

O tema central desta dissertação de Mestrado é o estudo e a investigação de sistemas Hamiltonianos, através de abordagem estatística e análises das propriedades de sistemas desta classe, mais especificamente do mapa padrão e mapa de rede. Sistemas desta classe têm como uma de suas características a divisão do espaço de fases em regiões de regularidade coexistindo com o mar de caos, a depender do valor atribuído ao parâmetro de não-linearidade. No caso dos sistemas aqui escolhidos, para valores arbitrariamente pequenos deste parâmetro, a regularidade predomina no espaço de fases, sendo possível identificar apenas pequenas regiões com presença de comportamento caótico. Para valores intermediários, o espaço de fases é “mesclado”, onde é fácil identificar as regiões tanto de regularidade quanto de caos, e é nestes casos que a dinâmica do sistema se torna complexa: nas bordas das ilhas de regularidade ocorre o aparecimento do *efeito stickiness*, em que trajetórias caóticas podem ser aprisionadas e comportamentos anômalos podem surgir. Para valores altos do parâmetro de não linearidade, o espaço de fases pode ser composto apenas pelo mar de caos. Ao longo do trabalho, estudamos três sistemas diferentes: o mapa padrão, o mapa de rede e duas redes de mapas padrão acoplados: uma composta por dois mapas e outra por três mapas. Para nossas investigações, utilizamos três diferentes ferramentas: a estatística dos tempos de recorrência de Poincaré (ETR), a teoria dos grandes desvios aplicada ao espectro de Lyapunov a tempo finito e, consequentemente, o decaimento das correlações temporais e, por fim, a estatística dos recordes, ferramenta usualmente utilizada nas caminhadas aleatórias. O mapa padrão e as duas redes de mapas padrão acoplados foram submetidos a investigações através dos dois primeiros métodos citados. Através destes estudos, determinamos regimes para o decaimento das curvas da ETR e os associamos às regiões do espaço de fases dos sistemas de interesse, possibilitando uma compreensão de como se dá o aprisionamento das trajetórias no espaço de fases. Além da análise da ETR, utilizamos a teoria dos grandes desvios e o decaimento das correlações temporais, a fim de provar sua viabilidade tanto computacional quanto como ferramenta para análise de sistemas Hamiltonianos multidimensionais. Por último, aplicamos ao mapa padrão e ao mapa de rede a estatística de recordes. Aqui propomos aplicá-la em sistemas Hamiltonianos a fim de ampliar as conexões entre sistemas caóticos determinísticos e processos estocásticos, e para identificar mecanismos dinâmicos que podem levar a anomalias nas quantidades medidas na análise dos recordes. Sendo assim, a pesquisa aqui desenvolvida visa contribuir para uma melhor compreensão do *efeito stickiness* e prover ferramentais comprovadamente eficientes no estudo de processos caóticos em sistemas determinísticos.

Orientador: César Manchein

Joinville, 2020

ANO
2020

TULIO MENEGHELLI DE OLIVEIRA | PROPRIEDADES DINÂMICAS E ESTATÍSTICAS DE SISTEMAS HAMILTONIANOS MULTIDIMENSIONAIS



UDESC

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROPRIEDADES DINÂMICAS E ESTATÍSTICAS DE
SISTEMAS HAMILTONIANOS MULTIDIMENSIONAIS

TULIO MENEGHELLI DE OLIVEIRA

JOINVILLE, 2020

TULIO MENEGHELLI DE OLIVEIRA

**PROPRIEDADES DINÂMICAS E ESTATÍSTICAS DE
SISTEMAS HAMILTONIANOS MULTIDIMENSIONAIS**

Dissertação submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Física, do Centro de
Ciências Tecnológicas da Universidade do
Estado de Santa Catarina, para a obtenção
do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. César Manchein

JOINVILLE

2020

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Meneghelli de Oliveira, Túlio

Propriedades dinâmicas e estatísticas de sistemas Hamiltonianos
multidimensionais / Túlio Meneghelli de Oliveira. -- 2020.

69 p.

Orientador: César Manchein

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2020.

1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Caos. 3. Recorrências de
Poincaré. 4. Efeito Stickiness. 5. Estatística de Recordes. I.
Manchein, César. II. Universidade do Estado de Santa Catarina,
Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

**Propriedades Dinâmicas e Estatísticas de Sistemas Hamiltonianos
Multidimensionais**

por

Tulio Meneghelli de Oliveira

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

Área de concentração em “Física”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

ASSINADO DIGITALMENTE

Prof. Dr. César Manchein
CCT/UDESC
(Orientador/Presidente)

VIA VIDEOCONFERÊNCIA

Prof. Dr. Rafael Marques da Silva
UFPR

ASSINADO DIGITALMENTE

Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC

Joinville, SC, 23 de julho de 2020.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais, Vilmar José de Oliveira e Maria Meneghelli de Oliveira, e à minha irmã, Anna Paula, por todo apoio, incentivo, paciência e motivação;

Agradeço à minha namorada e amiga, Luana Vieira Delfino, por todo apoio, paciência, incentivo, compreensão e companheirismo;

Agradeço ao meu orientador, César Manchein, por todos os anos de orientação, desde a iniciação científica na graduação, pelos ensinamentos, confiança, discussões, conversas e cooperação;

Agradeço ao Prof. Roberto Artuso, pela valiosa colaboração científica e disponibilidade;

Agradeço aos meus amigos Daniel F. Meurer, Vinícius Wiggers, Júlia Karnopp, Thais M. Vieira, Sarah H. Tschá, Taísa U. Barbosa, Gabrielle Emídio, por toda cooperação, amizade e momentos de descontração dentro e fora da universidade.

Agradeço aos meus amigos de fora da universidade, pelos momentos de distração e confraternização.

Agradeço aos demais amigos que a UDESC me proporcionou e que, de alguma forma, contribuíram neste período.

Agradeço aos professores do departamento de Física da UDESC por todos os ensinamentos.

Agradeço ao programa de Pós-Graduação em Física da UDESC e ao grupo de Dinâmica Não-Linear pela oportunidade. Agradecimento especial ao Sidnei da Costa Otero por todo auxílio.

Agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos
é um oceano ”

Isaac Newton

RESUMO

O tema central desta dissertação de Mestrado é o estudo e a investigação de sistemas Hamiltonianos, através de abordagem estatística e análises das propriedades de sistemas desta classe, mais especificamente do mapa padrão e mapa de rede. Sistemas desta classe têm como uma de suas características a divisão do espaço de fases em regiões de regularidade coexistindo com o mar de caos, a depender do valor atribuído ao parâmetro de não-linearidade. No caso dos sistemas aqui escolhidos, para valores arbitrariamente pequenos deste parâmetro, a regularidade predomina no espaço de fases, sendo possível identificar apenas pequenas regiões com presença de comportamento caótico. Para valores intermediários, o espaço de fases é “mesclado”, onde é fácil identificar as regiões tanto de regularidade quanto de caos, e é nestes casos que a dinâmica do sistema se torna complexa: nas bordas das ilhas de regularidade ocorre o aparecimento do efeito *stickiness*, em que trajetórias caóticas podem ser aprisionadas e comportamentos anômalos podem surgir. Para valores altos do parâmetro de não linearidade, o espaço de fases pode ser composto apenas pelo mar de caos. Ao longo do trabalho, estudamos três sistemas diferentes: o mapa padrão, o mapa de rede e duas redes de mapas padrão acoplados: uma composta por dois mapas e outra por três mapas. Para nossas investigações, utilizamos três diferentes ferramentas: a estatística dos tempos de recorrência de Poincaré (ETR), a teoria dos grandes desvios aplicada ao espectro de Lyapunov a tempo finito e, consequentemente, o decaimento das correlações temporais e, por fim, a estatística dos recordes, ferramenta usualmente utilizada nas caminhadas aleatórias. O mapa padrão e as duas redes de mapas padrão acoplados foram submetidos a investigações através dos dois primeiros métodos citados. Através destes estudos, determinamos regimes para o decaimento das curvas da ETR e os associamos às regiões do espaço de fases dos sistemas de interesse, possibilitando uma compreensão de como se dá o aprisionamento das trajetórias no espaço de fases. Além da análise da ETR, utilizamos a teoria dos grandes desvios e o decaimento das correlações temporais, a fim de provar sua viabilidade tanto computacional quanto como ferramenta para análise de sistemas Hamiltonianos multidimensionais. Por último, aplicamos ao mapa padrão e ao mapa de rede a estatística de recordes. Aqui propomos aplicá-la em sistemas Hamiltonianos a fim de ampliar as conexões entre sistemas caóticos determinísticos e processos estocásticos, e para identificar mecanismos dinâmicos que podem levar a anomalias nas quantidades medidas na análise dos recordes. Sendo assim, a pesquisa aqui desenvolvida visa contribuir para uma melhor compreensão do efeito *stickiness* e prover ferramentais comprovadamente eficientes no estudo de processos caóticos em sistemas determinísticos.

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos. Caos. Recorrências de Poincaré. Efeito *Stickiness*. Estatística de Recordes.

ABSTRACT

The main subject of this Master thesis is the study and investigation of Hamiltonian systems, through statistical approach and analysis of these systems properties, more specifically standard and web map. Hamiltonian systems are characterized by the division of the phase space into regularity regions coexisting with the chaotic sea, depending on the value attributed to the non-linearity parameter. In the case of the chosen systems, for arbitrarily low values of this parameter, the regularity predominates in the phase space, making it possible to identify only small regions with the presence of chaotic behavior. For intermediate values, the phase space is mixed and it is easy to identify regions of both regularity and chaos. In this case, the dynamics of the system becomes complicated: at the edges of the islands of regularity the stickiness effect takes place, effect in which chaotic trajectories can be trapped and anomalous behaviors can arise. For high values of the non-linearity parameter, the phase space can be composed only by the chaotic sea, and its behavior is already well known. Throughout the work, we studied three different systems: the Chirikov-Taylor standard map, the web map and two coupled standard maps networks: one consisting of two maps and the other of three maps. For the investigations, we used three different tools: the Poincaré recurrence time statistics, the large deviation theory applied to the finite-time Lyapunov spectrum and, hence, the decay of time correlation and, finally, the records statistics, a tool associated with random walks. The standard map and the two coupled standard map network were studied using the first two named methods. Through these studies, regimes for the RTS decay were determined and associated to phase space regions of those systems, enabling an understanding of how the trajectories are trapped in these phase spaces. In addition to the RTS analysis, we used the large deviations theory and the time correlations decay to study the dynamics and the properties of multidimensional Hamiltonian systems. Finally, we applied the record statistics to the standard and web maps. Here we propose to apply it in Hamiltonian systems in order to expand the relations between deterministic chaotic systems and stochastic processes, and to identify dynamic mechanisms that can lead to anomalies in the measurable quantities in records analysis. Therefore, the research developed here aims to contribute to a better understanding of the stickiness effect and to provide efficient tools for the study of chaotic processes in deterministic systems.

Keywords: Hamiltonian Systems. Chaos. Poincaré Recurrences. Stickiness Effect. Records Statistics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	UMA BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA	11
1.2	DINÂMICA CAÓTICA	12
1.3	OBJETIVOS E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E FERRAMENTAIS NUMÉRICOS	15
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS HAMILTONIANOS	15
2.1.1	Sistemas Hamiltonianos integráveis	17
2.1.2	Variáveis de ângulo e ação	18
2.1.3	Teorema KAM	20
2.1.4	Teorema de Poincaré-Birkhoff	22
2.1.5	O efeito <i>stickiness</i>	25
2.2	MAPA PADRÃO DE CHIRIKOV-TAYLOR	27
2.3	MAPA DE REDE (OSCILADOR PULSADO)	28
2.4	FERRAMENTAIS NUMÉRICOS	29
2.4.1	Estatística dos tempos de recorrência de Poincaré	29
2.4.2	Os expoentes de Lyapunov	31
2.4.3	Teoria dos grandes desvios e decaimento das correlações temporais	35
2.4.4	Estatística de recordes	37
3	ESPAÇO DE FASES HIERÁRQUICO E PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS	40
3.1	ESTUDO PRELIMINAR: A ETR NO MAPA PADRÃO	40
3.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	43
3.2.1	Análise dos espaços de fases	43
3.2.2	ETR para mapas padrão acoplados	45
3.2.3	Maiores expoentes de Lyapunov a tempo finito (MELTFs)	48
4	ESTATÍSTICA DE RECORDES EM SISTEMAS HAMILTONIANOS	52
4.1	ESTUDOS PRELIMINARES	52
4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	58

REFERÊNCIAS	60
APÊNDICE A – DEDUÇÃO DO MAPA PADRÃO	64
APÊNDICE B – DEDUÇÃO DO MAPA DE REDE	66
APÊNDICE C – MÉTODO DE ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT	69

1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos são utilizados, atualmente, principalmente em simulações numéricas, para estudar diversos sistemas matemáticos que modelam processos naturais, desde suas propriedades até suas limitações quanto à fidelidade do modelo na descrição dos processos. Um sistema dinâmico pode ser definido como uma representação matemática, determinística, que descreve a evolução temporal de dado modelo [1], seja ele físico, biológico, econômico, populacional ou de outro ramo científico. Para muitos, o marco inicial do estudo de sistemas dinâmicos se deu com as ideias do cientista Isaac Newton, no séc. XVII.

1.1 UMA BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Em Abril de 1686, o primeiro dos três livros que compreendem a obra *Principia* de Isaac Newton foi formalmente apresentado à Royal Society, até que, em Julho de 1687, a primeira edição completa de seu trabalho foi publicada [2]. O trabalho de Newton, considerado um dos mais importantes eventos da história da ciência, sintetizava a ciência da mecânica em três leis básicas (as *Leis de Newton*):

- Um corpo mantém seu estado de repouso ou de velocidade constante, até que uma força externa atue sobre ele.
- A taxa de variação temporal do momento \mathbf{p} de um corpo é igual à força externa resultante \mathbf{F} atuando sobre o mesmo: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.
- Para toda ação há uma reação de mesma magnitude, mas em sentido oposto.

Com as Leis de Newton, tornou-se possível descrever a trajetória de objetos mecânicos em movimento, o que levou a grandes avanços na ciência daquela época.

Apesar de possibilitar o determinismo de sistemas mecânicos, o sucesso das Leis de Newton se restringe a sistemas conhecidos como *integráveis*¹ e que tratam de uma ou, no máximo, duas partículas. Para três ou mais partículas, se torna impossível encontrar expressões analíticas que descrevam a dinâmica do sistema [2].

Indícios para a solução do *problema de três corpos* (interação de uma estrela e outros dois planetas) se iniciou com o trabalho do matemático francês Henri Poincaré, próximo à virada do século XIX. Poincaré foi capaz de mostrar que órbitas extremamente complicadas (caóticas) eram possíveis [1] para sistemas determinísticos. Poincaré ganhou

¹ São denominados integráveis os sistemas que possuem solução analítica e, ainda, N constantes de movimento independentes (Subseção 2.1.1).

um prêmio de uma questão proposta pelo Rei Oscar II da Suécia, provando que as aproximações por séries das órbitas de Kepler, através da teoria da perturbação, divergiam por conta de pequenos denominadores originados de ressonâncias internas. Por conta destas divergências, parecia ser impossível fazer previsões de longos tempos para sistemas mecânicos utilizando expansões de perturbação.

Em 1954, Andrei Nikolayevich Kolmogorov esboçou uma prova de que, para alguns valores de parâmetro, uma grande quantidade de trajetórias dos sistemas do tipo proposto pelo Rei Oscar II seriam quase-periódicas, podendo ser descritas em termos de um tipo especial de expansão de perturbação. Em 1962, Vladimir Igorevich Arnold construiu uma prova formal dos resultados apresentados por Kolmogorov, para um sistema de três corpos, através de uma Hamiltoniana analítica, e em 1968, Jürgen Kurt Moser obteve um resultado parecido para uma classe especial de mapas [2]. O *Teorema KAM*, como ficou conhecido (em homenagem aos autores), não só permitiu a resolução do problema, como se mostrou uma chave para compreender a origem do comportamento caótico [3].

Muitos outros cientistas contribuíram para o desenvolvimento das teorias e ferramentas aplicadas atualmente na investigação de sistemas dinâmicos (como, por exemplo, os expoentes de Lyapunov e a estatística dos tempos de recorrência), mas muitas perguntas foram respondidas somente após o advento da computação moderna, que possibilitou a integração numérica de equações diferenciais não-lineares. Nos dias de hoje, ferramentas da dinâmica não-linear são aplicadas não somente na mecânica ou em sistemas matemáticos complexos, mas em quase todas as áreas da ciência, desde redes neurais [4] até órbitas em galáxias espirais [5].

1.2 DINÂMICA CAÓTICA

A palavra Caos, quando primeiramente ouvida, tem seu significado remetido à desordem, confusão, ou amontoado de coisas misturadas. No entanto, no âmbito da física, o caos (ou a dinâmica caótica) é a caracterização de um sistema que possui, ou demonstra, extrema sensibilidade às suas condições iniciais [6].

Para sistemas integráveis, como por exemplo o oscilador harmônico ou um objeto em queda livre ou em movimento retilíneo, mudanças infinitesimais nas condições iniciais (seja na posição e/ou momento) não afetarão de maneira significativa a dinâmica do sistema observado e, em instantes futuros, as trajetórias se encontrarão próximas ou se afastarão de forma linear, caso sejam acompanhadas simultaneamente. Para sistemas que apresentam sensibilidade às condições iniciais, em determinados intervalos de parâmetros, repetir o procedimento anteriormente citado resulta num afastamento exponencial de trajetórias iniciadas infinitesimalmente próximas.

Neste cenário, a dinâmica caótica remete à imprevisibilidade inerente ao sistema,

por mais que este seja determinístico. É importante salientar que a dinâmica caótica de sistemas determinísticos não deve ser confundida com aleatoriedade (estocasticidade), uma vez que é possível predizer o passo seguinte destes sistemas e sua imprevisibilidade se restringe a longos tempos, diferentemente de sistemas aleatórios, cujas grandezas envolvidas são totalmente descorrelacionadas (um momento futuro é independente do estado atual do sistema). Também é importante deixar claro que tal imprevisibilidade se dá por conta das limitações computacionais já que, nas simulações numéricas, os computadores trabalham com arredondamentos, que podem acarretar em divergências. Num cenário hipotético onde exista precisão infinita, a descrição exata das trajetórias de um sistema caótico seria possível.

1.3 OBJETIVOS E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Os objetos de estudo da pesquisa realizada ao longo do período deste Mestrado se resumem a sistemas Hamiltonianos que possuem espaços de fases *dividido*, ou seja, sistemas nos quais regiões caóticas e de regularidade podem ser encontradas coexistindo no espaço de fases. Esta característica do espaço de fases, que também é conhecida como espaço de fases *mesclado*, torna possível o aprisionamento de trajetórias caóticas no entorno das estruturas de regularidade presentes no mesmo. Este aprisionamento é também chamado de efeito *stickiness* e atribui interessantes propriedades ao sistema. No Capítulo 2 abordamos a origem deste efeito.

Ao longo da dissertação, estudamos dois sistemas Hamiltonianos. Para tal, utilizamos três principais ferramentas de análise: estatística dos tempos de recorrência (ETR), teoria dos grandes desvios (decaimento das correlações temporais) e estatística de recordes.

A ETR e a teoria dos grandes desvios podem nos dar informação do espaço de fases de um sistema e sua complexidade através de curvas de decaimento, cujos métodos para seus cálculos são descritos no Capítulo 2: se o decaimento da curva é exponencial, seu espaço de fases é totalmente caótico, se o decaimento da curva é polinomial, seu espaço de fases é dividido. Nossa objetivo, com estas ferramentas, é o de averiguar o comportamento destas curvas quando tratamos de sistemas Hamiltonianos multidimensionais. Para tal, utilizamos uma rede de mapas padrão acoplados, descrita no Capítulo 3.

Para sistemas Hamiltonianos de baixa dimensionalidade, existem fortes evidências de que o expoente decaimento destas curvas é de $\gamma \simeq 1,57 \pm 0,03$ [7] para a ETR e $\chi \simeq 0,57 \pm 0,05$ para as correlações temporais [9]. Os expoentes de decaimento da ETR e das correlações temporais estão relacionados pela expressão apresentada na Subseção 2.4.3. Para sistemas Hamiltonianos de maiores dimensões, existem dois resultados na literatura nos quais nos atentaremos: Shepelyansky conjectura que, num caso genérico onde a medida

das ilhas de estabilidade é diferente de zero, existe um expoente médio universal para a ETR com valor $\gamma \simeq 1,3 - 1,4$ [29], já Altmann e Kantz propõem que, conforme aumenta-se a dimensão do sistema, aumenta-se o expoente de decaimento da ETR [48]. Nossa proposta com esta investigação é dar um passo além dos resultados previamente obtidos por estes pesquisadores.

Para a estatística dos recordes, nossa proposta é estabelecer uma conexão entre sistemas caóticos determinísticos e processos estocásticos, utilizando uma ferramenta normalmente empregada no âmbito de caminhadas aleatórias. Motivados pelas Refs. [10, 11], onde os autores trazem resultados para condições iniciais escolhidas uniformemente ao longo de todo o espaço de fases do mapa padrão e do mapa padrão quântico, nosso objetivo é analisar os efeitos da escolha das condições iniciais somente no mar de caos, ou seja, estudar a componente caótica e como ela é (se realmente for) influenciada pelo efeito *stickiness* e pelas *ilhas de modos aceleradores*. Aqui os sistemas escolhidos para o estudo são o mapa padrão e o mapa de rede [6].

Ainda no Capítulo 2, apresentamos fundamentos básicos da dinâmica de sistemas Hamiltonianos, exploramos as teorias nas quais nos embasamos para o desenvolvimento dos estudos aqui apresentados, e abordamos as ferramentas utilizadas nas investigações dos sistemas escolhidos.

No Capítulo 3 apresentamos nossos primeiros resultados numéricos, relacionados à estatística dos tempos de recorrência de Poincaré e ao decaimento das correlações temporais, este último medido através da teoria dos grandes desvios. Exploramos o mapa padrão de Chirikov-Taylor (Seção 2.2) e duas redes de mapas, compostas de dois e três mapas padrão acoplados, com diferentes valores para o parâmetro de não-linearidade K . O acoplamento entre os mapas resulta em sistemas de maiores dimensões, mais especificamente $2N$, em que N é o número de *graus de liberdade*. Os efeitos do acoplamento são explorados e expostos ao longo do capítulo.

No Capítulo 4, trazemos uma abordagem diferente da comumente vista, utilizamos de ferramentas tipicamente utilizadas no ramo das caminhadas aleatórias para explorar características de dois sistemas: o já conhecido mapa padrão e o mapa de rede (Seção 2.3).

As conclusões gerais e últimas ressalvas são feitas no Capítulo 5, onde são trazidas algumas discussões dos resultados obtidos ao longo dos estudos, e outras observações importantes com relação ao que foi apresentado no corpo da dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E FERRAMENTAIS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentadas as ferramentas e os conceitos básicos utilizados nos estudos desenvolvidos durante o período de mestrado do autor. Definições da mecânica clássica e dinâmica não-linear, investigação preliminar dos sistemas abordados e ferramentais numéricos.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS HAMILTONIANOS

Sistemas Hamiltonianos podem ser definidos como uma subclasse dos sistemas dinâmicos. Tais sistemas são descritos por uma *função Hamiltoniana*, dependente dos momentos conjugados $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, de suas respectivas coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ e, eventualmente, do tempo, com N sendo o número de graus de liberdade do sistema. As equações de movimento ($\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$) de um sistema Hamiltoniano podem ser obtidas da função Hamiltoniana, por meio das chamadas *equações de Hamilton*, que constituem um sistema com $2N$ equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_j}, \quad (2.1)$$

com j representando o j -ésimo grau de liberdade [12]. Quando a função Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ou seja $H = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, diz-se que o sistema é autônomo e, portanto, o valor de H se mantém constante:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (2.2)$$

Como a função Hamiltoniana é constante e é equivalente à energia do sistema, podemos concluir que, em sistemas Hamiltonianos autônomos, a energia total é uma quantidade conservada, de forma que $E = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \text{constante}$. Uma vez que $\mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ são conhecidos, é possível determinar a trajetória da partícula no espaço de fases do sistema. Em algumas situações, a resolução das equações de Hamilton pode se tornar complicada, devido à escolha das coordenadas generalizadas \mathbf{q} e \mathbf{p} . Para facilitar a obtenção das equações de movimento, podemos utilizar uma *transformação canônica*, que consiste numa mudança de coordenadas canônicas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$, que preserve a forma das equações de Hamilton e facilite a resolução do sistema. Portanto:

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial Q_j}, \quad (2.3)$$

em que K é a Hamiltoniana transformada, dependente das novas coordenadas (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) e pode ser obtida através de uma função geradora \mathcal{G} , que deve depender de uma coordenada

nova (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) e uma antiga (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , pelo menos. Podemos encontrar K pela relação:

$$K = H + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

e a função geradora \mathcal{G} é classificada em 4 diferentes tipos, de acordo com a dependência nas coordenadas:

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \quad \mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t). \quad (2.5)$$

Uma forma mais compacta de se escrever as equações de Hamilton é utilizando a chamada *notação simplética*, que resume as Eq. (2.1) a:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbb{M} \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}, \quad (2.6)$$

em que $\tilde{\mathbf{x}}$ é um vetor com dimensão $2N$ dado por:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

e \mathbb{M} é uma matriz bloco de tamanho $2N \times 2N$ definida como:

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_N & \mathbb{I}_N \\ -\mathbb{I}_N & \mathbb{O}_N \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

em que \mathbb{O}_N é uma matriz nula e \mathbb{I}_N é a matriz identidade, ambas sendo matrizes quadradas $N \times N$. Pela condição de canonicidade, sabemos que a forma das equações de Hamilton deve ser preservada, portanto, adotando a mesma transformação apresentada na Eq. (2.3) e utilizando estas coordenadas e a nova função Hamiltoniana na Eq. (2.6), temos:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbb{M} \frac{\partial K}{\partial \tilde{\mathbf{X}}}, \quad (2.9)$$

sendo $\tilde{\mathbf{X}}$ dado por:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Como $\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}})$, derivando $\tilde{\mathbf{X}}$ no tempo temos:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbb{J} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}, \quad (2.11)$$

em que \mathbb{J} é a *matriz Jacobiana* da transformação, definida como:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Utilizando a Eq. (2.6) e a Eq. (2.11), podemos chegar à forma final da notação simplética:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T \frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{X}}}, \quad (2.13)$$

de forma que \mathbb{J}^T é a matriz transposta da Jacobiana. Comparando as Eqs. (2.9) e (2.13), pode-se constatar que a estrutura das equações de Hamilton são, de forma geral, conservadas, exceto por um produto de matrizes. Isto nos leva à *condição simplética* para uma transformação canônica:

$$\mathbb{J}\mathbb{M}\mathbb{J}^T = \mathbb{M}, \quad (2.14)$$

ou seja, a transformação será canônica caso a condição acima seja obedecida. Tal dedução é mostrada em [12], mas não é apresentada aqui pois não é o foco da dissertação.

2.1.1 Sistemas Hamiltonianos integráveis

No âmbito da Mecânica Clássica, podemos classificar sistemas a partir de sua integrabilidade, que remete à possibilidade ou não de sua resolução analítica e também à existência ou não do que denominamos *constantes* (ou *integrais*) de movimento. Estes sistemas são então divididos entre integráveis ou não integráveis [13]. As constantes de movimento carregam valiosas informações sobre a evolução temporal das trajetórias do sistema no espaço de fases e são definidas da seguinte forma: uma função $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é dita uma constante de movimento de um sistema Hamiltoniano, descrito por H , caso a evolução de $\mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ no tempo, de acordo com as equações de Hamilton (2.1), não afete o valor da função f , ou seja, $f(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = \text{constante}$ [1]. Como exemplo, podemos observar o valor de H de um sistema Hamiltoniano autônomo, que se mantém constante, como visto na Eq. (2.2). De maneira geral, necessita-se obter a derivada temporal de $f(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ e, assumindo que não há dependência explícita do tempo na função Hamiltoniana, obtemos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.15)$$

em que a diferença mais à direita da igualdade é denominado *colchete de Poisson* de f e H , e é denotado como $[f, H]$, sendo que sua forma generalizada, para duas funções arbitrárias, é dada por:

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

É possível ver que $[g_1, g_2] = -[g_2, g_1]$, portanto, a condição para que f seja, de fato, uma constante de movimento do sistema, é que o colchete de Poisson entre f e H seja nulo [14], ou seja,

$$[f, H] = 0. \quad (2.17)$$

Partindo destes resultados, um sistema Hamiltoniano autônomo é dito integrável se possuir N constantes de movimento *independentes* $f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, com $i = 1, 2, \dots, N$ sendo $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv$

$H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e, ainda, se

$$[f_i, f_j] = 0 \quad \forall i, j. \quad (2.18)$$

É sabido que $[f_i, f_j] = 0 \forall i = 1, 2, \dots, N$ desde que f_i seja uma constante de movimento. Se a condição $[f_i, f_j] = 0$ é satisfeita para todo i e j , diz-se que as constantes de movimento estão em *involução* [1]. Caso nenhuma das constantes de movimento possa ser escrita como função de outra, é dito que as constantes de movimento são independentes.

Para um sistema integrável com N constantes de movimento, a trajetória no espaço de fases se encontra na superfície N -dimensional $f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k_i$, com $i = 1, 2, \dots, N$ em que k_i são as N constantes. A condição de que as constantes de movimento se encontram em involução restringem o formato da superfície para um toro N -dimensional [1]. Uma ilustração desta superfície é feita na Fig. 1

Esta estrutura do espaço de fases remete a movimentos periódicos, em que as coordenadas posição generalizada e momento conjugado tendem a se repetir regularmente. Tal característica torna valiosa a ciência do período e/ou frequência do movimento, por vezes, até mais do que as próprias equações de movimento.

2.1.2 Variáveis de ângulo e ação

Por conta da importância de se saber qual o período e a frequência destes movimentos, se torna interessante uma mudança de variáveis do tipo $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$, sendo a nova função Hamiltoniana \bar{H} dependente somente de $\bar{\mathbf{p}}$. Uma forma de se fazer isto é escolhendo as constantes de movimentos como sendo as N componentes da variável $\bar{\mathbf{p}}$, com $\bar{p}_i = f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, desde que f_i obedeça as equações de Hamilton, ou seja: $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = 0$ e, então, teremos que $\bar{H} = \bar{H}(\bar{\mathbf{p}})$. É possível encontrar diversos conjuntos possíveis de constantes de movimento, se utilizarmos qualquer uma das N funções independentes das N constantes f_i como componentes de $\bar{\mathbf{p}}$, que obedecem às equações de Hamilton. De todas as possíveis escolhas, existe uma de significativa conveniência, o conjunto das variáveis de ação e ângulo [1, 15], denotadas como

$$(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) = (\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}),$$

sendo os elementos do vetor \mathbf{I} dados por

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbf{p}_i \cdot d\mathbf{q}_i, \quad (2.19)$$

o momento conjugado da coordenada de posição angular $\boldsymbol{\theta}$, proporcional a uma integral definida sobre um período completo de uma órbita no toro [1]. O caminho da integral é dado por γ_i onde, num exemplo bidimensional, γ_1 e γ_2 representam os círculos que definem o toro, como é mostrado na Fig. 1.

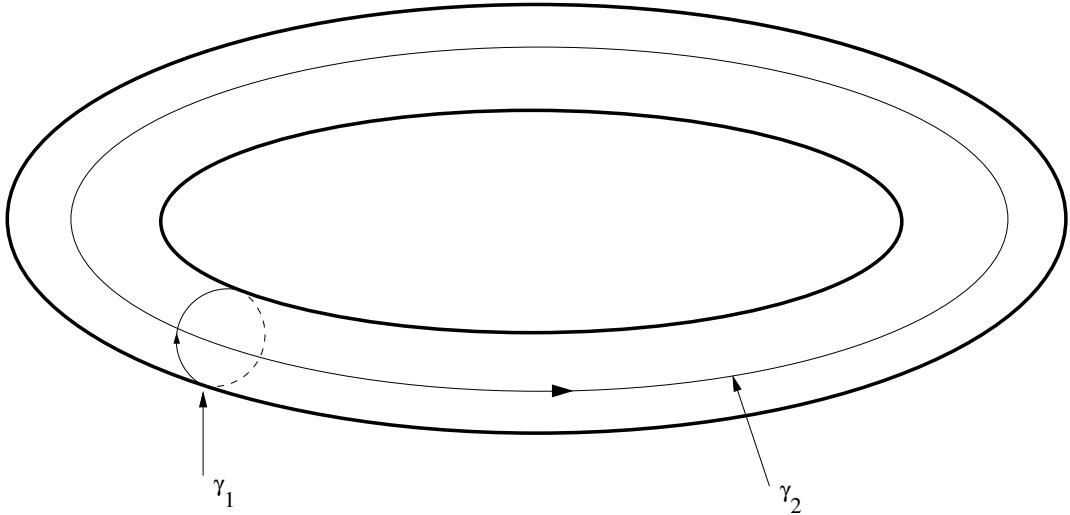


Figura 1 – Toro no qual é definida a integral de I_i , exemplo 2-dimensional. Figura construída com base na pág. 221 da Ref. [1]

Considerando um sistema integrável, podemos escrever as componentes de $\bar{\mathbf{p}}$ como $\bar{p}_i = \bar{p}_i(q_i; f_1, \dots, f_N)$ e, então, obteremos I_i como função somente das constantes de movimento f_i . Aplicando a transformação à Eq. (2.1):

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}), \quad \dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial \bar{H}(\mathbf{I})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0. \quad (2.20)$$

A solução para estas equações são:

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0), \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}(0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t. \quad (2.21)$$

Ou seja, o vetor $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ pode ser interpretado como a velocidade angular sobre o toro N -dimensional, que determina as trajetórias do sistema. Na Fig. 2, os raios I_1 e I_2 são constantes, e θ_1 e θ_2 representam, respectivamente, os ângulos toroidal e poloidal. De forma geral, para um sistema N -dimensional, as constantes I_i definem em que toro o sistema está e as variáveis θ_i , para determinado tempo, definem em que posição este sistema se encontra no toro. Uma órbita que é iniciada em um destes toros permanece nele infinitamente e, por esse motivo, estes toros são conhecidos como toros invariantes [14].

Ainda utilizando um toro 2-dimensional como exemplo, quando se analisa o movimento sobre o toro, a razão

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

é de grande importância, pois são as velocidades ω_1 e ω_2 que definem como o mesmo se dá. Existem dois casos possíveis, considerando que $\boldsymbol{\omega}$ é composto por números reais :

- A razão é racional e, consequentemente, a trajetória retorna a um ponto no qual já esteve anteriormente. Neste caso, o toro é classificado como racional ou ressonante e o movimento como periódico.

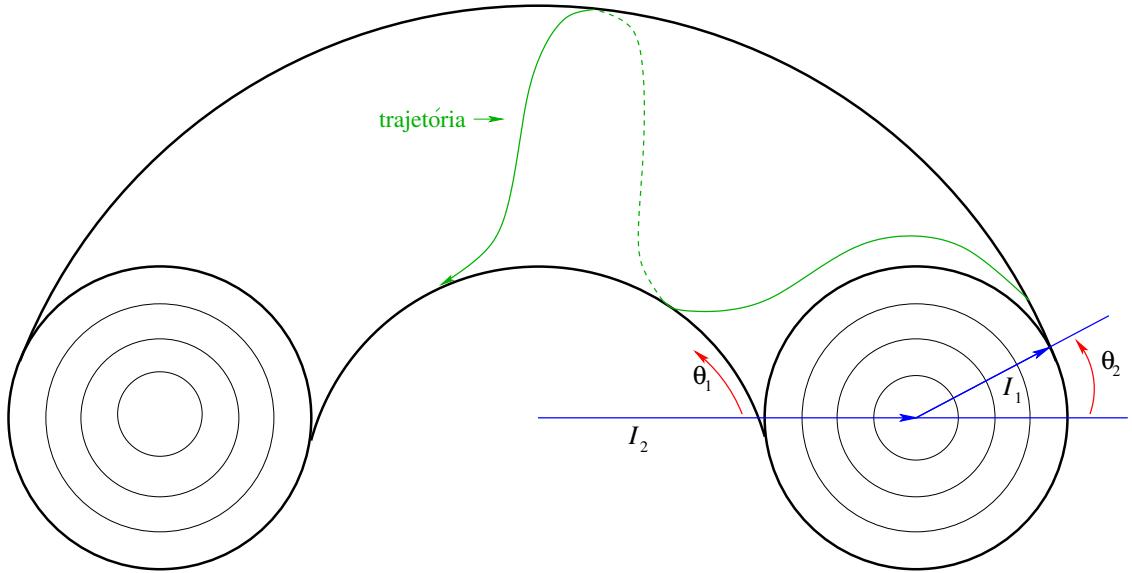


Figura 2 – Exemplificação da trajetória de uma condição inicial de um sistema integrável para $N = 2$.
Figura construída com base na ilustração da pág. 165 da Ref. [16].

- A razão é irracional e, então, a trajetória jamais retornará a um ponto em que já esteve. Sendo assim, o toro é denominado irracional e o movimento é conhecido como quase-periódico.

Trajetórias periódicas sobre um toro, para sistemas que possuem N graus de liberdade, obedecem à condição de comensurabilidade

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (2.22)$$

sendo $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ um vetor formado por números inteiros diferentes de zero [1, 14, 15]. Para trajetórias quase-periódicas, a condição (2.22) não é obedecida e as frequências ω_i são denominadas incomensuráveis.

2.1.3 Teorema KAM

Grande parte dos processos da natureza modelados pela física sofrem aproximações devido à complexidade apresentada por seus modelos matemáticos, como por exemplo, a influência dos outros planetas do sistema solar na órbita terrestre. O fato é que, neste exemplo, a interação gravitacional entre a Terra e outros planetas pode ser interpretada como uma pequena perturbação, dada a enorme diferença de massa entre o Sol e os outros entes deste sistema.

No âmbito da Mecânica Clássica, uma função Hamiltoniana não integrável pode ser reescrita em duas partes distintas, em que uma das partes é integrável e a outra não. A parte integrável depende somente de \mathbf{I} e a parte não integrável, por sua vez, depende

de $\boldsymbol{\theta}$ e \mathbf{I} , sendo representada como uma perturbação do sistema, de forma que tal função seja escrita como

$$H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}), \quad (2.23)$$

em que H_0 é a Hamiltoniana não perturbada e H_1 a Hamiltoniana perturbada. O que fica como questionamento é: qual a influência destas perturbações nas trajetórias de sistemas integráveis?

Este foi o questionamento inicial de *Andrey N. Kolmogorov* (1903-1987) [17] que, com contribuições de *Juergen K. Moser* (1928-1999) [18] e *Vladimir I. Arnold* (1937-2010) [19], desenvolveu o teorema hoje conhecido como *Teorema KAM*, que nos diz como e quão fortemente os toros e, consequentemente, as trajetórias do sistema são influenciados pela presença de uma perturbação. A dedução do teorema requer grande esforço matemático e, por este motivo, não será apresentada neste trabalho de dissertação. Portanto, serão abordados os intervalos de validade do teorema e o que ele nos diz a respeito da influência do termo perturbativo na dinâmica do sistema.

O Teorema KAM é válido quando algumas condições são obedecidas, e isto é suficiente para que alguns toros sobrevivam às perturbações aplicadas à função Hamiltoniana. Se a perturbação for de intensidade suficientemente grande, nenhum toro sobreviverá, portanto, as perturbações em questão (ϵ) devem ser pequenas. Os toros não destruídos são denominados *toros KAM* ou *toros invariantes*, e as condições estão enunciadas a seguir [13, 15]:

1. Frequências linearmente independentes: $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \neq 0$ num domínio de \mathbf{I} (suficientemente não-linear) em que $\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}}$ [16].
2. Suavidade na perturbação da função Hamiltoniana (suficientes derivadas contínuas de H_1) [16].
3. Condições iniciais suficientemente longe das ressonâncias [16].

Esta última condição assegura que o toro KAM mais resistente à perturbação é aquele cuja frequência $\boldsymbol{\omega}$ é o “número mais irracional” [16]. O significado de “número mais irracional” pode ser explicado através de ferramentas matemáticas da teoria de números. Um número irracional R pode ser representado como uma infinita fração continuada,

$$R = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}} \quad (2.24)$$

em que os números a_i são inteiros. Valores relativamente próximos do valor do número irracional podem ser alcançados truncando a fração em determinado valor a_n . O número

que se aproxima mais lentamente do valor real da fração (2.24) é, então, considerado o “número mais irracional” [1, 15]. A razão áurea é considerada o número mais irracional existente, e é calculado como

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (2.25)$$

2.1.4 Teorema de Poincaré-Birkhoff

Vimos, pelo teorema KAM, que alguns toros sobrevivem às pequenas perturbações as quais são submetidos. Por outro lado, toros ressonantes (α racional) são destruídos, e disto vem o questionamento: qual o destino destes toros? Esta pergunta é respondida pelo *teorema de Poincaré-Birkhoff*, enunciado por Poincaré e provado por George D. Birkhoff em 1927.

Considerando um mapa T_ϵ^s que não é submetido a nenhum tipo de perturbação, para um número de rotação $\alpha = r/s$ racional, os pontos x no espaço de fases são pontos fixos periódicos de período s , ou seja: $x = T_0^s(x)$. O comportamento destes pontos fixos, num cenário em que T_ϵ^s é perturbado, é o assunto tratado pelo teorema de Poincaré-Birkhoff [13].

Considere um círculo de raio ρ , com número de rotação $\alpha = r/s$ racional, e outros dois círculos vizinhos, de raio $\rho_+ > \rho$ e $\rho_- < \rho$, com números de rotação iracionais $\alpha_+ > \alpha = r/s$ e $\alpha_- < \alpha = r/s$, respectivamente (como mostrado na Fig. 3(a)). Ao aplicarmos o mapa T_0^s , os pontos fixos sobre o círculo ρ permanecerão na mesma posição.

Caso ϵ seja suficientemente pequeno, esta torção relativa distorcerá os círculos, mapeando os pontos que se encontram sobre ρ_+ e ρ_- na direção anti-horária e horária, respectivamente [2, 13].

Uma curva fechada ρ_ϵ , próxima ao círculo de raio ρ , será gerada por conta da torção do mapa, e outra curva $T_\epsilon^s(\rho_\epsilon)$, que intercepta ρ_ϵ , será gerada através da aplicação do mapa T_ϵ^s sobre ρ_ϵ , uma vez que a área destas curvas devem ser iguais e constantes já que estamos a considerar um sistema conservativo (como mostra a Fig. 3(b)). Sendo X_0 um dos pontos de intersecção, então $T_\epsilon^s(X_0) = X_0$. Todos os pontos mapeados a partir de X_0 por T_ϵ^s são pontos fixos de T_ϵ^s [2] com período s . Portanto, o número de intersecções deve ser múltiplo de s , mais especificamente, o mapa T_ϵ^s possui $2ks$ pontos fixos, sendo $k \in \mathbb{N}$. Além disto, metade dos pontos fixos são *elípticos* e outra metade é *hiperbólico*, sendo que estes se encontram alternados entre si [1]. Então, quando tratam-se de toros ressonantes submetidos a perturbações, deve-se esperar o aparecimento de estruturas formadas por órbitas elípticas e hiperbólicas próximas aos mesmos.

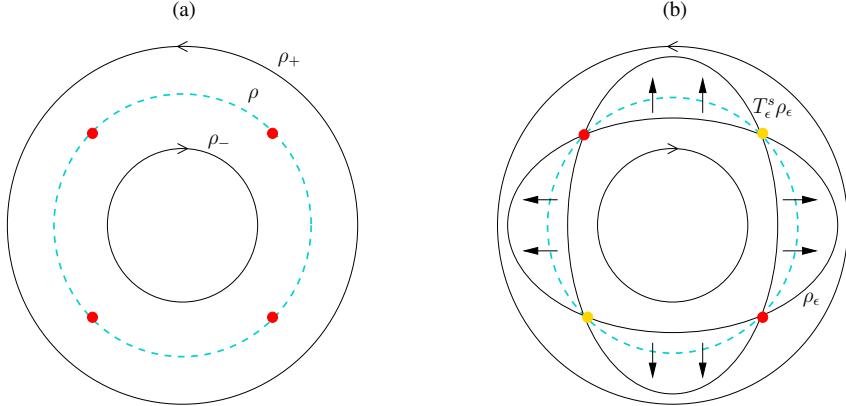


Figura 3 – (a) Curvas invariantes para um caso sem perturbação $\epsilon = 0$ para α irracional (linhas pretas sólidas) e $s = 4$ (linha azul clara tracejada). (b) A perturbação inserida no sistema gera a curva ρ_ϵ e, através da aplicação do mapa T_ϵ^s sobre esta curva, é originada a curva $T_\epsilon^s(\rho_\epsilon)$. Figura feita com base na ilustração da página 64 da Ref. [2]

Se as coordenadas de um dado ponto fixo

$$X_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix},$$

em que $X_0 = T_\epsilon^s X_0$, forem conhecidas, é possível determinar sua natureza através da linearização do mapeamento sobre o ponto fixo. O mapeamento linearizado, $\mathbb{J}(T_\epsilon^s)$, é conhecido como *mapa tangente*. Na literatura, alguns chamam seus autovalores de “multiplicadores” dos pontos fixos [2]. Para obtermos $\mathbb{J}(T_\epsilon^s)$, linearizamos $X_n = \begin{pmatrix} \rho_n \\ \phi_n \end{pmatrix}$ no ponto fixo X_0 . Ou seja, $X_n = X_0 + \delta X_n$, com δX_n pequeno. Então,

$$\delta X_{n+1} = \mathbb{J}(T_\epsilon^s) \delta X_n, \quad (2.26)$$

com $\mathbb{J}(T_\epsilon^s)$ definido como

$$\mathbb{J}(T_\epsilon^s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \rho_n} & \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \rho_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}_{X^{(0)}}. \quad (2.27)$$

Os autovalores h de $\mathbb{J}(T_\epsilon^s)$ são dados por

$$h^2 - h \text{Tr } \mathbb{J}(T_\epsilon^s) + \det \mathbb{J}(T_\epsilon^s) = 0. \quad (2.28)$$

Porém, para mapas conservativos, sabemos que $\det \mathbb{J}(T_\epsilon^s) = 1$, portanto:

$$h_\pm = \frac{\text{Tr } \mathbb{J}(T_\epsilon^s) \pm [(\text{Tr } \mathbb{J}(T_\epsilon^s))^2 - 4]^{1/2}}{2}. \quad (2.29)$$

Então, os autovalores são encontrados sempre em pares, de forma que $h_+ = h_-^{-1}$.

Do resultado obtido na Eq. (2.29), temos alguns casos possíveis [13], de acordo com o valor do traço da matriz:

- $-2 < \text{Tr } \mathbb{J} > 2$: os autovalores são complexos conjugados com valor igual a 1 e seus pontos fixos são elípticos [2];
- $\text{Tr } \mathbb{J} > 2$: os autovalores são reais e positivos, e o ponto fixo é hiperbólico regular (ou somente hiperbólico) [2];
- $\text{Tr } \mathbb{J} < -2$: os autovalores são reais e negativos, e o ponto fixo é hiperbólico reflexivo [2];
- $\text{Tr } \mathbb{J} = \pm 2$: Diz-se que os autovalores são degenerados, ambos tendo valor $+1$ ou -1 , e o ponto fixo é dito parabólico. Pontos fixos parabólicos são, geralmente, instáveis [2].

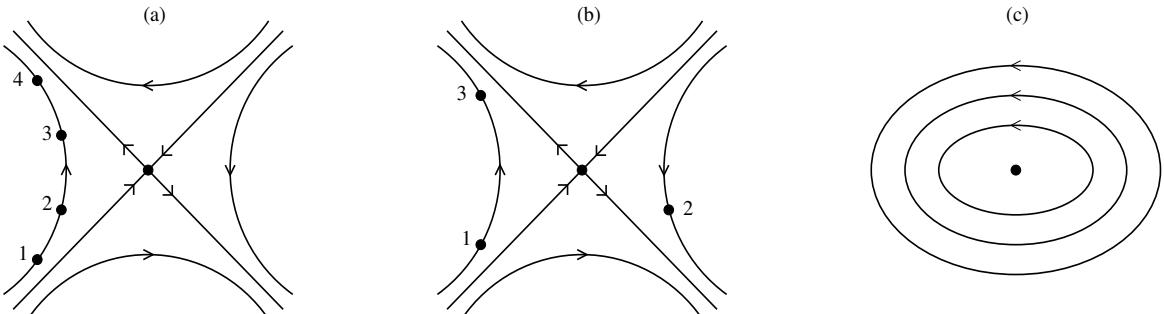


Figura 4 – Fluxo das trajetórias nas vizinhanças dos pontos fixos. Para pontos hiperbólicos regulares (a), os pontos se encontram em ordem sucessiva numa mesma órbita. Para pontos hiperbólicos reflexivos (b), a trajetória se alterna em torno do ponto fixo. Para pontos elípticos (c) a trajetória é fechada em torno do ponto, em forma de elipse. Os números indicam a sequência no tempo. Figura feita com base na ilustração da pág. 66 da Ref. [2]

Para pontos fixos elípticos, cujos autovalores são puramente complexos, os autovetores de $\mathbb{J}(T_\epsilon^s)$ descreverão uma trajetória que oscila em torno do ponto fixo. Para os pontos hiperbólicos, os autovalores serão reais da forma $h_1 = \frac{1}{h}$ e $h_2 = h$, sendo h real e $h > 1$. Pontos fixos elípticos são classificados como pontos fixos estáveis, enquanto pontos fixos hiperbólicos são classificados como pontos fixos instáveis [16]. Denotaremos a curva associada ao autovalor $\frac{1}{h}$ como $W^{(s)}$ e a curva associada a h como $W^{(u)}$, sendo estas chamadas de *variedades estáveis* e *variedades instáveis*, respectivamente. Os pontos de $W^{(s)}$ serão mapeados na direção do ponto fixo, uma vez que $(\mathbb{J}(T_\epsilon^s))^n W^{(s)} = (1/h)^n W^{(s)}$, enquanto os da curva $W^{(u)}$ serão mapeados na direção contrária, ou seja, se afastando do ponto fixo, já que $(\mathbb{J}(T_\epsilon^s))^n W^{(u)} = h^n W^{(u)}$ [2]. A Fig. 4 ilustra a trajetória do sistema na vizinhança dos diferentes tipos de pontos fixos.

Para sistemas integráveis, caso exista mais de um ponto fixo hiperbólico no sistema, suas variedades instáveis e estáveis se conectarão de forma suave umas às outras. Caso haja somente um ponto fixo, as variedades se conectarão juntamente no mesmo ponto, como mostrado na Fig. 5 [2].

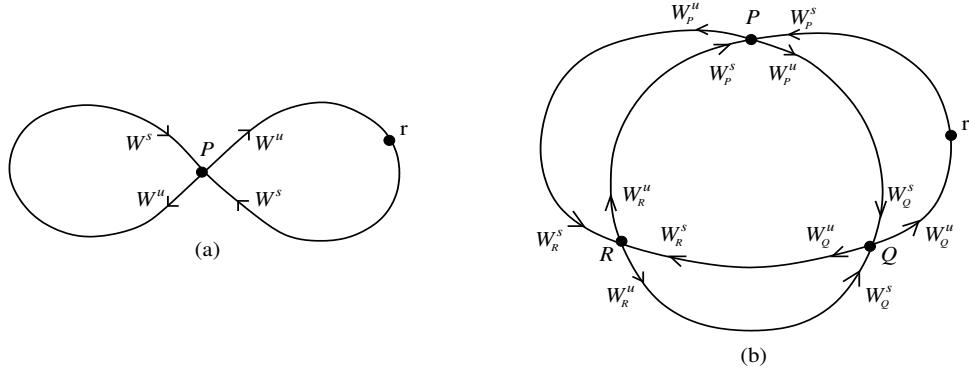


Figura 5 – Variedades estáveis W^s e instáveis W^u de pontos fixos hiperbólicos para sistemas integráveis. (a) O ponto r em $W^{(s)}$ e $W^{(u)}$ é mapeado para o mesmo ponto fixo P , tanto por T_0 quanto por T_0^{-1} . (b) Um ponto r em $W^{(s)}$ e $W^{(u)}$ é mapeado em P por T_0 e em Q por T_0^{-1} . Figura feita com base na ilustração da pág. 67 da Ref. [2].

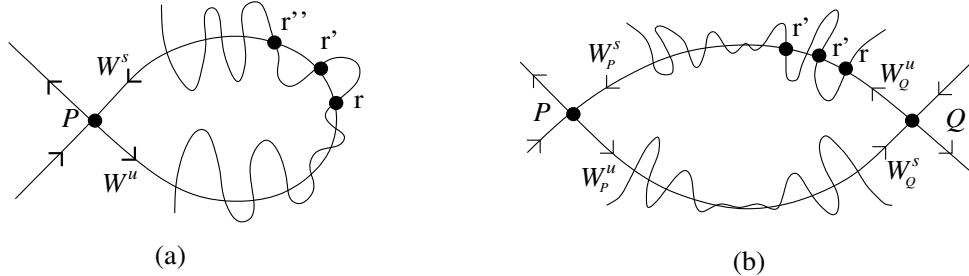


Figura 6 – (a) As intersecções das variedades estáveis e instáveis que se aproximam do mesmo ponto P , r , r' , r'' , etc., são pontos homoclínicos. (b) Os pontos que se encontram nas intersecções das variedades instáveis e estáveis que se aproximam de diferentes pontos fixos hiperbólicos P e Q , r , r' , r'' , etc., são pontos heteroclínicos. Figura feita com base na ilustração da pág. 68 da Ref. [2].

Caso o sistema seja não-integrável, as variedades não se conectarão aos pontos hiperbólicos de forma suave, mas sim oscilarão e irão se intersectar transversalmente infinitas vezes. Na Fig. 6(a), os pontos r , r' e r'' são mapeados em P por T_ϵ e T_ϵ^{-1} , mas em direções opostas, e são denominados pontos homoclínicos. Na Fig. 6(b), os pontos r , r' e r'' são mapeados em Q por T_ϵ e em P por T_ϵ^{-1} e são denominados heteroclínicos [2].

Pontos homoclínicos e heteroclínicos

Sendo P um ponto fixo e $r_0 \neq P$ um ponto no qual as variedades instáveis e estáveis de P se intersectam, então r_0 é denominado um *ponto homoclínico* (Fig.6(a)). No caso em que existem dois (ou até mais) pontos fixos, P e Q , as intersecções de suas variedades são denominadas *pontos heteroclínicos* (Fig.6(b)) [20].

2.1.5 O efeito *stickiness*

A análise de trajetórias de sistemas dinâmicos no espaço de fases pode se tornar extremamente difícil, por conta da existência de estruturas extremamente complexas ainda não bem conhecidas. A maioria dos sistemas Hamiltonianos possuem espaço de

fases divididos, os quais apresentam domínios caóticos e regulares. Algumas das maiores dificuldades na análise destes sistemas são listadas a seguir:

- Sua estrutura é muito complicada. Seu espaço de fases possui, tipicamente, muitos toros KAM coexistentes às regiões caóticas [21];
- A geometria dos arredores (ou bordas) dos toros KAM é desconhecida, portanto, sem conhecer com exatidão a estrutura do espaço de fases, o desenvolvimento de uma abordagem analítica se torna inviável [21];
- A existência das variedades estáveis e instáveis apresentadas na Subseção 2.1.4 e outras estruturas conhecidas como *cantori* também dificultam o estudo da dinâmica [22].

Em sistemas cujo espaço de fases se mostra mesclado, o aprisionamento de trajetórias por finitos intervalos de tempo é possível. Este aprisionamento pode ser identificado pela reprodução de movimentos quase regulares, da trajetória caótica, nas proximidades das estruturas de regularidade presentes no espaço de fases. Estas regiões, nas quais ocorre este fenômeno, são conhecidas como *singularidades* ou *regiões de aprisionamento* e são análogas a uma armadilha. Como estamos a tratar de sistemas Hamiltonianos (conservativos), armadilhas absolutas não são possíveis [6, 13], portanto, estas regiões são conhecidas como *quase-armadilhas dinâmicas* (QADs). Estas regiões apresentam propriedades fractais ou de autossimilaridade [6, 23, 24].

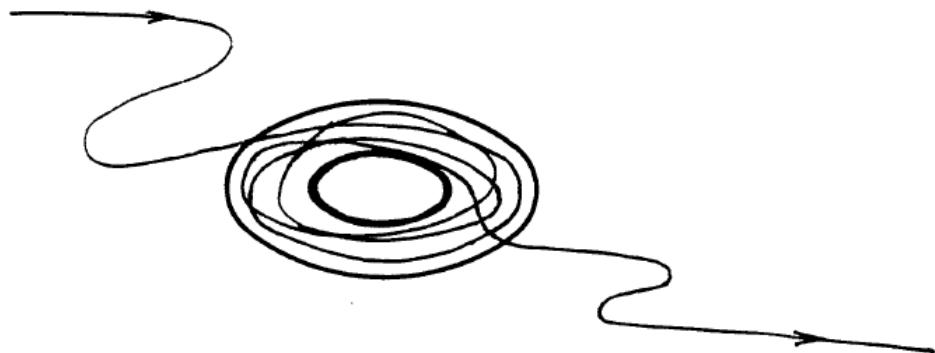


Figura 7 – Ilustração do aprisionamento de uma trajetória por uma quase-armadilha dinâmica. Figura retirada da pág. 127 da Ref. [6]

Este movimento quase regular, que resulta do aprisionamento das trajetórias nas QADs, é conhecido como *efeito stickiness*, e depende dos parâmetros envolvidos e da estrutura do espaço de fases. A explicação mais aceita para a origem do efeito *stickiness* é a de que estruturas remanescentes do último toro KAM destruído pelo aumento da perturbação são responsáveis pelo mesmo. Estas estruturas são denominadas *cantori* e atuam como barreiras, possuindo forma de um *conjunto de Cantor* (como ilustrado na

Fig. 8) [25, 26]. A palavra *stickiness* tem origem na língua inglesa e seu significado mais próximo, neste contexto, é de viscoso ou pegadiço.

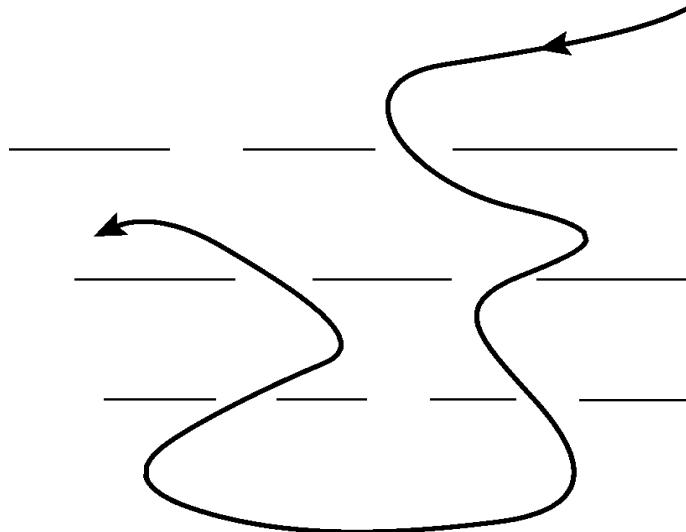


Figura 8 – Caminho de uma trajetória através das entradas dos *cantori*. Figura retirada da pág. 154 da Ref. [23]

Os conjuntos de Cantor são formados pela destruição de curvas invariantes ao redor das ilhas. Quando o último toro KAM no entorno da ilha é destruído, conforme se aumenta a perturbação, é formado um *cantorus*, que possui uma infinidade de “entradas” que possibilitam a saída de órbitas que se encontram no interior do mesmo. Pouco antes da formação do *cantorus*, uma camada caótica é formada no interior da última curva KAM. No entanto, a última curva KAM impossibilita a comunicação entre a camada caótica interna e o mar de caos. As entradas desta barreira são muito pequenas e, portanto, uma trajetória caótica que adentra seus domínios necessita de tempos muito longos até que escape e volte para o mar de caos, é daí que surge o efeito *stickiness*. Conforme aumenta a perturbação do sistema, as entradas do *cantorus* aumentam, facilitando a saída da trajetória e fazendo com que o efeito *stickiness* dure por menos tempo. Portanto, o “tempo de escape” diminui ao passo que a perturbação do sistema aumenta [27].

As bordas que dividem as regiões caóticas e regulares, em sistemas Hamiltonianos, quase sempre apresentam uma estrutura *hierárquica* complexa de toros KAM e *cantori* [28].

2.2 MAPA PADRÃO DE CHIRIKOV-TAYLOR

Um modelo físico tipicamente usado para derivação do mapa padrão é o rotor pulsado, ilustrado na Fig. 9. Tal modelo é constituído de uma barra rígida com momento de inércia I e comprimento L , sem ação da gravidade, sendo que uma de suas extremidades é fixa num eixo de rotação livre de forças dissipativas. A extremidade livre é sujeita a impulsos periódicos verticais, com intensidade $\frac{K}{L}$ e período τ . Utilizando a variável canô-

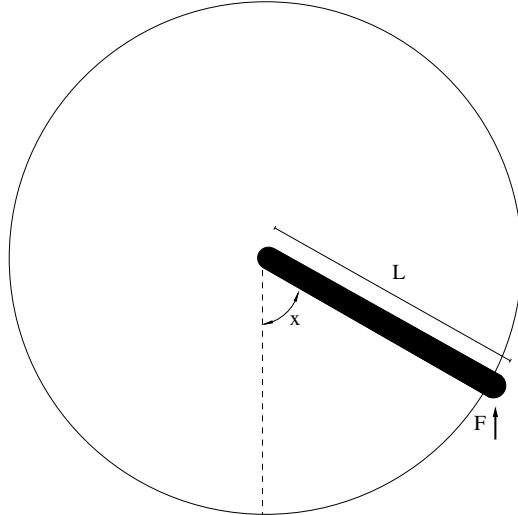


Figura 9 – Esquematização do rotor pulsado. Figura feita com base na ilustração da pág. 216 da Ref. [1]

nica x , que representa a posição, e seu momento conjugado p , escrevemos a Hamiltoniana do rotor pulsado da seguinte forma:

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2I} + \tilde{K} \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (2.30)$$

em que $\delta(t - n\tau)$ é uma função *delta de Dirac*, e o primeiro e o segundo termo à direita da igualdade são, respectivamente, as energias cinética e potencial do sistema. A derivação do mapa padrão é apresentada no Apêndice A e as equações do mapa são:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \frac{\tilde{K}}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x_n) & [\text{mod } 1], \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 1]. \end{cases} \quad (2.31)$$

2.3 MAPA DE REDE (OSCILADOR PULSADO)

O mapa de rede (*web map*) aparece como resultado da consideração de uma partícula carregada, se movimentando em meio a um campo magnético constante e com um pacote de onda eletrostático propagando na direção perpendicular ao campo magnético. A função Hamiltoniana deste sistema é

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 x^2) - \frac{\omega_0 \kappa}{\tau} \cos x \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{\tau} - m\right), \quad (2.32)$$

em que ω_0 é a frequência angular, p é o momento da partícula carregada, κ é o parâmetro de não-linearidade que controla a amplitude de oscilação e T é o período da aplicação de uma força instantânea à partícula. A derivação do mapa de rede é similar à do mapa padrão (2.2), e é apresentada no Apêndice B.

As equações de movimento do mapa de rede [23] são:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n + \kappa \operatorname{sen} v_n) \cos \alpha + v_n \operatorname{sen} \alpha, \\ v_{n+1} = -(u_n + \kappa \operatorname{sen} v_n) \operatorname{sen} \alpha + v_n \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.33)$$

em que $u = \dot{x}/\omega_0$, $v = -x$ e $\alpha = \omega_0\tau$. Um dos casos mais interessantes a ser estudado e o mais explorado na literatura encontrada envolvendo o mapa de rede, é o caso em que a frequência angular e o período entre os pulsos estão em ressonância. Por este motivo, utilizaremos neste trabalho a seguinte relação:

$$\alpha = \omega_0\tau = 2\pi/q, \quad (2.34)$$

com $\{q \in \mathbb{N} | q \neq 0\}$.

2.4 FERRAMENTAIS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentadas as ferramentas de análise utilizadas no estudo da dinâmica dos sistemas escolhidos para os trabalhos desta dissertação:

- Estatística dos tempos de recorrência de Poincaré;
- Exponentes de Lyapunov;
- Teoria dos grandes desvios;
- Estatística de recordes.

2.4.1 Estatística dos tempos de recorrência de Poincaré

O *Teorema das recorrências de Poincaré* (1890) afirma que, para espaços de fases limitados e com energia fixa, uma trajetória retornará a regiões próximas ao ponto inicial após determinado tempo decorrido [29].

Considere um domínio A no espaço de fases, de um sistema qualquer, o teorema das recorrências de Poincaré estabelece que, caso a dinâmica seja limitada (trajetória confinada) e possua energia fixa (sistema seja conservativo), as trajetórias irão retornar ao conjunto de pontos A repetidas vezes ao longo do tempo [22].

Seja Γ o volume do espaço de fases e $\Gamma_A < \Gamma$ o volume da região A , introduzimos um conjunto de instantes de tempo denotado por $\{\tau_j\}$, que contabiliza o tempo gasto pela trajetória fora do domínio de A . Os intervalos dados por

$$t_j = \tau_{j+1} - \tau_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.35)$$

são denominados *ciclos de Poincaré* e os valores τ_j são os *tempos de recorrência de Poincaré* [6]. Na Fig. 10 o processo de recorrência é exemplificado.

A partir dos tempos de recorrência de Poincaré, é possível estudar o sistema através da Estatística dos Tempos de Recorrência de Poincaré (ETR), que consiste no cálculo da distribuição acumulada dos tempos de recorrência. Para um conjunto de M

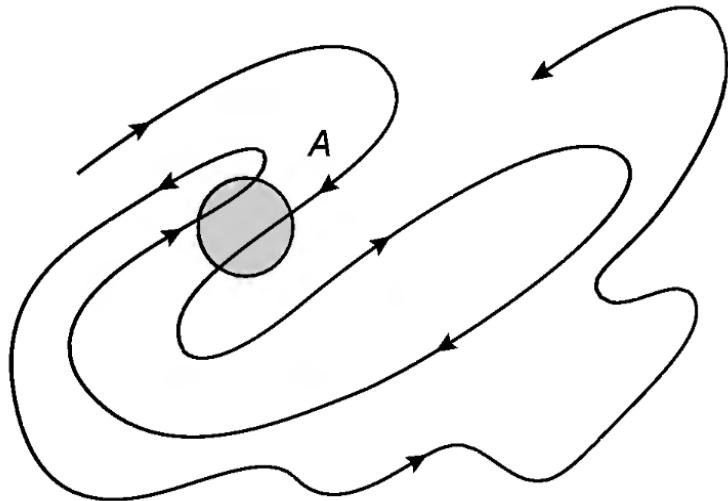


Figura 10 – Ilustração de uma recorrência ao domínio do conjunto de pontos A no espaço de fases. Figura retirada da pág. 173 da Ref. [23]

recorrências $\tau\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M\}$ com $M \rightarrow \infty$, obtemos informações do sistema através da probabilidade $P(\tau)$, sendo que τ é o tempo decorrido até que a trajetória retorne à *região de recorrência*. Para tempo contínuo, $P(\tau)$ é a *função densidade de probabilidade* e $P(\tau)d\tau$ é a probabilidade de encontrar o tempo de recorrência num intervalo τ_i e $\tau_i + d\tau_i$. A distribuição é normalizada e dada pela seguinte equação:

$$\int_0^\infty P(\tau)d\tau = 1, \quad (2.36)$$

e a ETR, que corresponde à probabilidade acumulada dos tempos de recorrência, é definida como

$$P_{cum}(\tau) = \int_\tau^\infty P(\tau')d\tau', \quad (2.37)$$

em que τ' é um valor maior que τ . Para sistemas de tempo discreto, a conversão é direta, portanto, a ETR é dada por

$$P_{cum}(\tau) = \sum_{\tau'=\tau}^{\infty} P(\tau'). \quad (2.38)$$

O que se observa, na prática, é que quanto maior o tempo de recorrência, menor a probabilidade de que um destes eventos ocorra, portanto, $P_{cum}(\tau)$ geralmente é representada por uma curva de decaimento. Nos casos de total caoticidade no sistema, o comportamento da ETR é bem conhecido e esta apresenta um decaimento exponencial conforme $n \rightarrow \infty$. Pode-se fazer uma analogia com a probabilidade de encontrar somente um lado de uma moeda em diversos n lançamentos, que é dada por $1/2^n$ [29]. Entretanto, quando estamos diante de um sistema com espaço de fases dividido, a trajetória do sistema pode ser aprisionada nos arredores das ilhas e por lá permanecer por um longo tempo, dando origem ao efeito *stickiness* (descrito em 2.1.5) e, então, interferindo diretamente

na curva de decaimento da ETR, que toma forma de lei de potência [29, 30], regida pela expressão

$$P_{cum}(\tau) \propto \tau^{-\gamma}. \quad (2.39)$$

2.4.2 Os expoentes de Lyapunov

Uma das ferramentas mais importantes no estudo de sistemas dinâmicos são os expoentes de Lyapunov (ELs). Para cada dimensão que o sistema possui, haverá um expoente de Lyapunov, ao qual será atribuída a quantificação da taxa de distanciamento de trajetórias que foram iniciadas infinitesimalmente próximas. Em outras palavras, ao passo em que se calcula os ELs, obtém-se uma medida quantitativa da sensibilidade às condições iniciais que determinado sistema apresenta. Para um mapa N -dimensional arbitrário, definido como

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (2.40)$$

serão apresentadas as definições matemáticas dos expoentes de Lyapunov a seguir. A sequência abordada aqui foi baseada na Ref. [15] e seus conceitos foram retirados das Refs. [1, 2, 13, 14, 15]. Estas serão novamente citadas somente se necessário.

Expoente de Lyapunov máximo

Para saber se determinada trajetória é estável ou não, utilizamos uma trajetória satélite \mathbf{x}'_n e observamos seu distanciamento da trajetória principal ao longo do tempo. A trajetória satélite pode ser obtida a partir de $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}(0) + \delta\mathbf{x}(0)$, ou $\delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'(0) - \mathbf{x}(0)$, sendo que $|\delta\mathbf{x}(0)| \ll 1$. Em sistemas não caóticos, sabemos que o distanciamento $\delta\mathbf{x}_n$, entre as duas trajetórias, tem um limite ou cresce de forma algébrica. Porém, em sistemas que apresentam comportamento caótico, este distanciamento pode obedecer uma lei exponencial e ser descrito como

$$\delta\mathbf{x}_n \sim \delta\mathbf{x}_0 e^{\lambda n}, \quad (2.41)$$

em que λ é a taxa de afastamento destas trajetórias. Sendo assim, é possível definir λ como um parâmetro que possa determinar o quanto instáveis (ou não) estas trajetórias são. Tal parâmetro pode ser calculado pela expressão

$$\lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|\delta\mathbf{x}_n|}{|\delta\mathbf{x}_0|} \right), \quad (2.42)$$

onde os limites devem ser mantidos na ordem em que são apresentados e a quantidade λ_{max} é conhecido como *expoente de Lyapunov máximo*. Se λ_{max} for positivo, a trajetória é caracterizada como sendo caótica e, portanto, o sistema se diz sensível às mudanças nas condições iniciais.

Podemos reescrever a Eq. (2.42), já que sabemos que $\delta\mathbf{x}_n$ é a diferença entre a n -ésima iterada partindo de $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ e a n -ésima iterada partindo de \mathbf{x}_0 . Portanto:

$$\delta\mathbf{x}_n = \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) - \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x}_0). \quad (2.43)$$

Substituindo $\delta\mathbf{x}_n$ em λ_{max} :

$$\lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) - \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x}_0)}{\delta\mathbf{x}_0} \right| \right), \quad (2.44)$$

sendo o argumento do logaritmo da Eq. (2.44) a definição da derivada de $\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x})$ calculada em \mathbf{x}_0 . Portanto, a expressão em termos da derivada de λ_{max} é dada por:

$$\lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{d\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right). \quad (2.45)$$

Podemos ainda aplicar a regra da cadeia à derivada n -ésima da Eq. (2.45), obtendo

$$\frac{d\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{n-1}} \times \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{n-2}} \times \cdots \times \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (2.46)$$

e podendo substituir novamente na Eq. (2.45). Temos então

$$\lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left| \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)}{d\mathbf{x}_i} \right|, \quad (2.47)$$

que é uma expressão equivalente à Eq. (2.42).

Expoente de Lyapunov máximo a tempo finito

É impossível conceber um cenário em que o limite de $n \rightarrow \infty$ seja alcançável numericamente. Portanto, nas simulações numéricas utilizadas em estudos de sistemas dinâmicos, o que se faz é calcular o *expoente de Lyapunov máximo a tempo finito*, que é obtido a partir do truncamento do cálculo do EL em determinada iterada n . Para o cálculo numérico desta quantidade, iniciam-se as trajetórias principal e satélite com uma separação de $\delta\mathbf{x}(0)$ e se acompanha o distanciamento destas duas ao longo do tempo, até que $|\delta\mathbf{x}_1|$ seja suficientemente grande após um intervalo de tempo τ , para então se calcular a quantidade $\ln(|\delta\mathbf{x}_1|/|\delta\mathbf{x}(0)|)$. Na sequência, aplica-se um reescalonamento a $|\delta\mathbf{x}_1|$, por um fator $|\delta\mathbf{x}(0)|/|\delta\mathbf{x}_1|$, e repete-se o procedimento até o tempo desejado [15]. Utilizando este procedimento, é possível mostrar que o expoente de Lyapunov máximo a tempo finito pode ser calculado através de

$$\lambda_n = \lim_{\delta\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n\tau} \sum_i^{n\tau} \ln \left(\frac{|\delta\mathbf{x}_i|}{|\delta\mathbf{x}_0|} \right), \quad (2.48)$$

com $i = 1, 2, \dots, n\tau$. Esta expressão foi primeiramente apresentada por Giancarlo Benettin *et al.* em [31].

Espectro de Lyapunov

Como dito anteriormente, para um sistema N -dimensional, existirão N expoentes de Lyapunov que, juntos, serão capazes de caracterizar totalmente a instabilidade do sistema. Estes expoentes compõem o que se denomina *espectro de Lyapunov*. Assim como no expoente de Lyapunov máximo, a determinação deste espectro é feita através da evolução temporal de órbitas satélites, neste caso, N perturbações independentes $\{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^N$ infinitesimalmente próximas da trajetória principal. Sendo \mathbf{x}_0 a condição inicial principal e \mathbf{x}_n ($n = 1, 2, \dots$) sua evolução temporal, a expansão temporal de um dos vetores tangentes $\mathbf{w}_n^{(i)}$ é dada por

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbb{J}(\mathbf{x}_n)\mathbf{w}_n, \quad (2.49)$$

em que $\mathbb{J}_{ij} = \partial F_i(\mathbf{x}) / \partial x_j|_{\mathbf{x}_n}$ ($i, j = 1, \dots, N$) é a matriz Jacobiana. A expressão $\mathbf{w}_n / |\mathbf{w}_n|$ nos diz a direção do deslocamento infinitesimal em relação a \mathbf{x}_n e $|\mathbf{w}_n| / |\mathbf{w}_0|$ é o fator pelo qual este distanciamento aumenta (caso $|\mathbf{w}_n| > |\mathbf{w}_0|$) ou diminui (caso $|\mathbf{w}_n| < |\mathbf{w}_0|$) [1]. Da Eq. (2.49) temos que $\mathbf{w}_n = \mathbb{J}^n(\mathbf{x}_0)\mathbf{w}_0$, em que

$$\mathbb{J}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbb{J}(\mathbf{x}_{n-1}) \times \mathbb{J}(\mathbf{x}_{n-2}) \times \dots \times \mathbb{J}(\mathbf{x}_0). \quad (2.50)$$

Ou, escrevendo de outra forma,

$$\mathbf{w}_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{J}(\mathbf{x}_i) \right] \mathbf{w}_0. \quad (2.51)$$

Para órbitas periódicas, a estabilidade da órbita é determinada pelos autovalores da matriz $\mathbb{J}^n(\mathbf{x}_0)$. Considerando uma órbita $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ de período k , trata-se dos autovalores de

$$\mathbb{J}^k(\mathbf{x}_0) = \mathbb{J}(\mathbf{x}_{k-1}) \times \mathbb{J}(\mathbf{x}_{k-2}) \times \dots \times \mathbb{J}(\mathbf{x}_0), \quad (2.52)$$

de forma análoga à análise feita na Seção 2.2, mas generalizada para uma órbita e não restrita somente ao ponto fixo.

Para órbitas não periódicas, calculamos o produto de n matrizes Jacobianas, correspondentes aos n pontos pertencentes à órbita em questão. Neste cenário, os autovalores de $\mathbb{J}^n(\mathbf{x}_0)$ nos retornam a taxa de expansão ou contração dos eixos que compõem o sistema [13]. Considerando as condições iniciais escolhidas sobre uma hiperesfera de raio infinitesimal em torno de \mathbf{x}_0 , conforme se avança no tempo, esta hiperesfera evolui e se molda num hiperelipsoide, como ilustrado na Fig. 11.

Definimos os ELs para condições iniciais \mathbf{x}_0 e orientação inicial dada pelo distanciamento infinitesimal $\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0 / |\mathbf{w}_0|$ como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|\mathbf{w}_n|}{|\mathbf{w}_0|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbb{J}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|, \quad (2.53)$$

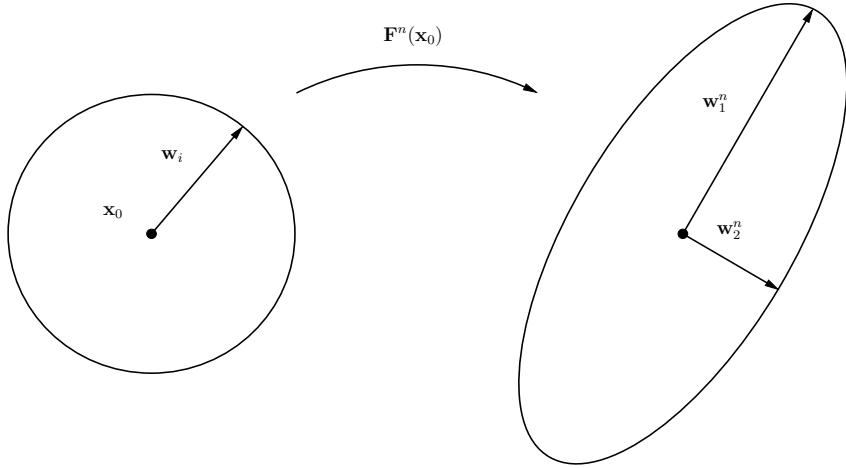


Figura 11 – Evolução da hiperesfera para um hiperelipsoide, após n iterações das órbitas satélites e principal. Exemplo para $N = 2$. Figura feita com base na ilustração da pág. 132 da Ref. [1]

uma vez que

$$|\mathbf{w}_n| = |\mathbb{J}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}_0|.$$

O resultado da operação interna ao módulo é um vetor, portanto, calculando sua norma:

$$|\mathbb{J}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}_0| = [\mathbf{w}_0^T \cdot \mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}_0]^{1/2},$$

sendo $\mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0) = [\mathbb{J}^{(n)}(\mathbf{x}_0)]^T \mathbb{J}^{(n)}(\mathbf{x}_0)$ em que T denota a transposta. Portanto, teremos que os expoentes de Lyapunov podem ser calculados através de:

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln [\mathbf{w}_0^T \cdot \mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}_0]^{1/2}, \quad (2.54)$$

ou

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln [\mathbf{w}_0^T \cdot \mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}_0]. \quad (2.55)$$

O teorema multiplicativo de Oseledec [32] garante a existência dos limites presentes nas Eqs. (2.53) e, consequentemente, (2.55) [1, 15].

Espectro de Lyapunov a tempo finito

Da mesma forma que não é possível calcular o EL computacionalmente, num intervalo infinito, não é possível executar o cálculo apresentado logo acima para $n \rightarrow \infty$. Para isto, utilizamos aproximações: considerando n um valor grande, aproximamos $\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ (Eq (2.55)) como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \simeq \lambda_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \equiv \frac{1}{2n} \ln [\mathbf{w}_0^T \cdot \mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}_0]. \quad (2.56)$$

Uma vez que $\mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0)$ é uma matriz positiva definida, já que os determinantes de suas submatrizes principais são todos positivos, seus autovalores são reais e não negativos, assim como seus autovetores são reais [1]. Escolhendo os vetores unitários \mathbf{u}_0 na direção dos

autovetores de $\mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0)$, obtemos os valores aproximados para os expoentes de Lyapunov correspondendo a cada autovetor. Denotamos estes valores como

$$\lambda_n^{(j)}(\mathbf{x}_0) = (2n)^{-1} \ln \Lambda_n^{(j)},$$

onde Λ_{jn} são os autovalores de $\mathbb{H}^{(n)}(\mathbf{x}_0)$ e a ordem de listagem de $\lambda_n^{(j)}(\mathbf{x}_0)$ é tal que

$$\lambda_n^{(1)}(\mathbf{x}_0) \geq \lambda_n^{(2)}(\mathbf{x}_0) \geq \dots \geq \lambda_n^{(N)}(\mathbf{x}_0),$$

de forma que $\lambda_n^{(1)}(\mathbf{x}_0)$ é o maior expoente e $\lambda_n^{(N)}(\mathbf{x}_0)$ é o menor. Conforme n chega ao infinito, as aproximações $\lambda_n^{(j)}(\mathbf{x}_0)$ se aproximam dos expoentes de Lyapunov, os quais listamos como

$$\lambda_n^{(1)}(\mathbf{x}_0) \geq \lambda_n^{(2)}(\mathbf{x}_0) \geq \dots \lambda_n^{(N)}(\mathbf{x}_0). \quad (2.57)$$

Outro problema advindo da limitação computacional se dá quando analisamos o crescimento dos vetores utilizados no cálculo dos ELs. Como estes crescem exponencialmente, é necessária a utilização de um processo de ortonormalização, realizado ao longo da trajetória do sistema através do método de Gram-Schmidt, que é descrito no Apêndice C.

2.4.3 Teoria dos grandes desvios e decaimento das correlações temporais

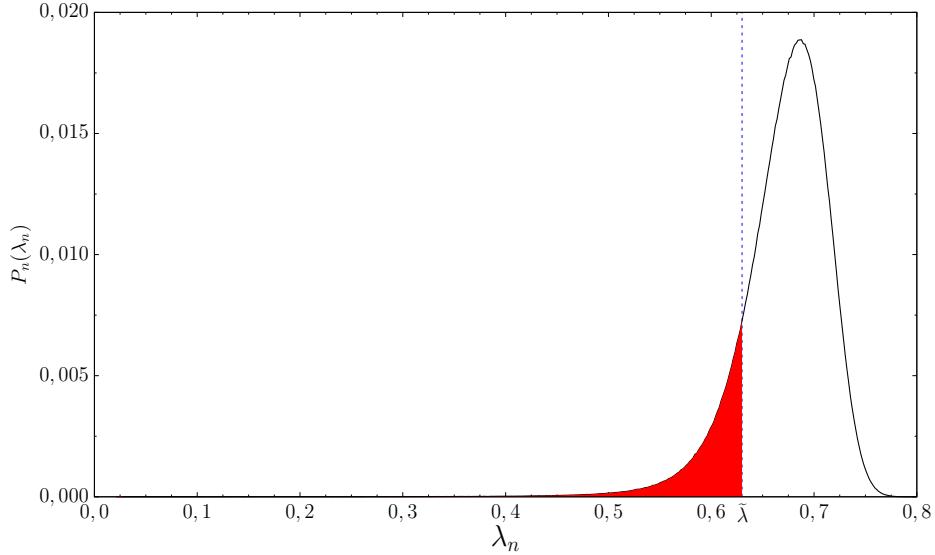
A teoria dos grandes desvios se baseia no estudo das distribuições de probabilidade, mais especificamente no comportamento das caudas das distribuições em questão, e com ela é possível estudar o decaimento de medidas de probabilidade de eventos extremos. Sua definição foi primeiramente apresentada por Sathyamangalam R. S. Varadhan, em [33] no ano de 1966. O observável cujas distribuições serão estudadas é o expoente de Lyapunov a tempo finito (ELTF), e suas distribuições serão calculadas em diferentes intervalos de tempo.

Aqui reproduzimos o método abordado em [9, 15], respaldado nas investigações minuciosas realizadas em [34] numa classe de mapas f unidimensionais e, posteriormente, estendido para sistemas de maiores dimensões em [35].

Como ferramenta de prova e também de validação dos resultados obtidos através da estatística dos tempos de recorrência, utilizamos a teoria dos grandes desvios a fim de obter informações quantitativas da taxa de decaimento das correlações temporais dos sistemas em questão. As correlações temporais carregam informação de estados anteriores do sistema, muitas vezes, o decaimento das correlações é referido a uma propriedade de *perda de memória* e, de alguma forma, *estocasticidade* do sistema [34].

Considerando um mapa F unidimensional, o expoente de Lyapunov a tempo finito (ELTF) λ_n é dado por

$$\lambda_n(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x_0}. \quad (2.58)$$

Figura 12 – Ilustração do método cálculo de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$.

Aqui omitimos o índice sobrescrito pois estamos sempre nos referindo ao maior expoente ($\lambda_n^{(1)}$). Calculados os ELTFs para um *ensemble* de condições iniciais, constroi-se a distribuição $P_n(\lambda_n)$ e se determina um valor arbitrário $\tilde{\lambda}$ tal que $0 < \tilde{\lambda} < \lambda$, sendo λ o valor cuja distribuição $P_n(\lambda_n)$ tem seu valor máximo e de forma que $\tilde{\lambda}$ seja suficientemente distante de λ . Como dito anteriormente, na Subseção 2.1.5, os valores dos EL decaem abruptamente quando trajetórias são aprisionadas, tal fenômeno acarretará na existência de uma longa cauda nas distribuições $P_n(\lambda_n)$ (distribuições dos ELTFs). O parâmetro $\tilde{\lambda}$ será utilizado justamente para estimar esta fração de ELTFs que sofreram influência do efeito *stickiness*. A equação utilizada para tal é a seguinte:

$$\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n) = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} d\lambda_n P_n(\lambda_n), \quad (2.59)$$

em que n é a variável temporal. O procedimento citado acima, para o cálculo de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$, é ilustrado na Fig. 12. Caso o sistema seja ergódico, a quantidade $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ desaparece, pois não há aprisionamento das trajetórias e, portanto, não existe assimetria nas caudas da distribuição. Para sistemas com espaço de fases mesclado, ela deve cair polinomialmente com [9, 36]

$$\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n) \sim n^{-\chi}. \quad (2.60)$$

As correlações temporais podem ser calculadas pela seguinte expressão:

$$C(n) = \int d\mu(x) \phi(x) \psi |f^{(n)}(x)|, \quad (2.61)$$

e há um valor limite para seu decaimento, para sistemas fracamente caóticos, dado por [9, 15, 34]:

$$C(n) \leq \frac{1}{n^{\chi-1}}. \quad (2.62)$$

Na Eq. (2.61), ϕ e ψ são observáveis contínuos do sistema, enquanto μ representa sua medida invariante.

A conexão entre a medida $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ e as correlações temporais se dá pelo expoente de decaimento, mais precisamente, o expoente de decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ é o mesmo do decaimento das correlações:

$$C(n) \sim n^{-\chi}. \quad (2.63)$$

Ou seja, a curva de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ mede indiretamente o decaimento das correlações. A equivalência entre os expoentes é apresentada em detalhes nas Refs. [9, 15]. O expoente de decaimento das correlações também é relacionado ao expoente de decaimento da ETR, através da expressão

$$\chi = \gamma - 1, \quad (2.64)$$

sendo χ o expoente das correlações e γ o expoente da ETR [37].

2.4.4 Estatística de recordes

Atualmente, na mídia popular como jornal e televisão, principalmente no período em que ocorrem as olimpíadas, é comum ler ou ver notícias relacionadas à quebra de recordes. Principalmente quando nos atentamos aos esportes de atletismo e natação, dois grandes nomes remetem à diversos recordes quebrados: Usain Bolt e Michael Phelps, respectivamente.

Um recorde é definido como o maior valor alcançado, por uma variável, numa sequência de eventos registrados. Matematicamente, um recorde pode ser definido como um elemento x_m de uma sequência $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$, em que

$$x_m > x_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

onde x_0 é sempre considerado o primeiro recorde. Associamos à sequência apresentada acima, um vetor binário $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots$, em que σ_l guarda a informação da ocorrência de um recorde:

$$\sigma_l = \begin{cases} 1 & \text{se } x_l \text{ é um recorde,} \\ 0 & \text{se } x_l \text{ não é um recorde.} \end{cases}$$

Portanto, o número total de recordes computados numa sequência de tempo n é dado por:

$$M_n = \sum_{j=0}^n \sigma_j.$$

Podendo sua variância (quantidade estatística de interesse) ser calculada através de:

$$\text{Var}(M_n) = \langle M_n^2 \rangle - \langle M_n \rangle^2.$$

Se as quantidades x_j são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), então, para $n \gg 1$ [11, 38], a média e a variância são dadas pelas respectivas equações:

$$\langle M_n \rangle = \ln n + \gamma_E + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad \text{Var}(M_n) = \ln n + \gamma_E - \frac{\pi}{6} + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

em que $\gamma_E = 0,5772\dots$ é a constante de Euler-Mascheroni. É importante ressaltar que ambas quantidades $\langle M_n \rangle$ e $\text{Var}(M_n)$ são independentes da distribuição de probabilidades de variáveis aleatórias, o que é uma importante característica da estatística dos recordes.

Para sistemas correlacionados, os resultados se mostram um pouco diferentes e as grandezas estatísticas são calculadas de outra forma. Seja X_j a posição de um caminhante aleatório no tempo j , temos que

$$X_{j+1} = X_j + \xi_{j+1}, \quad (2.65)$$

em que os passos são escolhidos de uma distribuição comum $\zeta(\xi)$. Neste caso, temos que as medidas estatísticas são dadas por [38, 39, 40]:

$$\langle M_n \rangle \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}, \quad (2.66)$$

e

$$\text{Var}(M_n) \approx 2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) n. \quad (2.67)$$

Portanto, o desvio padrão é da mesma ordem da média (proporcional a \sqrt{n}). Este resultado é universal, independente da distribuição $\zeta(\xi)$, desde que esta seja contínua e simétrica. O que garante isso é que o processo se renova ao passo em que um novo recorde é alcançado, e que a aparição de um novo recorde é equivalente à estimar a probabilidade de sobrevivência para o processo, o que é universal na visão do teorema de Sparre-Andersen [41].

Processos de renovação

Processos de renovação se tratam de uma sequência $\{X_i\}$ de variáveis aleatórias i.i.d. não negativas. Os elementos do conjunto $\{X_i\}$ representam os tempos de vida de eventos que são renovados. O primeiro evento se encontra no instante $t = 0$, e é substituído no tempo $t = X_1$ (tempo em que ocorre a primeira computação do evento em questão). Logo, no próximo evento computado, o instante de tempo é dado por $t = X_1 + X_2$ e assim por diante [42]. Ou seja, uma vez que o conjunto $\{X_i\}$ é formado por variáveis aleatórias i.i.d., os intervalos X_1, X_2, \dots, X_n possuem a mesma probabilidade de assumir um valor arbitrário igual a X_k . Portanto, no momento que um evento ocorre passado um tempo X_i , as probabilidades de ocorrência do próximo evento para determinado intervalo de tempo são as mesmas do evento anterior.

Os intervalos de tempo entre os recordes que ocorrem para sistemas correlacionados (como os abordados neste trabalho) são estatisticamente independentes, devido à

natureza Markoviana do processo (também conhecida como propriedade de renovação) [38].

Teorema de Sparre-Andersen

O Teorema de Sparre-Andersen é o resultado de uma sequência de três trabalhos desenvolvidos por Erik Sparre Andersen [43, 44, 45] nos anos de 1949-1954, na área de caminhadas aleatórias unidimensionais. Sucintamente, ele determina que a probabilidade que um caminhante aleatório, que inicia na origem, tem de adentrar o “lado positivo” pela primeira vez, após n passos, é independente da distribuição de passos $\zeta(\xi)$, desde que esta seja simétrica e contínua [46]. A dedução de tal teorema se mostra extremamente complexa e não será mostrada neste trabalho de dissertação, mas é apresentada de forma resumida em [47].

3 ESPAÇO DE FASES HIERÁRQUICO E PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS

A fim de estabelecer uma relação entre nossos resultados e os já obtidos por outros autores, como na Ref. [29], onde Shepelyansky propõe um valor universal médio de decaimento $\gamma \simeq 1,3 - 1,4$, e na Ref. [48], onde Altmann e Kantz propõem que o expoente de decaimento da ETR aumenta conforme o número de mapas acoplados N aumenta, utilizamos a ETR e a teoria dos grandes desvios para estudar uma rede de mapas acoplados, formada por mapas Hamiltonianos (neste caso mapas padrão).

Este estudo resultou em uma publicação [49], em que foram estudadas duas redes, com dois e três ($N = 2$, $N = 3$) mapas padrão de Chirikov-Taylor acoplados, além do caso desacoplado. As equações destes sistemas são as seguintes:

$$\begin{cases} p_{n+1}^{(i)} = p_n^{(i)} + K^{(i)} \operatorname{sen}(2\pi x^{(i)}) + f(x^{(i+1)}, x^{(i)}, x^{(i-1)}) & [\operatorname{mod1}], \\ x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} + p_{n+1}^{(i)} & [\operatorname{mod1}], \end{cases} \quad (3.1)$$

em que f é o acoplamento entre os mapas, de maneira geral, definido como:

$$f(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(N)}) = \beta [\operatorname{sen}(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}) + \operatorname{sen}(x_n^{(i-1)} - x_n^{(i)})], \quad (3.2)$$

sendo β o parâmetro que regula o quanto fortemente acoplados estão os mapas do sistema e, portanto, o quanto a dinâmica de um dos mapas influenciará os outros. O acoplamento é feito sempre entre mapas vizinhos e não de forma global, sendo a condição de contorno para um sistema com N mapas dada por:

$$x^{(N+1)} = x^{(1)} \quad \text{e} \quad x^{(1-1)} = x^{(N)}. \quad (3.3)$$

Além da ETR, também foi utilizada a teoria dos grandes desvios, explicada em 2.4.3, para o cálculo do decaimento das correlações temporais dos sistemas acoplados. Como mostrado na Eq. (2.64), o expoente de decaimento das correlações deve corresponder a $\chi = \gamma - 1$, sendo γ o expoente de decaimento de $P_{cum}(\tau)$.

3.1 ESTUDO PRELIMINAR: A ETR NO MAPA PADRÃO

Como testes preliminares, aplicamos o método de análise do decaimento das curvas de $P_{cum}(\tau)$ ao mapa padrão ($N = 1$ e $\beta = 0$ em Eq. (3.1)) para diferentes valores do parâmetro de não-linearidade K , que são apresentados na Fig. 13 juntamente aos espaços de fases do MP para tais valores.

O método numérico para o cálculo das recorrências de Poincaré consiste no rastreamento da trajetória da partícula, no espaço de fases, até o momento em que ela sai

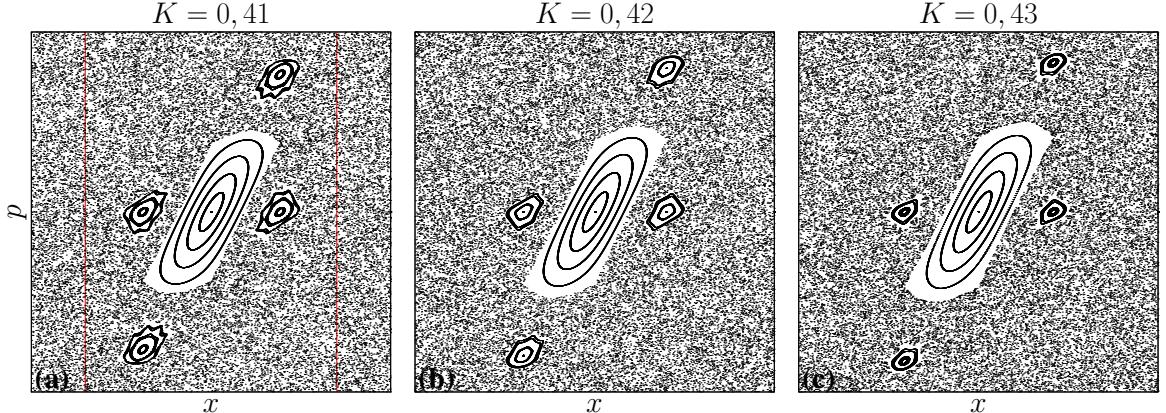


Figura 13 – Espaço de fase do mapa padrão desacoplado ($\beta = 0$) para os intervalos $x \in [0, 0 : 1, 0]$ e $p \in [-0, 5 : 0, 5]$, para (a) $K = 0, 41$, (b) $K = 0, 42$ e (c) $K = 0, 43$. Para os três valores do parâmetro, o espaço de fases é dividido – na região granulada, conhecida como mar de caos, a dinâmica é totalmente caótica, já nas regiões brancas com linhas, denominadas ilhas de regularidade, a dinâmica é regular e pode ser quase periódica (linhas sólidas) ou periódica ($x = 0, 5$ e $p = 0, 0$), chamada também de ponto fixo –, a ilha maior, ao centro do espaço de fases, é conhecida como ressonância principal e é rodeada por quatro ressonâncias secundárias, que são rodeadas por ressonâncias terciárias e assim sucessivamente, todas imersas no mar de caos. As linhas vermelhas em (a) estão situadas em $x = 0, 15$ e $x = 0, 85$ e delimitam a caixa de recorrência utilizada nas simulações computacionais.

da caixa de recorrência. A partir daí é iniciada a contagem do número de iteradas em que a trajetória se encontra fora da caixa e, no momento em que esta retorna, a contagem é cessada e o tempo decorrido é guardado na memória do computador. Ao fim da simulação é criada uma distribuição acumulada dos tempos de recorrência (região externa às linhas vermelhas da Fig. 13). A quantidade de eventos registrados para as simulações feitas neste trabalho foi de 10^{13} .

Como dito anteriormente, aplicamos o método ao mapa padrão desacoplado, utilizando os mesmos valores do parâmetro de não-linearidade da Fig. 13. Em cada quadro da Fig. 14 estão traçados os decaimentos da função distribuição acumulada ($P_{cum}(\tau)$), dividida em três segmentos que apresentam diferentes comportamentos dinâmicos, discutidos de melhor forma no próximo parágrafo. O decaimento é apresentado em escala log-log, na Fig. 14(a)-(d), cuja regressão linear foi feita utilizando o software de código aberto *gnuplot*. Como visto na Subseção 2.4.1, o decaimento das recorrências temporais, para um sistema com espaço de fases mesclado, é descrito por uma lei de potência com a forma de $P_{cum}(\tau) \approx \tau^{-\gamma}$ (Eq. (2.39)). O expoente encontrado na regressão feita para as curvas destas simulações foram $\gamma \sim 1, 55 \pm 0, 05$, $\gamma \sim 1, 64 \pm 0, 01$ e $\gamma \sim 1, 61 \pm 0, 01$, correspondendo respectivamente à (a), (b) e (c), em (d) a curva de tendência é a média destas três e seu valor é $\langle \gamma \rangle \sim 1, 60 \pm 0, 03$.

Como existem diferentes comportamentos ao longo do decaimento da curva, além da ETR, também foi feito um estudo da dinâmica analisando a correspondência entre os regimes da $P_{cum}(\tau)$ e as regiões do espaço de fases. Utilizando a ETR, definimos três intervalos de tempo para análise do decaimento das recorrências:

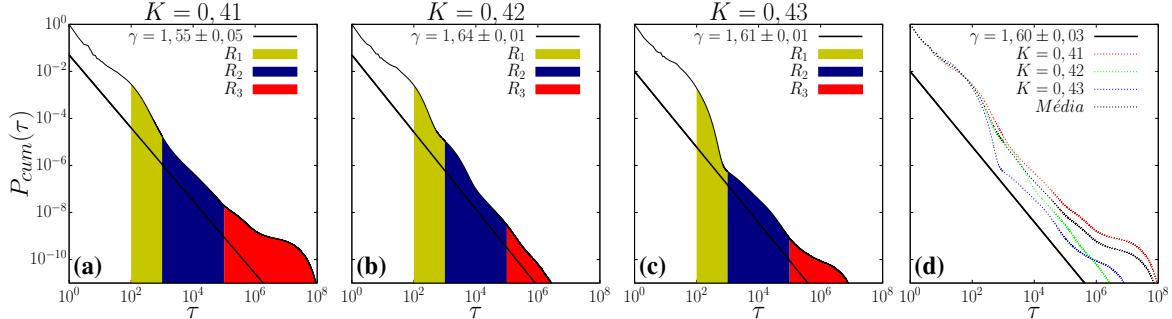


Figura 14 – $P_{cum}(\tau)$ [Eq. (2.39)] para os tempos de recorrência τ em linha pontilhada preta, para o mapa padrão, para diferentes valores de K identificados no título de cada quadro. As regiões R_1 , R_2 e R_3 se encontram no mesmo intervalo para os três quadros (a)-(c): $R_1 = [1 \times 10^2 : 1 \times 10^3]$, $R_2 = [1 \times 10^3 : 1 \times 10^5]$, $R_3 = [1 \times 10^5 : 1 \times 10^8]$. As três curvas de decaimento de (a)-(c) são traçadas em (d) nas cores azul, verde e vermelho e a média é representada na cor preta com linha pontilhada. A regressão linear está em linha preta contínua e possui expoente de decaimento igual a $\langle \gamma \rangle \sim 1,60 \pm 0,03$.

- R_1 : Para tempos relativamente curtos ($10^2 \leq \tau < 10^3$) a ETR (região na cor amarelo mostarda) apresenta um comportamento pré-assintótico;
- R_2 : Para tempos intermediários ($10^3 \leq \tau < 10^5$) a ETR (região na cor azul escuro) apresenta um decaimento algébrico;
- R_3 : Para longos tempos ($\tau \geq 10^5$) a ETR (região na cor vermelho) apresenta diferentes decaimentos para os três valores de K

Como visto na Subseção 2.1.5, estruturas de ressonância no espaço de fases são responsáveis pelo efeito *stickiness* e pela característica multifractal das cadeias hierárquicas de ilhas de ressonância. Para averiguar como estas estruturas interferem na dinâmica e como estão relacionadas aos regimes identificados na ETR, foram salvos os pares (x_i, p_i) com $i = 1, 2, 3$ para os intervalos R_j com $j = 1, 2, 3$ apresentados anteriormente. Os resultados são apresentados na Fig. 15(a)-(c), para os mesmos valores de K apresentados nas figuras anteriores. Comparando o intervalo R_1 (amarelo mostarda) na Fig. 14 com os pontos em amarelo apresentados nas coordenadas (x, p) na Fig. 15, é possível ver que o decaimento apresentado em $P_{cum}(\tau)$ se dá devido ao aprisionamento da trajetória pelas variedades dos pontos hiperbólicos no mar de caos. O intervalo R_2 , representado em azul escuro, está relacionado ao comportamento intermediário da ETR, associado ao efeito de aprisionamento das bordas externas das ilhas de ressonância e a contornos muito similares às variedades dos pontos fixos hiperbólicos. Por fim, o intervalo R_3 está relacionado à parcela assintótica e à parte final da pré-assintótica da ETR e se mostra extremamente sensível à escolha de K , como apontado nas ampliações da Fig. 15(a)-(c), o que mostra que tal regime depende das pequenas estruturas da hierarquia das ilhas de ressonância. Esta figura mostra como trajetórias passam longos tempos rodeando possíveis domínios internos de ilhas de ressonância primárias e secundárias (regime R_3), até que retornem para os regimes R_2 e R_1 , antes de voltarem à caixa de recorrência.

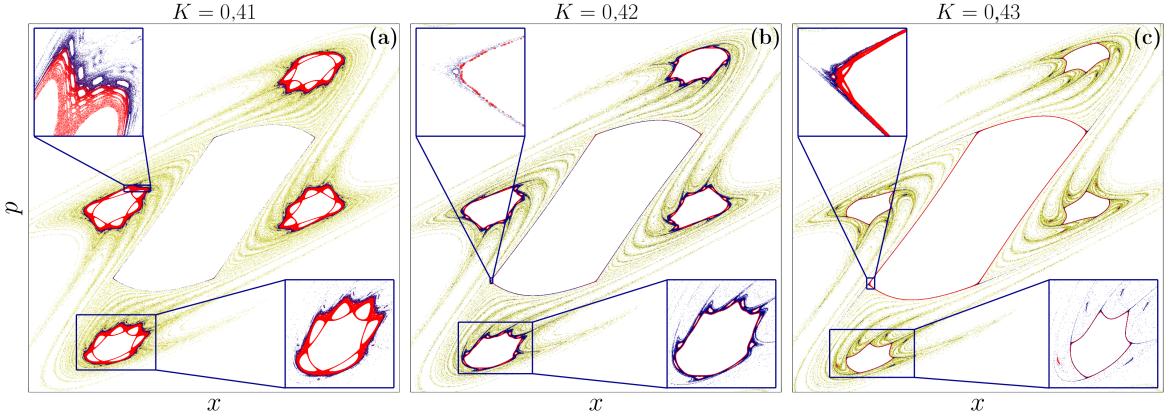


Figura 15 – Espaço de fases do mapa padrão desacoplado, para os intervalos $x \in [0, 15 : 0, 85]$ e $p \in [-0, 5 : 0, 5]$ para diferentes valores de K , indicados acima de cada quadro. Os pontos do espaço de fases se encontram nas mesmas cores utilizadas na Fig. 14(a)-(c), indicando a projeção dos diferentes intervalos de tempo R_1 , R_2 e R_3 . Os recortes são ampliações das regiões indicadas do espaço de fases, onde diferentes regimes são destacados em azul e vermelho, relacionados aos regimes pré assintóticos e assintóticos, respectivamente.

A ETR junto à projeção dos pontos no espaço de fases 2D, se mostrou uma poderosa ferramenta quando se trata de explorar pequenos detalhes da estrutura do espaço de fases de mapas conservativos. Um dos propósitos deste estudo, explorado a seguir, é o de aplicar esta técnica na investigação da dinâmica de mapas padrão acoplados via acoplamento conservativo (espaços de fases 4D e 6D).

3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados os resultados dos estudos utilizando a rede de mapas acoplados, utilizando os métodos citados no início deste capítulo. Para todas as simulações numéricas, utilizamos $(K_1, K_2) = (0, 41, 0, 42)$ para $N = 2$ e $(K_1, K_2, K_3) = (0, 41, 0, 42, 0, 43)$ para $N = 3$ mapas padrão acoplados (Eq. (3.1)), analisando o efeito de diferentes valores de acoplamento: $\beta = 10^{-4}, 10^{-3}$ e 10^{-2} .

3.2.1 Análise dos espaços de fases

Para um melhor entendimento do efeito do acoplamento entre os mapas, inicialmente traçamos as trajetórias no espaço de fases de todos os mapas, para os três valores de β escolhidos. Para pequenos valores de β (próximos ao caso em que não há acoplamento), pequenas modificações no espaço de fases são notadas, mas, de forma geral, a estrutura é mantida. Para valores maiores de β , mudanças significativas são identificadas, até que as estruturas de regularidade sejam totalmente destruídas e somente “cicatrizes” destas possam ser encontradas.

Na Fig. 16 é mostrada a projeção dos planos do espaço de fases (para os pares (x_i, p_i) com $i = 1, \dots, N$) para $N = 2$ ((a)-(f)) e $N = 3$ ((g)-(o)). É fácil notar que o acoplamento possui forte influência na dinâmica do sistema, quando comparamos estas

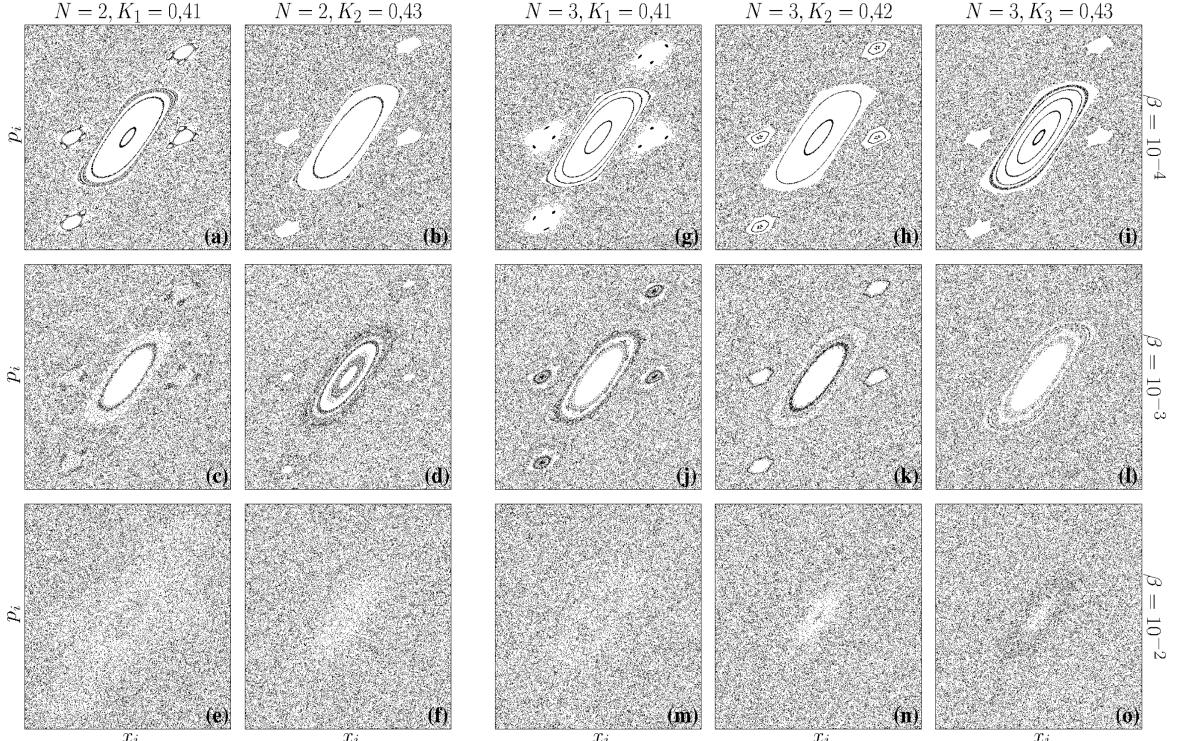


Figura 16 – Projeção dos espaços de fases $x_i \times p_i$ ($i = 1, 2, 3$) dos mapas padrão acoplados [Eq. (3.1)] para os intervalos $x \in [0, 15 : 0, 85]$ e $p \in [-0, 5 : 0, 5]$ com diferentes valores de K , indicados no topo das colunas, para $N = 2$ ((a)-(f)) e $N = 3$ ((g)-(o)), utilizando diferentes valores do parâmetro de acoplamento β , indicado à direita de cada linha do painel. Em todas as simulações foram utilizadas 60 condições iniciais, escolhidas dentro das caixas de recorrência (definida na Fig. 13), iteradas 10^3 vezes. Um transiente de $9,999 \times 10^6$ foi descartado das simulações, a fim de permitir que o sistema atingisse o regime assintótico, como pode ser visto na Fig. 17.

projeções às da Fig. 13. Podemos perceber que para $\beta = 10^{-4}$, somente algumas trajetórias regulares dentro e nas bordas dos domínios regulares são afetadas (Fig. 16(a)-(b) e (g)-(i)). Para $\beta = 10^{-3}$, mais trajetórias penetram nas regiões onde, no caso desacoplado, haviam ilhas de ressonância e, além disto, existe uma maior densidade de pontos dentro dos domínios regulares, o que indica aprisionamento das trajetórias, o que reflete em grandes consequências para o regime assintótico, como será mostrado mais tarde. Para $\beta = 10^{-2}$, uma dinâmica que aparenta ser totalmente caótica é observada, quando se olha somente para o espaço de fases. No entanto, se sabe que o ponto fixo central é estável e se mantém na mesma coordenada $(x_1, p_1) = (0,5, 0,0)$ (no plano do mapa 1), então, algum comportamento regular ainda deve ser esperado. Isto pode ser confirmado nos quadros da última linha (Fig. 16(e)-(f) e (m)-(o)), onde podemos ver uma densidade de pontos não uniforme próxima ao centro das projeções do espaço de fases, devido à reminiscência das ilhas de regularidade destruídas pela força do acoplamento [50, 51, 52]. Além disso, uma trajetória aprisionada muito próxima aos pontos estáveis centrais geram um fenômeno de sincronização completa de *stickiness*, durante um intervalo finito de tempo. Este fenômeno consiste na sincronização das trajetórias dos mapas em torno das regiões de regularidade, cuja consequência é uma significativa diminuição dos Exponentes de Lyapu-

nov Locais a Tempo Finito (ELLTFs), chegando próximo a zero, para todos os mapas, durante o mesmo intervalo de tempo. Tal fenômeno foi caracterizado recentemente, para sistemas Hamiltonianos, na Ref. [53]. No mesmo trabalho citado, é mostrado que apesar de tal sincronização ser rara e sensivelmente dependente da intensidade do acoplamento, esta deve aparecer por tempos longos, mas ainda finitos, devido ao lento decaimento das correlações temporais em espaços de fases divididos. Neste caso, uma trajetória se mante-ria maior parte do tempo na região caótica do espaço de fases, em alternância com alguns raros e finitos intervalos de tempos de movimento coletivo. Neste sentido, eventos de intermitênci-a tardia entre comportamento caótico e de sincronização completa se tornam eventos raros.

3.2.2 ETR para mapas padrão acoplados

Nesta seção, temos como objetivo: (i) investigar como β modifica o *aprisionamento induzido* (ou *enhanced trapping*) das trajetórias, devido à alta dimensionalidade permitida pelo acoplamento, e o decaimento da ETR, e (ii) estimar o decaimento algébrico da ETR para longos tempos, comparando com os resultados publicados em [29, 48, 54].

Inicialmente, calculamos a ETR para diferentes combinações de valores de N e de β : $N = \{2, 3\}$ e $\beta = \{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}\}$ e pudemos identificar regimes de acordo com as mudanças no comportamento da curva. Posteriormente, projetamos os planos bidi-imensionais do espaço de fases do modelo de mapas acoplados (Eq. (3.1)) distinguindo os intervalos de tempo dos regimes encontrados na ETR, a fim de associar os domínios do es-paço de fases às diferentes inclinações apresentadas no decaimento das curvas de $P_{cum}(\tau)$. Quando mapas Hamiltonianos 2D (ou maiores), com espaço de fases mesclado, são aco-plados através de forças de acoplamento locais, um decaimento algébrico lento adicionado às curvas da ETR [55] e à probabilidade de sobrevivência é observado, tal fenômeno se dá por conta das trajetórias caóticas que permanecem aprisionadas próximas aos pontos fixos inicialmente localizados dentro das ilhas de ressonância do caso desacoplado. Tal fenômeno é denominado *aprisionamento induzido*.

Resultados similares aos obtidos em nossas simulações foram também encontra-dos na dinâmica de um mapa padrão acoplado a uma dimensão extra [56]. Neste trabalho foi observado que as trajetórias permaneciam aprisionadas por conta da ação da dimen-são adicional: por tempos muito longos não haviam recorrências, resultando em platôs nas curvas da ETR, cujos tamanhos dependem do parâmetro de intensidade do acoplamento. Uma propriedade em comum a esses exemplos é a de que mesmo para acoplamentos arbitrariamente pequenos, trajetórias caóticas penetram e se mantêm aprisionadas nas reminiscências das ilhas de ressonância de maior ordem, por longos, mas ainda finitos intervalos de tempos, que afetam drasticamente a dinâmica caótica do sistema. De acordo com [57], a escala de tempo necessária para a trajetória escapar destas estruturas remi-

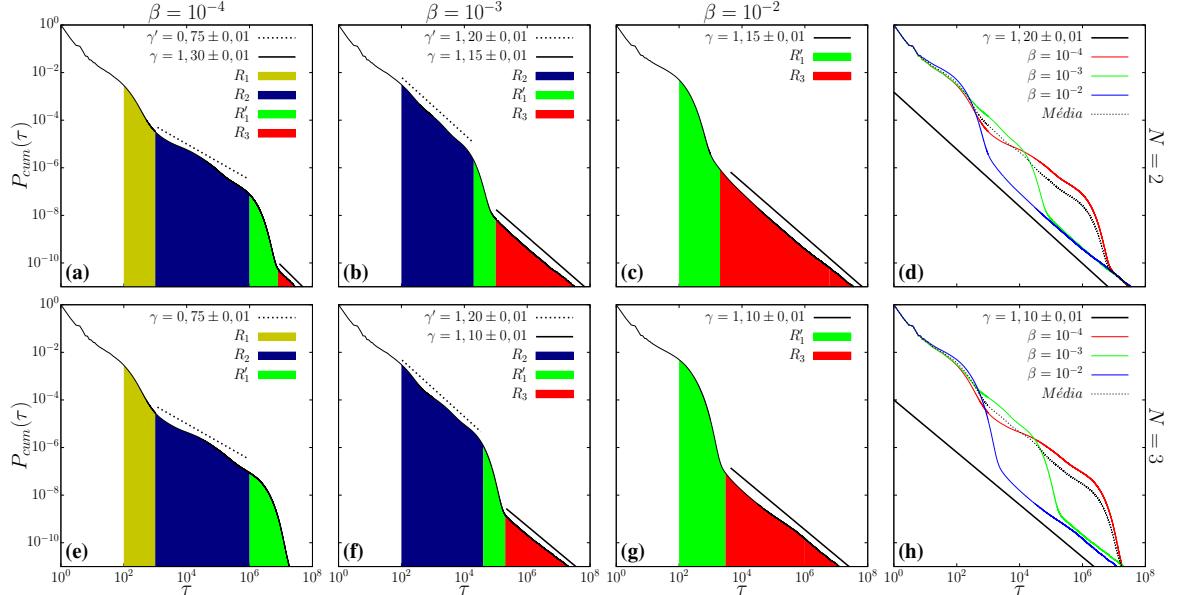


Figura 17 – $P_{cum}(\tau)$ (Eq. (2.39)) para os tempos de recorrência τ , com condições iniciais escolhidas dentro da caixa de recorrência (indicada em vermelho na Fig. 13) no espaço de fases do mapa padrão para diferentes valores de β e de N , indicados acima de cada coluna e à direita de cada linha, respectivamente, para os mesmos valores de K usados na Fig. 16. Os intervalos de tempo R_1 , R_2 , R'_1 e R_3 foram escolhidos a fim de investigar a origem dos diferentes regimes no decaimento de $P_{cum}(\tau)$: (a) $R_1 = [1 \times 10^2 : 1 \times 10^3]$ (amarelo escuro), $R_2 = [1 \times 10^3 : 1 \times 10^6]$ (azul escuro), $R'_1 = [1 \times 10^6 : 8 \times 10^6]$ (verde), e $R_3 = [8 \times 10^6 : 1 \times 10^8]$ (vermelho); (b) $R_2 = [1 \times 10^2 : 2 \times 10^4]$ (azul escuro), $R'_1 = [2 \times 10^4 : 1 \times 10^5]$ (verde), $R_3 = [1 \times 10^5 : 1 \times 10^8]$ (vermelho); (c) $R'_1 = [1 \times 10^2 : 2 \times 10^3]$ (verde), e $R_3 = [2 \times 10^3 : 1 \times 10^8]$ (vermelho). (d) A curva pontilhada preta é a média sobre as curvas de decaimento para os três diferentes valores de β , e a curva contínua em preto é a regressão linear desta média. (e) $R_1 = [1 \times 10^2 : 1 \times 10^3]$ (amarelo escuro), $R_2 = [1 \times 10^3 : 1 \times 10^6]$ (azul escuro), e $R'_1 = [1 \times 10^6 : 1 \times 10^8]$ (verde); (f) $R_2 = [1 \times 10^2 : 4 \times 10^4]$ (azul escuro), $R'_1 = [4 \times 10^4 : 2 \times 10^5]$ (verde), e $R_3 = [2 \times 10^5 : 1 \times 10^8]$ (vermelho); (g) $R'_1 = [1 \times 10^2 : 3 \times 10^3]$ (verde), e $R_3 = [3 \times 10^3 : 1 \times 10^8]$ (vermelho). (h) Da mesma forma que em (d), a linha preta pontilhada é a média das curvas de decaimento dos diferentes valores de β e a linha preta contínua é sua regressão linear.

niscentes não deveria ser maior que o intervalo de tempo $\sim \beta^{-2}$, valor bem menor que nossos tempos de simulação. Este efeito pode ser ainda melhor percebido quando analisamos valores maiores de acoplamento, os quais permitem que a trajetória caótica penetre regiões onde antes existiam ilhas de ressonância de ordens menores. Tal fenômeno gera um mecanismo diferente de aprisionamento de trajetórias caóticas, responsável por regimes adicionais e longos transientes nas curvas da ETR quando se varia a força do acoplamento. Tal afirmação pode ser comprovada e esclarecida nos resultados apresentados nas Figs. 17 e 18.

As curvas de decaimento das ETR, para $N = 2$ e $N = 3$, são apresentados na Fig. 17(a)-(d) e (e)-(h), respectivamente. É possível observar a presença dos regimes R_1 , R_2 e R_3 com comportamentos similares aos intervalos determinados na Seção 3.1, e também, com a ativação do acoplamento ($\beta > 0$), um regime R'_1 pode ser identificado na curva de decaimento da ETR. Este novo regime está associado ao aparecimento de um decaimento exponencial adicional (região preenchida na cor verde), exatamente antes do decaimento

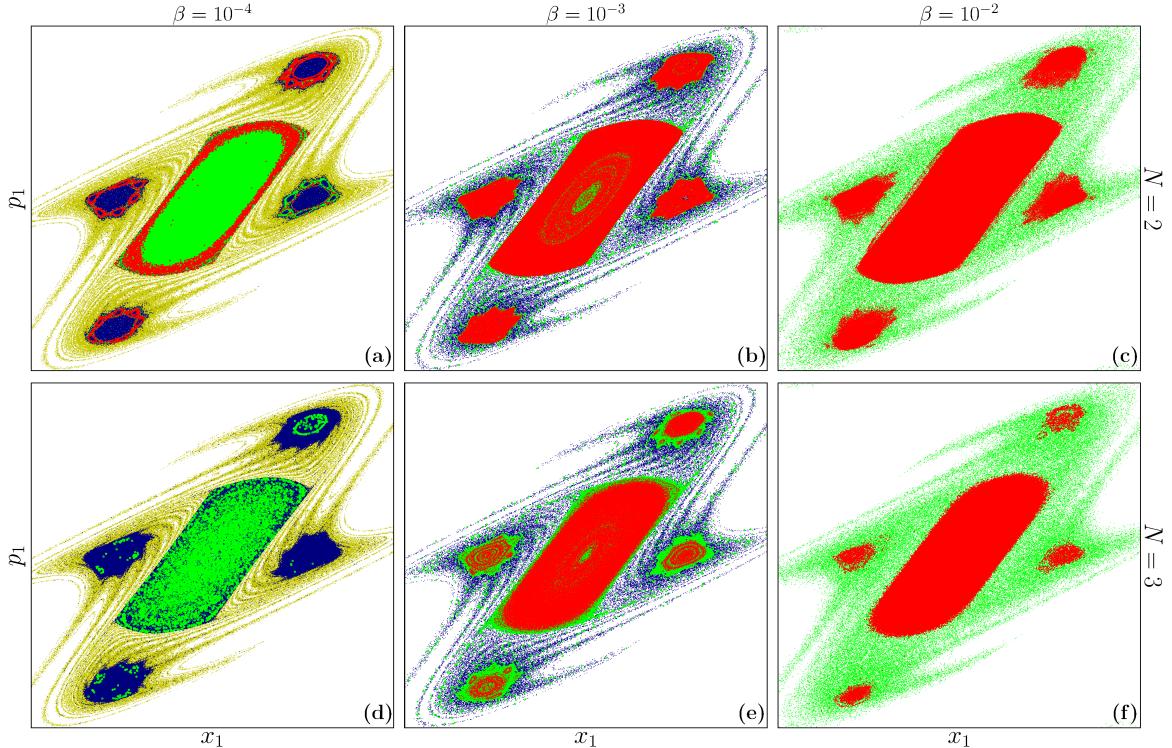


Figura 18 – ETR projetadas nos planos de fases bidimensionais para (x_1, p_1) do sistema de mapas acoplados (3.1) para os intervalos $x_1 \in [0, 15 : 0, 85]$ e $p_1 \in [-0, 5 : 0, 5]$ com diferentes valores para o parâmetro de acoplamento β , indicados acima de cada uma das colunas. K_1 , K_2 e K_3 são os mesmos indicados na Fig. 16. Os pontos dos espaços de fases possuem cores que correspondem às cores utilizadas nos diferentes regimes R_1 , R_2 , R'_1 e R_3 da Fig. 17. Na linha de cima estão as projeções para $N = 2$ e, na linha de baixo, para $N = 3$.

algébrico do regime assintótico. Conforme β aumenta, alguns regimes desaparecem e a região referente à parcela assintótica se move na direção de $\tau \rightarrow 0$.

Fixando $\beta = 10^{-4}$, é observado um decaimento tipicamente exponencial, para tempos menores (regime R_1), logo antes do longo decaimento algébrico que caracteriza o aprisionamento induzido (regime R_2) que tem como expoente de decaimento $\gamma' = 0,75 \pm 0,01$ para $N = 2$ e $N = 3$ na Fig. 17(a) e (e), respectivamente. O regime R_2 aparece como consequência de uma trajetória aprisionada em domínios particulares do espaço de fases do mapa padrão (em que existem ilhas de ressonância impenetráveis no caso desacoplado), como destacado em pontos de cor azul escura na Fig. 18(a) e (d) para $N = 2$ e $N = 3$, respectivamente. O regime R'_1 é responsável pelo aparecimento de um decaimento exponencial adicional, que tem como origem, essencialmente, a penetração da trajetória caótica onde antes era o domínio das ilhas primárias de ressonância (para $\beta = 0$): indo em direção ao centro e realizando um movimento tipicamente ergódico.

Para $N = 2$, o regime R_3 é alcançado para tempos extremamente longos, e está relacionado a uma reminiscência particular, localizada próxima às bordas internas das regiões em que antes se encontravam as ilhas de ressonância na projeção do espaço de fases. Para $N = 3$, o número de recorrências utilizado nas simulações não foi suficiente

para chegar ao regime assintótico R_3 .

Quando analisamos o caso de $\beta = 10^{-3}$, é possível observar o mesmo decaimento algébrico intermediário visto no caso de $\beta = 10^{-4}$, mas agora com um expoente de valor $\gamma' = 1,20 \pm 0,01$ tanto para $N = 2$ quanto para $N = 3$, como mostrado na Fig.17(b) e (f), respectivamente. O valor do expoente de decaimento γ' é maior que o anterior por conta da mudança no mecanismo de aprisionamento, ou seja, agora as trajetórias caóticas são aprisionadas em estreitos contornos imersos no mar de caos (Fig. 18(b) e (e)), que são similares às variedades do ponto hiperbólico fixo presente no espaço de fases do mapa padrão. Neste caso, a difusão das trajetórias caóticas no espaço de fases de dimensão maior é mais rápida se estas estiverem aprisionadas nas reminiscências das ilhas de ressonância.

No caso em que $\beta = 10^{-2}$ observamos, na Fig. 16(e)-(f) para $N = 2$ e 16(m)-(o) para $N = 3$, que as projeções dos espaços de fases aparecem completamente preenchidas de pontos, remetendo a uma errônea percepção de que este se trata de um caso em que o sistema apresenta comportamento ergódico. O que obtemos das ETR e das projeções destas nos planos do espaço de fases é um longo decaimento algébrico no regime assintótico R_3 , como mostrado na Fig. 17(c) e (g), que significa que, na verdade, há o aprisionamento de trajetórias nas regiões das antigas ilhas de ressonância por longos períodos de tempo. Pode-se notar que os regimes R_1 e R_2 não existem mais para este caso. Para $\beta \geq 10^{-1}$ (não apresentado aqui), nossas simulações indicam que o sistema passa por uma transição para um decaimento exclusivamente exponencial, o que caracteriza sistemas fortemente caóticos.

A regressão linear sobre a região R_3 apresenta, para $N = 2$ e $\beta = 10^{-4}$, um expoente $\gamma \sim 1,30 \pm 0,01$ (para $N = 3$ não alcançamos o regime assintótico). Com $\beta = 10^{-3}$ e $\beta = 10^{-2}$, ainda para $N = 2$, os expoentes encontrados na regressão são os mesmos: $\gamma \sim 1,15 \pm 0,01$. Para os mesmos valores de β e $N = 3$ obtemos dois expoentes, novamente iguais, de magnitude $\gamma \sim 1,10 \pm 0,01$. Uma média sobre todos os valores de acoplamentos aponta um valor de expoente médio equivalente a $\gamma \sim 1,20 \pm 0,01$ para $N = 2$ e $\gamma \sim 1,10 \pm 0,01$ para $N = 3$. Este resultado acorda, parcialmente, com a conjectura proposta por Shepelyansky em [29] que, de forma grosseira, propõe que exista um expoente de decaimento universal das recorrências de Poincaré, para mapas Hamiltonianos com um número arbitrário de graus de liberdade. De toda forma, o expoente obtido em nossos estudos é menor que tal expoente de decaimento médio universal das ETR $\sim 1,3 - 1,4$ originalmente proposto em [29]. Esta diferença nos motivou a utilizar uma técnica alternativa para a estimativa da taxa de decaimento, como é apresentado na seção a seguir.

3.2.3 Maiores expoentes de Lyapunov a tempo finito (MELTFs)

Como forma de verificação dos resultados obtidos e expostos nas seções anteriores, estendemos o estudo do sistema a um método numérico baseado na distribuição dos MELTFs e suas propriedades de grandes desvios para estimar o decaimento das correlações temporais dos sistemas de mapas padrão acoplados (3.1). Além da comprovação dos resultados da ETR, a aplicação deste método nos forneceu evidências de que este se mostra efetivo como ferramenta para a análise de decaimentos polinomiais, tendo em vista que o tempo de processamento de seus códigos, em relação à ETR, foi aproximadamente 60% menor. Originalmente, a investigação baseada nas distribuições dos MELTFs foi aplicada a mapas intermitentes, de uma e duas dimensões, e a mapas Hamiltonianos bidimensionais, como pode ser verificado nas Refs.[9] e [36].

Na Fig. 19 mostramos a forma da distribuição $P_n(\lambda_n^{(1)})$ dos MELTFs normalizada em 1, obtida para $N = 2$ mapas padrão acoplados (3.1) com $\beta = 10^{-3}$ e $K_1 = 0,41$ e $K_2 = 0,42$. É importante notar as longas caudas das distribuições apresentadas no quadro destacado na figura. Como é previsto pela ergodicidade, a distribuição $P_n(\lambda_n^{(1)})$ tende a uma delta de Dirac centrada em $\lambda_\infty^{(1)}$ no limite assintótico de $n \rightarrow \infty$, mas as caudas são polinomialmente “largas” e assimétricas devido à frequente aparição de valores baixos dos MELTFs, causados pelo efeito *stickiness*. Qualitativamente, o quadro destacado nos mostra como as caudas tendem a afinar conforme o tempo aumenta. Agora aplicaremos a técnica descrita na Subseção 2.4.3 a fim de obter uma estimativa quantitativa do decaimento das correlações destas distribuições.

Para as simulações, utilizamos 10^7 condições iniciais escolhidas na mesma caixa delimitada pela linha vermelha na Fig. 13(a) (dentro do mar de caos). Os resultados são apresentados na Fig. 20. Na Fig. 20(a) e (b), utilizamos $(K_1, K_2) = (8,81, 8,83)$ para $N = 2$ e $(K_1, K_2, K_3) = (8,81, 8,82, 8,83)$ para $N = 3$, com $\beta = (10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2})$. Neste caso, o espaço de fases do mapa padrão (3.1) ($N = 1$ e $\beta = 0$) é totalmente caótico (hiperbólico), ou seja, não existem ilhas de ressonância ou regiões com *stickiness*. Na Fig. 20(c) e (d), utilizamos os mesmos valores de N , K e β dos utilizados na análise da ETR para a rede de mapas acoplados.

Da mesma forma que na ETR, a estimativa do decaimento das correlações temporais para casos completamente caóticos, indiretamente medido através de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$, deve ser do tipo exponencial. Para o estudo, estimamos quantitativamente como a cauda de $P_n(\lambda_n^{(1)})$ tende a zero conforme o tempo passa. O decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$ é mostrado em escala lin-log na Fig. 20(a) para $N = 2$ e (b) para $N = 3$, em cada um dos dois quadros, pode-se identificar um decaimento puramente exponencial, assim como esperado para um sistema completamente caótico: $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n) = C^{-\alpha n}$, com os expoentes dados por $\alpha \sim 3,50$ para (a) e $\alpha \sim 4,40$ para (b).

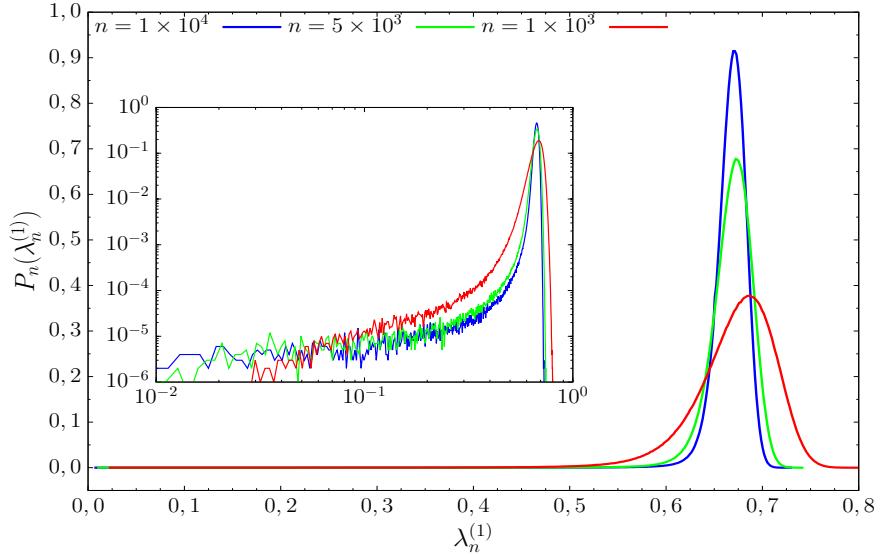


Figura 19 – Distribuição dos MELTFs $P_n(\lambda_n^{(1)})$ para $N = 2, \beta = 10^{-3}$, $K_1 = 0,41$ e $K_2 = 0,43$ na Eq. (3.1), para três valores de tempo diferentes. As distribuições são compostas por 10^7 valores dos MELTFs, obtidos para um conjunto de 10^7 condições iniciais. No recorte apresentado na figura está a mesma distribuição em escala logarítmica. A assimetria na distribuição dos MELTFs é utilizada para a estimativa do decaimento algébrico das correlações, através da computação de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$ em função do tempo Eq. 2.60. Esta assimetria existe por conta da ocorrência do efeito *stickiness* (Fig. 13).

Como esperado, os resultados mais relevantes foram obtidos ao aplicarmos a técnica à dinâmica caótica fraca do sistema (3.1) para $N = 2$ e $N = 3$ e os mesmos valores de K utilizados na Fig. 16. Os decaimentos das curvas de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$ tanto para $N = 2$ quanto para $N = 3$ são mostrados na Fig. 20(c) e (d), respectivamente, para $\beta = 10^{-4}$ (linha pontilhada vermelha), $\beta = 10^{-3}$ (linha pontilhada verde) e $\beta = 10^{-2}$ (linha pontilhada azul). Claramente pode-se ver um decaimento assintótico de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$ independente de β , como esperado para o espaço de fases mesclado. A tendência do decaimento é dada por uma lei de potênci, e o expoente é $\chi \sim 0,21 \pm 0,02$ para $N = 2$ e $\chi \sim 0,13 \pm 0,02$ para $N = 3$. E este é o principal resultado obtido neste estudo: a taxa de decaimento algébrico para cadeias de mapas acoplados, estimadas através de dois diferentes métodos, acordam quantitativamente, como comprovado através das regressões. Os expoentes de decaimento da ETR e de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$ estão relacionados pela expressão $\xi = \gamma - 1$ (Eq. 2.64). Os valores de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$ foram calculados em escala logarítmica, como mostrado na Fig. 21.

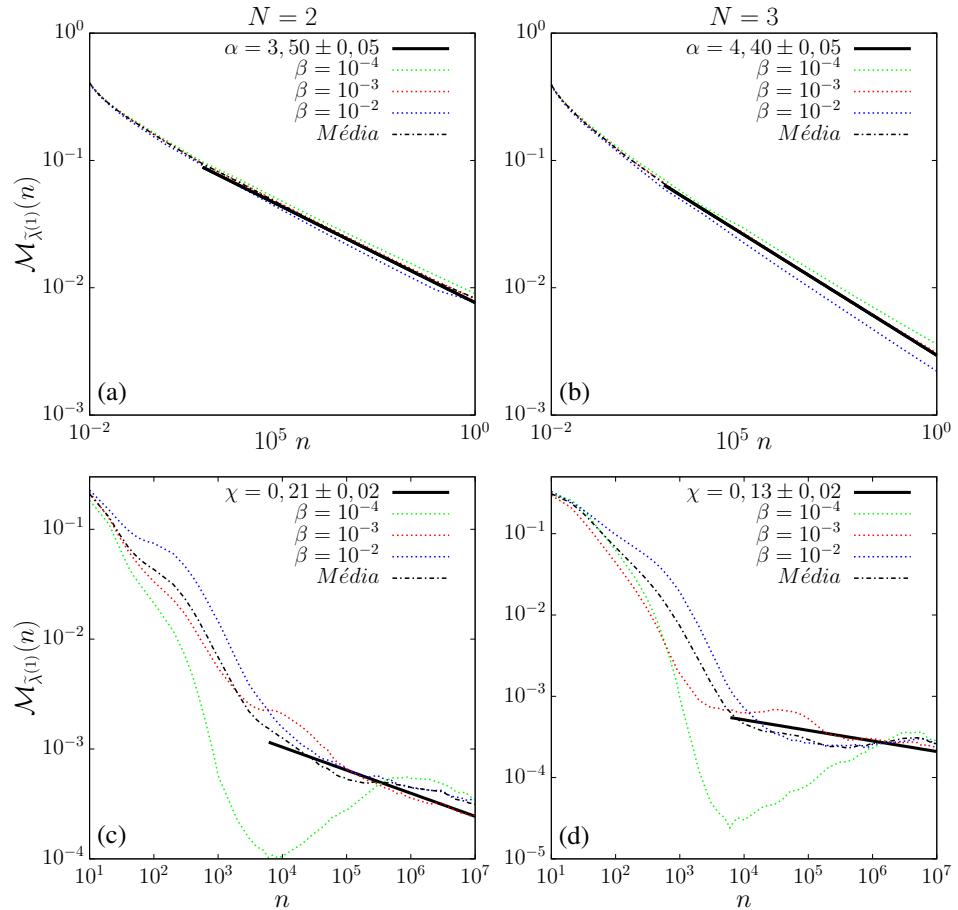


Figura 20 – Decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}(1)}(n)$ para o mapa (3.1), considerando diferentes valores para o parâmetro de acoplamento β listados na legenda dos painéis, para $N = 2$ na primeira coluna ((a) e (c)) e $N = 3$ na segunda coluna ((b) e (c)). As respectivas regressões lineares são apresentadas em linhas pretas contínuas, enquanto a média dos decaimentos é apresentada em linha preta pontilhada. Os painéis (a) e (b) foram obtidos para espaços de fase totalmente caóticos $(K_1, K_2, K_3) = (8, 80, 8, 81, 8, 82)$ e, nos painéis (c) e (d), para típicos espaços de fase divididos $(K_1, K_2, K_3) = (0, 41, 0, 42, 0, 43)$.

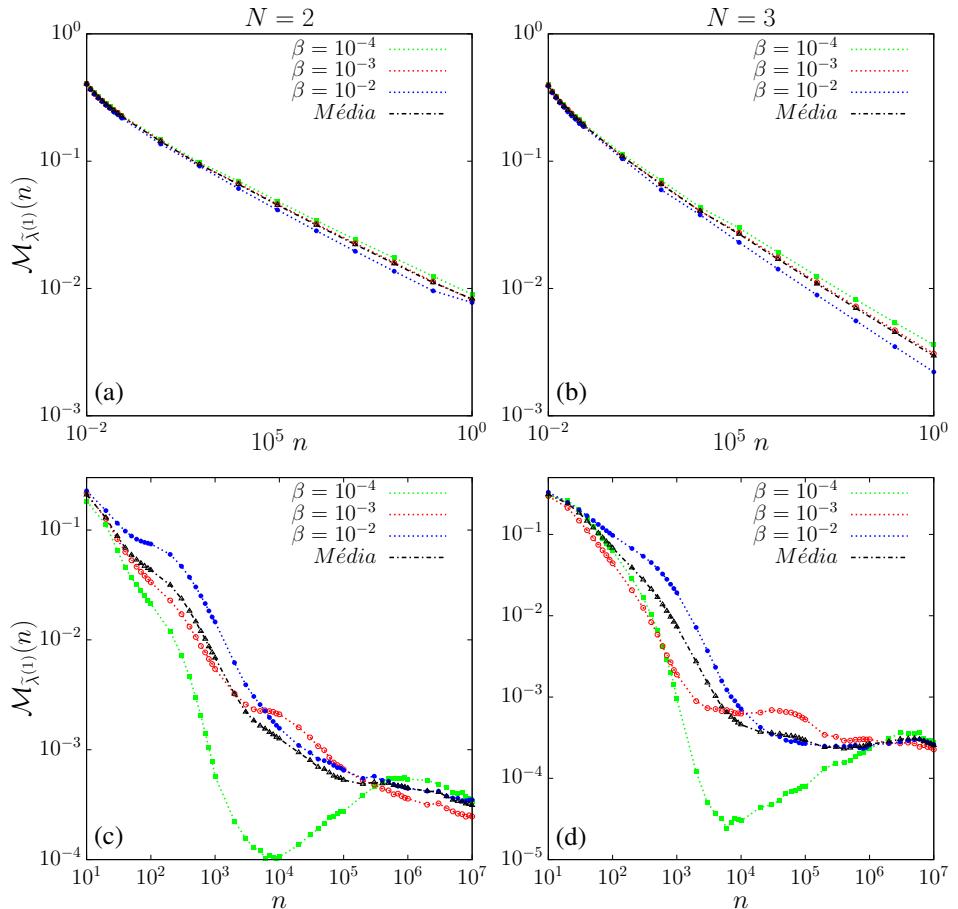


Figura 21 – Curva de decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}^{(1)}}(n)$, para o mapa (3.1), com os pontos indicando o tempo nos quais os ELTFs são calculados (escala logarítmica).

4 ESTATÍSTICA DE RECORDES EM SISTEMAS HAMILTONIANOS

A caracterização de eventos extremos, tais quais os recordes a tempos discretos de uma sequência de determinado observável, tem se mostrado de grande importância em diversas áreas da ciência, como por exemplo finanças [58], estudos climáticos [59], supercondutores [60] e comportamento animal [61]. As ferramentas estatísticas aqui aplicadas serão semelhantes às utilizadas no âmbito de caminhadas aleatórias e voos de Lévy [39]. Os sistemas abordados aqui são o mapa padrão de Chirikov-Taylor (2.2) e o mapa de rede (2.3).

4.1 ESTUDOS PRELIMINARES

Como feito no capítulo anterior, inicialmente abordamos as projeções dos espaços de fases, para os diferentes valores de parâmetros de não-linearidade dos mapas, a fim de estabelecer um primeiro objetivo para o estudo destes sistemas. Na Fig. 22 são apresentados os espaços de fases do mapa padrão e na Fig. 23 os do mapa de rede.

O mapa padrão, como visto em capítulos anteriores, é identificado pelas equações:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \frac{\tilde{K}}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x_n), \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \end{cases} \quad [\operatorname{mod} 1]. \quad (4.1)$$

Aqui seu espaço de fases é um toro unidimensional na variável x , enquanto p varia numa linha e é a variável escolhida para o registro de recordes que analisaremos estatisticamente. Para que haja uma aproximação de uma configuração estocástica, focaremos na componente caótica do sistema, isto é, as condições iniciais serão $p_0 = 0$ e x , em que x é escolhido de forma que o ponto se encontre no mar de caos.

O mapa de rede tem suas equações dadas por:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n + \kappa \operatorname{sen} v_n) \operatorname{cos} \alpha + v_n \operatorname{sen} \alpha, \\ v_{n+1} = -(u_n + \kappa \operatorname{sen} v_n) \operatorname{sen} \alpha + v_n \operatorname{cos} \alpha. \end{cases} \quad (4.2)$$

em que \tilde{K} é o parâmetro de não-linearidade, α é definido por $\frac{2\pi}{q}$, com $q \in \mathbb{N}$. Para os valores de $q = q_c = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, o sistema apresenta simetria cristalina, e para $q \neq q_c$, simetria quase cristalina. Da mesma forma que no mapa padrão, as condições iniciais são escolhidas ao longo da linha $p_0 = 0$ e x no mar de caos. Nos dois casos os valores médios (Eq. (2.66) e (2.67)) são calculados sobre as condições iniciais.

Nosso primeiro objetivo é averiguar se as propriedades estocásticas de mapas caóticos determinísticos resultam numa estatística de recordes similar à do caso para caminhadas aleatórias. Esta é a expectativa para o regime caótico do mapa padrão

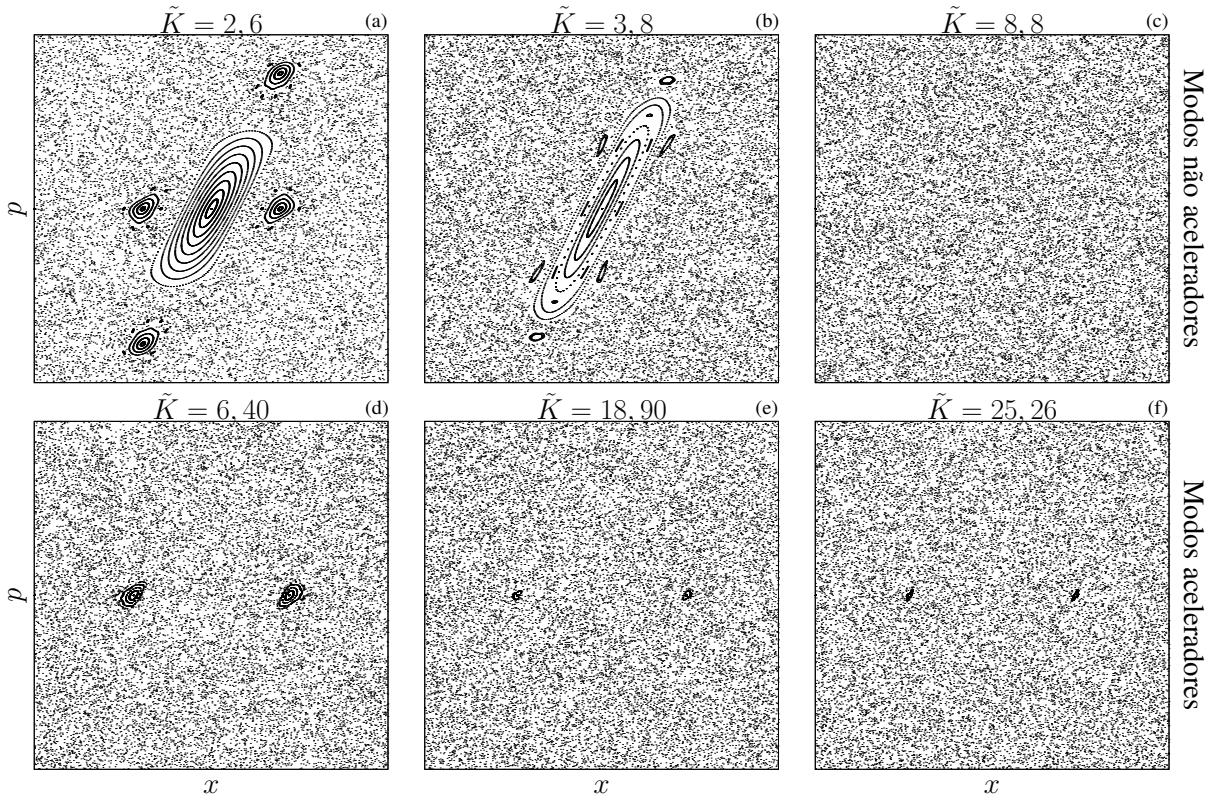


Figura 22 – Espaço de fases do mapa padrão para os casos abordados neste capítulo, no intervalo $x \in [0, 1]$ e $p \in [-0, 5, 0, 5]$. As 100 condições iniciais foram escolhidas uniformemente em x ao longo de $p = 0$ e iteradas 10^3 vezes. Para o quadro (b), 4 das 100 condições iniciais foram escolhidas dentro das ilhas secundárias, com coordenadas $(x_1, p_1) = (0, 295, 0, 37)$, $(x_2, p_2) = (0, 3, -0, 37)$, $(x_3, p_3) = (0, 695, 0, 37)$ e $(x_4, p_4) = (0, 7, 0, 37)$. Os quadros (a) e (b) possuem espaço de fases dividido, enquanto (c) é totalmente caótico e os quadros (d), (e) e (f) possuem ilhas de modos aceleradores [62] que, fazendo com que condições iniciais escolhidas em seu domínio apresentem comportamento superdifusivo (expoente de difusão com valor entre 1 e 2).

(Fig. 22)(c), enquanto se espera um comportamento anômalo onde existem modos aceleradores (Fig. 22(d)-(f) e Fig. 23(d)-(f)) ou regiões de *stickiness* (2.1.5) (Fig 22(a)-(b) e Fig. 23 (a)-(c)) para o mapa padrão e mapa de rede, respectivamente.

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

O primeiro experimento numérico realizado foi o cálculo das médias e variâncias dos casos anteriormente citados para o mapa padrão, de forma que ambas são calculadas conforme itera-se os mapas. Os resultados são apresentados na Fig. 24(a) e (c) para modos não aceleradores e Fig. 24(b) e (d) para modos aceleradores. Nos casos totalmente caótico e com espaço de fases dividido, os resultados exibem um comportamento assintótico muito próximo ao previsto para a caminhada aleatória (Eq. 2.66 e 2.67). É importante observar que a influência dos modos aceleradores pode ser claramente notada na curva de variância (Fig. 24(d)).

As mesmas observações feitas para o mapa padrão acabam por se confirmar

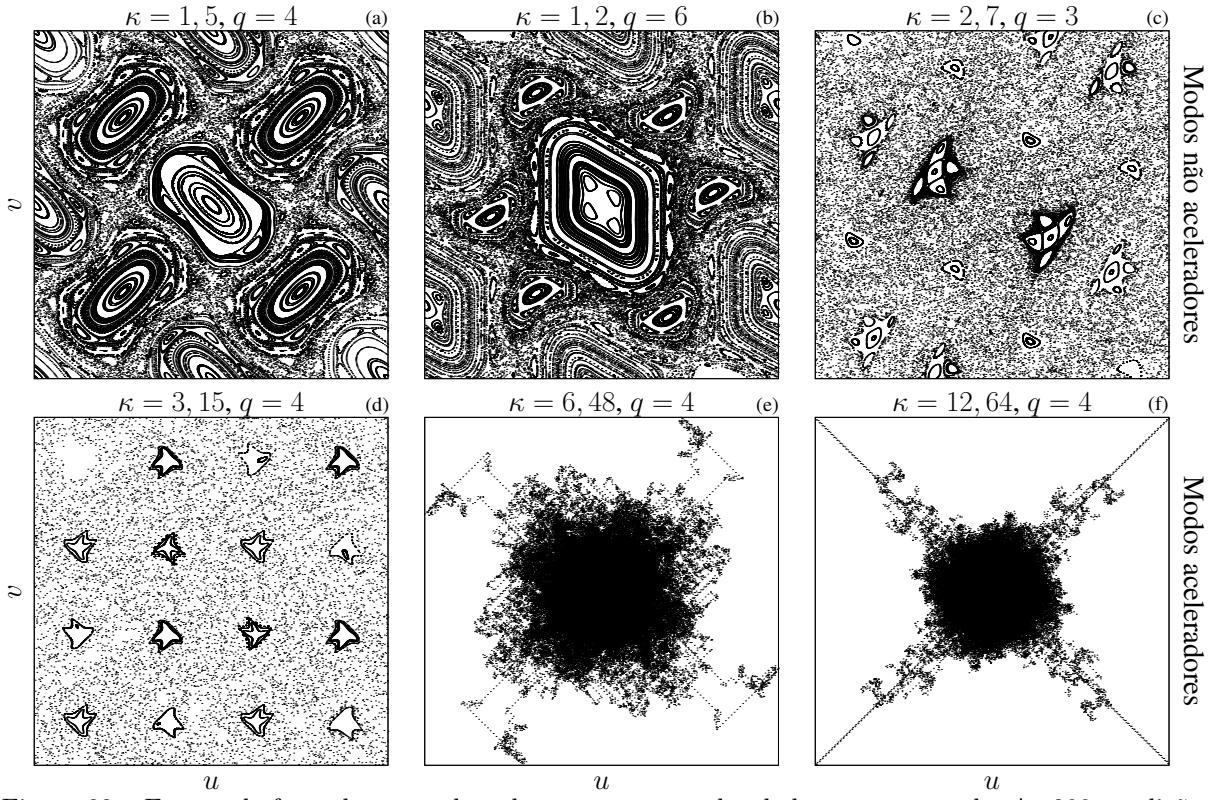


Figura 23 – Espaço de fases do mapa de rede para os casos abordados neste capítulo. As 200 condições iniciais foram escolhidas aleatoriamente em u e em v no intervalo $[-2\pi : 2\pi]$ e iteradas 10^3 vezes. Em (a), (b), (c) e (d) tem suas coordenadas u e v contidas no intervalo $[-2\pi : 2\pi]$, enquanto no quadro (e) u e v se encontram no intervalo $[-800 : 800]$ e, no quadro (f) $[-1200 : 1200]$. Em (d), (e) e (f) são apresentados os modos aceleradores do mapa de rede.

no caso do mapa de rede (Fig. 25), os casos em que não aparecem modos aceleradores (Fig. 25(a) e (c)) apresentam um comportamento similar ao das caminhadas aleatórias, enquanto os que possuem modos aceleradores sofrem influência das ilhas presentes e suas curvas acabam sendo afetadas (Fig. 25(b) e (d)).

O fato de que, para os casos em que não há existência dos modos aceleradores, os resultados concordaram exatamente com o que é apresentado na literatura foi realmente espantoso. A estocasticidade está presente nos processos de quebra de recordes, mas ao menos nos casos em que o espaço de fases é mesclado, se esperava alguma espécie de comportamento anômalo no registro dos recordes, o que não se mostrou verdade.

Nas regressões lineares feitas nas Figs. 24 e 25, a função utilizada foi a seguinte:

$$F(n) = an^\gamma. \quad (4.3)$$

Em ambas figuras foram utilizadas 5×10^5 condições iniciais com tempo de iteração igual a 10^8 .

Para a caminhada aleatória, sabe-se que o que nos leva aos resultados analíticos ((2.66) e (2.67)) são a teoria da renovação e a universalidade de Sparre Andersen [38], que regem a probabilidade de sobrevivência no eixo positivo (ou negativo) das caminhadas

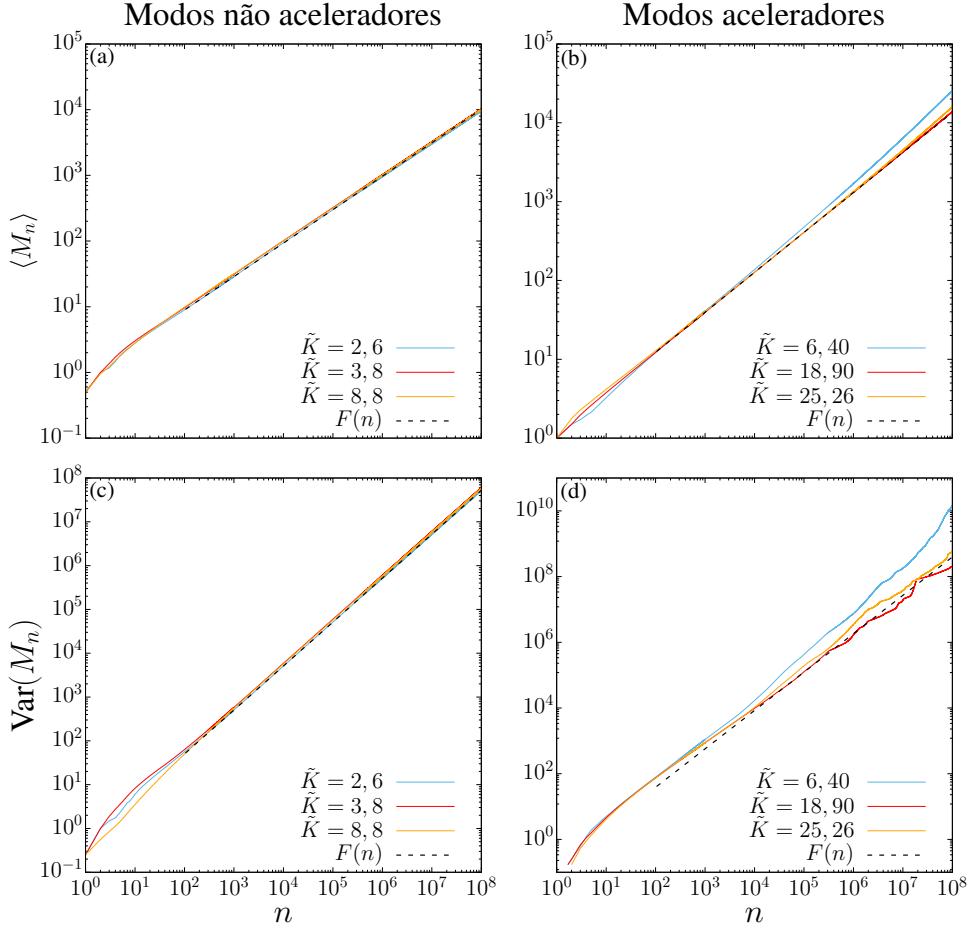


Figura 24 – Número médio de recordes e variância em função do tempo, para diferentes valores de \tilde{K} do mapa padrão (Eq. (4.1)). As médias são apresentadas nos quadros (a) e (b), enquanto as variâncias se encontram nos quadros (c) e (d). As linhas pretas pontilhadas correspondem à regressão linear feita utilizando a Eq. (4.3), e seus parâmetros são, para (a) $a = 0,85(6)$, $\gamma = 0,50(9)$, para (b) $a = 1,19(3)$, $\gamma = 0,50(7)$, para (c) $a = 0,49(6)$, $\gamma = 1,00(3)$ e para (d) $a = 0,17(9)$, $\gamma = 1,16(8)$.

aleatórias com distribuições de passos simétricas e contínuas, quando o caminhante sai da origem. A probabilidade cumulativa de sobrevivência é dada por [41]:

$$P_{s,cum}^{X_0=0}(\tau) = \text{Prob}(X_1 > 0, \dots, X_\tau > 0 | X_0 = 0),$$

e decai com expoente universal $1/2$, de forma que

$$P_{s,cum} \sim \frac{C}{\sqrt{\tau}}. \quad (4.4)$$

O cálculo da probabilidade de sobrevivência foi feito, e verificamos que um comportamento similar deve ser observado para mapas determinísticos (Fig. 26). A probabilidade de sobrevivência está intimamente ligada à ocorrência dos recordes, uma vez que esta pode ser interpretada como a probabilidade de não ocorrência do mesmo: uma vez que a trajetória ultrapassa a marca do recorde anterior, este evento é visto como o seu “fim”, e a partir dali a trajetória é novamente acompanhada até que o evento ocorra mais uma vez e esta seja novamente “substituída”, e assim por diante. Esta não é a primeira vez que o

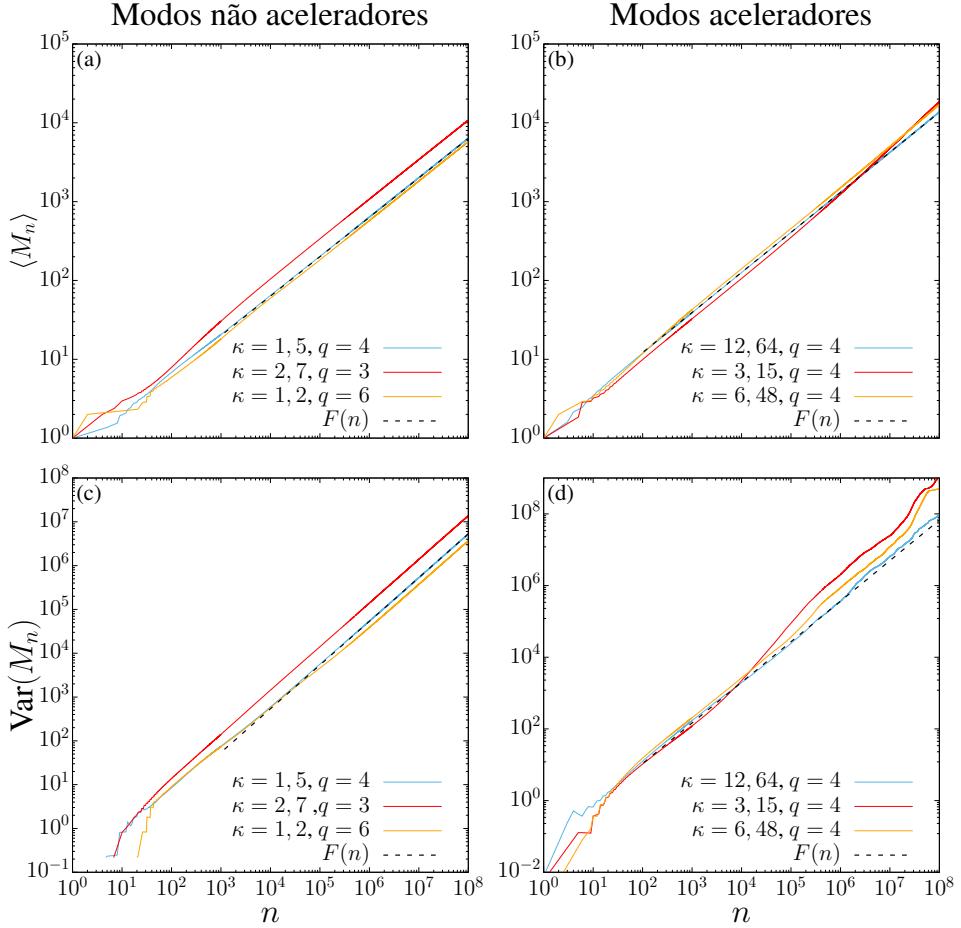


Figura 25 – Número médio de recordes e variância em função do tempo, para diferentes valores de κ do mapa de rede (Eq. (4.2)). As médias são apresentadas nos quadros (a) e (b), enquanto as variâncias se encontram nos quadros (c) e (d). As linhas pretas pontilhadas correspondem à regressão linear feita utilizando a Eq. (4.3), e seus parâmetros são, para (a) $a = 0,63(3)$, $\gamma = 0,50(0)$, para (b) $a = 1,17(4)$, $\gamma = 0,50(8)$, para (c) $a = 0,05(5)$, $\gamma = 0,99(8)$ e para (d) $a = 0,05(9)$, $\gamma = 1,13(2)$.

teorema de Sparre-Andersen é abordado na dinâmica determinística, como pode ser visto na Ref. [63], mas é extremamente interessante notar como o comportamento assintótico concorda com os resultados previstos.

É importante salientar que, por mais que a curva da média dos recordes e da variância concordem com a teoria, para os casos em que não existem modos aceleradores no mapa padrão e no mapa de rede, isto não deve ser pensado como parâmetro para comparação do processo difusivo ou de registro de recordes entre casos de espaço de fases mesclado e de espaço de fases totalmente caótico, uma vez que as condições iniciais são todas escolhidas no mar de caos. De fato, há diferença entre eles, mas quando trata-se da média e da variância do número de recordes, esta diferença acaba não sendo detectada. Portanto, para evidenciar e diferenciar os casos, na Fig. 27 apresentamos a curva $p_{r,\max}(n) \times n$ para 5×10^5 condições iniciais do mapa padrão, para os três valores de parâmetro abordados $\tilde{K} = 2, 6$, $\tilde{K} = 3, 8$ e $K = 8, 8$. O valor $p_{r,\max}(n)$ é definido como o maior recorde atingido, de todas as 10^5 condições iniciais acompanhadas, naquele instante

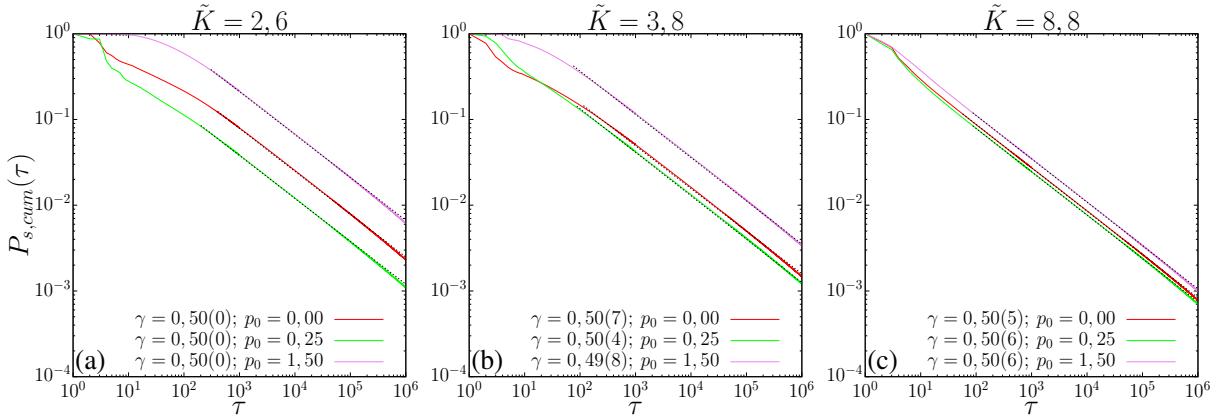


Figura 26 – Probabilidade de sobrevivência cumulativa para três parâmetros de não-linearidade do mapa padrão e diferentes condições iniciais na variável difusiva p . A regressão linear é feita pela função $F(\tau) \sim a \tau^{-\gamma}$, em que a depende da condição inicial, enquanto o expoente de decaimento γ de todos os casos coincide com o valor de Sparre Andersen $\gamma = 0,50$.

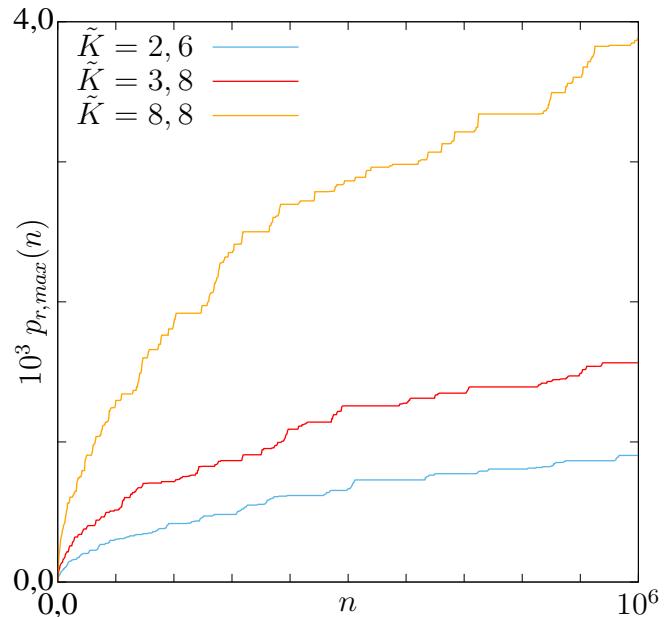


Figura 27 – Série temporal de $p_{r,max}(n)$, indicando a o valor máximo de ocorrência dos recordes: cada incremento no valor de $p_{r,max}(n)$ indica um valor de recorde máximo novo registrado. Para esta figura, foram utilizadas 5×10^5 condições iniciais.

de tempo. Através da figura, pode-se perceber que a diferença se resume à velocidade do processo difusivo: para $\tilde{K} = 8,8$, $p_{r,max}$ atinge valores muito maiores do que para os outros dois parâmetros. Alguns platôs são observados ao longo da curva, isto ocorre porque estamos registrando apenas o valor do maior recorde dentre as 5×10^5 trajetórias, ou seja, durante os platôs ainda ocorrem recordes, mas nenhum supera o valor anterior de $p_{r,max}$. Portanto, é fácil ver que a presença de ilhas de regularidade afetam, de alguma forma, o processo de quebra de recordes. Elas realmente influenciam, mas não nas quantidades calculadas (média e variância): a taxa de registro de recordes é a mesma, porém, os valores de p que o sistema atinge são distantes de um caso para outro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de dissertação investigamos o comportamento e a dinâmica de uma rede de mapas padrão de Chirikov-Taylor acoplados, através de uma ferramenta amplamente utilizada em trabalhos científicos contemporâneos - a estatística dos tempos de recorrência -, e de uma ferramenta que se mostrou eficiente e com tempo computacional consideravelmente menor na análise de sistemas de alta dimensionalidade - a teoria dos grandes desvios e análise de decaimento das correlações-. Além do estudo da rede de mapas padrão através das duas ferramentas supracitadas, aplicamos uma ferramenta tipicamente utilizada no ramo de caminhadas aleatórias, a estatística de recordes, e obtemos resultados (parciais) que se mostraram extremamente interessantes.

O efeito *stickiness* se mostra extremamente influente na dinâmica e nas propriedades de sistemas caóticos, como por exemplo no decaimento das correlações temporais. Ao longo do Capítulo 2, a origem do efeito *stickiness* é discutida e a partir disto é possível entender de que forma o mesmo influencia na dinâmica dos sistemas. Sua influência é explorada e melhor compreendida ao longo do Capítulo 3, discutido a seguir.

No Capítulo 3 ficou evidente que o efeito de aprisionamento de trajetórias (efeito *stickiness*) interfere de forma significativa na dinâmica de sistemas. A característica do aprisionamento e quão influente o mesmo é, depende tão somente do parâmetro de não-linearidade presente no sistema em questão, quando abordamos um sistema sem influências externas (vide Fig. 14). Ao submeter nosso objeto de estudo (mapa padrão) à uma rede de mapas acoplados, pôde-se perceber que, além da detecção de novos regimes ligados ao decaimento das curvas da ETR, o regime assintótico (vermelho) tornou-se maior com o aumento do parâmetro de acoplamento, indicando que mais trajetórias sofreram influência do aprisionamento. A explicação para tal fenômeno é a de que trajetórias que adentram regiões onde antes se encontravam ilhas de regularidade no mapa de referência (vide Figs. 17 e 18) sofrem influência das estruturas reminiscentes. Uma evidência que fortalece esta constatação surge quando comparamos os regimes assintóticos dos casos $N = 2$ e $N = 3$: o regime em $N = 2$ atinge maiores valores para os tempos de recorrência, nos levando a concluir que no caso $N = 3$, onde a trajetória é influenciada por mais mapas, a força do aprisionamento se mostra menor.

Ainda no Capítulo 3 estudamos as propriedades da rede de mapas através da teoria dos grandes desvios e do decaimento das correlações temporais. Uma relação bem estabelecida entre os expoentes da ETR e do decaimento das correlações é conhecida e apresentada na Eq. (2.64). Nosso objetivo ao utilizar esta ferramenta era o de averiguar os resultados obtidos, uma vez que os mesmos confrontavam proposições apresentadas

na Ref. [29] para um expoente médio de decaimento universal, o que obtemos foi que nossos resultados para a ETR concordaram com o que foi calculado utilizando a teoria dos grandes desvios, ou seja, o expoente de decaimento médio, para nosso sistema com 4 e 6 dimensões, tem valor de $\gamma \simeq 1,1 - 1,2$, diferente da conjectura de Shepelyansky que propõe um expoente médio $\gamma \simeq 1,3 - 1,4$. O método não só comprovou a validade dos resultados obtidos com a ETR, como também se mostrou consideravelmente mais rápido (em torno de 60%), não só viabilizando sua utilização mas também permitindo, por exemplo, realizações numéricas a tempos mais longos com igual custo computacional se comparado à ETR.

No Capítulo 4 propomos a utilização de ferramentas usualmente aplicadas às caminhadas aleatórias no estudo do mapa padrão (Seção 2.2) e do mapa de rede (Seção 2.3). Nos baseamos em teoremas válidos para distribuições de passos correlacionadas, abordados de forma analítica em [38, 39], a fim de obter resultados similares para as componentes caóticas dos sistemas escolhidos. As simulações numéricas nos retornaram resultados notáveis, uma vez que, em configurações do espaço de fases sem modos aceleradores, os resultados obtidos foram extremamente próximos aos da literatura, apresentados para caminhadas aleatórias. As únicas discrepâncias identificadas, em relação aos valores de referência para os expoentes, foram nos casos em que os modos aceleradores estavam presentes, fazendo com que houvessem poucos desvios nas curvas de $\langle M(n) \rangle$ (Eq. (2.66)), e desvios consideráveis nas curvas de $\text{Var}(M_n)$ (Eq. (2.67)), quando comparadas às curvas de referência, cujos expoentes de crescimento são $\gamma = 0,5$ para $\langle M(n) \rangle$ e $\gamma = 1,0$ para $\text{Var}(M_n)$.

Os resultados obtidos a partir da abordagem da estatística dos recordes não concordaram num todo com a teoria na qual nos embasamos, pois os resultados analíticos apresentados também definem um valor fixo para o pré-fator a da Eq. (4.3). Uma explicação para isto é a de que o pré-fator é responsável por diferenciar os resultados analíticos para as diferentes distribuições de passos apresentadas em [38], portanto, como a mesma acaba por não existir nos sistemas aqui abordados, é de se esperar que haja tal diferença.

Através da pesquisa realizada, pudemos atingir os objetivos propostos inicialmente na dissertação, de averiguar o comportamento das curvas de decaimento da ETR e das correlações temporais (através da teoria dos grandes desvios), e de procurar relações entre processos estocásticos e caóticos através de ferramentas usuais do ramo de caminhadas aleatórias.

REFERÊNCIAS

- 1 OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 2002.
- 2 REICHL, L. E. *The Transition To Chaos: Conservative Classical Systems And Quantum Manifestations*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2004.
- 3 LOSKUTOV, A. Dynamical chaos: systems of classical mechanics. *Physics-Uspekhi*, v. 50, n. 9, p. 939–9364, 2007.
- 4 HOFF, A. et al. Numerical bifurcation analysis of two coupled fitzhugh-nagumo oscillators. *Eur. Phys. J. B*, v. 87, n. 151, 2014.
- 5 CONTOPOULOS, G. Ordered and chaotic orbits in spiral galaxies. In: CONTOPOULOS, G.; PATSIS, P. (Ed.). *Chaos in Astronomy*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008, (Astrophysics and Space Science Proceedings).
- 6 ZASLAVSKI, G. M. *The physics of chaos in Hamiltonian systems*. Singapore: World Scientific, 2007.
- 7 CRISTADORO, G.; KETZMERICK, R. Universality of algebraic decays in hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 100, p. 184101, 2008.
- 8 ALTMANN, E. G. *Intermittent chaos in Hamiltonian dynamical systems*. Tese (Doutorado) — Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Dresden, 2007.
- 9 ARTUSO, R.; MANCHEIN, C. Instability statistics and mixing rates. *Phys. Rev. E*, APS, v. 80, p. 036210, 2009.
- 10 SRIVASTAVA, S. C. L.; LAKSHMINARAYAN, A.; JAIN, S. R. Record statistics in random vectors and quantum chaos. *EPL*, IOP Publishing, v. 101, n. 1, p. 10003, 2013.
- 11 SRIVASTAVA, S. C. L.; LAKSHMINARAYAN, A. Records in the classical and quantum standard map. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 74, p. 67–78, 2015.
- 12 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- 13 SILVA, R. M. D. *Efeito stickiness em sistemas conservativos: uma abordagem estatística*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, Joinville, SC, 2015.
- 14 SILVA, R. M. D. *Proliferação de estruturas periódicas em sistemas dinâmicos estocásticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2018.
- 15 MANCHEIN, C. *Estudo das Propriedades de Caos Fraco em Sistemas Conservativos e Intermitentes*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2010.
- 16 LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1992.

- 17 KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk*, v. 98, p. 527–530, 1954.
- 18 MOSER, J. K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, v. 2, p. 1–20, 1962.
- 19 ARNOLD, V. I. Proof of a theorem of a. n. kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the hamiltonian. *Uspekhi Math. Nauk*, v. 18, n. 5, 1963.
- 20 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1996.
- 21 BUNIMOVICH, L. A.; VELA-AREVALO, L. V. Many faces of stickiness in hamiltonian systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 22, n. 2, p. 026103, 2012.
- 22 ZASLAVSKI, G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics reports*, Elsevier, v. 371, n. 6, p. 461–580, 2002.
- 23 ZASLAVSKI, G. M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. New York: Oxford University Press, 2005.
- 24 HANSON, J. D.; CARY, J. R.; MEISS, J. D. Algebraic decay in self-similar markov chains. *J. Stat. Phys.*, Springer, v. 39, n. 3-4, p. 327–345, 1985.
- 25 MEISS, J. D.; OTT, E. Markov-tree model of intrinsic transport in hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 55, n. 23, p. 2741, 1985.
- 26 EFTHYMIOPOULOS, C.; CONTOPOULOS, G.; VOGLIS, N. Cantori, islands and asymptotic curves in the stickiness region. *International Astronomical Union Colloquium*, Cambridge University Press, v. 172, p. 221–230, 1999.
- 27 CONTOPOULOS, G.; HARSOULA, M. Stickiness effects in conservative systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 20, n. 7, p. 2005–2043, 2010.
- 28 ALTMANN, E. G.; MOTTER, A. E.; KANTZ, H. Stickiness in hamiltonian systems: From sharply to hierarchical phase space. *Phys. Rev. E*, APS, v. 73, p. 026207, 2006.
- 29 SHEPELYANSKY, D. L. Poincaré recurrences in hamiltonian systems with a few degrees of freedom. *Phys. Rev. E*, APS, v. 82, n. 5, p. 055202, 2010.
- 30 CHIRIKOV, B. V.; SHEPELYANSKY, D. L. Correlation properties of dynamical chaos in hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, North-Holland, 1984.
- 31 BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J.-M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A*, APS, v. 14, n. 6, p. 2338–2345, 1976.
- 32 OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. characteristic Ijapunov, exponents of dynamical systems. *Trans. Moscow. Math. Soc.*, MSU, v. 19, p. 197–231, 1968.

- 33 VARADHAN, S. R. S. Asymptotic probabilities and differential equations. *Communications on pure and applied mathematics*, v. 19, p. 261–286, 1966.
- 34 ALVES, J. F.; LUZZATTO, S.; PINHEIRO, V. Lyapunov exponents and rates of mixing for one-dimensional maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 24, n. 3, p. 637–657, 2004.
- 35 ALVES, J. F.; LUZZATTO, S.; PINHEIRO, V. Markov structures and decay of correlations for non-uniformly expanding dynamical systems. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, v. 22, n. 6, p. 817–839, 2005.
- 36 ARTUSO, R.; MANCHEIN, C.; SALA, M. Correlation decay and large deviations for mixed systems. In: _____. *Chaos, Complexity and Transport*. [S.l.]: World Scientific, 2017. p. 104–115.
- 37 ARTUSO, R. Correlation decay and return time statistics. *Physica D*, Elsevier, v. 131, p. 68–77, 1999.
- 38 GODRÈCHE, C.; MAJUMDAR, S. N.; SCHEHR, G. Record statistics of a strongly correlated time series: random walks and Lévy flights. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 50, p. 333001, 2017.
- 39 MAJUMDAR, S. N.; ZIFF, R. M. Universal record statistics of random walks and lévy flights. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 101, p. 050601, 2008.
- 40 WERGEN, G. Record in stochastic processes–theory and applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 22, p. 223001, 2013.
- 41 FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications: Volume I*. New York: Wiley India Pvt. Limited, 1968. (Wiley series in probability and mathematical statistics, v. 1).
- 42 SMITH, W. L. Renewal theory and its ramifications. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 20, n. 2, p. 243–284, 1958.
- 43 ANDERSEN, E. S. On the number of positive sums of random variables. *Scandinavian Actuarial Journal*, Taylor & Francis, n. 1, p. 27–36, 1949.
- 44 ANDERSEN, E. S. On the fluctuations of sums of random variables. *Mathematica Scandinavica*, JSTOR, v. 1, p. 263–285, 1953.
- 45 ANDERSEN, E. S. On the fluctuations of sums of random variables II. *Mathematica Scandinavica*, JSTOR, v. 2, p. 195–223, 1954.
- 46 ARTUSO, R. et al. Sparre-andersen theorem with spatiotemporal correlations. *Phys. Rev. E*, APS, v. 89, p. 052111, 2014.
- 47 KLAFTER, J.; SOKOLOV, I. M. *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications*. New York: OUP Oxford, 2011.
- 48 ALTMANN, E. G.; KANTZ, H. Hypothesis of strong chaos and anomalous diffusion in coupled symplectic maps. *Europhysics Letters (EPL)*, IOP Publishing, v. 78, n. 1, p. 10008, 2007.

- 49 OLIVEIRA, T. M.; ARTUSO, R.; MANCHEIN, C. Collapse of hierarchical phase space and mixing rates in hamiltonian systems. *Phys. A*, v. 530, p. 121568, 2019.
- 50 KONISHI, T.; KANEKO, K. Clustered motion in symplectic coupled map systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 25, n. 23, p. 6283–6296, 1992.
- 51 KANEKO, K.; KONISHI, T. Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional hamiltonian system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 71, p. 146–167, 1994.
- 52 HONJO, S.; KANEKO, K. Structure of resonances and transport in multidimensional hamiltonian dynamical systems. In: _____. *Geometric Structures of Phase Space in Multidimensional Chaos*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Ltd, 2005. (Advances in Chemical Physics, v. 130), cap. 22, p. 437–463.
- 53 SILVA, R. M. D.; MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Intermittent stickiness synchronization. *Phys. Rev. E*, APS, v. 99, p. 052208, 2019.
- 54 ALUS, O.; FISHMAN, S.; MEISS, J. D. Universal exponent for transport in mixed hamiltonian dynamics. *Phys. Rev. E*, APS, v. 96, p. 032204, 2017.
- 55 SILVA, R. M. D. et al. Characterizing weak chaos using time series of lyapunov exponents. *Phys. Rev. E*, APS, v. 91, p. 062907, 2015.
- 56 SILVA, R. M. D.; BEIMS, M. W.; MANCHEIN, C. Recurrence-time statistics in non-hamiltonian volume-preserving maps and flows. *Phys. Rev. E*, APS, v. 92, p. 022921, 2015.
- 57 RODRIGUES, C. S.; MOURA, A. P. S. de; GREBOGI, C. Random fluctuation leads to forbidden escape of particles. *Phys. Rev. E*, APS, v. 82, p. 026211, 2010.
- 58 SABIR, B.; SANTHANAM, M. S. Record statistics of financial time series and geometric random walks. *Phys. Rev. E*, APS, v. 90, p. 032126, 2014.
- 59 HOYT, D. V. Weather 'records' and climatic change. *Climatic Change*, v. 3, p. 243–249, 1981.
- 60 OLIVEIRA, L. P. et al. Record dynamics and the observed temperature plateau in the magnetic creep-rate of type-ii superconductors. *Phys. Rev. B*, APS, v. 71, p. 104526, 2005.
- 61 RICHARDSON, T. O. et al. Record dynamics in ants. *PLoS ONE*, v. 5, 2010.
- 62 HARSOULA, M.; CONTOPOULOS, G. Global and local diffusion in the standard map. *Phys. Rev. E*, APS, v. 97, p. 022215, 2018.
- 63 LARRALDE, H.; LEYVRAZ, F.; MARTÍNEZ-MEKLER, G. Transmission and scattering of a lorentz gas on a slab. *Phys. Rev. E*, APS, v. 58, n. 4, p. 4254–4260, 1998.
- 64 MAGALHÃES, W. F. D. *Dinâmica de partículas inerciais acopladas a um meio viscoso*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, Joinville, SC, 2019.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DO MAPA PADRÃO

A dedução aqui apresentada será baseada nas Refs. [2, 6, 13].

Partindo da função Hamiltoniana dada pela Eq. (A.1):

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2I} + K \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (\text{A.1})$$

utilizando as equações de Hamilton (Eq. (2.1)), podemos obter as equações de movimento para o mapa padrão:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{I}, \\ \frac{dp}{dt} &= K \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Analizando as Eqs. (A.2), vê-se que a variação de p é nula para valores não múltiplos de τ (por conta da função delta de Dirac), fazendo com que p assuma um valor constante nos intervalos entre os impulsos. Já a variação de x é constante, fazendo com que o mesmo varie linearmente entre os impulsos. Nos instantes de tempo em que ocorrem os impulsos, p tem seu valor aumentado de forma descontínua, enquanto x tem sua inclinação aumentada de forma contínua e abrupta.

Para que possamos obter o mapa da forma introduzida na dissertação, devemos integrar as Eqs. (A.2). Para isso, integraremos as equações em dois intervalos de tempo: um onde ocorre ação do impulso $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$ e outro no intervalo entre dois impulsos $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$, em que ϵ é um valor infinitesimal. Definindo algumas grandezas:

$$\begin{aligned} p_n^- &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau - \epsilon), & x_n^- &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t = n\tau - \epsilon), \\ p_n^+ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau + \epsilon), & x_n^+ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t = n\tau + \epsilon), \\ p_{n+1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = (n+1)\tau - \epsilon), & x_{n+1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t = (n+1)\tau - \epsilon). \end{aligned}$$

Integraremos primeiro no intervalo $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$, temos então que:

$$x[(n+1)\tau - \epsilon] - x[n\tau + \epsilon] = \frac{p(n\tau + \epsilon)}{I}(\tau - 2\epsilon) \quad (\text{A.3})$$

e

$$p[(n+1)\tau - \epsilon] - p[n\tau + \epsilon] = 0, \quad (\text{A.4})$$

lembrando que o termo referente à delta de Dirac é igual a zero neste intervalo. Aplicando o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, teremos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n^* &= \frac{p_n^*}{I}\tau, \\ p_{n+1} - p_n^* &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Integrando no intervalo em que ocorre o impulso, $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$, obtemos:

$$\begin{aligned} x[n\tau + \epsilon] - x[n\tau - \epsilon] &\simeq \frac{p(n\tau - \epsilon)}{I}\epsilon + \frac{p(n\tau + \epsilon)}{I}\epsilon, \\ p[n\tau + \epsilon] - p[n\tau - \epsilon] &\simeq K \text{sen}[x(n\tau - \epsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, chegamos às equações:

$$\begin{aligned} x_n^* - x_n &= 0, \\ p_n^* - p_n &= K \text{sen}(x_n). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Isolando x_n^* e p_n^* nas equações acima, e substituindo-os na Eq. (A.5), teremos:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \text{sen } x_n, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{\tau}{I} p_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Definimos então $\tau/I = 1$, e chegamos à forma final do mapa padrão:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \text{sen } x_n & [\text{mod } 2\pi], \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 2\pi]. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Para defini-lo nos intervalos apresentados na dissertação, basta trocar as variáveis x_n, x_{n+1} e p_n, p_{n+1} por $x_n/2\pi, x_{n+1}/2\pi$ e $p_n/2\pi, p_{n+1}/2\pi$, respectivamente, e o mapa então fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) & [\text{mod } 1], \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} & [\text{mod } 1]. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DO MAPA DE REDE

A dedução do mapa de rede aqui apresentada é baseada nas Refs. [6, 23, 64].

A função Hamiltoniana do mapa de rede, apresentada na dissertação na Seção 2.3, é dada por:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 x^2) - \frac{\omega_0 K}{\tau} \cos(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{\tau} - n\right). \quad (\text{B.1})$$

Utilizando as equações de Hamilton (2.1) para obter as equações de movimento, temos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = p, \\ \dot{p} &= \frac{dp}{dt} = -\omega_0^2 x - \frac{\omega_0 K}{\tau} \sin(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{\tau} - n\right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Derivando mais uma vez, no tempo, a parte referente a x , obtemos $\ddot{x} = d^2x/dt^2 = dp/dt = \dot{p}$. Sustituindo a expressão de $\dot{p} = dp/dt$ nesta expressão, temos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{\tau} \sin(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{\tau} - n\right). \quad (\text{B.3})$$

Por conta da existência da função delta de Dirac, a mesma análise feita para o mapa padrão (Apêndice A) deve ser feita aqui.

Consideremos dois intervalos, um que abranja a ação da função delta e outro que não: $n\tau - \epsilon < t < n\tau + \epsilon$ e $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$, respectivamente.

Para o caso em que não há ação do impulso, ou seja, no intervalo $n\tau + \epsilon < t < (n+1)\tau - \epsilon$, a equação diferencial de segunda ordem B.2 fica da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{B.4})$$

sendo sua solução conhecida, dada pela função

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t). \quad (\text{B.5})$$

Para determinar as constantes A_0 e B_0 , devemos partir das condições iniciais:

$$x(t=0) = A_0 \cos(\omega_0 0) + B_0 \sin(\omega_0 0) \quad \Rightarrow \quad A_0 = x(0) \quad (\text{B.6})$$

e

$$p(t=0) = \dot{x}(t=0) = x(0)\omega_0 \sin(\omega_0 0) + B_0 \omega_0 \cos(\omega_0 0) \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{p(0)}{\omega_0}. \quad (\text{B.7})$$

Portanto, temos que

$$\begin{cases} x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{p(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \\ p(t) = \frac{p(0)}{\omega_0} \omega_0 \cos(\omega_0 t) - x(0) \omega_0 \sin(\omega_0 t). \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Para o caso em que há o impulso, devemos integrar x e p no intervalo. Definimos então algumas quantidades (assim como feito para o mapa padrão):

$$\begin{aligned} p_n^- &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau - \epsilon), & x_n^- &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t = n\tau - \epsilon), \\ p_n^+ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau + \epsilon), & x_n^+ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t = n\tau + \epsilon) \end{aligned}$$

Integrando x , obtemos:

$$x[n\tau + \epsilon] - x[n\tau - \epsilon] \simeq p(n\tau + \epsilon)\epsilon + p(n\tau - \epsilon)\epsilon \quad (\text{B.9})$$

e, para p , utilizando a propriedade da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax - x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left[a\left(x - \frac{x_0}{a}\right)\right] f(x) dx = \frac{1}{a} f\left(\frac{x_0}{a}\right), \quad (\text{B.10})$$

em que nossa delta é dada por:

$$\delta\left[\frac{1}{\tau}(t - n\tau)\right],$$

temos que:

$$p[n\tau + \epsilon] - p[n\tau - \epsilon] \simeq -\omega_0 K \sin(x(n\tau)) \quad (\text{B.11})$$

Aplicando o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ às expressões encontradas para x e p , temos que:

$$\begin{aligned} x_n^+ - x_n^- &= 0, \\ p_n^+ &= p_n^- - \omega_0 K \sin(x_n). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Considerando o tempo $n\tau + \epsilon$ como o tempo inicial, teremos:

$$x(0) = x_n^+ = x_n^- \quad \text{e} \quad p(0) = p_n^+ = p_n^- - \omega_0 K \sin(x_n). \quad (\text{B.13})$$

Aplicando os dois resultados obtidos acima na Eq. (B.8) e definindo $t = (n+1)\tau$, obtemos:

$$x[(n+1)\tau] = x_n^- \cos[\omega_0(n+1)\tau] + \frac{[p_n^- - \omega_0 K \sin(x_n)] \sin[\omega_0(n+1)\tau]}{\omega_0} \quad (\text{B.14})$$

e

$$p[(n+1)\tau] = [p_n^- - \omega_0 K \sin(x_n)] \cos[\omega_0(n+1)\tau] - x_n^- \omega_0 \sin[\omega_0(n+1)\tau]. \quad (\text{B.15})$$

Dada a periodicidade das funções senoides, os valores destas no tempo $(n+1)\tau$ e τ acaba por ser o mesmo, sendo possível assim substituir seus argumentos. Nomeando $x[(n+1)\tau]$ e $p[(n+1)\tau]$ como x_{n+1} e p_{n+1} , respectivamente, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left[\frac{p_n}{\omega_0} - K \sin x_n \right] \sin(\omega_0\tau) + x_n \cos(\omega_0\tau), \\ p_{n+1} = [p_n - \omega_0 K \sin x_n] \cos(\omega_0\tau) - x_n \omega_0 \sin(\omega_0\tau). \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Substituindo \dot{x} por p , vindo da Eq. (B.2), e dividindo a segunda equação pelo fator ω_0 , temos:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos(\omega_0 \tau) + \left[\frac{\dot{x}_n}{\omega_0} - K \sin(x_n) \right] \sin(\omega_0 \tau), \\ \frac{\dot{x}_{n+1}}{\omega_0} = -x_n \sin(\omega_0 \tau) + \left[\frac{\dot{x}_n}{\omega_0} - K \sin(x_n) \right] \cos(\omega_0 \tau). \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Por fim, invertemos a ordem das equações e definimos as seguintes variáveis: $u = \dot{x}/\omega_0$, $v = -x$ e $\alpha = \omega_0 \tau$, chegando à forma apresentada no texto da dissertação. Portanto, o sistema fica:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n + K \sin v_n) \cos \alpha + v_n \sin \alpha, \\ v_{n+1} = -(u_n + K \sin v_n) \sin \alpha + v_n \cos \alpha. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

APÊNDICE C – MÉTODO DE ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

De forma sucinta, o método de Gram-Schmidt permite obter uma base ortonormal a partir de qualquer base.

Considerando uma base formada pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, construiremos uma nova base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ utilizando a combinação linear dos \mathbf{v}_i vetores. Definindo um vetor unitário

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}; \quad (\text{C.1})$$

e agora, um segundo,

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1}{|\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1|}, \quad (\text{C.2})$$

com a condição de que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, ou seja, que sejam ortogonais entre si. Este procedimento pode ser repetido tanto quanto for necessário, e sua forma generalizada é dada pela expressão [13]:

$$\mathbf{u}_i = \left[\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j \right] \eta_j, \quad (\text{C.3})$$

em que

$$\eta_j = \frac{1}{\left| \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j \right|}. \quad (\text{C.4})$$