativos $\lambda_i < 0$ para $i = 3, 4, \dots, n$. Para os sistemas hipercaóticos deve-se ter pelo menos quatro equações diferenciais para se ter pelo menos dois positivos.

O atrator é um comportamento dinâmico assintótico no espaço de fase e depende das condições iniciais. O conjunto de condições iniciais no espaço de fase de um sistema dinâmico, que leva a um determinado atrator, é chamado de bacia de atração daquele atrator. Além das condições iniciais, a dinâmica também pode depender de um conjunto de parâmetros que estão presentes nas EDOs que modelam o sistema de interesse. Por exemplo, nas equações (2.1), a constante de acoplado κ é um parâmetro de controle do sistema, assim como a massa e a constante elástica. Portanto, os diversos tipos de atratores acima descritos, em termos do espectro dos expoentes de Lyapunov, se aplicam também quando variamos os parâmetros de controle de um sistema.

A alteração do comportamento dinâmico de um sistema, em termos dos tipos de atratores, ao variarmos um parâmetro de controle chamamos de bifurcação. Uma maneira de estudarmos as bifurcações de um sistema dinâmico multiparamétrico (que depende de vários parâmetros de controle), utilizando os expoentes de Lyapunov e os parâmetros de controle, é construirmos um diagrama bidimensional, sendo cada eixo um parâmetro a ser variado e os valores (e sinais) dos expoentes de Lyapunov como a medida do comportamento dinâmico (os tipos de atratores) que o sistema apresenta para um dado par de parâmetros de controle. Os valores e sinais dos expoentes são representados por um gradiente de cores. Este diagrama muitas vezes é conhecido como plano de parâmetros, ou diagrama de Lyapunov [15].

2.3 COMPUTAÇÃO ANALÓGICA

Antes de conceituarmos a computação analógica, vamos discutir brevemente o conceito de analogia em Física. Dizemos que dois sistemas físicos são análogos quando as equações que descrevem seus comportamentos têm a mesma estrutura matemática. Por exemplo, seja o circuito elétrico RC (resistor e capacitor) em série alimentado por uma bateria V (também em série) conforme a figura 2.2(a). A tensão elétrica v terá a seguinte equação,

$$v = Ri + \frac{1}{C} \int idt, \quad (2.8)$$

para a qual R é a resistência de R , i é a corrente elétrica no circuito, C é a capacidade de C e t o tempo. Um outro exemplo, seja um sistema mecânico mola-amortecedor com um amortecimento devido a um meio viscoso, conforme figura 2.2(b). A força resultante f terá a seguinte equação,

$$f = B\dot{\delta} + k\int \dot{\delta} dt, \quad (2.9)$$

para a qual B é o coeficiente de atrito viscoso, δ é o deslocamento, k é a constante elástica da mola e t é o tempo.

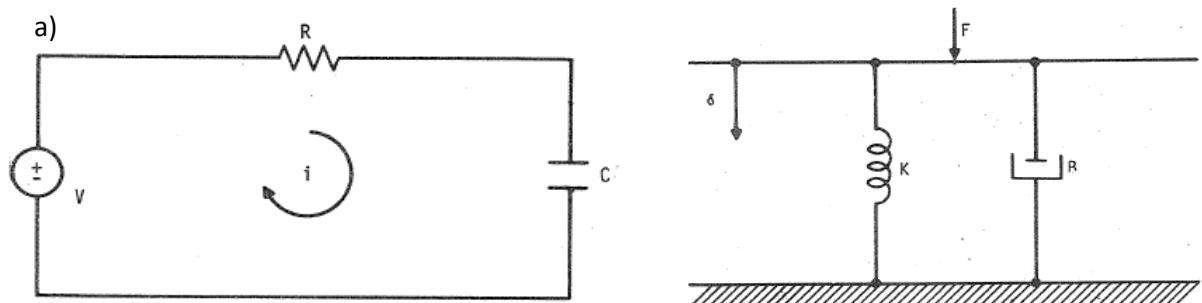


Figura 2.2: (a) Esquema de um circuito RC em série com uma bateria V percorrido por uma corrente elétrica i . (b) Esquema de sistema mecânico mola-amortecedor.

Os dois exemplos são descritos pela seguinte equação geral,

$$y = Ax + B \int x dt. \quad (2.10)$$

Portanto, os dois sistemas são análogos. Logo, a princípio, podemos sempre construir um análogo mecânico de um sistema elétrico e vice-versa. Entretanto, a construção de análogos elétricos diretos de sistemas mecânicos exige a montagem de um análogo para cada problema que se quer estudar.

O computador analógico é uma forma de computador que usa fenômenos elétricos, mecânicos ou hidráulicos, para modelar o problema a ser resolvido. Genericamente um computador analógico usa um tipo de grandeza física para representar o comportamento de outro sistema físico ou função matemática. São normalmente projetados para uma finalidade específica, como acontece em circuitos eletrônicos que implementam sistemas de controle, ou em instrumentos de medição. O termo analógico se refere ao fato das grandezas físicas contínuas dentro do

computador poderem representar diretamente uma grandeza também contínua em um sistema físico real.

O computador digital difere do computador analógico, que representa números por meio da analogia direta entre quantidades, por resolverem problemas realizando operações diretamente com números, enquanto os analógicos medem. Os computadores digitais resolvem os problemas realizando cálculos e tratando cada número, dígito por dígito. Um computador digital é uma máquina projetada para armazenar e manipular informações representadas apenas por algarismos ou dígitos, que só podem assumir certos valores distintos (0 e 1 por exemplo).

Há muito tempo atrás já era possível realizar a computação tanto na forma analógica como digital, através de dispositivos mecânicos. Por exemplo, a máquina de Anticítera [16], datada de ~ 100 a.C., que hoje em dia é considerada o mais antigo computador analógico já construído pela humanidade, usava engrenagens mecânicas para realizar cálculos aritméticos para descrever, a tempo futuro, as posições astronômicas de objetos celestes bem como os eclipses. Outro exemplo, o ábaco mesopotâmico [17], datado de ~ 5.500 a.C., é um instrumento de cálculo aritmético e é considerado um dos mais antigos computadores digitais já construídos pela humanidade.

Com o desenvolvimento da eletrônica (neste contexto é a ciência que estuda a forma de controlar a energia elétrica por meios elétricos nos quais os elétrons têm papel fundamental), os primeiros computadores eletrônicos eram analógicos. Esses computadores convertiam os números que representavam as grandezas em tensões elétricas e então realizavam operações matemáticas usando para esta finalidade os mais diversos recursos. Uma primeira forma de fazer os cálculos era através de componentes eletrônicos passivos como os potenciômetros. Depois, com o maior desenvolvimento da eletrônica, passaram a ser usados os amplificadores operacionais. O próprio nome “amplificador operacional” vem do fato de que eles foram desenvolvidos originalmente para realizar “operações”, sendo usados nos primeiros computadores do tipo.

Assim, um computador eletrônico analógico pode ser descrito basicamente como uma máquina que realiza operações matemáticas com grandezas analógicas que são convertidas para a forma de tensões elétricas. Este computador é composto por circuitos eletrônicos que realizam operações com as tensões tais como soma,

subtração, diferenciação, integração, raiz quadrada etc., e estes circuitos são ligados de forma a termos um conjunto de operações segundo o problema que deve ser resolvido e o resultado aparece na saída sob a forma de uma tensão elétrica. Por exemplo, na referência [18] temos um endereço eletrônico para um vídeo do *YouTube* em que é mostrado o computador analógico *HEATHKIT EC-1* de 1960, utilizado para resolver uma equação diferencial de segunda ordem.

A computação analógica adotada neste trabalho de dissertação se baseia no uso da eletrônica analógica para realizarmos a computação, a tempo contínuo, dos modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico de sistemas físicos reais [9]. Com as mais variadas formas de aplicações e utilização do computador analógico, estamos interessados na computação analógica como o análogo eletrônico, ou seja, construindo um circuito eletrônico que descreve as equações diferenciais que definem o sistema a ser estudado, de modo que sejam equivalentes o circuito eletrônico e este sistema de interesse.

Considerando a construção do circuito eletrônico para a representação das equações dinâmicas do sistema, pode-se utilizar as mais variadas formas de associação de resistores, capacitores, transistores entre outros. Para a representação do sistema dinâmico estudado neste trabalho, utilizou-se, por sua maior praticidade, os amplificadores operacionais (*ampops*) que são pequenos circuitos envolvendo componentes analógicos discretos [19].

Os *ampops* tem a estrutura bastante simples. É composto por dois terminais de entrada identificados pelos sinais positivo (+), entrada não inversora, e negativa (-), entrada inversora, uma saída V_0 e mais duas entradas de alimentação ($+V_{cc}$) e ($-V_{cc}$), como observado na figura 2.3.

Uma das vantagens dos *ampops* está na sua função de transferência bastante precisa, que é definida pela relação entre as tensões de saída V_0 e de entrada V_+ e V_- . Apesar dos componentes eletrônicos estarem sujeitos a imperfeições, podemos tratar os *ampops* como ideais, ou seja, impedância nula. Na prática as entradas possuem impedância na ordem de $10^7\Omega$ e saídas entre 10^2 a $10^3\Omega$. A função de transferência, que nos fornece a saída V_0 em termos das entradas V_+ e V_- , é dada por:

$$V_0 = (V_+ - V_-) \frac{A}{1+j\omega t}, \quad (2.11)$$

onde $j = \sqrt{-1}$, w a frequência da diferença dos dois sinais de entrada, t é o tempo característico de resposta ($\approx 10^{-6}s$) e A é o ganho, que em malha aberta (uma configuração sem realimentação de retorno da saída do *ampop* à sua entrada) $\approx 10^6$. Ou seja, os *ampops* são capazes de amplificar um sinal de entrada, como o próprio nome sugere.

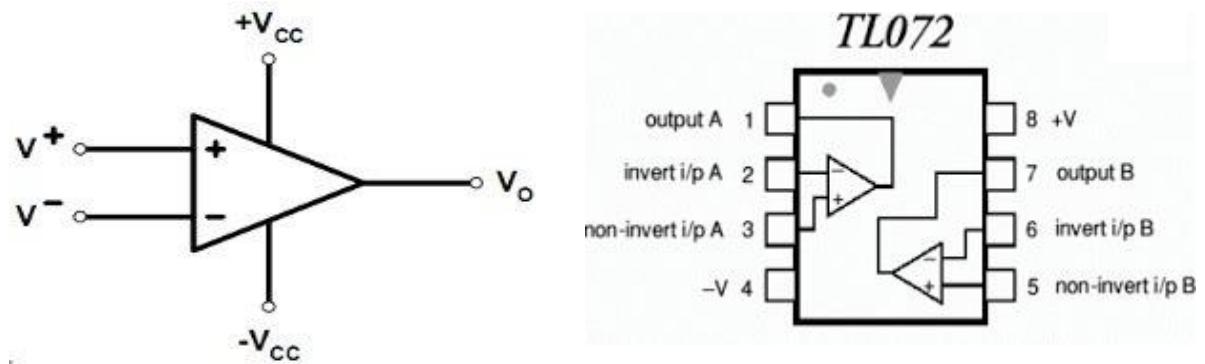


Figura 2.3: (a) Esquema da estrutura de um *ampop* e (b) a representação esquemática interna do circuito integrado *TL072* (código do fabricante) contendo dois *ampops* [20].

Em configurações de malha fechada (uma configuração que tem um caminho de realimentação negativa de retorno da saída do *ampop* à sua entrada), e considerando a montagem de um circuito utilizando *ampops* com realimentação negativa, além de filtros ativos, uma outra aplicação do *ampop* nesta configuração está relacionada com a sua capacidade de realizar operações matemáticas com os sinais de tensão elétrica aplicadas em seus terminais V_+ e V_- . Por exemplo, a entrada inversora V_- permite inúmeras aplicações como: integrador, diferenciador, amplificador diferencial, amplificador somador, amplificador não inversor e amplificador inversor. Todas essas operações são permitidas em relação ao modo em que são dispostos os *ampops* com a malha do circuito em que está imerso, em meio aos resistores e capacitores que o compõem, formando as mais diversas operações [7].

Na figura 2.4 apresentamos algumas configurações de *ampop* em malha fechada com resistores e capacitores e as respectivas funções de transferência, com relação aos sinais de entrada V_i e saída V_o . São apresentadas quatro configurações:

integrador – onde temos um capacitor C conectando o sinal de saída V_o na entrada inversora ($-$) do *ampop* e o sinal de entrada V_i com uma resistor R também na entrada inversora; diferenciador – onde trocamos o capacitor e o resistor de posição. Nestas duas configurações, é possível integrar ou diferenciar um sinal de entrada V_i no tempo, continuamente, por um fator de ganho, que depende do produto entre os valores de R e C . Além disso, há a inversão do sinal de entrada, multiplicação por -1 . Por exemplo, se o sinal de entrada V_i for constante no tempo, obteremos uma rampa de valores de V_o no tempo, para a configuração integrador do *ampop*. Na configuração somador, o sinal de saída V_o será a soma de todos os sinais de entrada com os respectivos ganhos, multiplicado por -1 . E na configuração inversor, o sinal de saída terá um ganho multiplicado por -1 .

Os modos como se utilizam os *ampops* podem representar uma operação matemática de interesse, como uma equação diferencial que será resolvida conforme a disposição e configuração dos mesmos dentro de um circuito eletrônico. Na maioria dos casos, estes circuitos contêm, além dos *ampops*, componentes passivos como resistores, capacitores e indutores, representando o modelo do sistema de interesse, e este resolverá as equações de forma experimental. A reprodução através de um circuito eletrônico das equações que representam o comportamento dinâmico de um sistema físico é uma forma experimental do mesmo.

Um dos maiores problemas enfrentados na representação de um sistema dinâmico por computação analógica está na variação de parâmetros. Inicialmente, a variação de componentes passivos como resistores é mais interessante, pois não restringe o estudo de maneira global, permitindo visualizar os estados referentes aos pares de parâmetros ao qual se projeta o sistema [21].

A análise comportamental de sistemas dinâmicos utilizando diagramas de bifurcação, espaço de parâmetros ou espaço de atratores, bem como quaisquer outras análises, é realizada pelo processo de variação de parâmetros. Para se obter boa definição, a mudança destes parâmetros pode se repetir milhares de vezes. As tentativas de utilizar resistores variáveis [22] para a variação destes parâmetros com servo motores, ou variação manual, apesar de apresentarem boa compatibilidade na comparação numérica, pode representar inúmeras horas de análises para pequenas variações destes parâmetros.

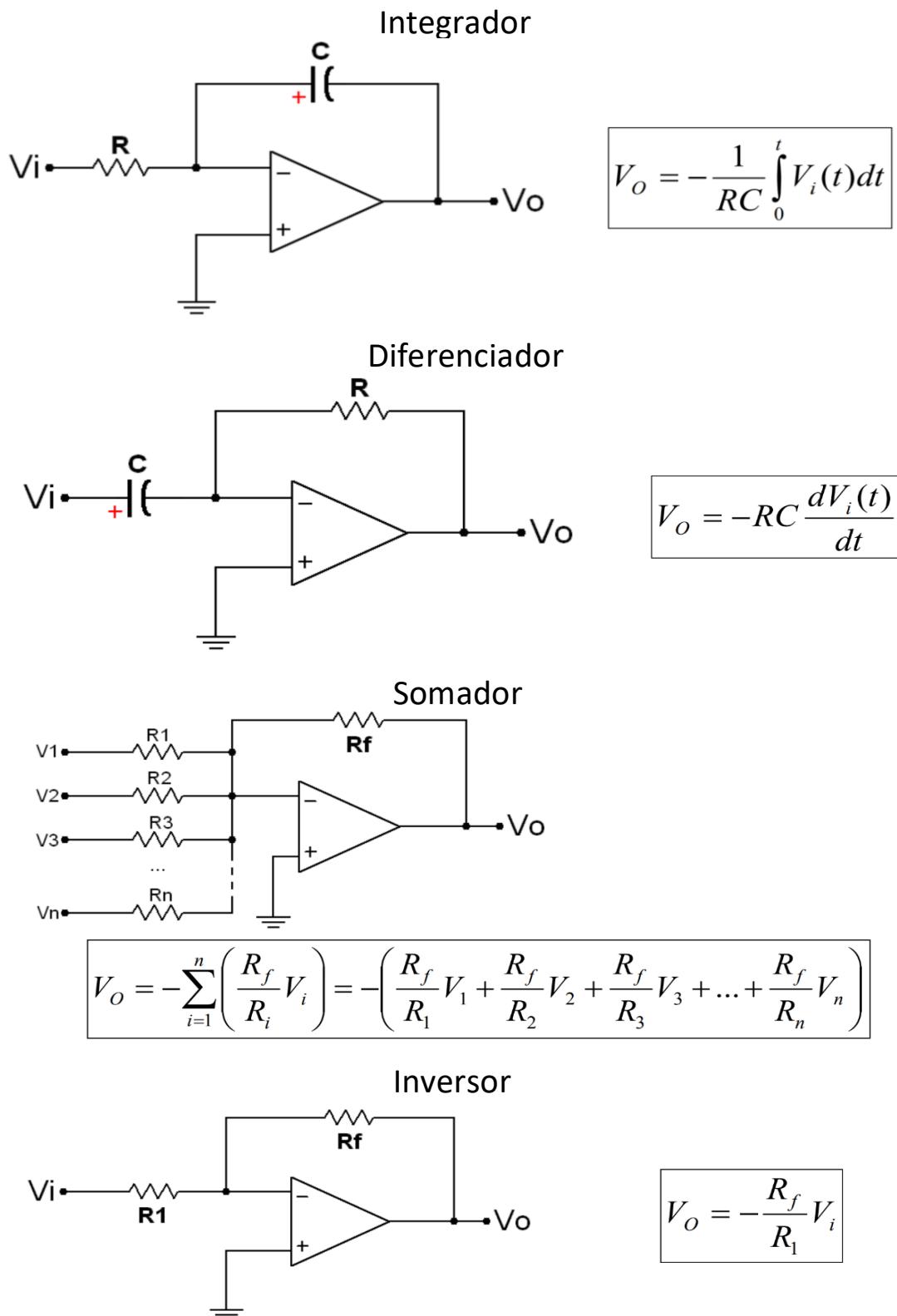


Figura 2.4: Representações analógicas de operações matemáticas básicas com os ampops [7].

Para as análises realizadas neste trabalho foi utilizado o controle de parâmetros via tensão contínua [9], que consiste em manipular o circuito em estudo de tal forma que seus parâmetros possam ser controlados pela variação de tensão elétrica. Esta variação pode ser realizada facilmente de forma precisa e automatizada em laboratórios de circuitos relativamente simples, viabilizando a variação destes parâmetros.

Dentre as vantagens da variação de parâmetros por tensão contínua proposta em [9], o modo de variação pode ser uma ferramenta de análise de sistemas dinâmicos experimentais tão robusta que permite: controlar os parâmetros utilizando configuração de integrador analógico com *ampops*, possibilitando o estudo de qualquer sistema caótico; variar parâmetros em domínio negativo; maior precisão na variação; estudo global facilitado com uso de rotinas automatizadas em linguagem Python para aquisição e processamento de dados experimentais; controle de parâmetros de quaisquer sistemas caóticos e, ainda, o controle de condições iniciais via tensão contínua [9].

Portanto, todas as análises que necessariamente precisaram variar ou calibrar parâmetros, foram executadas com variação de tensão elétrica que representassem no circuito o valor do parâmetro de controle desejado. Os atratores foram expressos mediante valores de tensão representados pelos parâmetros e as séries experimentais foram obtidas de maneira automatizada a partir do aparato experimental, conforme apresentado no capítulo 4 deste trabalho.

CAPÍTULO 3

O MODELO DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL

Desde a descoberta do comportamento caótico experimental em sistemas dinâmicos, o Circuito de Chua despertou interesse de estudo nas suas mais variadas formas e aplicações. Neste capítulo faremos uma breve introdução ao modelo do circuito canônico de Chua (tridimensional) e na sequência descrevemos a forma quadridimensional, este constituindo o modelo estudado neste trabalho com o enfoque experimental.

3.1 O CIRCUITO DE CHUA

O estudo de sistemas dinâmicos desperta interesse nas mais variadas áreas da ciência. Um paradigma da dinâmica caótica é o circuito analógico proposto por Leon Chua (circuito de Chua) que é considerado um marco para a teoria dos sistemas dinâmicos como um exemplo real da existência de comportamentos caóticos na natureza. Em 1983, baseado em um circuito eletrônico RLC, Leon Chua propôs um circuito eletrônico que apresenta o mesmo atrator caótico do tipo duplo-rolo já observado no modelo de Lorenz, inicialmente proposto para descrever fenômenos meteorológicos. Nesta época, se buscava demonstrar que o sistema caótico visto por Lorenz era de fato um fenômeno real. Desde então, o circuito de Chua é estudado nas suas mais variadas formas e aplicações [23].

Com as condições para um sistema dinâmico contínuo (fluxo) apresentar atratores caóticos: que seja pelo menos tridimensional ou representado por três equações diferenciais acopladas com pelo menos um termo não linear e ser dissipativo; Leon Chua propôs um circuito *RLC* (um circuito com oscilações amortecidas) acoplado a um diodo representado por uma função corrente-tensão que apresenta uma resistividade diferencial negativa (*rdn*), tal que as oscilações amortecidas do circuito-tanque (*RLC*) fossem restabelecidas pela *rdn* do diodo.

O circuito projetado possui três pontos de equilíbrio (um instável e dois estáveis) e é construído com dois capacitores C_1 e C_2 , um resistor R e um indutor L com resistência interna r_L , que garantem a dimensão mínima para um sistema caótico e o diodo de Chua que é onde está presente a não linearidade do sistema [24], como apresentado na figura 3.1. Na prática, o diodo de Chua pode ser reconstruído com uma configuração envolvendo *ampops*, como mostrado na figura 3.2.

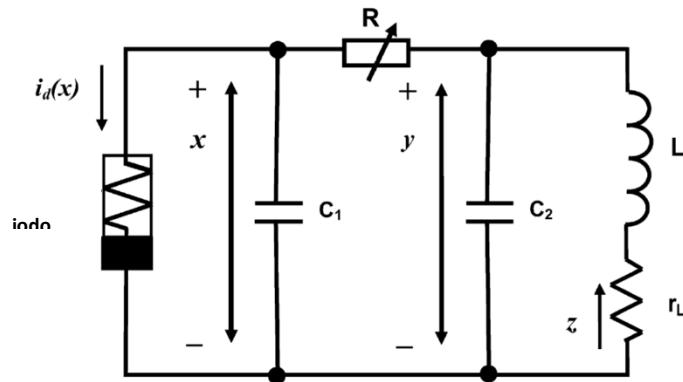


Figura 3.1: Representação esquemática do circuito de Chua [25].

As variáveis x e y são as tensões elétricas nos capacitores C_1 e C_2 , e a variável z é a corrente elétrica no resistor r_L e indutor L . $i_d(x)$ é a corrente elétrica no diodo de Chua e fornece a característica corrente-tensão do elemento não linear.

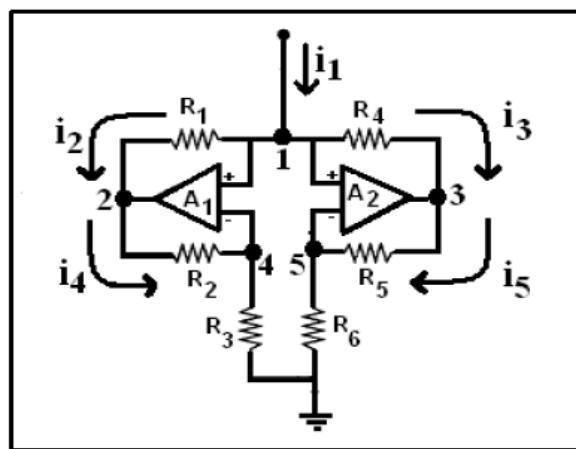


Figura 3.2: Reconstrução do diodo de Chua usando *ampops* e resistores [26].

As equações diferenciais que representam o circuito de Chua podem ser obtidas através das leis de Kirchhoff, considerando as tensões V_1 e V_2 associadas aos capacitores C_1 e C_2 , respectivamente, e a corrente i_L que passa pelo indutor L . Considerando que o indutor tem um comportamento real, pode ser descrito como uma reatância indutiva em série com o resistor r_L que é o elemento dissipativo [27]. Assim, a equação para este ramo do circuito é dado por,

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_2 - r_L \cdot i_L. \quad (3.1)$$

A corrente i_L é a mesma que passa pelo resistor r_L . Aplicando a lei dos nós em R, C_1 e o diodo, a corrente em R é a soma da corrente que passa por C_1 e a fornecida pelo diodo de Chua. Portanto,

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} + i_d(V_1) = \frac{V_2 - V_1}{R}. \quad (3.2)$$

Do mesmo modo, considerando a malha formada por R, L e C_2 , a lei dos nós assegura que a corrente que passa pelo resistor R , em sentido inverso, deve ser a soma da corrente que passa pelo capacitor C_2 com i_L , assim,

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} + i_L = \frac{V_1 - V_2}{R}. \quad (3.3)$$

A curva $i_d(V_1)$, conhecida como curva corrente-tensão do diodo de Chua, mostrada na figura 3.3, têm a forma,

$$i_d(V_1) = m_0 V_1 + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) (|V_1 + B_p| - |V_1 - B_p|), \quad (3.4)$$

onde B_p é um parâmetro experimental associado aos pontos de quebra de linearidade, tendo dimensão de tensão, e os pontos m_1, m_0 são os coeficientes angulares externos e internos da curva da figura 3.3 [28].

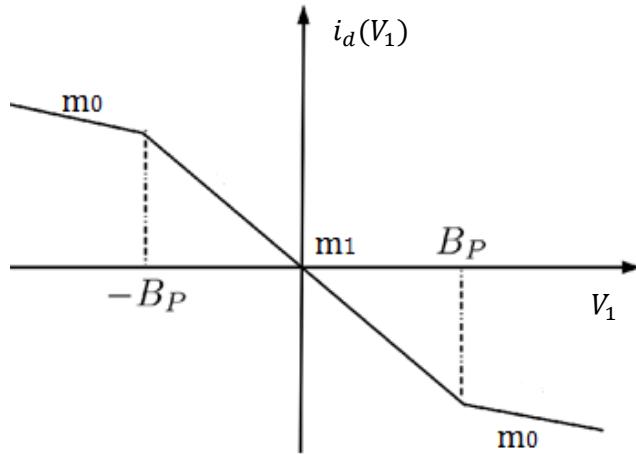


Figura 3.3: Curva característica corrente-tensão do diodo de Chua [26].

Os pontos de operação do circuito são definidos pela interseção da curva linear por partes da figura 3.3 com a linha de carga (que é obtida com o circuito operando no estado estacionário), ou seja, o circuito só pode oscilar se a linha de carga cruzar a curva corrente-tensão em pelo menos em três pontos, também conhecidos como pontos quiescentes, considerando que não há variação de tensão nos capacitores (estado estacionário do circuito) [8], assim considera-se que,

$$\dot{i_L} = \dot{V_1} = \dot{V_2} = 0, \quad (3.5)$$

nas equações (3.1) a (3.3). Assim, $i_d(V_1) = i_L$. Ainda, considerando que a resistência r_L é muito pequena em relação a R , obtém-se a partir das equações anteriores que,

$$i_d(V_1) = -\frac{V_1}{R}. \quad (3.6)$$

Portanto, observamos na figura 3.4 que a reta de intersecção pode variar sua inclinação à medida que muda-se a resistência R do circuito.

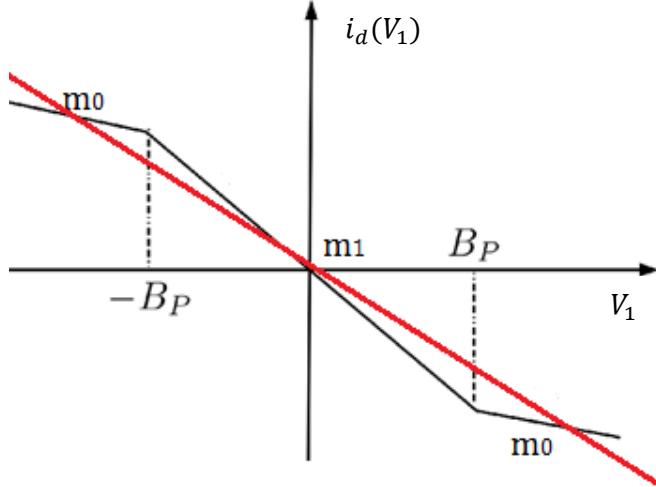


Figura 3.4: Curva característica corrente-tensão do diodo de Chua e a linha de carga vermelha que mostra os pontos de intersecção [8].

Para um estudo computacional, ou mesmo estudo por computação analógica, é útil reescrever as equações em forma adimensional. Utilizando as transformações,

$$x = \frac{V_1}{B_p}; \quad y = \frac{V_2}{B_p}; \quad z = \frac{Ri_L}{B_p}; \quad \tau = \frac{t}{RC_2}; \quad (3.7)$$

com os parâmetros,

$$\beta = \frac{R^2 C_2}{L}; \quad \gamma = \frac{R r_L C_2}{L}; \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1}; \quad a_0 = R m_0; \quad a_1 = R m_0; \quad (3.8)$$

tem-se as equações que governam o circuito de Chua,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha[-x + y - i_d(x)], \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \quad (3.9)$$

com

$$i_d(x) = a_0 x + \frac{1}{2}(a_1 - a_0)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (3.10)$$

O modelo do circuito de Chua, equações (3.9), tem sido estudado nas suas mais variadas formas e utilizações, com inúmeras modificações que podem mostrar os diversos comportamentos dinâmicos do sistema. Visto que a origem do circuito ocorreu na década de 80, na atualidade ainda desperta interesse em seu estudo, como por exemplo um forçamento proposto por [29], uma realimentação tipo seno em [8], são exemplo dentre inúmeras configurações que têm como base inicial o circuito de Chua.

Como o enfoque central deste trabalho é o estudo experimental por computação analógica, escolhemos utilizar um modelo de circuito de Chua no qual foi introduzida uma nova variável w , como descrito na referência [30]. Com esta metodologia de acrescentar mais uma dimensão ao sistema, o objeto de investigação deste trabalho se trata de um circuito de Chua quadridimensional, com uma não linearidade definida como $g(x) = ax^3 + cx$ já estudada em [30] e seu comportamento mostrado na figura 3.5, assim as equações 3.9 tornam-se,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha[y - ax^3 - (1 + c)x]; \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z; \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y - \gamma z + w; \\ \frac{dw}{dt} &= -sx + yz;\end{aligned}\tag{3.11}$$

onde o conjunto (x, y, z, w) representa as variáveis dinâmicas do sistema e o conjunto $(\alpha, \beta, \gamma, s, a, c)$, é formado pelos parâmetros de controle. A nova variável w pode ser interpretada como uma tensão elétrica, ou seja, seria introduzir mais uma malha no circuito da figura 3.1. O parâmetro s tem a mesma dimensão de β ou γ .

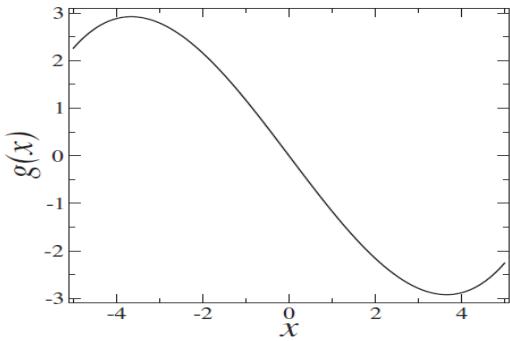


Figura 3.5: Não linearidade cúbica $g(x) = 0.03x^3 - 1.2x$ para o modelo (3.11) circuito de Chua [31].

Na figura 3.6 mostramos as seis projeções bidimensionais possíveis de uma dinâmica específica do modelo (3.11), com a não linearidade dada pela curva da figura 3.5. Essa dinâmica e demais análises foram descritas na referência [30]. A dinâmica deste atrator foi caracterizada como hipercaótica, conforme discutido em [32], através do cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov. Segundo os autores, o espectro é: $\lambda_1 = 0.7325$, $\lambda_2 = 0.0145$, $\lambda_3 = 0.0000$ e $\lambda_4 = -17.7662$. Observamos, dada a precisão do cálculo do espectro, que temos dois expoentes positivos, um nulo e o quarto expoente negativo, caracterizando hipercaos, conforme descrito na seção 2.2. Observamos também a questão da dissipação do sistema nesta dinâmica, uma vez que a soma de todos os expoentes é negativa.

Na continuação dos estudos realizados em [30], os autores estudaram os planos de parâmetros do sistema (3.11) [32]. Na figura 3.7 mostramos os planos de parâmetros do parâmetro s em relação aos parâmetros α , β e γ . Na coluna da esquerda temos os planos para o maior expoente e na direita para o segundo maior expoente. O padrão de cores utilizado para expoentes positivos foi amarelo e vermelho, preto para expoentes nulos e brancos para expoentes negativos.

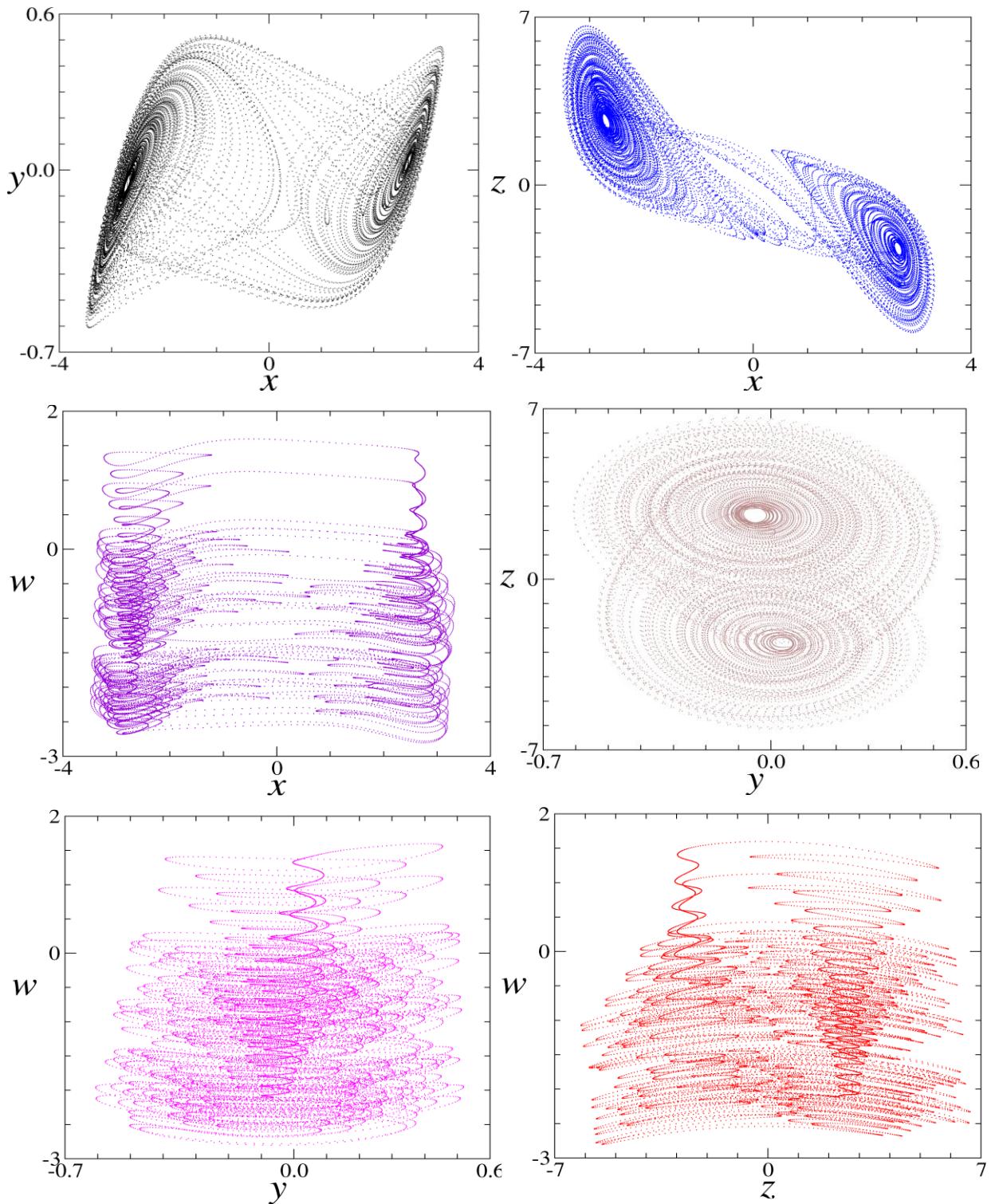


Figura 3.6: Projeções bidimensionais do atrator hipercaótico gerado pelo sistema (3.11) para os parâmetros $\gamma = 0.32, s = 0.11, a = 0.03, c = -1.3, \alpha = 30$ e $\beta = 50$. Figura retirada de [30].

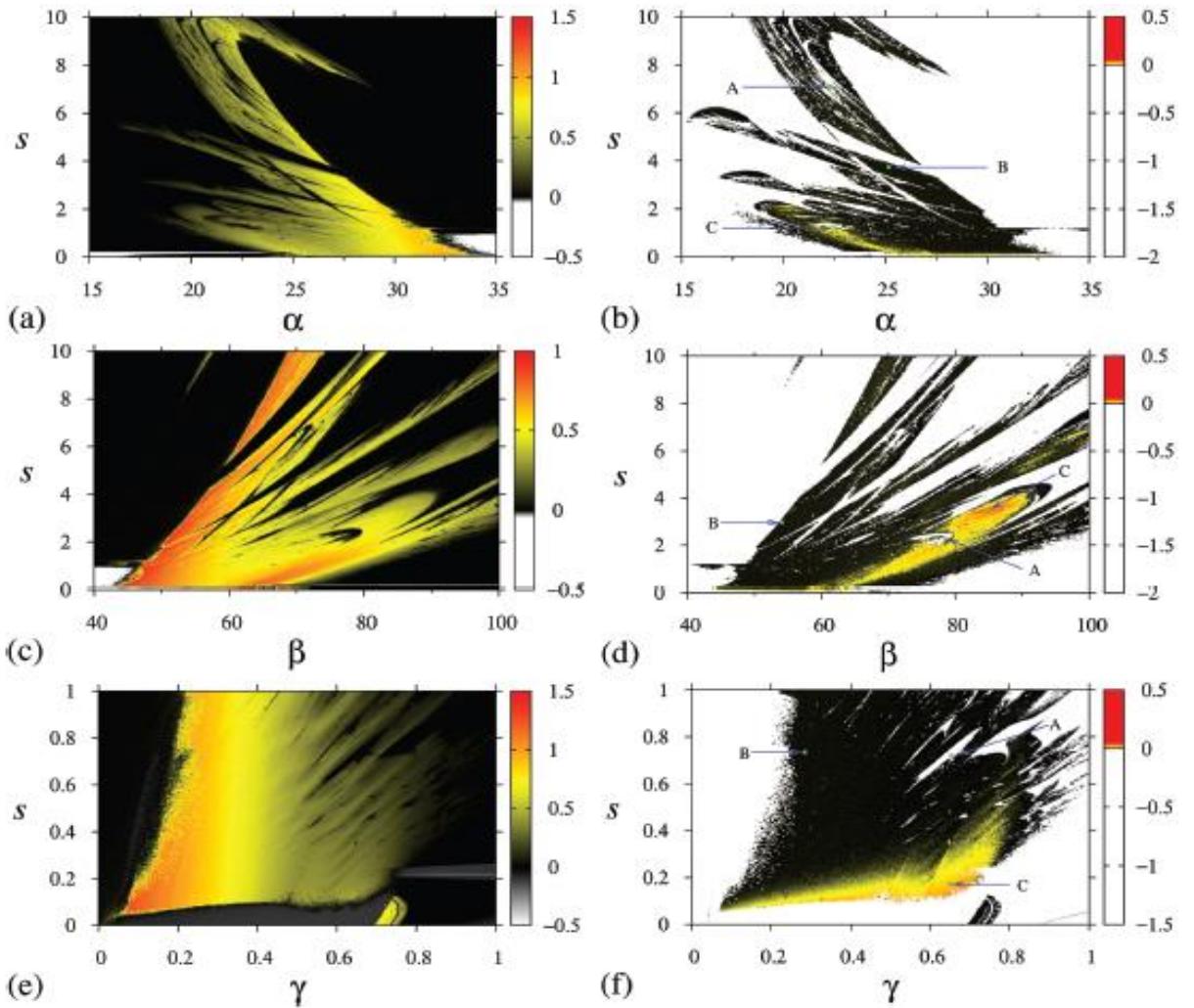


Figura 3.7: Planos de parâmetros para o sistema (3.11). Na coluna da esquerda temos os planos para o maior expoente de Lyapunov do espectro e na coluna da direita, os planos para o segundo maior expoente do espectro. Em (a) e (b) foram mantidos $\gamma = 0.32$ e $\beta = 50$. Em (c) e (d) $\alpha = 0.03$ e $\gamma = 0.32$. Em (e) e (f) $\alpha = 0.03$ e $\beta = 50$. Diagramas retirados da referência [32].

Os planos de parâmetros apresentados na figura 3.7 generalizam os resultados apresentados em [30] e podemos observar as regiões onde o comportamento hipercaótico está presente. As regiões amarelo-avermelhadas nos diagramas da coluna da direita, para o segundo maior expoente, são as regiões hipercaóticas. Para exemplificar os valores dos expoentes de Lyapunov nas regiões dos planos de parâmetros da figura 3.7, foram escolhidos três pontos em cada diagrama, os pontos A, B e C nos diagramas da direita, para o segundo maior

expoente. Na tabela 3.1 apresentamos os valores dos expoentes para os respectivos diagramas.

Tabela 3.1: Expoentes de Lyapunov referente aos pontos A, B e C das figuras 3.7(b), (d) e (f). Tabela retirada da referência [32].

| Figura | Ponto | λ_1 | λ_2 | λ_3 | λ_4 | Comp. |
|--------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 3.7(b) | A | 0.0008 | -0.0467 | -0.3165 | -9.9236 | Periódico |
| 3.7(b) | B | 0.5091 | 0.00007 | -0.16368 | -12.94264 | Caótico |
| 3.7(b) | C | 0.3445 | 0.0192 | -0.0004 | -12.2525 | Hipercaótico |
| 3.7(d) | A | 0.0004 | -0.0253 | -0.1462 | -16.0022 | Periódico |
| 3.7(d) | B | 0.84074 | -0.00001 | -0.168124 | -15.229648 | Caótico |
| 3.7(d) | C | 0.3540 | 0.0424 | -0.0002 | -15.3116 | Hipercaótico |
| 3.7(f) | A | 0.0008 | -0.1110 | -0.1132 | -18.3605 | Periódico |
| 3.7(f) | B | 0.86622 | 0.00004 | -0.0427 | -16.51381 | Caótico |
| 3.7(f) | C | 0.38185 | 0.01675 | 0.00003 | -18.52889 | Hipercaótico |

Podemos observar na tabela 3.1, dada a precisão no cálculo numérico dos expoentes, que os pontos rotulados pela letra C, e que se localizam nas regiões amarela-avermelhadas dos diagramas (b), (d) e (f) da figura 3.7 são de fato atratores hipercaóticos, com os expoentes λ_1 e λ_2 positivos, o expoente λ_3 nulo (dada a precisão dos dois primeiros) e λ_4 negativo. Assim, estas análises numéricas do sistema de Chua quadridimensional evidenciam regiões, nos planos de parâmetros do modelo, com comportamentos de periodicidade, pontos de equilíbrio, caóticas e hipercaóticas.

Portanto, os resultados numéricos apresentados acima para o modelo (3.11) e discutidos nas referências [30, 32], nos motivou, neste trabalho de dissertação, a confeccionar um circuito eletrônico, tendo por base o discutido na seção 2.3, para resolver numa perspectiva experimental o sistema de equações do modelo de Chua quadridimensional (3.11). Este estudo é apresentado no capítulo 4 a seguir.

CAPÍTULO 4

O COMPUTADOR ANALÓGICO DO CIRCUITO DE CHUA QUADRIDIMENSIONAL

Neste capítulo, contendo os resultados experimentais inéditos dessa dissertação, descrevemos os passos para o desenvolvimento de um computador analógico para o modelo do circuito de Chua quadridimensional dado pelas equações (3.11). Mostramos os passos seguidos para reescalonar as equações do modelo, o projeto do circuito e sua simulação, a confecção do circuito, os testes e as aquisições das séries temporais. Após, apresentamos os cálculos dos expoentes de Lyapunov das séries temporais e os planos de parâmetros e de atratores obtidos.

4.1 DESCRIÇÕES EXPERIMENTAIS

Para iniciar o projeto do computador analógico para o modelo (3.11), primeiramente temos que conhecer o domínio das variáveis que governam a dinâmica do sistema. Isto é necessário para reescalonar as variáveis uma vez que, do ponto de vista experimental, há uma limitação no intervalo de valores mensuráveis de tensão elétrica com a placa de aquisição de dados (*Data Aquisition Board - DAQ*) do laboratório, neste caso de -10 V a $+10\text{ V}$. Para isso, utilizamos uma rotina escrita na linguagem Python (mostrada no Apêndice A) para resolver numericamente o modelo (3.11) e obter um atrator representativo do sistema. Na figura 4.1 mostramos a dinâmica do modelo para o seguinte conjunto de parâmetros: $\alpha = 30$; $\beta = 50$; $\gamma = 0.32$; $a = 0.03$; $c = -1.2$; $s = 0.11$.

Uma análise dos domínios das variáveis na dinâmica mostrada na figura 4.1 é feita nesta etapa. Ao observar as projeções do atrator, notamos que as variáveis estão nos intervalos $x = (-3.0, +3.0)$; $y = (-0.4, +0.4)$; $z = (-6.0, +6.0)$ e $w = (-2.0, +2.0)$. Como apresentado na seção 2.3, na computação analógica as variáveis dinâmicas do modelo são tratadas como tensões elétricas. Portanto, os domínios das variáveis do atrator da figura 4.1, no computador analógico, têm dimensão física de tensão elétrica, em volts (V). Logo, a variável z varia em torno de

$-6.0 \text{ V} + 6.0 \text{ V}$ no computador analógico. Este valor já está muito próximo do limite de operação da placa DAQ do Laboratório de Circuitos Eletrônicos Não lineares e observamos no modelo (3.11) que existem multiplicações entre variáveis e termos cúbicos, portanto, estes fatores extrapolam o limite de operação da DAQ, que é de 10 V, em módulo.

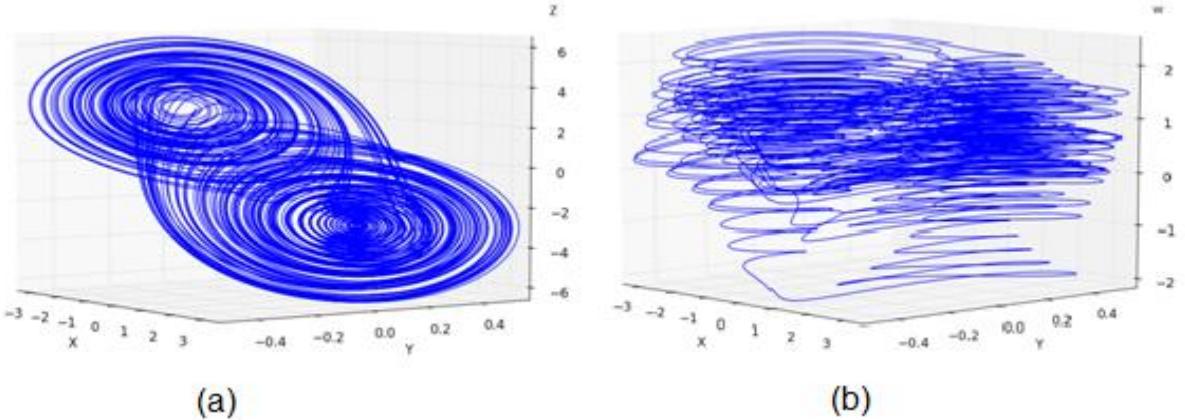


Figura 4.1: Projeções tridimensionais, (a) (x, y, z) e (b) (x, y, w) , de um atrator caótico do modelo (3.11). As condições iniciais usadas foram $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$.

Com base na limitação descrita acima, bem como na limitação do intervalo de operação dos *amps* [19], devemos escolher uma reescala de tensão apropriada. De acordo com os intervalos de valores assumidos pelas variáveis na figura 4.1, além do termo cúbico presente no modelo (3.11), uma boa escolha de escala deve ser aquela que aproxima os limites de todas as variáveis em torno de 3 V, em módulo. Assim, adotamos as seguintes reescalas para as variáveis,

$$X = \frac{x}{4}; \quad Y = y \times 3; \quad Z = \frac{z}{2}; \quad W = w. \quad (4.1)$$

Uma vez escolhida a reescala das variáveis, conforme (4.1), reescrevemos o modelo (3.11) em termos das novas variáveis X, Y, Z e W . Uma observação importante: como no computador analógico todas as grandezas mensuráveis são tensões elétricas, então, além das variáveis dinâmicas (X, Y, Z, W) serem tensões, os parâmetros de controle também serão tensões elétricas. Portanto, os parâmetros ($\alpha; \beta; \gamma; s; a; c$) do modelo (3.11) também serão tensões elétricas do circuito

eletrônico. Entretanto, como já mencionamos, temos uma limitação experimental da placa DAQ, ela opera na faixa de tensão -10 V a + 10 V. Observando a figura 3.7, temos que os parâmetros (α ; β) extrapolam a faixa de tensão da placa DAQ, considerando também a dimensão física tensão elétrica para os parâmetros. Assim, escolhemos fixar os parâmetros ($\alpha = 30$; $\beta = 50$; $a = 0.03$; $c = -1.2$) e deixar o par de parâmetros (γ ; s) para variarmos, uma vez que seus valores, conforme figura 3.7, estão dentro da faixa de operação da placa DAQ.

Adotando o conjunto de parâmetros fixos descrito acima com a reescala (4.1) nas variáveis, reescrevemos o modelo (3.11) como,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= [2,5 Y - 14,4X^3 + 6X]; \\ \dot{Y} &= [12X - Y + 6Z]; \\ \dot{Z} &= [-8,3Y - \gamma Z + \frac{W}{2}]; \\ \dot{W} &= \left[-4sX + \frac{2}{3}YZ \right].\end{aligned}\tag{4.2}$$

O próximo passo é proceder com o modelamento circuital dessas equações, ou seja, construir o circuito integrador utilizando as representações analógicas apresentadas na figura 2.4. Para isso, daremos um exemplo ilustrativo de como proceder.

Seja a seguinte equação diferencial,

$$\dot{x} = y - \frac{x}{2},\tag{4.3}$$

onde \dot{x} é a derivada temporal de x (dx/dt). Utilizando a configuração integradora juntamente com a somadora, e após a configuração inversora de sinal, a figura 4.2 mostra a representação analógica do integrador da equação (4.3).

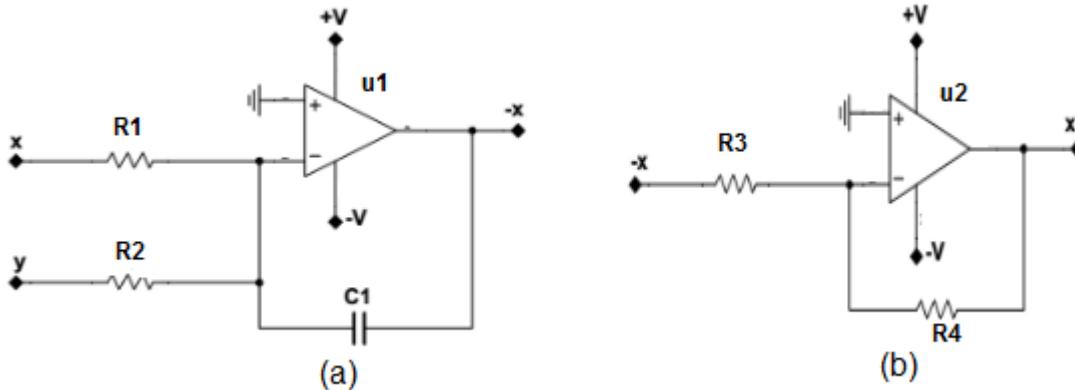


Figura 4.2: Representação analógica do integrador da equação (4.3). (a) Integrador e somador e (b) inversor [7]. Os ampops são representados por u_1 e u_2 .

Para se obter os valores dos capacitores e resistores a serem usados, temos que observar as funções de transferência de cada configuração, conforme figura 2.4. Por exemplo, na inversão de sinal representada na figura 4.2(b), queremos ter um ganho unitário, portanto devemos ter $R_3 = R_4$. Outro ponto a ser observado nesta etapa é com relação à análise dimensional das variáveis. Na equação (4.3), as variáveis x e y são adimensionais, sem significado físico direto. Como já anteriormente mencionado, na computação analógica as variáveis são tensões elétricas, portanto x e y no esquema da figura 4.2 são medidas em Volts (V).

Na função de transferência da configuração integrador do *ampop*, conforme figura 2.4, a integração é realizada no tempo t . Para isso, devemos definir uma escala de tempo em que relacionamos o tempo adimensional da equação (4.3) com a constante de tempo do circuito dada por: $R_{\text{base}} \times C_{\text{base}} \approx 10^{-4}$ s. Este valor para a constante de tempo depende das características do *ampop* que se quer utilizar. Na maioria das aplicações, queremos que o *ampop* sempre opere na sua faixa linear, sem distorções do sinal. Quando mais preciso for o *ampop*, maior poderá ser a constante de tempo sem distorções na amplificação, e mais precisão teremos na integração. Para o *ampop* *TL074* utilizado neste trabalho, a constante de tempo da ordem de 10^{-4} s fica na sua faixa de operação linear. Esta informação pode ser obtida no *datasheet* do dispositivo, fornecido pelo seu fabricante. Portanto, escolher uma escala de tempo é escolher uma resistência de base e uma capacidade de base.

No nosso caso, pois trabalhamos com o *ampop* *TL074*, optamos por $R_{\text{base}}=100$ k Ω e $C_{\text{base}}=33$ nF. Mas, nada impede escolher outros valores para R_{base} e

C_{base} , desde que a constante de tempo esteja em torno de 10^{-4} s, para o *ampop* em questão. Tendo definido a constante de tempo e montado a representação analógica circuital, com suas conexões e configurações, que representa o modelo de equações diferenciais, podemos calcular o valor dos resistores que compõem o circuito, considerando que o C_{base} é o capacitor em paralelo com o *ampop* na configuração integradora e o R_{base} é o resistor em paralelo com o *ampop* na configuração inversora.

Voltando ao exemplo da figura 4.2, representando o integrador circuital da equação (4.3), teremos que $R4 = R_{base}$, e assim $R3 = R_{base}$, pois queremos ter um ganho unitário na inversão do sinal. O capacitor $C1$ será igual à C_{base} e para calcular $R1$ e $R2$, devemos considerar os fatores que multiplicam as variáveis na equação (4.3). Observamos que a multiplicação da variável y é por 1,0 e x é por 0,5, fazendo o inverso deste valor que multiplica a variável, multiplicando pelo valor de R_{base} temos o valor correspondente ao valor das resistências na entrada do integrador e somador na figura 4.2(a). Assim, teremos

$$R_1 = \left(\frac{1}{0.5}\right) \times R_{base}, \quad (4.4)$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{1.0}\right) \times R_{base}.$$

Portanto, numa implementação circuital do integrador da figura 4.2, utilizando como *ampops* $u1$ e $u2$ o CI *TL074*, $R4 = 100 \text{ k}\Omega$ e $C1 = 33 \text{ nF}$, teremos que $R3 = 100 \text{ k}\Omega$ e pelas equações (4.4), teremos $R1 = 200 \text{ k}\Omega$ e $R2 = 100 \text{ k}\Omega$.

Retornando ao modelo de interesse, equações (4.2), e utilizando a abordagem descrita acima, implementamos um circuito integrador (computador analógico) destas equações. A figura 4.3 apresenta o esquema do circuito. Utilizamos o *software* Multsim para implementar o circuito, que permite também a simulação do mesmo. Esta etapa é importante, pois a construção do circuito eletrônico real antes de realizar uma simulação do mesmo, em algum *software* de simulação de circuitos eletrônicos, pode causar atrasos desnecessários. A simulação do circuito nos permite checar se as reescalas feitas e escolhas dos resistores e capacitores, bem como a escolha do modelo de *ampop* e de outros

circuitos integrados (CI), foram corretas e permite corrigir sem custos financeiros extras.

Podemos observar na figura 4.3 que os ampops são representados pelos dispositivos de iniciais U (U1A, U2A etc.). Os valores dos resistores e capacitores também são mostrados na figura. Observamos também a presença de 4 CI, denotados por AD633 (código do fabricante), que são CIs que realizam multiplicações analógicas. Podemos observar no modelo (4.2) que existem multiplicações de parâmetros com variáveis, bem como entre variáveis. Portanto, o CI AD633 realiza estas operações de multiplicação. Observamos também neste esquema a presença de dois blocos, denotados por X5C2, que representam osciloscópios virtuais da marca Tektronix. Ou seja, podemos visualizar o comportamento dinâmico das variáveis na simulação do circuito através da tela destes osciloscópios virtuais, cuja projeção bidimensional são denominadas curvas de Lissajous (ou atratores no nosso caso).

Na figura 4.4 mostramos as projeções bidimensionais das variáveis (X, Y, Z, W) nos osciloscópios virtuais obtidos da simulação do circuito no Multsim. O layout do osciloscópio virtual simula de fato um osciloscópio real da marca Tektronix. A dinâmica mostrada nessas projeções refere-se a mesma dinâmica do modelo (3.11) mostrada na figura 3.6, com os mesmos valores de parâmetros, mas aqui com dimensão física de tensão elétrica, dada em Volts (V). Com este resultado da simulação do circuito, comprovamos que o esquema circuital apresentado na figura 4.3, representando o computador analógico do modelo (4.2), corresponde ao modelo (3.11), modelo de Chua quadridimensional.

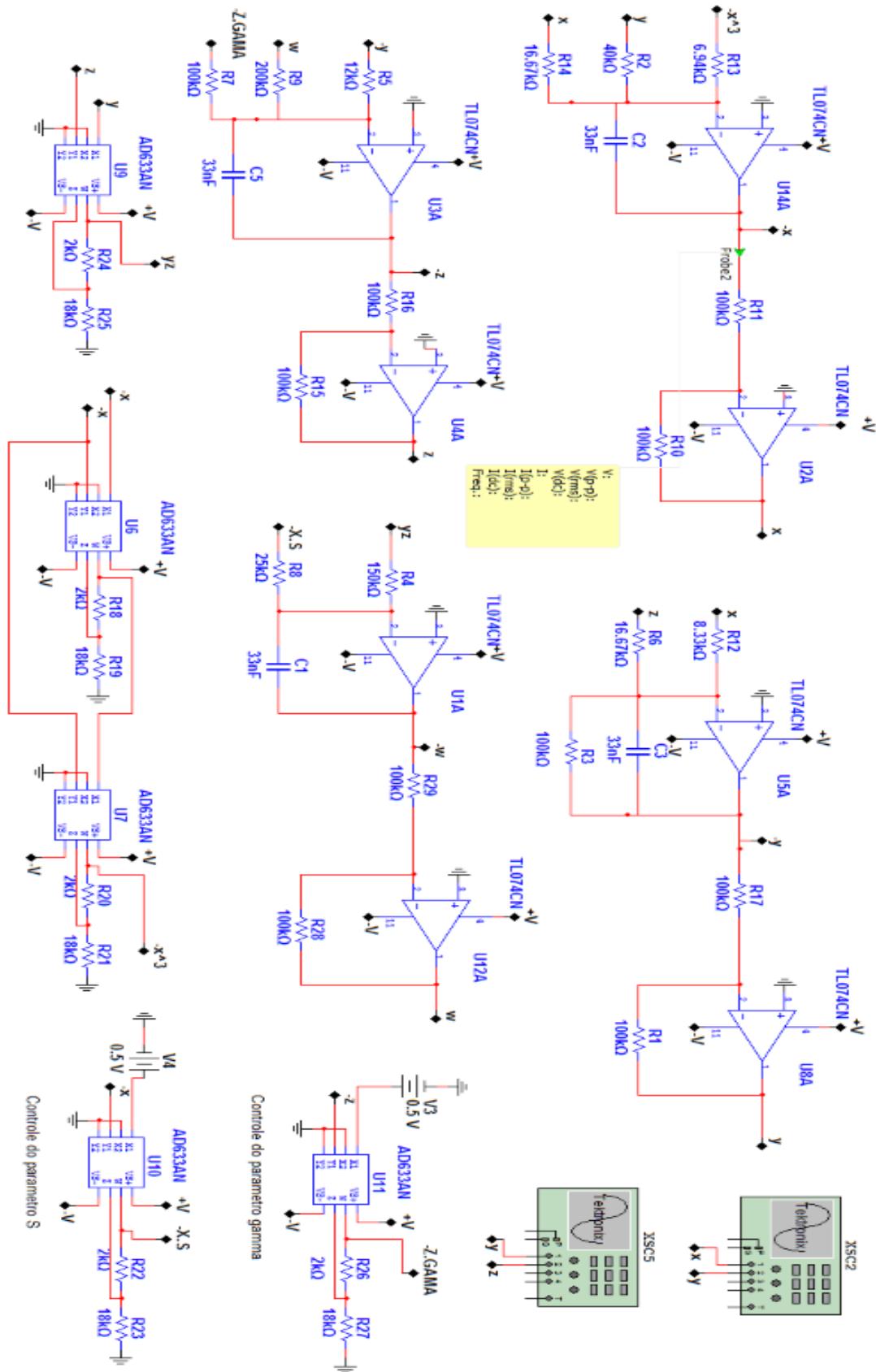


Figura 4.3: Esquema da implementação do circuito integrador do modelo (4.2), o computador analógico do Chua quadridimensional. Esquema desenvolvido no ambiente MULTISIM.

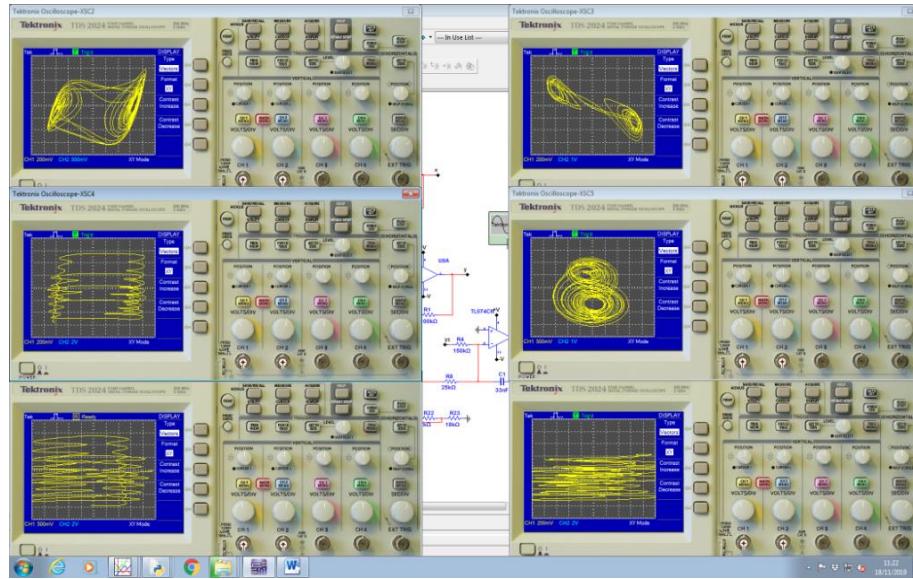


Figura 4.4: Projeções bidimensionais do conjunto de variáveis (X, Y, Z, W) obtidos da simulação do circuito da figura 4.3 no Multisim. Os atratores, em amarelo, são visualizados através do osciloscópio virtual, ferramenta do Multisim.

Com a simulação do circuito corroborando os resultados das simulações computacionais do modelo, a próxima etapa é montar o circuito real em uma placa para teste em bancada experimental, que apresenta pequenas perfurações para o encaixe de componentes eletrônicos, como capacitores, resistores, ampops e demais Cls. Geralmente este tipo de placa é conhecida como *protoboard*. Na figura 4.5 apresentamos a montagem real, em uma *protoboard*, do circuito eletrônico mostrado no esquema da figura 4.3. Este circuito é o computador integrador analógico do modelo (4.2).

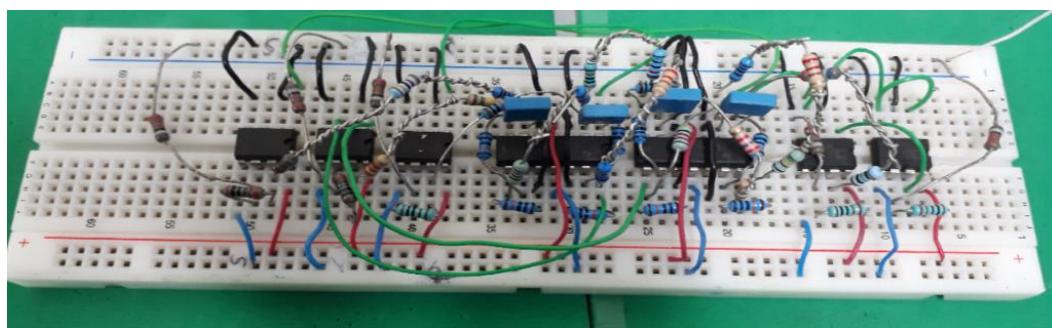


Figura 4.5: Circuito eletrônico do esquema circuitual da figura 4.3 montado numa *protoboard*. Este circuito é o integrador analógico do modelo (4.2).

Com relação aos componentes utilizados no circuito da figura 4.5, nem todos os resistores baseados no esquemático da figura 4.3 são vendidos comercialmente. Portanto temos que utilizar associações de resistores comerciais para se obter valores de resistências não comerciais. A tabela 4.1 apresenta quais resistências do esquemático da figura 4.3 foram obtidas por associação de resistores comerciais e apresenta também os seus valores medidos e calculados no esquemático. Os demais resistores são de precisão e comercialmente vendidos, com erro de 1%. Foi também utilizado quatro capacitores de poliéster, com erro de 3%. Usamos dois ampops modelo *TL074* e cinco multiplicadores analógicos *AD633JN*. O esquema de alimentação bem como a saída e entrada de sinal nos CIs obedeceram ao recomendado nos *datasheets* dos fabricantes.

Tabela 4.1: Valores das resistências medidas por associação de resistores e os valores calculados no projeto do circuito.

| Associação de Resistores para o Circuito de Chua | | | | | |
|--|-----------------|--------------|------------|-----------------|--------------|
| Componente | Valor calculado | Valor medido | Componente | Valor calculado | Valor medido |
| R4 | 40.0 kΩ | 39.9 kΩ | R9 | 200.0 kΩ | 200.1 kΩ |
| R5 | 12.0 kΩ | 12.15 kΩ | R12 | 8.33 kΩ | 8.2 kΩ |
| R6 | 16.67 kΩ | 16.5 kΩ | R13 | 6.94 kΩ | 6.85 kΩ |
| R8 | 25.0 kΩ | 24.98 kΩ | R14 | 16.67 kΩ | 16.61 kΩ |

Após a montagem do circuito em uma *protoboard*, conectamos este circuito na bancada experimental. Na bancada experimental, temos a fonte de tensão que conectamos ao circuito, no qual alimenta os *ampops*, temos os filtros analógicos de entrada (referente aos parâmetros de controle) e saída (referente às variáveis) dos sinais do circuito, o banco de conexões para os cabos do tipo *BCN* para os sinais de entrada/saída do circuito e o computador com a placa DAQ. O esquema deste aparato experimental é mostrado na figura 4.6.

Na figura 4.7 mostramos uma foto do circuito montado na bancada experimental, ligado à fonte de alimentação simétrica (ao fundo) operando em 12 V. No osciloscópio (também ao fundo) visualizamos a dinâmica do circuito através da

projeção (X, Y), foto da esquerda, e da projeção (Y, Z), foto da direita. Na dinâmica apresentada, a placa DAQ, conectada ao computador por um barramento tipo PCI-e, envia dois sinais analógicos de tensão DC para o circuito através de cabos *BCN*, um referente ao parâmetro γ (neste caso 0,4 V) e um referente ao parâmetro s (neste caso também 0,4 V). Uma rotina em Python (ver Apêndice B) foi escrita [9] para que a placa DAQ envie estes dois sinais referentes aos parâmetros γ e s para o circuito.

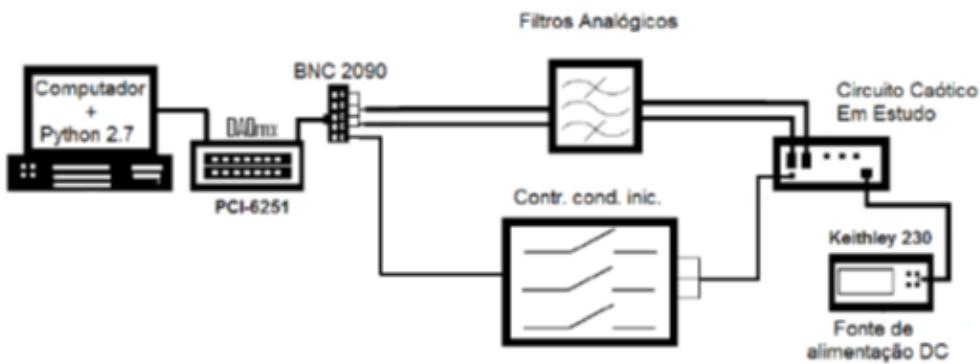


Figura 4.6: Esquema do aparato experimental utilizado neste trabalho para estudo do circuito integrador da figura 4.5 [9].

Com o circuito montado na bancada experimental e apresentando a dinâmica para um determinado par de parâmetros (γ, s) , conforme mostrado na figura 4.7, o objetivo agora é variar de maneira automatizada os parâmetros (γ, s) , ambos no intervalo de [0 V, 1 V] e ao mesmo tempo salvar, em um arquivo do tipo “.txt” em ASCII, as séries temporais das variáveis (X, Y, Z, W) para os pares de parâmetros dentro do intervalo acima. Para esta tarefa, foi escrita em linguagem Python uma rotina (apresentada no Apêndice C) [9] que automatiza esta medida. Nesta rotina definimos o tempo de transiente para o programa iniciar a medida após alteração de um parâmetro, a resolução da malha e o intervalo de valores dos parâmetros utilizados, lembrando que todos os parâmetros e variáveis têm unidade volts (V). Para o caso dos resultados experimentais deste trabalho, o par de parâmetros foi discretizado em uma malha de 200×200 valores, e, portanto, foram salvos 40.000 arquivos contendo as séries temporais das variáveis, sendo que cada série temporal tem 20.000 pontos.

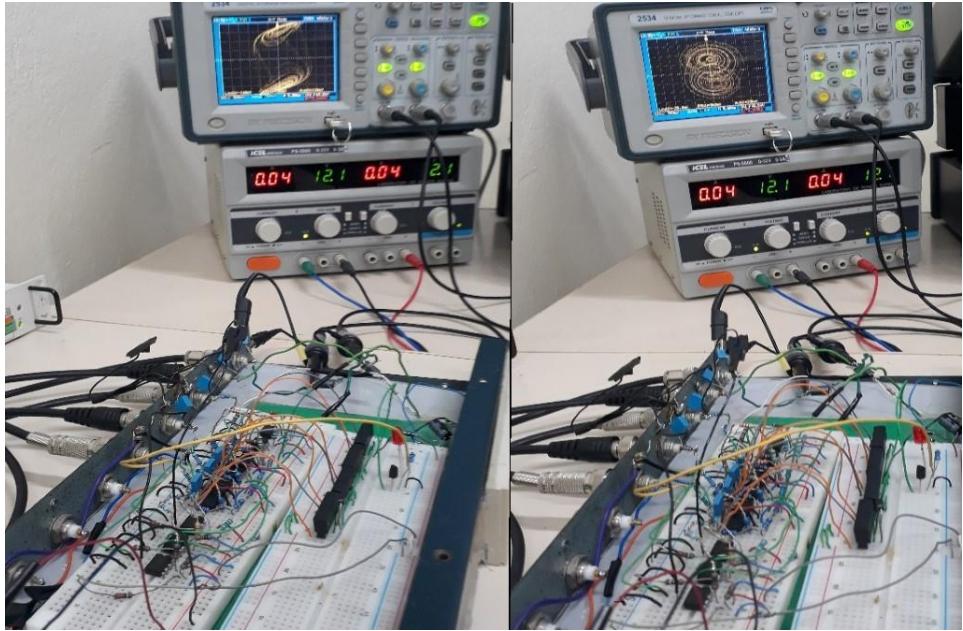


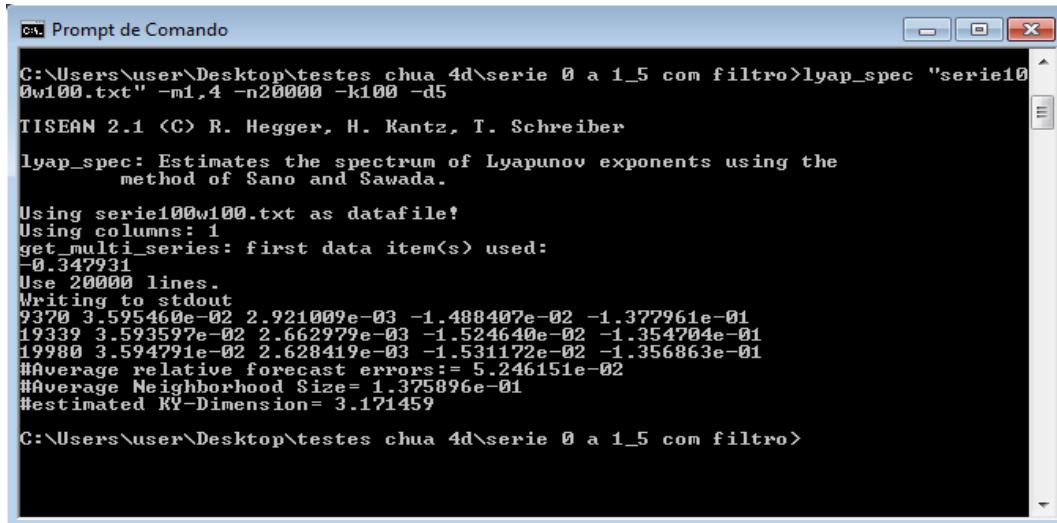
Figura 4.7: Bancada experimental com o circuito da figura 4.6 conectado aos filtros de entrada/saída e ao circuito de controle de condições iniciais (primeiro plano), à fonte de tensão e ao osciloscópio (ao fundo) e aos cabos do tipo *BNC* (lateral esquerda). A esquerda, no osciloscópio temos a projeção (X, Y) e a direita, a projeção (Y, Z) para os parâmetros $(\gamma = 0.4 \text{ V}, s = 0.4 \text{ V})$.

Uma vez realizado este procedimento experimental, a tarefa agora é obter o espectro dos expoentes de Lyapunov para cada série temporal do conjunto de parâmetros (γ, s) . Como discutido na seção 2.2, pela análise dos sinais dos expoentes de Lyapunov do espectro de cada série temporal, podemos classificar a dinâmica para um dado par de parâmetros, como hipercaótica, caótica, periódica ou ponto de equilíbrio.

Neste trabalho utilizamos a rotina `lyap_spec` do pacote TISEAN (*Time Series Analysis*) [8] para obtermos o espectro de Lyapunov de cada série temporal. Como temos 40.000 séries temporais para analisar, foi escrito uma rotina em Python (apresentada no Apêndice D) [9] para automatizar o processo de cálculo dos espectros de Lyapunov neste conjunto de séries temporais. Na rotina `lyap_spec` devemos fixar valores para algumas *flags* de entrada, como por exemplo, o *delay*, *D* que seria o tempo de atraso na série temporal para reconstrução do atrator, o número de vizinhos *k* e dimensão de imersão do atrator *m*. A figura 4.8 mostra o *prompt* de comando da rotina em ambiente DOS do Windows. Após a rotina ser inicializada, para uma determinada série temporal, podemos observar o espectro de

Lyapunov (para o nosso caso são 4 expoentes) sendo obtido para certos tempos de interação. A função da rotina em Python do Apêndice D é automatizar este procedimento de iniciar a janela do *prompt* de comando para rodar o lyap_spec em cada série temporal e salvar em um arquivo tipo “.txt”, em ASCII, o par de parâmetros daquela série e o resultado obtido do espectro dos expoentes de Lyapunov da última interação do lyap_spec.

Com este procedimento, obtemos um arquivo contendo o espectro de Lyapunov para cada par de parâmetros (γ, s) . Com este arquivo podemos construir o plano de parâmetros experimental do modelo (4.2) e comparar com os resultados numéricos já apresentados na figura 3.7(e), do capítulo 3.



```

C:\ Prompt de Comando
C:\Users\user\Desktop\testes chua 4d\serie 0 a 1_5 com filtro>lyap_spec "serie10
w100.txt" -m1,4 -n20000 -k100 -d5
TISEAN 2.1 <C> R. Hegger, H. Kantz, T. Schreiber
lyap_spec: Estimates the spectrum of Lyapunov exponents using the
method of Sano and Sawada.

Using serie10w100.txt as datafile!
Using columns: 1
get_multi_series: first data item(s) used:
-0.347931
Use 20000 lines.
Writing to stdout
9370 3.595460e-02 2.921009e-03 -1.488407e-02 -1.377961e-01
19939 3.593597e-02 2.662979e-03 -1.524640e-02 -1.354704e-01
19980 3.594791e-02 2.628419e-03 -1.531172e-02 -1.356863e-01
#Average relative forecast errors:= 5.246151e-02
#Average Neighborhood Size= 1.375896e-01
#Estimated KI-Dimension= 3.171459
C:\Users\user\Desktop\testes chua 4d\serie 0 a 1_5 com filtro>

```

Figura 4.8: Prompt de comando do DOS Windows chamando a rotina lyap_spec com os valores das *flags* para uma determinada série temporal.

4.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Como podemos observar nos osciloscópios da montagem experimental da figura 4.7, para um dado par de parâmetros (γ, s) o circuito integrador do modelo quadridimensional de Chua, dado pelas equações (4.2), realiza o processo de integração a tempo contínuo. Mas, precisamos verificar a correspondência entre as

simulações numéricas (figura 3.6) e as simulações do circuito analógico (figura 4.4) com os resultados obtidos pelo circuito real na montagem experimental da figura 4.7.

Para esta verificação, através da placa DAQ enviamos dois sinais de tensão elétrica DC, correspondendo aos parâmetros ($\gamma = 0.32 V$, $s = 0.11 V$), para o circuito integrador e observamos no osciloscópio o resultado para as variáveis (X, Y, Z, W) em projeções bidimensionais.

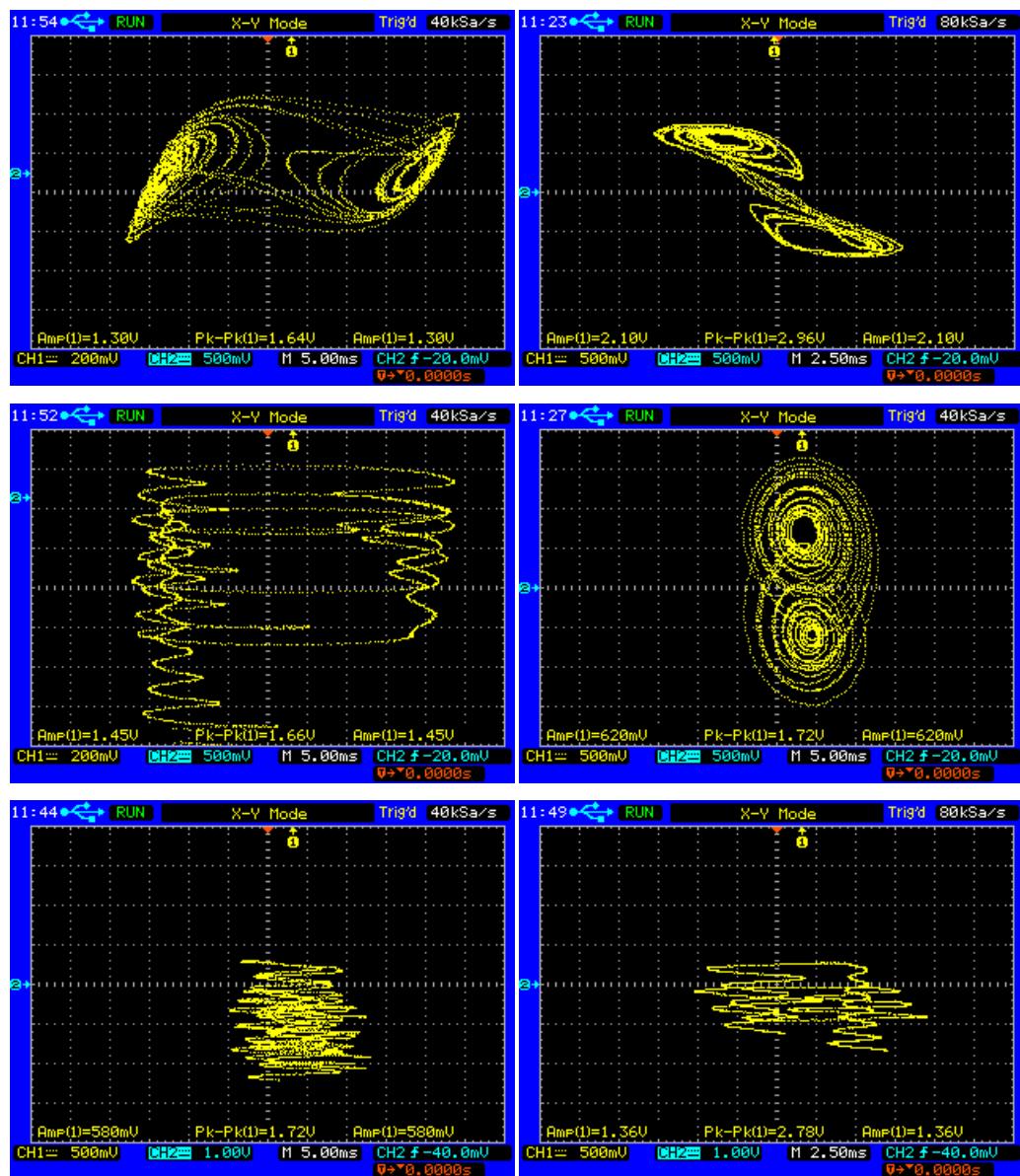


Figura 4.9: Atratores experimentais obtidos da captura direta da tela do osciloscópio para os seguintes pares de variáveis, ($X : Y$), ($X : Z$), ($X : W$), ($Y : Z$), ($Y : W$) e ($Z : W$), respectivamente, para os parâmetros ($\gamma = 0.32 V$, $s = 0.11 V$).

Na figura 4.9 mostramos as projeções (X, Y) , (X, Z) , (X, W) , (Y, Z) , (Y, W) e (Z, W) da resposta do circuito para este par de parâmetros. Essas projeções foram obtidas usando a função de captura de tela do osciloscópio. Neste caso a tela é salva em formato de figura “.jpg” em um *pendrive* conectado ao osciloscópio. Em uma análise visual dos atratores gerados experimentalmente pelo computador analógico de Chua, vistos na tela do osciloscópio, percebemos a concordância destes com os atratores das simulações do modelo (veja figura 3.6) e do circuito (veja figura 4.4).

O próximo passo é obter o plano de parâmetros experimental para o par (γ, s) e compararmos com a simulação mostrada na figura 3.7(e). Após os procedimentos descritos na seção 4.1 para obtermos o arquivo contendo os espectros dos expoentes de Lyapunov para cada par de parâmetros (γ, s) , ambos variando no intervalo $[0 \text{ V}, 1.5 \text{ V}]$, construímos o plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov do espectro, conforme mostrado na figura 4.10.

No intervalo especificado, discretizamos os parâmetros numa malha de 200×200 valores. O maior expoente foi codificado numa escala de cores contínua conforme barra de cores à direita do plano. Para valores negativos do expoente, associamos a cor branca, expoentes nulos na cor preta e um degradê de amarelo para o vermelho para expoentes positivos. Nesta escala, branco significa comportamento dinâmico cujo atrator é um ponto de equilíbrio, preto para um comportamento cujo atrator é um ciclo limite (ou atrator periódico) e amarelo-vermelho para atratores caóticos/hipercaóticos.

Podemos observar neste plano de parâmetros (figura 4.10) uma grande região preta (região de periodicidade conforme padrão de cores adotado) à esquerda, para s entre aproximadamente $0,2 \text{ V}$ a $1,5 \text{ V}$ e γ entre 0 V a aproximadamente $0,8 \text{ V}$. Também uma região de periodicidade numa faixa estreita de s entre 0 V a aproximadamente $0,1 \text{ V}$ para toda a extensão de γ . Observamos também, à direita do plano, várias faixas em preto (também regiões periódicas) que adentram na região amarela avermelhada (região de comportamento caótico). Para exemplificar os valores dos expoentes de Lyapunov no espectro, escolhemos 3 pontos no plano de parâmetros (rotulados por A, B e C na figura 4.10) e mostramos na tabela 4.2 os valores dos 4 expoentes do espectro, calculados pela rotina `lyap_spec` do TISEAN, conforme descrito na seção 4.1. Concluímos dessa tabela

que a dinâmica referente ao ponto C é de fato uma dinâmica periódica, com o maior expoente aproximadamente nulo (dada a precisão dos demais) e os demais negativos. No caso dos pontos A e B, que no plano de parâmetros estão na região amarelo avermelhada, cada um deles tem um expoente positivo, um próximo de zero (numa aproximação) e dois negativos, caracterizando uma dinâmica caótica.

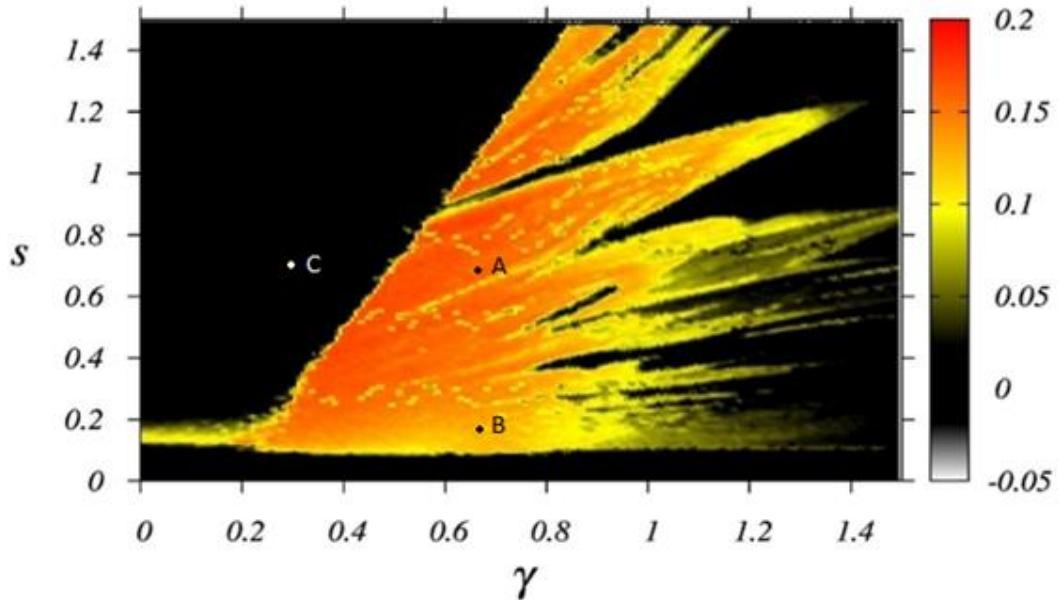


Figura 4.10: Plano de parâmetros experimental do maior expoente de Lyapunov obtido do circuito analógico do modelo de Chua quadridimensional. O valor do expoente segue o código de cores conforme barra de cores a direita. Os eixos estão em unidades de Volts.

Tabela 4.2: Espectro dos expoentes de Lyapunov para as dinâmicas referentes aos pontos A, B e C no plano de parâmetros experimental da figura 4.10.

| Região | λ_1 | λ_2 | λ_3 | λ_4 | Comportamento |
|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| A | 0.17 | 0.0028 | -0.21 | -0.86 | Caótico |
| B | 0.15 | 0.013 | -0.19 | -0.80 | Caótico |
| C | 0.0023 | -0.10 | -0.36 | -0.72 | Periódico |

Ressaltamos também que o plano de parâmetros apresentado na figura 4.10 é a versão experimental do plano de parâmetros da figura 3.7(e), do capítulo 3. Numa comparação visual entre os dois planos, percebemos uma boa semelhança

qualitativa entre os resultados numéricos (figura 3.7(e)) e o experimental (figura 4.10), ou seja, computação digital do modelo (3.11) e computação analógica do modelo (4.2), respectivamente, para os mesmos conjuntos (e mesmos valores) de parâmetros fixos. A região periódica à esquerda (região preta) estendendo para todos os valores de s , na figura 3.7(e), foi reproduzida no plano de parâmetros experimental, bem como a região preta na parte inferior do plano estende para todos os valores de γ . O experimento também reproduziu as faixas de periodicidade que adentram pela região caótica, ao centro do plano de parâmetros.

Entretanto, como já é esperado, existem diferenças visíveis entre o resultado experimental (figura 4.10) e a simulação (figura 3.7(e)), como, por exemplo, nas faixas pretas de comportamento periódico. No experimental observamos faixas maiores e mais largas, inclusive uma que atravessa toda a região caótica e se conecta com a larga região periódica à esquerda. Esta faixa em específico não é observada na simulação mostrada na figura 3.7(e). A origem dessas diferenças são as imprecisões dos dispositivos eletrônicos, como os resistores, os capacitores e os ampops, que fazem com que os valores dos parâmetros de controle divirjam daqueles utilizados nas simulações computacionais digitais e no processo de integração, como foi feito para obter a figura 3.7(e). Um dos efeitos dessas distorções de valores é deslocar as estruturas presentes no plano de parâmetros.

Neste sentido, com o auxílio do Dr. Anderson Hoff, pós-doutorando supervisionado pelo Prof. Holokx A. Albuquerque (orientador dessa dissertação de mestrado), realizamos uma nova simulação computacional digital do modelo (3.11), estendendo os intervalos do par de parâmetros (γ, s) da figura 3.7(e) mantendo iguais os demais parâmetros e condições iniciais. Na figura 4.11 apresentamos o plano de parâmetros como resultado dessa nova simulação. Agora conseguimos observar as faixas de periodicidade (de cor preta) com maior nitidez e inclusive a faixa principal que atravessa a região caótica (de cor amarela avermelhada) e conecta com a região periódica à esquerda surgiu. Comparando esta nova simulação com o resultado experimental da figura 4.10, observamos agora uma boa concordância qualitativa entre os dois planos de parâmetros.

Com os resultados apresentados acima, podemos concluir que o computador analógico (círcuito integrador) do modelo (4.2), montado conforme

projeto esquemático da figura 4.3 em uma *protoboard* (figura 4.5), funciona analogamente ao modelo de Chua quadridimensional dado pelas equações (3.11).

Como cada ponto do plano de parâmetros é uma dinâmica do sistema, representado por um atrator, podemos construir um diagrama bidimensional com um conjunto de atratores para alguns valores do par de parâmetros (γ, s) . Chamamos este diagrama de plano de atratores. Na figura 4.12 mostramos o plano de atratores experimentais referente ao plano de parâmetros da figura 4.10. Para construir a figura 4.10 foi utilizado um conjunto de 40.000 atratores experimentais. Na figura 4.12, mostramos 110 atratores deste conjunto com descarte dos primeiros 5.000 pontos da série temporal.

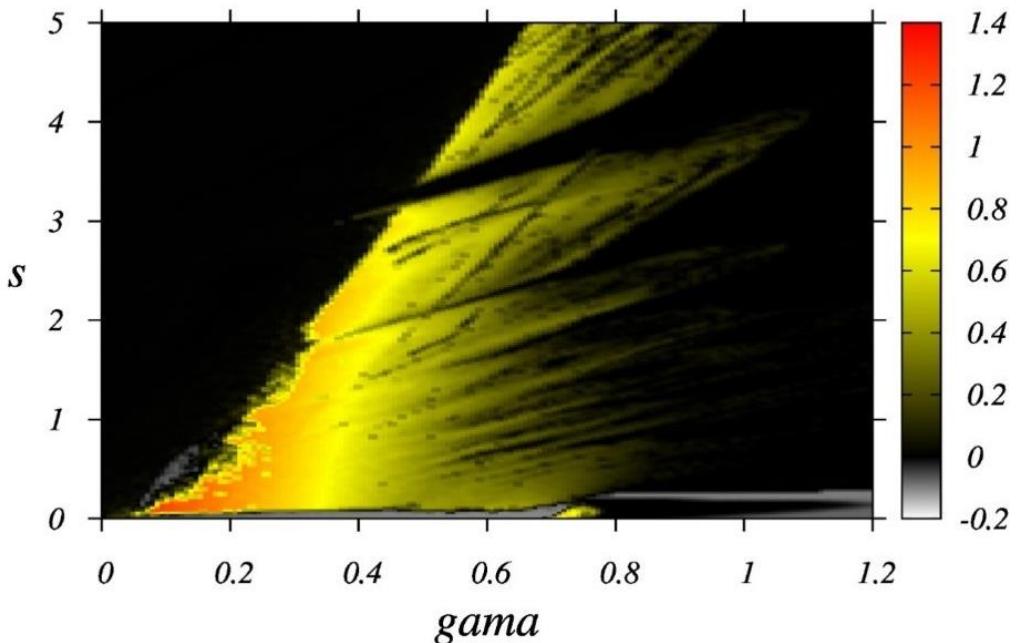


Figura 4.11: Plano de parâmetros obtidos numericamente (computação digital) para o modelo (3.11). Nesta simulação estendemos os intervalos do par de parâmetros (γ, s) da figura 3.7(e).

No plano de atratores, figura 4.12, combinamos a forma dos atratores no espaço de fase (neste caso projeções bidimensional) com a mudança de comportamento no plano de parâmetros (bifurcação). As figuras 4.10 e 4.12 podem ser analisadas em conjunto.

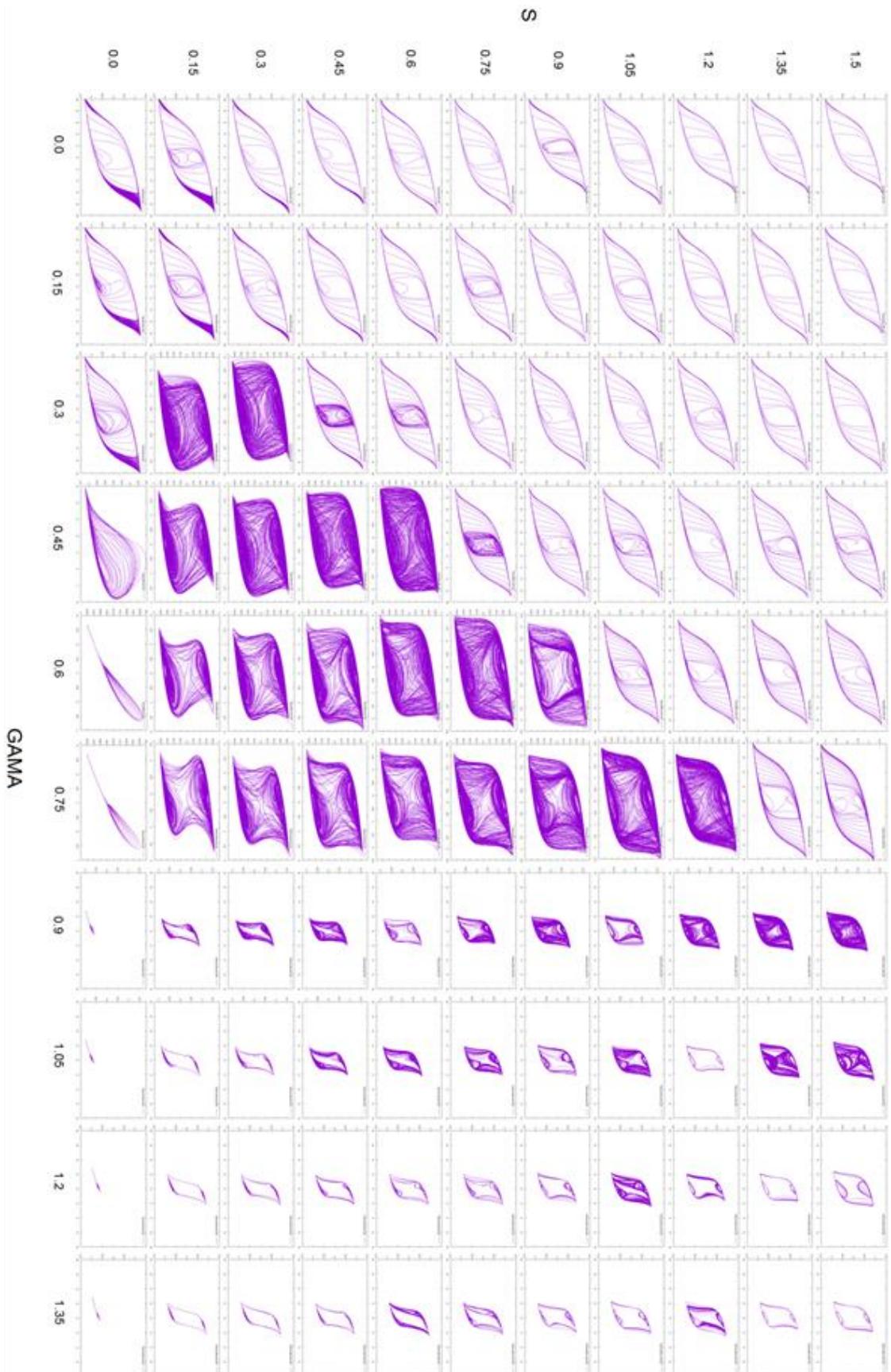


Figura 4.12: Plano de atratores experimentais para o par (γ, s) . Cada ponto do plano de parâmetros da figura 4.10 equivale a um atrator experimental.

Portanto, observamos à esquerda do plano de atratores, para s entre 0,0 a 1,5 e γ entre 0,0 a 0,75, um conjunto de atratores periódicos de período 1 de grande amplitude, cujo transiente ainda é visto no interior do ciclo, que segue exatamente a região periódica em preto do plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov da figura 4.10. Vemos também, no plano de atratores, uma região central dominada por atratores caóticos, corroborando a região amarela avermelhada central do plano de parâmetros da figura 4.10. Inclusive as faixas periódicas em preto do plano de parâmetros são corroboradas por atratores periódicos avançando entre atratores caóticos.

Outro comportamento interessante que observamos no plano de atratores experimentais da figura 4.12, e recentemente reportado em vários outros sistemas dinâmicos, é o caos transiente [33, 34]. Podemos ver claramente na figura 4.12 três atratores apresentando o caos transiente: para os pares de parâmetros $(\gamma = 0.3, s = 0.45)$, $(\gamma = 0.3, s = 0.6)$ e $(\gamma = 0.45, s = 0.75)$. Nestes casos, a dinâmica transiente é caótica (no interior do atrator) e após, a dinâmica tende assintoticamente para um atrator de período 1 de grande amplitude. Estes três atratores estão na borda da região periódica em preto com a região caótica central do plano de parâmetros da figura 4.10. Percebemos também que esta borda é granulada, ou seja, não temos uma interface entre periodicidade e caos nítida. Apesar da precisão experimental dos parâmetros e do cálculo do espectro de Lyapunov sobre as séries temporais, este resultado corrobora uma observação já reportada em [33, 34] no qual a borda periódica onde há caos transiente no plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov se apresenta granulada.

Para finalizar este capítulo de resultados experimentais, descrevemos no capítulo 3 alguns resultados numéricos do modelo (3.11). Vimos que este modelo apresenta comportamento hipercaótico (ver Tabela 3.1) em uma pequena região do plano de parâmetros (regiões amarela avermelhadas das figuras 3.7(b), (d) e (f)). Entretanto, este comportamento não foi observado no circuito analógico do modelo (4.2). A tabela 4.2 mostra o espectro de Lyapunov para três atratores localizados nos pontos A, B e C da figura 4.10. Especificamente, o atrator do ponto B seria o hipercaótico, pois ele se localiza na parte inferior do plano de parâmetros, região segunda a qual poderia apresentar hipercaos devido aos resultados numéricos da figura 3.7 (f). Mas, pela tabela 4.2, não temos a condição de dois expoentes

positivos, um nulo e um negativo, conforme descrito na seção 2.2. Temos dois expoentes positivos, mas nenhum nulo dada a precisão dos valores mostrados na tabela, ou seja, o nulo poderia ser o segundo expoente positivo, devido à ordem de grandeza do primeiro e do terceiro expoentes. Assim, não é possível afirmar que temos comportamento hipercaótico no circuito integrador do modelo (4.2) com os resultados experimentais analisados nesta dissertação.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos computacionais para se obter as soluções numéricas de sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas, utilizando os computadores digitais modernos (simulação numérica), como no modelo de Chua mostrado no capítulo 3, são bem estabelecidos e muito utilizados atualmente. Mas, como descrito no capítulo 2, os primeiros computadores utilizados para se obter as soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias empregavam a computação analógica, na qual a variável dinâmica da equação é tratada como uma tensão elétrica em um circuito eletrônico análogo ao modelo físico descrito pela equação diferencial. O dispositivo chave desse circuito é o amplificador operacional e dependendo de sua configuração no circuito, este pode realizar operações matemáticas com as tensões elétricas como: integrações, diferenciações, somas, inversão de sinal etc. No trabalho de dissertação de mestrado da referência [9], é discutido de maneira detalhada a aplicação de circuitos eletrônicos analógicos para solução numérica de sistemas físicos descritos por equações diferenciais ordinárias acopladas.

Neste trabalho de dissertação de mestrado, aplicamos as técnicas desenvolvidas em [9] e construímos um circuito eletrônico analógico para integrar (ou obter a solução numérica experimental), a tempo contínuo um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas, equações (4.2), conhecido como modelo de Chua quadridimensional. O circuito eletrônico construído usa os princípios da eletrônica analógica para realizar computação de sinais elétricos, neste caso tensões elétricas. Tanto as variáveis do modelo (4.2) quanto os seus parâmetros de controle são tratados como tensões elétricas no circuito.

Com o circuito integrador do modelo (4.2), obtivemos experimentalmente 40.000 séries temporais para as variáveis (X, Y, Z, W) variando o par de parâmetros (γ, s) do modelo em uma malha de 200×200 valores e mantivemos os demais parâmetros fixos. Para cada série temporal obtivemos o espectro dos expoentes de Lyapunov e com o maior expoente do espectro construímos o plano de parâmetros

(figura 4.10). Comparamos este plano de parâmetros com as simulações computacionais do modelo (3.11) (figura 4.11) e observamos uma boa concordância qualitativa entre os planos, com a reprodução de suas principais características, que são: uma grande região periódica em preto à esquerda dos planos de parâmetros; faixas de cor preta (periódicas) à direita dos planos de parâmetros adentrando em uma região caótica central e uma grande faixa de periodicidade (cor preta) que atravessa a região caótica central e se une com a região periódica à esquerda dos planos de parâmetros (compare as figuras 4.10 e 4.11).

A principal discordância que temos entre os dois planos de parâmetros, experimental mostrado na figura 4.10 e numérico mostrado na figura 4.11, é um deslocamento das características desses planos, conforme descritas acima, em relação aos parâmetros (γ, s) . Por exemplo, no resultado experimental, a faixa que atravessa a região caótica central, da direita para esquerda e se conecta com a região periódica à esquerda, está entre $0,5 \text{ V} \leq \gamma \leq 1,5 \text{ V}$ e $0,9 \text{ V} \leq s \leq 1,5 \text{ V}$. Esta faixa, no resultado numérico, está entre $0,5 \text{ V} \leq \gamma \leq 1,2 \text{ V}$ e $3,5 \text{ V} \leq s \leq 5,0 \text{ V}$. Uma explicação para esta divergência está na imprecisão dos componentes utilizados no circuito integrador (experimento) com relação aos valores numéricos usados para a solução numérica (via simulação). Estas imprecisões provocam o deslocamento do plano de parâmetros.

Outro resultado obtido a partir das 40.000 séries temporais, das variáveis (X, Y, Z, W) do modelo (4.2) medidas no circuito integrador, é o plano de atratores mostrado na figura 4.12. Apesar de utilizarmos apenas 110 séries temporais desse conjunto, na projeção (X, Y) , através do plano de atratores podemos ter uma visão do comportamento dinâmico do circuito variando parâmetros e observando ao mesmo tempo a trajetória (atrator) no plano de fase. Da análise do plano de atratores, observamos que o circuito apresenta a dinâmica de caos transitivo para certos valores do par de parâmetros (γ, s) , ou seja, o atrator se comporta caótico em um transiente e após ele escapa desse atrator e vai para um atrator periódico de maior amplitude.

Conforme descrito no capítulo 3, o modelo (3.11) apresenta também uma dinâmica conhecida como hipercaótica. Como descrito na seção 2.2 do capítulo 2, esta dinâmica é caracterizada por dois expoentes de Lyapunov positivos, conforme mostrado na tabela 3.1. Entretanto, esta dinâmica não foi observada no circuito

integrador do modelo análogo, dado pelas equações (4.2). Isto é, não identificamos, no conjunto de 40.000 séries temporais, uma dinâmica caracterizada por dois expoentes positivos, um nulo e o quarto último expoente negativo, pelo menos dentro da precisão numérica que consideramos como necessária para se definir o expoente nulo (veja a tabela 4.2).

Uma possível explicação para não termos observado o comportamento hipercaótico no circuito está relacionada com a multiestabilidade do mesmo. A multiestabilidade é caracterizada como a coexistência de dois ou mais atratores para um mesmo par de parâmetros, atratores estes que são originados a partir de diferentes condições iniciais. Por exemplo, para o nosso caso fixando o par (γ, s) , e variando as condições iniciais poderíamos observar diferentes atratores. Entretanto, no experimento do circuito integrador, apesar de termos um circuito externo (veja o esquema da figura 4.6 e o circuito externo, com o *led* vermelho, à direita do circuito integrador na figura 4.7) que faz o procedimento de zerar a tensão dos capacitores de base (C_{base} - aqueles que ficam em paralelo com os *ampops* para termos a configuração de integrador – veja a figura 2.4), não temos garantia se estes capacitores não permanecem com uma tensão residual não-nula. Portanto, a tensão residual faz com que tenhamos uma condição inicial não-nula na integração analógica e esta pode ser diferente a cada processo de reinício das condições iniciais. Desta forma, como não temos controle total sobre a escolha das condições iniciais, não é possível verificar a existência de multiestabilidade neste circuito.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Goldstein, C. P. Poole Jr., J. L. Safko, Classical Mechanics, 3rd Ed., Pearson (2001).
- [2] STEVEN STROGATZ, Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering. Westview Press, 2001.
- [3] MONTEIRO, L.H.A. Sistemas Dinâmicos. Ed.3, Livraria da Física, 2011.
- [4] FERRARA N.; PRADO C., Caos: Uma Introdução. Edgard Blücher Ltda, 1995.
- [5] OTT, E. Chaos in Dynamical Systems. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [6] GILLILAND, C. M.; Handbook of analog computation. Systron-donner Corporation, Galido street, Concord, California, (1967), 94520. Pag:1-1 e 6-2.
- [7] Wendling, M.; Amplificadores Operacionais. Unesp 2010. Disponível em: <<https://www.feg.unesp.br/Home/PaginasPessoais/ProfMarceloWendling/3---amplificadores-operacionais-v2.0.pdf>>. Acessado em: 04 abr. 2020.
- [8] Prebianca, F.; Estudo de um circuito de Chua com realimentação tipo seno. UDESC, 2014. Dissertação de Mestrado.
- [9] MARCONDES, D.W.C; Controle De Parâmetros Via Tensão Continua: Uma Aplicação Em Dinâmica Não Linear UDESC, 2017. Dissertação de Mestrado.
- [10] Lima, A. P.C.M., Macedo, D. X., Guedes, I.; Soluções clássicas de sistemas acoplados dependentes do tempo. Rev. Bras. Ensino Fís., vol.36 no.2, 2014.

- [11] May, Robert M. 1976. "Simple mathematical models with very complicated dynamics." *Nature* 261(5560):459-467.
- [12] LORENZ, EDWARD, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of atmospheric sciences*, vol. 20, 1963.
- [13] Wilian, J.: Caos em sistemas dinâmicos. Disponível em: <http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/29_caos/caos6.html> Acessado em: 04 abril 2020.
- [14] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, p. 617, 1985.
- [15] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Physical Review E*, v. 84, 016216, 2011.
- [16] Máquina de Anticítera Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1quina_de_Antic%C3%ADtera>. Acessado em 04 abril 2020.
- [17] Abaco disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81baco>>. Acessado em 04 abril 2020.
- [18] Vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iAGGZpgY_H4>. Acessado em 04 abril 2020.
- [19] Texas Instruments; Disponível em: <<http://www.ti.com/sitesearch/docs/universalsearch.tsp?searchTerm=TL074#q=TL074&t=everything&linkId=1>>. Acessado em 04 abril 2020.
- [20] Figura; Disponível em: <http://nerdeletrico.blogspot.com.br/2012_04_01_archive.html>. Acessado em: 04

abril 2020.

- [21] KEVIN M. CUOMO, A. V. OPPENHEIM, S. H. STROGATZ, "Syncronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications," IEEE Transations on Circuits And Systems, vol. 40, 1993.
- [22] SOUZA,F. G.; RUBINGER R. M.; SARTORELLI J. C.; ALBUQUERQUE H. A.; "High resolution experimental parameter space of a chaotic circuit," Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, vol. 20, 2015.
- [23] CHUA, L. O.; Chua circuit ten years later. IEICE Trans. Eletron, v. E77-A, n. 11, p. 1811-1822, 1994.
- [24] CHUA, L. O. The genesis of Chua's circuit. Archiv for Eletronik and Ubertragungstechnik, 1992.
- [25] Figura: Imagens circuito de Chua, e curva IV diodo de Chua. Disponível em: <https://www.google.com/search?q=circuito+de+chua&source=lnms&tbo=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjwrbjRgM3jAhUsLLkGHZ4aBGwQ_AUIESgB&biw=1366&bih=657#imgrc=Q-F-SRq5vyeZNM> Acessado em 04/04/2020.
- [26] Imagem baseada: VIANA, E. R.J.; Espaço de parâmetros para um circuito caótico experimental. Dissertação (mestrado) – UFMG, 2010.
- [27] BOYLESTAD R. L. NASHELSKY L, Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos. Prentice-Hall do Brasil, 1984.
- [28] ALBULQUERQUE. H. A.; RUBNGER. R. M.; RECH. P. C.; Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit. Physics Letters A, v. 372, p. 4793-4798, 2008.
- [29] NATHAN DOS SANTOS NICOLAU; Implicação de um forçamento periódico e assimétrico na dinâmica do circuito de Chua. UDESC, 2017. Dissertação de

Mestrado.

- [30] RECH. P. C.; ALBULQUERQUE. H. A; A Hyperchaotic Chua System. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 19, n. 11, p. 3823-3828, 2009.
- [31] STEGEMANN. C.; ALBUQUERQUE. H. A.; RECH. P. C.; Some two-dimencional parameter spaces of a Chua system with cubic nonlinearity, Chaos v.20, 023103, 2010.
- [32] STEGEMANN. C.; ALBUQUERQUE. H. A.; RUBINGER. R.M.; RECH. P. C.; Lyapunov expoent diagrams of a 4-dimencional Chua system. Chaos v.21, 033105, 2011.
- [33] HOFF, ANDERSON; DA SILVA, DENILSON T.; MANCHEIN, CESAR; ALBUQUERQUE, HOLOKX A. Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model. Physics Letters A (Print) v. 378, p. 171-177, 2013.
- [34] MANCHEIN, CESAR ; ALBUQUERQUE, HOLOKX A. ; MELLO, LUIS FERNANDO . Exploring the Dynamics of a Third-Order Phase-Locked Loop Model. INTERNATIONAL JOURNAL OF BIFURCATION AND CHAOS, v. 28, p. 1830038, 2018.

APÊNDICE A

Rotina para Gerar Atrator.

```

#atrator circuito de chuaquadrídimentional#
import numpy
import math
import pylab
import matplotlib.pyplot as grafico
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
# parametros #
alfa = 30
beta = 50
gama = 0.32
delta = 0.111111

a = 0.03
c = -1.2
# C.I #
x0 = 0.1
y0 = 0.1
z0 = 0.1
w0 = 0.1
def gerador(numero_pontos, edos, estado, parametros):
    dados = numpy.zeros([estado.shape[0], numero_pontos])
    for i in range(1000):
        estado = rk4(edos, estado, parametros)
    for i in range(numero_pontos):
        estado = rk4(edos, estado, parametros)
        dados[:, i] = estado
    return dados
def rk4(edos, estado, parametros, dt = 0.01):
    k1 = dt*edos(estado, parametros)
    k2 = dt*edos(estado + 0.5*k1, parametros)
    k3 = dt*edos(estado + 0.5*k2, parametros)
    k4 = dt*edos(estado + k3, parametros)
    return estado + (k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 + k4)/6.0
def sistema_odes((x, y, z, w) , (alfa, beta, gama, delta)):
    return numpy.array([alfa*(y - a*x**3 -(1+c)*x), x -y +z, - beta*y - gama*z + w , - delta*x - y*z])
def gerador_serieT(numero_pontos, x0, y0, z0, w0):
    global alfa, beta, gama, delta
    return gerador(numero_pontos, sistema_odes, numpy.array([x0, y0, z0, w0]), numpy.array([alfa, beta, gama, delta]))

```

```
dados = gerador_serieT(20000, x0, y0, z0, w0)
figure = grafico.figure()
axes = Axes3D(figure)
axes.plot3D(dados[0], dados[1], dados[2])
grafico.xlabel('X')
grafico.ylabel('Y')
grafico.title('atrator')
figure.add_axes(axes)
grafico.show()
```

Apêndice B

Rotina de Comando para Saída Analógica.

```
from PyDAQmx import *
import numpy
import math

saidap = Task()
pontos = int32()
data = numpy.zeros((2,2), dtype=numpy.float64)

# aa0 gama
data[0, :] =0.0

# a1 S
data[1, :] =0.0

# configuracao da saidaanalogica

saidap.CreateAOVoltageChan("Dev1/ao0, Dev1/ao1","", -10.0,10.0,DAQmx_Val_Volts,None)
saidap.CfgSampClkTiming("",1000.0,DAQmx_Val_Rising,DAQmx_Val_FiniteSamps,2)

# escreve os valores nas saidas
saidap.WriteAnalogF64(2,0,1.0,DAQmx_Val_GroupByChannel,data, pontos,None)

# inicia a tarefa
saidap.StartTask()

# espera ate que todos os dados sejam escritos
saidap.WaitUntilTaskDone(1.0)

print "feito %d pontos escritos"%pontos.value
```

APÊNDICE C

Rotina de Varredura Automatizada da Série Experimental.

```
from PyDAQmx import *
import numpy
import math
import time
```

```
""
```

Obtem as series temporais para gerar o espaco de parametros.

Este programa cria varios arquivos txt, cada um com uma serie temporal

Para obter o espaco de parametros, use o programa espacoLyapunovTISEANapos obter as series com esta rotina

Parametros dados em tensao (V).

Conectar as variaveis dinamicas (x,y, z) do circuito na entrada AI0, AI1 e AI2 respectivamente

Parametro 'a' associado a saida analoga AO0

Parametro 'b' associado a saida analoga AO1

Saida USER1 definida como sinal para zerar cond. ini.

Cria tantos arquivos de texto quanto a resolucao forcecida pelo usuario, se a resolucao for 200x200,

serao criados 40 000 arquivos com series temporais. Os arquivos sao nomeados com os inteiros do loop associado a cada parametro

exemplo:

serie1W0.txt 1 eh o valor amin + 1Xpasso d parametro a, 0 eh o valor bmin + 0Xpasso parametro b

```
""
```

#inicio das configuracoes

```
#numero de pontos salva em cada serie temporal
numero_pontos = 20000
```

#intervalo de variação dos parametros (V)

amax = 1.5

amin = 0.0

bmax = 1.5

```
bmin = 0.0
```

```
#resolucao da malha
resolucao = 200
```

```
#transiente apos zerar cond. ini. em segundos
transiente = 0.0
```

```
#fim das configuracoes
```

```
passoA = (amax - amin)/resolucao
passoB = (bmax - bmin)/resolucao
```

```
for k in range(resolucao):
    a = amin + k*passoA
```

```
    for j in range(resolucao):
        b = bmin + j*passoB
```

```
saida = Task()
pontos = int32()
parametros = numpy.zeros((2,2), dtype=numpy.float64)
```

```
parametros[0, :] = a
parametros[1, :] = b
```

```
# configuracao da saidaanalogica
```

```
saida.CreateAOVoltageChan("Dev1/ao0, Dev1/ao1","", -10.0,10.0,DAQmx_Val_Volts,None)
    saida.CfgSampClkTiming("",1000.0,DAQmx_Val_Rising,DAQmx_Val_FiniteSamps,2)
```

```
# escreve os valores nas saidas
```

```
    saida.WriteAnalogF64(2,0,1.0,DAQmx_Val_GroupByChannel,parametros, pontos,None)
```

```
    # inicia a tarefa
    saida.StartTask()
```

```
#trasiente ado filtro de saidaanalogica
time.sleep(0.1)
```

```
digital = Task()
```

```

byte = numpy.uint32(1)

# Configuracao do canal digital p0

digital.CreateDOChan("Dev1/port0/line0:0","",DAQmx_Val_ChanForAllLines)

# Inicia a tarefa
digital.StartTask()

# Liga ou desliga o pino digital
digital.WriteDigitalScalarU32(1,1.5,byte,None)

#tempo necessario para fechar os contatos do rele
time.sleep(0.1)

digital = Task()
byte = numpy.uint32(0)

# Configuracao do canal digital p0

digital.CreateDOChan("Dev1/port0/line0:0","",DAQmx_Val_ChanForAllLines)

# Inicia a tarefa
digital.StartTask()

# Liga ou desliga o pino digital
digital.WriteDigitalScalarU32(1,1.5,byte,None)

#trasiente apos condicoes iniciais
time.sleep(transiente)

leitura = Task()
read = int32()
data = numpy.zeros((3, numeroPontos), dtype=numpy.float64)

# configuracao da entrada analogica

leitura.CreateAIVoltageChan("Dev1/ai0,Dev1/ai1,      Dev1/ai2","",DAQmx_Val_Cfg_Default,-
10.0,10.0,DAQmx_Val_Volts,None)

leitura.CfgSampClkTiming("",10000.0,DAQmx_Val_Rising,DAQmx_Val_FiniteSamps,3*numeroPontos)

```

```
# inicia a tarefa
leitura.StartTask()

# le as portas

leitura.ReadAnalogF64(numero_pontos,10.0,DAQmx_Val_GroupByChannel,data,numero_pontos*3,byref(read),None)

print "serie %i (%f , %f )salva com sucesso!" %(k,a,b)

# abre e salva arquivo da serie temporal

f = open("serie%W%i.txt"%(k,j), "w")

for i in range(numero_pontos):
    f.write("%f %f \n"%(data[0][i],data[1][i]))
f.close()
```

APÊNDICE D

Rotina para Análise das Séries Experimentais pelo Pacote Tisean.

```

import numpy as np
from time import sleep
from subprocess import Popen, PIPE

#intervalo dos parametros a serem varridos
amax = 1.5
amin = 0.0

bmax = 1.5
bmin = 0.0

#resolucao do espaco de parametros
resolucao = 200

passoA = (amax - amin)/resolucao
passoB = (bmax - bmin)/resolucao

f = open("ept_k10d1n15000.dat", "w")
dados = np.zeros((resolucao,resolucao))

def popen_timeout(comando1, comando2, comando3, comando4, comando5, comando6, timeout):
    p1 = Popen(comando1, stdout=PIPE, stderr=PIPE)
    p2 = Popen(comando2, stdout=PIPE, stderr=PIPE)
    p3 = Popen(comando3, stdout=PIPE, stderr=PIPE)
    p4 = Popen(comando4, stdout=PIPE, stderr=PIPE)
    p5 = Popen(comando5, stdout=PIPE, stderr=PIPE)
    p6 = Popen(comando6, stdout=PIPE, stderr=PIPE)
    for t in xrange(timeout):
        sleep(1)
        verifica = (p1.poll() is not None) and (p2.poll() is not None) and (p3.poll() is not None) and (p4.poll() is not None) and (p5.poll() is not None) and (p6.poll() is not None)
        if verifica :
            stdout,stderr = p1.communicate()
            resultado1 = stdout
            stdout,stderr = p2.communicate()
            resultado2 = stdout
            stdout,stderr = p3.communicate()

```

```

        resultado3 = stdout
stdout,stderr = p4.communicate()
        resultado4 = stdout
stdout,stderr = p5.communicate()
        resultado5 = stdout
stdout,stderr = p6.communicate()
resultado6 = stdout

return [resultado1,resultado2,resultado3,resultado4,resultado5,resultado6]

```

```

p1.kill()
p2.kill()
p3.kill()
p4.kill()
p5.kill()
p6.kill()
return [','','','','','']

```

```
for k in range(resolucao):
```

```
for j in range(resolucao/6):
```

```

comando1 = 'lyap_spec "serie%iW%i.txt" -m1,4 -k10 -n15000 -d1'%(k,j)
comando2 = 'lyap_spec "serie%iW%i.txt" -m1,4 -k10 -n15000 -d1'%(k,j+(resolucao/6))
comando3 = 'lyap_spec "serie%iW%i.txt" -m1,4 -k10 -n15000 -d1'%(k,j+2*(resolucao/6))
comando4 = 'lyap_spec "serie%iW%i.txt" -m1,4 -k10 -n15000 -d1'%(k,j+3*(resolucao/6))
comando5 = 'lyap_spec "serie%iW%i.txt" -m1,4 -k10 -n15000 -d1'%(k,j+4*(resolucao/6))
comando6 = 'lyap_spec "serie%iW%i.txt" -m1,4 -k10 -n15000 -d1'%(k,j+5*(resolucao/6))

```

```
resultado = popen_timeout(comando1, comando2, comando3, comando4, comando5,
comando6, 70)
```

```

if(resultado[0] != ""):
    o = resultado[0].split()
try:
    print "serie%i%i lida expoente de lyapunov: %f"%(k, j, float(o[1]))
    dados[(k, j)] = float(o[1])

```

```

except:
    print "serie%i%inao converge"%(k,j)

```

```

dados[(k, j)] = 0.0

else:
print "serie%i%i divergiu"%(k,j)
    dados[(k, j)] = 0.0

if(resultado[1] != ""):
    o = resultado[1].split()
try:
    print "serie%i%i lida expoente de lyapunov: %f"%(k, j+(resolucao/6), float(o[1]))
    dados[(k, j+(resolucao/6))] = float(o[1])

except:
    print "serie%i%inao converge"%(k, j+(resolucao/6))
    dados[(k, j+(resolucao/6))] = 0.0

else:
    print "serie%i%i divergiu"%(k,(j+(resolucao/6)))
    dados[(k, j+(resolucao/6))] = 0.0

if(resultado[2] != ""):
    o = resultado[2].split()
try:
    print "serie%i%i lida expoente de lyapunov: %f"%(k,(j+ 2*(resolucao/6)),float(o[1]))
    dados[(k,(j+ 2*(resolucao/6)))] = float(o[1])

except:
    print "serie%i%inao converge"%(k,(j+ 2*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 2*(resolucao/6)))] = 0.0

else:
    print "serie%i%i divergiu"%(k,(j+ 2*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 2*(resolucao/6)))] = 0.0

if(resultado[3] != ""):
    o = resultado[3].split()
try:
    print "serie%i%i lida expoente de lyapunov: %f"%(k,(j+ 3*(resolucao/6)),float(o[1]))
    dados[(k,(j+ 3*(resolucao/6)))] = float(o[1])

except:
    print "serie%i%inao converge"%(k,(j+ 3*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 3*(resolucao/6)))] = 0.0

```

```

else:
    print "serie%i%i divergiu"%(k,(j+ 3*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 3*(resolucao/6)))] = 0.0

if(resultado[4] != ""):
    o = resultado[4].split()
try:
    print "serie%i%i lida expoente de lyapunov: %f"%(k,(j+ 4*(resolucao/6)),float(o[1]))
    dados[(k,(j+ 4*(resolucao/6)))] = float(o[1])

except:
    print "serie%i%inao converge"%(k,(j+ 4*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 4*(resolucao/6)))] = 0.0

else:
    print "serie%i%i divergiu"%(k,(j+ 4*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 4*(resolucao/6)))] = 0.0

if(resultado[5] != ""):
    o = resultado[5].split()
try:
    print "serie%i%i lida expoente de lyapunov: %f"%(k,(j+ 5*(resolucao/6)),float(o[1]))
    dados[(k,(j+ 5*(resolucao/6)))] = float(o[1])

except:
    print "serie%i%inao converge"%(k,(j+ 5*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 5*(resolucao/6)))] = 0.0

else:
    print "serie%i%i divergiu"%(k,(j+ 5*(resolucao/6)))
    dados[(k,(j+ 5*(resolucao/6)))] = 0.0

for q in range(resolucao):
    a = amin + q*passoA

    for e in range(resolucao):
        b = bmin + e*passoB

        f.write("%f %f %f \n"%(a,b,dados[(q,e)]))

    f.write("\n")

f.close()

```