UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCIANE GAMBETA

FRAÇÕES E O MÉTODO DE SINGAPURA

JOINVILLE - SC

2023

MARCIANE GAMBETA

FRAÇÕES E O MÉTODO DE SINGAPURA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina UDESC, Centro de Ciências Tecnológicas (CCT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Ligia Liani Barz
Coorientador: Dr. José Rafael Furlanetto

JOINVILLE - SC

2023

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Universitária Udesc, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gambeta, Marciane
Frações e o Método de Singapura / Marciane Gambeta. -- 2023.
150 p.

Orientadora: Ligia Liani Barz
Coorientador: José Rafael Furlanetto
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2023.

1. Frações. 2. Método de Singapura. 3. Ensino Básico. 4. Materiais Concretos. I. Barz, Ligia Liani. II. Furlanetto, José Rafael. III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Titulo.

MARCIANE GAMBETA

FRAÇÕES E O MÉTODO DE SINGAPURA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina UDESC, Centro de Ciências Tecnológicas (CCT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora:

Dra. Ligia Liani Barz
Udesc/Joinville

Membros:

Dr. Luís Henrique de Santana
UEM/Umuarama

Dra. Katiani da Conceição Loureiro
UDESC/Joinville

Joinville, 21 de Julho de 2023.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me proporcionado a vida e inteligência para que eu chegasse até este momento, possibilitando realizar meu grande sonho em se tornar Mestre na disciplina que mais amo, a Matemática.

Agradeço a meus pais e minha família por comemorarem junto à mim os momentos felizes e também me consolar nos momentos tristes. Mas meu maior agradecimento vai para minha mãe, por não deixar eu desistir nas dificuldades e me incentivar a prosseguir sem que eu tivesse forças para isso.

Com grande carinho, agradeço aos meus professores ao longo deste mestrado, principalmente a Professora Doutora Ligia Liani Barz e o Professor Doutor José Rafael Furlanetto, por ter tido paciência comigo nesta construção da dissertação.

Não posso deixar de agradecer a direção da escola onde apliquei as atividades relacionadas a esta dissertação e aos alunos do oitavo ano que colaboraram e se esforçaram para que os resultados finais fossem positivos, para sempre estarão guardados em meu coração.

Por fim, agradeço de coração as amizades feitas ao longo do mestrado e aquelas que foram renovadas. Em especial ao Jucemir, Luiz, Silvana, Matheus, Vanessa e Marilete, obrigada pelas horas de estudo compartilhadas, pelos choros e risadas e pelo apoio desde sempre. Que a nossa amizade seja ao infinito e além.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos o estudo e aplicação do Método de Singapura no ensino de frações em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental, além do desenvolvimento de um produto educacional, baseados na coleção de livros *The pals are here!*. As aplicações em sala de aula abordam os tópicos de frações equivalentes, comparação e ordenação de frações e as operações básicas. Cada aula foi estruturada em seis etapas: atividade inicial, exemplo resolvido, atividade principal, conclusões, atividade avaliativa e atividade complementar. O valor pedagógico neste formato de aula concilia a metodologia de Singapura com a resolução de problemas em um procedimento diferente do tradicional, visando colaborar com os professores na organização de suas práticas com o objetivo de proporcionar um modelo de aprendizagem mais envolvente e centrado no aluno. Neste modelo, esperamos que o aluno perceba a importância de compreender as relações matemáticas e as suas estruturas de modo a alcançar conhecimento mais fundamentado do conteúdo. Por fim, o produto educacional gerado contém as atividades propostas nas aplicações e questões adicionais, dicas e sugestões para os professores sobre as questões e procedimentos, além de descrição dos materiais necessários em cada aula.

Palavras-chave: Frações. Método de Singapura. Ensino Básico. Materiais Concretos.

ABSTRACT

This work aims to study and apply the Singapore Method in teaching fractions in an eighth grade elementary school class, in addition to the development of an educational product, based on the book collection *The pals are here!*. Classroom applications cover the topics of equivalent fractions, comparing and ordering fractions, and basic operations. Each class was structured in six stages: initial activity, solved example, main activity, conclusions, evaluation activity and complementary activity. The pedagogical value of this class format reconciles the Singapore methodology with problem solving in a different procedure than the traditional one, aiming to collaborate with teachers in organizing their practices in order to provide a more engaging and student-centered learning model. In this model, we hope that the student realizes the importance of understanding mathematical relationships and their structures in order to achieve more grounded knowledge of the content. Finally, the generated educational product contains the activities proposed in the applications and additional questions, tips and suggestions for teachers about the questions and procedures, as well as a description of the materials needed in each class.

Keywords: Fractions. Singapore method. Basic education. Concrete Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O que são frações? De acordo com Castrucci e Júnior (2018), frações são representações utilizadas para indicar partes de uma figura, relacionando-as à ideia do resultado da divisão de dois números. Segundo Boyer (1996) e Castrucci e Júnior (2018), o surgimento de culturas mais avançadas durante a Idade de Bronze sugere a necessidade do conceito de fração e de suas notações.

Na compreensão de Boyer (1996) e Castrucci e Júnior (2018), sabemos que as frações começaram a ser utilizadas no antigo Egito. Os grupos familiares que dividiam as terras que margeavam o rio Nilo precisavam pagar tributos ao Estado e como o rio sofria inundações periódicas, era necessário medir e remarcar as terras, pois os tributos eram pagos de forma proporcional à área que era cultivada. Logo, as frações surgiram da necessidade de representar medidas que não possuem uma quantidade inteira de números.

No nosso cotidiano, podemos encontrar a aplicação dos conceitos de fração tanto em uma receita de bolo, quanto no ambiente escolar. Cujo conteúdo é abordado ao longo da história da educação. Conforme Morais, Bertini e Valente (2021), na metade do século XIX, o ensino de frações tinha como finalidade ser útil para os estudantes fora da escola e o professor deveria ensinar buscando relacionar com as demandas da vida cotidiana. Atualmente, os professores também devem preparar seus alunos para as atividades cotidianas, mas principalmente, construir o conhecimento de modo que eles saibam aplicar o que aprendem nas mais diversas situações, podendo estar relacionadas com outras áreas de conhecimento.

No ambiente escolar, as frações estão presentes no currículo desde o ensino fundamental até o ensino superior. Sendo um dos objetos de estudo mais trabalhados na disciplina de Matemática. Porém, mesmo tendo contato com os conceitos de frações e as operações que envolvem os números fracionários desde o terceiro ano do ensino fundamental, os estudantes que estão entre o sexto e nono anos desta mesma fase escolar ainda continuam apresentando uma grande dificuldade em dar significado para as frações e, principalmente, aplicar de forma correta os algoritmos necessários para resolver situações que envolvam frações. Em geral, o ensino de frações nas escolas usa uma abordagem de aplicação direta dos algoritmos de resolução nos problemas, que chamamos de método tradicional de ensino.

Com o propósito de sanar as dificuldades dos alunos, julgamos necessário encontrar um meio de ensino diferenciado do tradicionalmente usado. A aplicação de um novo método de ensino deve ter como objetivo a construção do conhecimento através do uso mais frequente de materiais concretos e desenhos em diversas etapas, fazendo com que os estudantes identifiquem e compreendam o significado de frações, as noções de equivalência e desenvolvam os algoritmos necessários para calcular os resultados das operações básicas que envolvam frações. Com esse pressuposto destacamos os trabalhos a seguir.

Ao pesquisar Métodos de Ensino com propostas diferentes do tradicional, foram analisados vários trabalhos referentes a possíveis metodologias de ensino. O artigo *Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between chinese and singaporean students* dos autores Chunlian Jiang e Boon Liang Chua, em 2010, apresenta os resultados de um estudo comparativo entre os estudantes chineses e singapurianos.

Neste estudo, foram propostos aos estudantes três problemas que envolvem o conceito de velocidade relacionado ao movimento de objetos, tendo como objetivo verificar os diferentes métodos de resolução utilizados pelos alunos chineses e singapurianos. O nível de dificuldade em relação às situações apresentadas é crescente, ou seja, a resolução do primeiro problema é mais simples que a do segundo, tendo a resolução do segundo problema um nível de dificuldade menor do que o terceiro problema. De acordo com Jiang e Chua (2010), o primeiro problema envolve adição e subtração de frações, a segunda questão envolve a multiplicação de frações e o terceiro problema envolve a divisão de frações.

Ao analisar as resoluções apresentadas pelos estudantes, foi possível identificar as principais diferenças entre os métodos de resolução utilizados pelos estudantes chineses e singapureanos. Os estudantes chineses utilizaram na maior parte das resoluções, estratégias aritméticas e algébricas, de forma semelhante ao ensino tradicional. Porém, os estudantes sinpapurianos aplicaram o *Model Method*, sendo um método baseado no uso de figuras, diagramas e gráficos para representar as situações propostas, e desta forma, encontrar a solução correta. Alguns estudantes de Singapura também utilizaram o *Unitary Method*, que envolve o cálculo do valor de uma unidade da quantidade apresentada no enunciado, para assim, obter o valor equivalente à quantidade total.

Outro artigo analisado foi escrito por Dárida Fernandes em 2017, com o título “Sendas de Sucesso com o Método de Singapura”, onde mostra a melhora dos resultados alcançados pelos estudantes de Portugal nas mais variadas avaliações internacionais, como o *Programme for International Student Assessment* (PISA), promovido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), e também a avaliação *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), que é promovido pela *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA). Os bons índices apresentados são considerados como resultados das aplicações do método de ensino de

Singapura nas escolas de Portugal. Ao decorrer do artigo, o objetivo principal é descrever a metodologia de ensino de Singapura, incluindo o relato do desenvolvimento da educação no pais, as teorias que baseiam este método de ensino e a apresentação de exemplos de aplicação do Método de Singapura nos mais diversos contextos matemáticos.

Por fim, podemos citar a dissertação de mestrado escrita por José Carlos Medeiros dos Santos em 2019, tendo como título "Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo Método de Singapura". Conforme Santos (2019), o material analisado tem como objetivo mostrar a importância do Método de Singapura no ensino de frações.

A aplicação deste trabalho, ocorreu em uma turma de sétimo ano e teve como resultado a melhora na construção dos conceitos relacionados a fração devido à utilização do Método de Singapura.

Tendo como base os trabalhos pesquisados e seus respectivos resultados, o método de ensino escolhido para a aplicação em sala de aula é o mesmo adotado em Singapura. Nesta metodologia, são utilizados materiais concretos como meio de iniciar a construção do conhecimento, passando para o uso de desenhos para representar as situações apresentadas aos estudantes e, por fim, consolidar o conhecimento de forma abstrata.

Conforme Teixeira (2015) e Fernandes (2017), o Método de Singapura é baseado em três teorias principais, que são a abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA), os princípios de variabilidade matemática que apontam para a necessidade de utilizar diversos exemplos, contextos e representações na aprendizagem de um conceito e, por fim, a importância de estabelecer conexões e compreender as relações matemáticas e sua estrutura.

A aplicação deste Método de Ensino tem como objetivo construir os conhecimentos necessários para que os estudantes possam resolver situações que envolvam frações e esta aplicação ocorre através de uma série de atividades, onde os estudantes podem manipular materiais concretos como Barra de Frações e Fração em Pizza e também materiais diversos, como por exemplo, tampinhas de garrafa PET.

As atividades elaboradas para as aulas foram baseadas na coleção de livros *My pals are here!*, cuja coleção é utilizada nas escolas de Singapura e é aprovada pelo Ministro da Educação do mesmo país.

Os tópicos abordados nas aulas foram as frações equivalentes, comparação e ordenação de frações e as operações básicas que envolvem frações, como a adição, subtração, multiplicação e divisão. As atividades foram divididas em Atividade Inicial, onde os estudantes deveriam encontrar soluções para as situações apresentadas utilizando os materiais concretos e seus conhecimentos prévios, e as resoluções de Exemplos Resolvidos, onde a professora resolvia as questões juntamente com a participação dos estudantes ao manipularem os materiais disponíveis.

Na sequência, os estudantes resolveram as Atividades Principais, cujas resoluções eram feitas ao aplicar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. Ao serem verificadas as soluções encontradas, a professora junto com os estudantes, concluíam sobre qual seria o algoritmo necessário para resolver determinada situação. Por fim, os estudantes resolviam as Atividades Avaliativas, de modo a verificar o nível de entendimento dos conceitos trabalhados, e as Atividades Complementares, que eram propostas como atividades extras em sala de aula ou para serem respondidas como tarefa de casa. Estas atividades, junto com outras sugestões como resoluções de problemas e desafios, deram origem ao Produto Educacional.

O Produto Educacional é apresentado no formato de um Caderno de Atividades, onde estão presentes as atividades realizadas durante as aplicações em sala de aula conforme os tópicos abordados. Neste material, é apresentada uma sequência didática para ser aplicada em um tempo médio de doze aulas, onde cada aula tem a duração de quarenta e oito minutos. Em cada tópico há a descrição dos objetos de estudo, habilidades e objetivos que serão trabalhados conforme o currículo estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Foram acrescentadas informações de interesse do professor sobre os materiais que poderão ser utilizados, sugestão de condução das atividades e questões extras que podem ser propostas como atividades complementares.

Ainda no Caderno de Atividades, está presente uma seleção de questões extraídas das provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), cujas questões necessitam de conhecimentos relacionados à fração para que os estudantes tenham êxito nas resoluções.

De modo geral, esta dissertação é dividida em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresenta as Propostas Curriculares das escolas de Singapura e do Brasil, finalizando com uma comparação entre os programas de ensino destes dois países. O Capítulo 2 traz a história do ensino de frações no Brasil, a proposta de ensino de frações de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a BNCC. No Capítulo 3 há a descrição da forma de ensino das frações em Singapura. No Capítulo 4, são descritas as atividades que foram utilizadas durante a aplicação do Método de Singapura no ensino de frações em uma turma do oitavo ano do ensino fundamental, contendo a análise dos dados coletados, as dificuldades, sugestões e os resultados alcançados. No Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais. Por fim, no Apêndice A, temos o Produto Educacional gerado neste trabalho.

2 COMPARAÇÃO DOS PROGRAMAS DE ENSINO DE SINGAPURA E DO BRASIL

Este capítulo tem como objetivo conhecer os programas de ensino de Singapura e do Brasil. A escolha em estudar o processo de ensino deste pequeno país, com extensão territorial de 728,6 km^2, é o nível de aprovação conquistado nas mais diversas avaliações internacionais, principalmente no que se refere aos conhecimentos e habilidades relacionadas à matemática. Após a análise dos programas de ensino, será realizada a comparação entre as propostas educacionais dos dois países acima mencionados, com o objetivo de identificar os pontos que os diferenciam e aqueles que lhe são comuns.

2.1 EDUCAÇÃO EM SINGAPURA

Singapura é uma Cidade-Estado que se encontra na ponta sul da Península Malaia e é um país insular formado por 63 ilhas, sendo separado da Malásia pelo Estreito de Johor, ao norte, e das ilhas Riau (pertencentes a Indonésia) pelo Estreito de Singapura, ao sul. Cinco milhões de pessoas vivem atualmente em Singapura, apresentando umas das maiores densidades populacionais do Planeta.

Após a sua independência do Império Britânico, o país sofreu com o subdesenvolvimento e as altas taxas de desemprego, pois a pequena ilha não possuía recursos naturais. Para suprir as necessidades do país em termos do desenvolvimento financeiro e atingir a real independência e a soberania da nação, começaram a ser implantada estratégias com o objetivo de construir recursos humanos aptos para alcançar as metas do governo. Para atingir este fim, o sistema educacional buscou desenvolver uma população alfabetizada e tecnologicamente treinada. Conforme Lee, Goh e Fredriksen (2008), em 1965 e nos anos subsequentes, foi enfatizada a ligação entre a educação e o desenvolvimento econômico, onde os governantes desenvolveram novas habilidades e atitudes no desempenho de suas atividades para acomodar as novas estratégias econômicas. A integração nacional através de um sistema educacional foi condição essencial para uma economia de sobrevivência.

Ultimamente, os estudantes de Singapura participam de avaliações internacionais de aprendizagem, por exemplo, a avaliação PISA que é promovido pela OCDE. De acordo com Fernandes (2017), a avaliação PISA é aplicada desde 2.000 com periodicidade trianual e avalia os alunos de 15 anos em três domínios que enfatizam, de forma rotativa em um segmento principal, as capacidades de mobilização de conhecimentos e competências de leitura, matemática e ciências na resolução de problemas. Na Literacia Matemática é avaliada a capacidade dos estudantes em formular, aplicar e interpretar a matemática em contextos diversos e formular opiniões e decisões, como cidadão que seja participativo, empenhado e reflexivo. Em 2012, o domínio principal avaliado pelo PISA foi a Literacia Matemática e Singapura conseguiu o melhor resultado no âmbito internacional.

Em Singapura, no entender de Fernandes (2017), o processo de aprendizagem e ensino da Matemática é fundamentado no conhecimento profundo da ciência matemática. Os futuros professores do ensino primário são formados de modo a adquirir conhecimento sólido sobre as matérias que vão lecionar e aprender as didáticas específicas da área. Para que isso ocorra, os melhores alunos são estimulados a seguir a carreira de professor, utilizando como incentivo o reconhecimento da sociedade por serem promotores da produção de conhecimento junto das crianças e dos jovens, contribuindo assim, para a melhoria da qualidade de formação das gerações futuras.

Os bons resultados são conquistados pela importância que é dada para a educação em Singapura e conforme Teixeira (2016), o Ministério da Educação tem como visão oficial *"Thinking School, Learning Nation"* (Escola que pensa, Nação que aprende) e tem como objetivo preparar uma geração de cidadãos que saibam pensar e contribuir para um crescimento contínuo e próspero de Singapura.

Segundo Fernandes (2017), "as didáticas específicas fundamentam-se numa matriz teórica consistente e com provas dadas, concretamente, nos estudos de Jean Piaget, Jerome Bruner, Lev Vygotsky, Zoltan Dienes, George Polya e Richard Bruner". Nas palavras de Teixeira (2015) e Fernandes (2017), o Método de Singapura é baseado em três teorias principais:

1ª Teoria: Desenvolvida por Jerome Bruner, aborda a metodologia baseada em Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA). De acordo com Bruner, Piaget e Vygotsky, não é possível aprender matemática sem a manipulação de materiais e a discussão de ideias.

2ª Teoria: Desenvolvida por Zoltan Paul Dienes, aborda os princípios de variabilidade matemática e perspectivas que apontam para o uso de diversos exemplos, contextos e representações na aprendizagem de um conceito. Zoltan também defende a necessidade de selecionar os conteúdos a lecionar, ter intencionalidade pedagógica na escolha das tarefas de forma crítica e dar enfoque a uma prática que faz sentido para o estudante.

3ª Teoria: Desenvolvida por Richard Skemp, aborda a importância de estabelecer conexões e compreender as relações matemáticas e a sua estrutura, tendo como objetivo alcançar maior conhecimento das matérias estudadas. De acordo com Skemp, o processo de aprendizagem e ensino da Matemática tem a necessidade de incluir a convenção simbólica, os aspectos conceituais e outras que são de natureza procedimental.

No método de ensino de Singapura, de acordo com Fernandes (2017), a criança é arquiteta ativa de sua aprendizagem e aprende pela ação sobre os objetos através de processos internos de assimilação e de acomodação. E isto ocorre pelo fato da criança aprender de forma integral o conhecimento anterior para servir de suporte para sustentar o novo aprendizado, confirmando assim a ordenação dos temas do currículo sem saltar etapas, pois um novo tema é introduzido somente quando os conteúdos necessários para explorar o próximo tema já estejam devidamente consolidado.

Conforme as teorias apresentadas, o método utilizado tem como princípio o desenvolvimento da compreensão de conceitos antes de apresentar as técnicas de resolução. Para que os estudantes desenvolvam os conceitos trabalhados, são realizadas atividades que utilizam abordagens visuais e materiais concretos, antecedendo desta forma à aprendizagem formal da matemática que terá um entendimento mais simples. Os principais meios para isto, é o investimento na formação inicial e contínua dos professores, disponibilidade de bons materiais didáticos e medidas de acompanhamento individual dos alunos durante o ensino obrigatório. O programa de ensino se baseia no princípio que os estudantes são curiosos, ativos e competentes e que o professor será o facilitador da aprendizagem das crianças.

A proposta curricular foi construída de acordo com as necessidades dos alunos, buscando a construção de uma base sólida em matemática e também a melhora da educação matemática nas escolas. Na visão do Ministério da Educação de Singapura (2012), no ensino de nível primário, o programa de ensino da disciplina de Matemática é igual para todos os alunos, porém no nível secundário, primeiramente são fornecidos aos estudantes cursos básicos de habilidades e conhecimentos de matemática e em seguida são disponibilizados vários programas de ensino de matemática que procuram respeitar a aptidão de cada aluno, ou seja, aqueles alunos que apresentam maior facilidade para aprender matemática podem escolher cursar o restante do curso em quatro anos ao invés de cinco anos. No nível final do ensino secundário, os estudantes que querem se dedicar a uma profissão que necessite de um alto nível de conhecimento matemático podem fazer disciplinas eletivas de matemática para aprofundar os seus conhecimentos e habilidades.

As metodologias utilizadas não têm o conteúdo como item de maior relevância, mas sim, o desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas. Ou seja, na compreensão do Ministério da Educação de Singapura (2012), o que importa é como os alunos aprendem. Para que a melhoria na educação em Singapura de fato aconteça, é proporcionado aos professores o uso de recursos e treinamento para o desenvolvimento das capacidades destes.

Conforme Ministério da Educação de Singapura (2012), os principais objetivos da educação matemática em Singapura são permitir que os alunos possam:

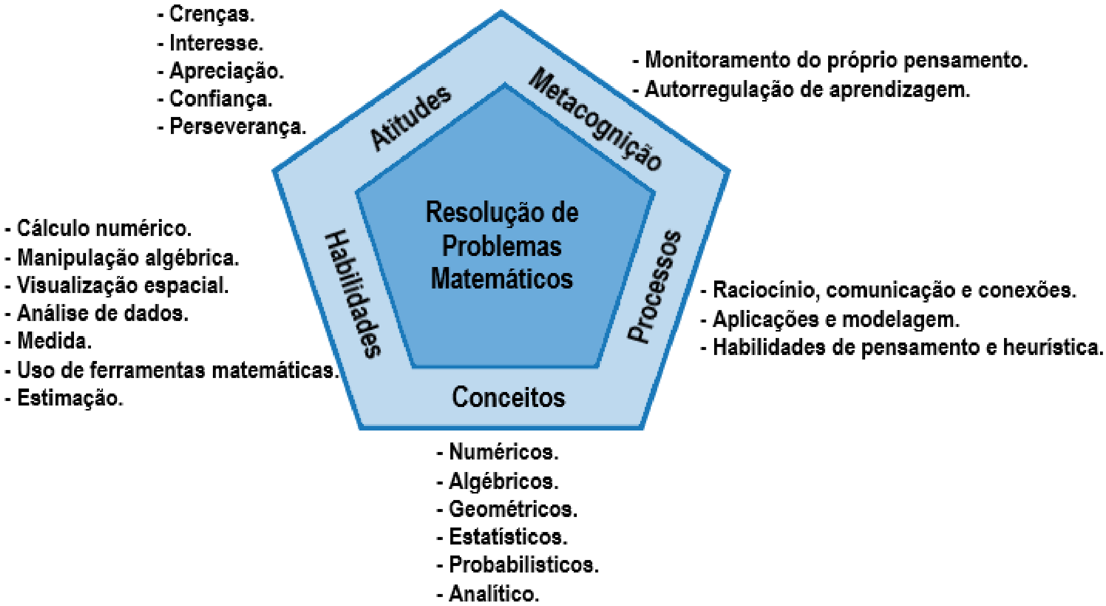
1º. Adquirir e aplicar conceitos e habilidades matemáticas.

2º. Desenvolver habilidades cognitivas e metacognitivas através da resolução de problemas.

3º. Desenvolver atitudes positivas em relação a matemática.

A estrutura matemática é a principal característica do currículo de matemática e o seu foco principal é a resolução de problemas matemáticos. De acordo com Ministério da Educação de Singapura (2012), esta estrutura matemática define a direção e fornece orientações para o ensino, aprendizagem e avaliação matemática para todos os níveis de ensino, enfatizando a compreensão conceitual, proficiência em habilidades, processos matemáticos, atitudes e metacognição. A estrutura do currículo de matemática de Singapura é representado na Figura 1.

Figura 1 – Estrutura do Currículo de Matemática



Fonte: Produção própria, conforme Ministério da Educação de Singapura (2012)

Conceitos: Os conceitos matemáticos são agrupados em numérico, algébrico, geométrico, estatístico, probabilístico e conceitos analíticos. Estas categorias são conectadas e interdependentes em diferentes estágios de aprendizagem e programas, e podem variar na amplitude e na profundidade trabalhada.

Habilidades: As principais habilidades matemáticas trabalhadas são: cálculo numérico, manipulação algébrica, visualização espacial, análise de dados, medida, uso de ferramentas matemáticas e conceito.

Processos: O processo matemático envolve o método de adquirir e aplicar conhecimento matemático, incluindo o raciocínio, comunicação e conexões, aplicações e modelagem, habilidades de pensamento e heurística.

- Raciocínio matemático: É a habilidade de analisar situações matemáticas e construir argumentos lógicos através da aplicação matemática em vários contextos.
- Comunicação: É a habilidade de usar a linguagem matemática para expressar ideias e realizar argumentos de forma lógica, precisa e concisa.
- Conexões: É a habilidade de ver e realizar ligações entre as ideias matemáticas, entre a matemática e outros conhecimentos, e entre a matemática e o mundo real do estudante.
- Aplicações e modelagem: Permite aos estudantes conectar a matemática ao mundo real, aumentar o conhecimento sobre os conceitos matemáticos e métodos de resolução, e também desenvolver competências matemáticas. A modelagem matemática é o processo de formulação e melhora de modelos matemáticos com o objetivo de representar e resolver problemas da vida real.
- Habilidades de pensamento: As habilidades de pensamento permitem classificar, comparar, analisar partes e o todo, identificar padrões e relações, induzir, deduzir, generalizar e também proporciona a visualização espacial.
- Heurística: A heurística permite aos alunos resolver problemas matemáticos cujas soluções não são encontradas de forma óbvia. Para as resoluções, podem ser utilizadas representações, tentativas e erro e também a análise do processo de resolução e modificação deste se necessário, utilizando para este fim, a simplificação de problemas e a consideração de casos especiais.

Metacognição: A metacognição é a consciência e habilidade de controlar os processos de pensamento, tendo como objetivo selecionar e usar estratégias para a resolução de problemas através da monitoração do próprio pensamento e a autorregulação da aprendizagem. Para desenvolver a consciência metacognitiva e estratégias para saber quando e como usar uma determinada estratégia é importante que os alunos tenham a oportunidade de resolver problemas abertos e não rotineiros, discutir e refletir as soluções encontradas realizando mudanças quando necessário.

Atitudes: As atitudes referem-se às crenças sobre a matemática e a sua utilidade, o interesse e o prazer em aprender matemática, apreciar a beleza e o poder da matemática, confiar no seu uso e também perseverar na resolução de problemas. Essas atitudes positivas são moldadas através de experiências de aprendizagem divertidas, significativas e relevantes em direção a um determinado assunto, que podem ser desenvolvidas utilizando atividades de aprendizagem que constroem a confiança e desenvolvem a apreciação da matemática.

Para que sejam cumpridos os objetivos do currículo, os estudantes devem ter a oportunidade de tomar notas e organizar de forma que seja significativa para eles, praticar habilidades básicas de matemática para que tenha total domínio, utilizar *feedback* das avaliações para melhorar a aprendizagem, utilizar a heurística para resolver novos problemas, desenvolver o raciocínio através da discussão, articulação e explicação das ideias para os demais estudantes e professores e devem ser realizados projetos que envolvam modelagem.

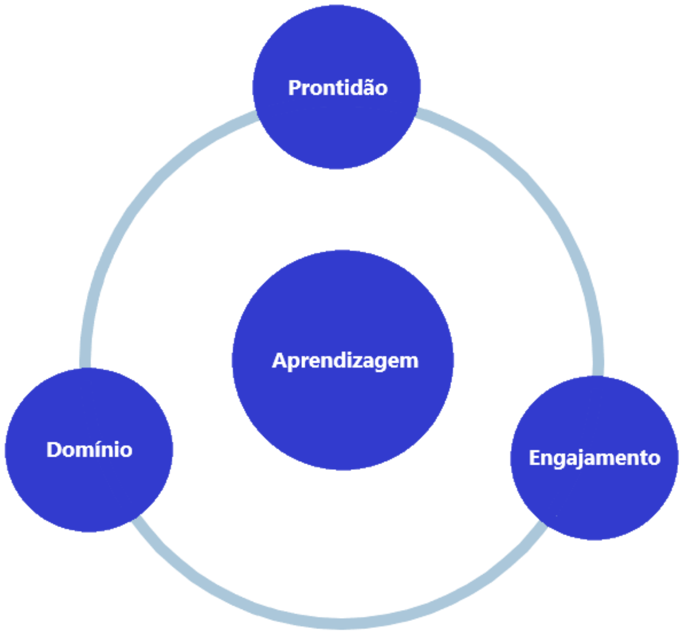
O processo de ensino é focado na aprendizagem dos alunos, onde os professores usam várias abordagens de ensino para que haja engajamento dos estudantes. É comum ocorrer uma constante avaliação dos estudantes em relação aos professores sobre o aprendizado alcançado através do programa de ensino e também a avaliação dos professores para a tomada de decisões afim de melhorar o aprendizado. Sendo assim, as atividades realizadas devem ser conectadas com o mundo real e ter como principais objetivos a construção do conhecimento considerando sempre os conceitos que são pré-requisitos, os interesses dos alunos e as experiências vividas, e que o estudante seja capaz de ter uma ação ativa e reflexiva sobre a sua aprendizagem.

De acordo com Ministério da Educação de Singapura (2012), a aprendizagem é realizada através de três fases como apresentado na Figura 2.

Prontidão: Nesta fase o professor deve planejar as aulas sabendo se os estudantes possuem os conceitos e habilidades que são pré-requisitos para a nova aprendizagem e isso pode ser verificado através de avaliações diagnósticas com o objetivo de verificar se os estudantes estão prontos para aprender. Após identificar o conhecimento prévio dos alunos, os professores precisam providenciar contextos motivacionais para a aprendizagem que pode ser o uso de histórias, músicas, jogos, situações relacionadas ao dia-a-dia onde eles possam ver a relevância e o significado da matemática e também a aplicação em outras disciplinas. Porém, para que o aprendizado seja efetivo, é necessário um ambiente de aprendizagem onde hajam regras compartilhadas que ajudarão a ter respeito e interações emocionalmente seguras entre o professor e os alunos, sendo promovido através de procedimentos estabelecidos para organizar os alunos e recursos gerenciados.

Engajamento: Esta é a fase onde os professores usam um repertório de métodos

Figura 2 – Fases de Aprendizagem



Fonte: Produção própria, conforme Ministério da Educação de Singapura (2012)

pedagógicos para que o estudante esteja engajado na aprendizagem de novos conceitos e habilidades, onde essas metodologias são a aprendizagem baseada em atividades, consulta dirigida pelo professor ou instruções diretas.

No uso de atividades para construir conhecimentos inerentes ao conteúdo proposto, o estudante deve resolver situações em que ele explore e aprenda conceitos e habilidades de forma individual ou em grupo, onde serão utilizados recursos manipuláveis ou outros materiais que tenham como objetivo construir sentido e promover o entendimento sobre o conteúdo que está sendo abordado. Na sequência, os estudantes devem ser guiados para os conceitos matemáticos abstratos ou resultados. Ainda durante as aulas, podem ser propostas atividades em que os estudantes realizam investigações guiadas pelo professor, onde os estudantes devem explorar, investigar e encontrar respostas por si próprios, ou seja, focar em uma questão específica e estarem dispostos para comunicar, explicar e refletir sobre as suas respostas. Porém, o professor pode utilizar nas suas aulas instruções diretas, onde este irá introduzir, explicar e demonstrar novos conceitos e habilidades. Este novo método é interessante quando os estudantes são informados sobre o que eles irão aprender e o que se espera deles. Para que a classe se mantenha estimulada podem ser utilizados vídeos, imagens gráficas, contextos da vida real, entre outro recursos.

Domínio: Nesta fase, o professor irá ajudar os estudantes a consolidar e estender a sua aprendizagem e para isto, as atividades devem ser motivacionais e divertidas, envolvendo situações com repetições ou variações, de forma que os estudantes alcancem proficiência e flexibilidade para utilizar os conceitos e habilidades trabalhados. O domínio do conteúdo também ocorre quando os estudantes realizam atividades onde consolidam e aprofundam sua aprendizagem através da reflexão dos conhecimentos adquiridos como, por exemplo, o uso de mapas conceituais e escrever jornais que refletem o que foi aprendido, e permite fazer conexões entre as ideias matemáticas e outras áreas de conhecimento.

2.2 EDUCAÇÃO NO BRASIL

Em nosso país, o Brasil, o currículo nacional das escolas de ensino infantil, fundamental e médio das escolas públicas e privadas é baseado pela BNCC. Segundo o Ministério da Educação do Brasil (2017), a BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo das aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver durante as etapas de ensino e as modalidades da Educação Básica, com o objetivo que todos os alunos tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento conforme o Plano Nacional de Educação (PNE).

Durante a Educação Básica, as aprendizagens que são essenciais devem assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências que faz com que os direitos de aprendizagem e desenvolvimento sejam alcançados. O Ministério da Educação do Brasil (2017) define competências da seguinte forma:

> Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

As competências gerais da Educação Básica se inter-relacionam e desdobram-se no tratamento didático que é proposto nas três etapas da Educação e se articulam para construir conhecimentos, desenvolver habilidades e formar atitudes e valores como afirma Ministério da Educação do Brasil (1996). Estas competências são adaptadas conforme à disciplina a ser trabalhada, no caso da Matemática, busca-se:

- Reconhecer a Matemática como uma ciência humana que surgiu das necessidades e preocupações de diferentes culturas ao longo da história da humanidade, e como uma ciência viva que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para dar alicerce as descobertas e construções, podendo assim, impactar no mundo do trabalho.
- Desenvolver o raciocínio lógico, a investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes a partir dos conhecimentos matemáticos.
- Compreender as relações entre os conceitos e procedimentos da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, inclusive com outras áreas do conhecimento,

buscando a capacidade de construir e aplicar os conhecimentos matemáticos na busca de soluções.

- Fazer observações de aspectos quantitativos e qualitativos que estão presentes nas práticas sociais e culturais, de forma a investigar, organizar, representar e comunicar informações importantes, buscando interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos que sejam convincentes.

- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, incluindo as tecnologias digitais, para ser possível modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento. Buscando assim, validar estratégias e resultados.

- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, expressar suas respostas e sintetizar conclusões utilizando diferentes registros e linguagens.

- Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, principalmente, as questões de urgência social. Tendo como base os princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, buscando valorizar a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais.

- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas que respondam à questionamentos e buscando soluções de problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão. Esta interação deve respeitar o modo de pensar das demais pessoas do grupo e aprender junto a eles.

A construção do currículo surge a partir do desenvolvimento das competências, indicando desta forma, o que os alunos devem saber (construção de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e principalmente, o que devem saber fazer aplicando todos os conhecimentos aprendidos no ambiente escolar para resolver demandas da vida cotidiana, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho. No currículo nacional, as competências e as diretrizes devem ser trabalhadas de forma comum em todo o território brasileiro, porém os currículos são diversos. O Ministério da Educação do Brasil (1996) afirma que em todos os níveis de ensino deve ser complementada a base nacional comum, que são as aprendizagens essenciais, porém em cada região deve haver uma parte diversificada de acordo com as características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. Sendo assim, cabe às escolas elaborar propostas pedagógicas que considerem as necessidades, as possibilidades, os interesses do alunos e também as identidades linguísticas, étnicas e culturais.

No âmbito escolar, os conteúdos dos componentes curriculares devem ser contextualizados a partir da identificação de estratégias sobre a forma que serão apresentados, representados, exemplificados e conectados, fazendo que se tornem significativos para os estudantes ao levar em conta a realidade do lugar e o período de tempo onde as aprendizagens estão situadas. Para isso, é necessário promover a organização interdisciplinar dos componentes curriculares e realizar a formação pedagógica das equipes escolares para a adoção de estratégias que sejam mais dinâmicas, interativas e colaborativas para a gestão de ensino e aprendizagem.

Sabendo que o ritmo de aprendizagem pode ser diferente se compararmos os nossos estudantes, é necessário que o professor selecione e aplique metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas com ritmos diferentes, utilize conteúdos complementares e possibilite experiências onde o aluno tenha contato com situações práticas e com a realização de procedimentos diversos, possibilitando assim, suprir as necessidades dos alunos e da comunidade e também motivar e engajar os alunos no processo de aprendizagem.

A avaliação formativa deve ser feita a partir de procedimentos pré-estabelecidos e tem como finalidade avaliar os processos e os resultados, levando em conta o contexto e as condições de aprendizagem. É válido ressaltar a importância de ter como foco principal a busca de referências para promover a melhora do desempenho da escola, dos professores e dos alunos.

2.3 COMPARANDO OS PROGRAMAS DE ENSINO DE SINGAPURA E DO BRASIL

Ao analisar os programas de ensino de Singapura e do Brasil, é possível identificar pontos em comum e também várias divergências. A dedicação à educação em Singapura surgiu com o objetivo de tornar a população alfabetizada e preparada para exercer funções em postos de trabalho que necessitem de aptidões como raciocínio lógico, tomada de decisões e para utilizar a tecnologia da melhor forma possível, tendo como objetivo o desenvolvimento da economia do país. No Brasil, conforme as palavras de Smarjassi e Arzani (2021), os direitos garantidos pela legislação nem sempre se tornam oportunidades de acesso à escola pública de qualidade, principalmente quando os estudantes pertencem às classes menos favorecidas.

Uma das diferenças mais relevantes entre a formação dos professores brasileiros e singapurenses é o incentivo aos estudantes para seguir na profissão de professor e a preparação dos seus professores para exercer suas funções. Em Singapura, os melhores alunos são estimulados a seguir carreira como professor e os professores do ensino primário são preparados de forma a adquirir, primeiramente, conhecimentos sólidos sobre os conteúdos que serão ministrados e qual é a didática necessária para aumentar o nível de aprendizagem dos estudante. Nos últimos anos, as redes de ensino no Brasil estão procurando oportunizar formações aos professores, mas não é uma realidade em toda a extensão do país. Considerando a cidade de Joinville, a rede municipal de ensino proporciona formações aos seus professores de forma presencial em cada mês do ano letivo, havendo trocas de experiências, apresentação de métodos de ensino e treinamento para uso de recursos tecnológicos disponíveis nas unidades escolares.

Em relação aos métodos de ensino aplicados nas escolas destacamos que, a principal divergência entre os dois países que estão sendo comparados é como os conhecimentos e habilidades são trabalhados em Singapura. Neste país, conteúdos matemáticos devem ser trabalhados utilizando de modo contínuo a manipulação de materiais e a discussão de ideias, possibilitando aos estudantes descobrir por si mesmos os conhecimentos para que depois estes sejam trabalhados de forma abstrata. Já no Brasil, o livro didático adotado nas escolas municipais de Joinville, com o título “A Conquista da Matemática”, apresenta atividades que envolvem a construção do conhecimento, porém são utilizados poucos desenhos nos exercícios propostos. Essa ausência de recursos visuais pode ser uma das razões para que alguns professores não estimulem o uso de desenhos e, principalmente, o manuseio de materiais concretos.

A busca de aprendizagem através de exemplos, contextos e representações é uma característica comum aos dois países e os seus currículos de base comum procuram trabalhar as mesmas habilidades e atitudes.

Sobre os currículos, a maior dificuldade dos professores brasileiros é a quantidade de objetos de conhecimento que devem ser trabalhados durante o ano, dificultando deste modo, o processo de construção de conhecimento através da manipulação de materiais ou discussões de ideias. Pois é necessária uma maior disponibilidade de tempo para se dedicar a essa atividade e para que o professor prepare as suas aulas. Em alguns momentos, o estudante não consegue construir de forma adequada os conhecimentos que são pré-requisitos de outros conceitos de difícil compreensão. Em Singapura, os objetos de conhecimento somente são abordados quando os alunos conseguiram construir e aplicar de forma satisfatória os conceitos trabalhados anteriormente e que tenham todos os conhecimentos que são necessários como pré-requisitos, sendo essa abordagem a proposta de aplicação que será trabalhada ao longo dessa dissertação.

Ao compararmos os currículos que são propostos nos dois países abordados nessa dissertação, podemos identificar que o principal ponto em comum é a variação da proposta curricular ao decorrer das etapas dos níveis de ensino. Porém, as variações que ocorrem são divergentes em relação aos dois países. Por exemplo, no nível secundário da educação em Singapura, os alunos podem escolher programas diferentes dependendo das suas aptidões relacionadas ao estudo da matemática e também de seus interesses pessoais e profissionais. Porém no Brasil, há várias modificações nos currículos que dependem de cada região do território brasileiro e das culturas locais, porém o currículo relacionado à disciplina de

Matemática é o mesmo em todas as regiões brasileiras.

Como mencionado nessa seção, os métodos de ensino aplicados nas escolas brasileiras e singapurenses possuem aspectos que são divergentes, como por exemplo, a metodologia utilizada no ensino dos conhecimentos e habilidades relacionados aos objetos de conhecimento que se referem a frações. Sendo assim, o próximo capítulo tem como objetivo discutir os métodos de ensino que são aplicados nas escolas do Brasil e de Singapura, com o propósito de desenvolver os conceitos de fração, como também, a representação e notação de frações, noção de equivalência, comparação e ordenação de frações e as operações que envolvem os números fracionários.

3 ENSINO DE FRAÇÕES NAS ESCOLAS BRASILEIRAS

Nas escolas, os estudantes aprendem matemática com o fim de serem educados para a vida fora do ambiente escolar e a educação possui uma gama de objetivos que são possíveis de serem alcançados. Por exemplo, pode dispor de uma aprendizagem que torne o estudante um cidadão informado, que esteja preparado para o mundo do trabalho ou até mesmo para a vida cotidiana. Os objetivos são alcançados através das práticas matemáticas, diferentes modos de construir conhecimento matemático, utilização de diferentes objetos, tecnologias e símbolos matemáticos, construindo assim, vários meios para capacitar os estudantes através da matemática.

Piaget e Vygotsky possuem uma perspectiva construtivista dos conceitos e tem em suas teorias a ideia que a construção se dá através da interação da criança com o meio onde se encontra, possibilitando somar novos conhecimentos aos demais já adquiridos anteriormente.

Um dos principais conceitos matemáticos trabalhados nas escolas em âmbito mundial são as frações, envolvendo a sua definição, operações e também a resolução de problemas que envolvam números fracionários. Este objeto de estudo tem como finalidade apresentar aos alunos exemplos de situações onde são utilizadas as frações e tornar os estudantes capazes de resolver operações básicas que envolvam os números fracionários, incluindo nestas habilidades, a comparação e ordenação de frações e também a identificação de frações equivalentes, a fim de que as operações possam ser resolvidas de forma mais simples.

Sendo assim, este capítulo tem como objetivo apresentar o surgimento histórico das frações, a evolução do ensino dos números fracionários no território brasileiro e o método de ensino das frações no Brasil.

3.1 HISTÓRIA DO ENSINO DAS FRAÇÕES NO BRASIL

As frações estão presentes em várias situações de nosso cotidiano, por exemplo, em notícias que trazem como dados razões entre duas grandezas e também em painéis de carros para indicar o nível de gasolina do tanque de combustível. Porém, o uso mais comum desde os tempos mais remotos é nas receitas de bolo ou tortas. Por este motivo, o ensino das frações sempre foi presente no ambiente escolar.

Como as frações sempre estiveram presentes nos currículos escolares, o método de ensino também variou durante a evolução da educação no Brasil. Sendo assim, esta sessão tem como objetivo mostrar a evolução do ensino de frações conforme as palavras de Morais, Bertini e Valente (2021).

Na metade do século XIX, o ensino das frações tinha como finalidade ser útil fora da escola e o que o mestre ensinava devia ter relação com as demandas da vida cotidiana. Neste período, o ensino era centrado no professor e a sua principal tarefa era levar os alunos a exercitarem o cálculo numérico, com a justificativa de que se fosse bem exercitado os cálculos, como os relacionados às frações, os estudantes fariam bom uso deles na vida pessoal.

No final do século XIX e início do século XX, há o movimento educacional chamado Método Intuitivo, onde os alunos deveriam aprender a partir da observação para gerar o raciocínio e realizar atividades similares àquelas da vida adulta. Durante as décadas de 1920 e 1930 surgiu a Escola Nova, sendo o aluno o ponto central dos processos de aquisição de conhecimento e o tempo escolar deveria estar de acordo com o tempo do interesse dos estudantes. Na escola era oferecida a oportunidade para a realização de trabalhos em grupos e o papel do estudante passa a ser de experimentador, onde a racionalização e a ciência eram as bases para o trabalho do educando.

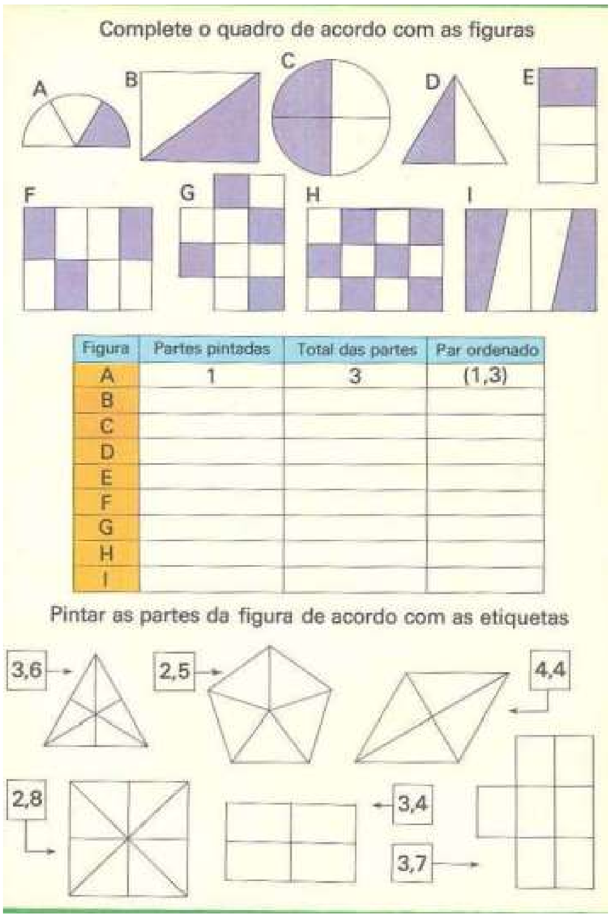
O Método Intuitivo e a Escola Nova tinham como finalidade aproximar os saberes aritméticos e a vida cotidiana. O processo de ensino das frações era introduzido utilizando objetos presentes no cotidiano das crianças e os exercícios e problemas aplicados objetivavam a explicitação de definição.

Em 1960 surge o Movimento da Matemática Moderna (MMM), neste período as atividades no ensino das frações possuíam como foco a construção do conceito de número racional através da equivalência de frações. Inicialmente o processo de ensino era focado na manipulação de objetos, passando para as representações pictóricas até a definição dos números racionais. De acordo com Morais, Bertini e Valente (2021), a construção dos números racionais era realizada da seguinte forma:

> A fase mais emblemática para aquele que é o objetivo final, a construção dos números racionais, explora pares ordenados associados a figuras planas divididas em partes equivalentes. Surge daí a necessidade de ampliação do conjunto dos números naturais para o dos números racionais, pois no conjunto dos números naturais vale a "propriedade do fechamento" para as operações de adição e multiplicação, mas não vale para a subtração e divisão.

Após construído o número racional, a fração passa a ser considerada como um número racional, podendo ser representada como um ponto na reta, derivando assim, os números decimais. A lógica aplicada para ensinar os números decimais utilizando os números racionais mostra que a orientação do ensino apresentava uma estruturação matemática dos conteúdos. A título de exemplo, a Figura 3 mostra como eram propostas as atividades que exploravam os pares ordenados relacionados a figuras planas divididas em partes equivalentes.

Figura 3 – Associando figuras a pares ordenados equivalentes



Fonte: Liberman, Sanchez e Franchi (1974)

As discussões internacionais em relação aos prós e contras da MMM visa elaborar uma nova matemática do ensino, criando assim, a Educação Matemática em meados da década de 1980. Como resultado deste processo, foi criado no Brasil a matemática da Educação Matemática e é neste período que surgem o documento oficial denominado Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). É a partir da BNCC e dos PCN's que é definido a forma de ensino das frações, usando como principal ferramenta a resolução de problemas de modo que sejam desenvolvidas competências e habilidades para a formação do cidadão.

3.1.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Nas aulas tradicionais, o método de ensino mais frequente nas aulas de matemática é o professor apresentando o conteúdo oralmente, iniciando através de definições, exemplos e demonstrações das propriedades referentes ao respectivo tema e em seguida, os estudantes devem resolver exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação. Esta prática tem como objetivo a reprodução do que é trabalhado em sala de aula com a suposição que haja a aprendizagem. Se caso o aluno conseguir reproduzir de forma correta, o professor supõe que realmente ocorreu a aprendizagem esperada.

Esta metodologia de ensino pode não ser eficaz, pois a reprodução correta dos procedimentos não garante que o estudante consiga utilizar os seus conhecimentos na resolução de situações-problema nos mais diversos contextos. Um método para que o aluno construa o seu conhecimento é criar conexões com os conhecimentos construídos anteriormente com o intuito de resolver problemas. Nas palavras do Ministério da Educação do Brasil (1998), temos:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalhar para desenvolver estratégias de resolução.

De acordo com Dante (2010), um problema pode ser considerado como sendo um obstáculo que deve ser superado, algo a ser resolvido e que necessita do pensar consciente do indivíduo para encontrar a solução.

Em concordância com os PCN's, devem ser oportunizados aos estudantes atividades que tem como objetivo a formulação e a resolução de situações-problema gerando uma série de benefícios aos educandos. Dante (2010) afirma que a formulação e resolução de problemas desenvolve o poder de comunicação dos estudantes quando estes são incentivados para trabalhar oralmente, valoriza o conhecimento prévio do aluno oportunizando a exploração, organização e exposição dos seus pensamentos, proporcionando desta forma, a relação entre suas noções informais ou intuitivas com a linguagem abstrata e simbólica da matemática.

Ainda de acordo com Dante (2010), a resolução de problemas faz com que o aluno pense de forma produtiva através de situações-problema que o desenvolve, desafia e motiva para a busca da solução, desenvolve o raciocínio, ensina a enfrentar situações novas, cria oportunidades para que o estudante realize aplicações da matemática, faz com que as aulas de matemática se tornem mais interessantes e desafiadoras, equipam os estudantes com estratégias de resolução de problemas, proporciona base matemática para os cidadãos e incentiva a liberação da criatividade dos educandos.

A resolução de problemas ocorrerá de forma correta quando o estudante compreende o que está sendo solicitado e procura meios para encontrar a solução. George Polya, que é considerado o “pai” da resolução de problemas, apresenta quatro etapas para resolver situações-problema. No entendimento de Polya (1995), as etapas necessárias são:

- Compreender o problema: antes de começar a resolução, é necessário compreender qual é a pergunta que deve ser resolvida e quais são os dados e condições apresentadas.
- Estabelecer um plano: o estudante deve procurar estratégias para a resolução da situação-problema considerando os dados e condições fornecidos.
- Executar o plano: nesta etapa, deve ser executado o plano para a resolução verificando se cada passo está correto.
- Retrospecto: Após a resolução do problema, o estudante deve verificar o resultado encontrado e analisar a possibilidade de utilizar a solução ou método de resolução em algum outro problema.

O professor quando propõe a resolução de um problema, deve estar aberto a entender as escolhas dos alunos em relação a quais ferramentas serão utilizadas para resolver um determinado problema, tanto as ferramentas matemáticas e os símbolos quanto os meios materiais que serão utilizados. Pois o professor pode ter o papel de introduzir novas ferramentas matemáticas, mas os seus alunos já possuem uma bagagem de ferramentas que podem ser utilizadas em qualquer situação apresentada.

Em concordância com Sutherland (2009), além de somente encontrar soluções, o professor deve propiciar em sala de aula um ambiente onde os estudantes tenham a possibilidade de realizar questionamentos e investigações, aumentando assim, o aprendizado ao falar sobre ideias matemáticas e o uso das mais diversas ferramentas matemáticas. Sendo essa metodologia reconhecida tanto por aqueles que trabalham em uma perspectiva sociocultural quanto aqueles que passaram de modelos construtivistas a construtivistas sociais.

3.2 O ENSINO DE FRAÇÕES DE ACORDO COM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os PCN’s surgiram da necessidade de construir uma referência de currículo nacional para o ensino fundamental, podendo ser discutida e transformada em propostas curriculares em todo o território nacional na forma de projetos educativos nas escolas e principalmente em sala de aula. Na afirmação de Ministério da Educação do Brasil (1998), o PCN é definido da seguinte forma:

> Uma proposta de reorientação curricular que a Secretaria da Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto oferece às secretarias de educação, escolas, instituições formadoras de professores, instituições de pesquisa, editoras e a todas as pessoas interessadas em educação, dos diferentes estados e municípios brasileiros.

Os currículos de Matemática para o ensino fundamental devem contemplar o estudo dos números e operações (Aritmética e Álgebra), espaço e formas (Geometria) e também o estudo das grandezas e medidas (permitindo interligações entre a Aritmética, Álgebra e Geometria e outros campos do conhecimento). É no estudo dos números e operações que se encontra o estudo envolvendo os números racionais, abrangendo assim os estudos relacionados aos conceitos de frações, operações e aplicações em situações que envolvem os números em forma de fração.

O ensino das frações, de uma maneira geral, se inicia no segundo ciclo do ensino fundamental contemplando os quartos e quintos anos, onde são trabalhados os conceitos de frações e algumas aplicações. Porém, é no terceiro e quarto ciclos, onde abrangem as turmas de sexto ao nono ano, que se aprofunda os conceitos de números fracionários definindo estes como elementos do conjunto dos números racionais juntamente com os números decimais.

No terceiro e quarto ciclos, as representações fracionárias e decimais são abordadas a partir da exploração de seus significados como sendo a relação parte/todo, quociente, razão e operador, e é através da resolução de situações-problema que se aplicam as operações matemáticas e desenvolvem a compreensão dos significados das frações. Em relação às operações trabalhadas, podemos citar a adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Nesta etapa, os estudantes devem ser capazes de localizar na reta numérica os números racionais e reconhecer que estes números podem ser expressos na forma fracionária e decimal, possibilitando transformar as frações em números decimais e vice-versa. Em concordância com o Ministério da Educação do Brasil (1998), o aluno deve concluir o terceiro ciclo utilizando os diferentes significados e as representações dos números racionais e as operações que envolvem esses números, com o objetivo de resolver problemas nos diversos contextos sociais, na matemática e em outras áreas do conhecimento.

No entanto, mesmo que as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam desenvolvidos já nos ciclos iniciais, pode ser verificado que os estudantes chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diversos significados que são associados aos números racionais e como realizar os cálculos que envolvem esse tipo de número.

Um possível motivo para as dificuldades encontradas é o fato que a aprendizagem dos números racionais pode criar rupturas com as ideias construídas no ensino dos números naturais.

A seguir, serão apresentados alguns obstáculos encontrados pelos alunos ao trabalhar com os números racionais na visão do Ministério da Educação do Brasil (1998):

- Há infinitas formas de escritas fracionárias para um determinado número racional, por exemplo, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$, sendo diferentes representações de um mesmo número;
- A comparação entre os números racionais: nos números naturais os estudantes aprendem que $3 > 2$, porém ao estudar os números fracionários, a compreensão da desigualdade pode parecer contraditória pois $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- Se o "tamanho" da escrita numérica é um indicador da ordem de grandeza dos números naturais, como por exemplo, $8345 > 83$, a comparação dos números decimais não obedece ao mesmo critério, pois temos que $2,3 > 2,125$;
- Se multiplicarmos um número natural por outro natural diferente de 0 ou 1, espera-se encontrar um número maior do que os próprios fatores, porém ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ encontraremos como resposta um número menor que 10;
- Na sequência dos números naturais podemos estabelecer o sucessor e o antecessor, mas nos números racionais não faz sentido, pois entre dois números racionais quaisquer será sempre possível encontrar outro número racional.

Durante o terceiro e o quarto ciclos, a abordagem dos racionais tem como meta levar os estudantes a perceber que para resolver determinadas situações-problema o uso dos números naturais são insuficientes e para isso, os PCN'S sugerem o uso de problemas históricos que envolvem medidas, sendo estes bons contextos para o ensino dos números racionais. Em relações aos diversos significados das frações, na compreensão do Ministério da Educação do Brasil (1998), os estudantes devem diferenciar as seguintes ideias que envolvem os números racionais:

- A relação parte/todo é apresentada quando um todo se divide em partes equivalentes e isso sugere que o estudante esteja apto para identificar a unidade que representa o todo, compreenda a inclusão de classes e também seja capaz de realizar divisões envolvendo grandezas discretas ou contínuas;
- A interpretação do número racional como um quociente entre dois inteiros, sendo o denominador diferente de zero, podendo ser aplicada com o intuito de que o estudante consiga compreender como dividir 2 unidades em 3 partes iguais;

- A compreensão do número racional como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, a interpretação como razão;

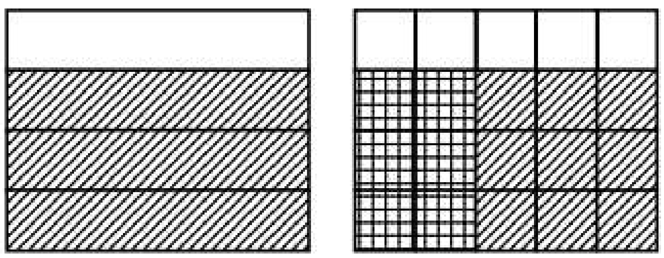
- Compreender o significado do número racional como um operador, ou seja, quando desempenha um papel de transformação. Sendo algo que atua sobre uma determinada situação e realiza modificações. Um exemplo são as situações que envolvem a seguinte pergunta: "que número devo multiplicar por 3 para obter 2".

Cada significado não deve ser tratado de forma isolada, sendo assim, a construção desses conceitos deve ocorrer através de um trabalho sistemático ao decorrer do terceiro e quarto ciclos, possibilitando a análise e a comparação das mais diversas situações-problema. Outro conceito importante no estudo das frações é a equivalência e a construção de procedimentos que possibilitem aos estudantes encontrar frações equivalentes, sendo habilidades necessárias para a comparação de números racionais escritos na forma fracionária e também para efetuar cálculos com esses números.

O cálculo da adição e da subtração que envolve frações com denominadores diferentes deve ser realizado, primeiramente, transformando cada fração em frações com o mesmo denominador, e isso ocorre ao aplicar as propriedades das frações equivalentes.

A multiplicação com frações deve ser compreendida como "partes de partes do total". Por exemplo, a multiplicação $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ pode ser interpretada como calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de um todo. A seguir, temos a representação através do uso de imagens na Figura 4 para realizar a operação apresentada no exemplo anterior.

Figura 4 – Multiplicação de frações

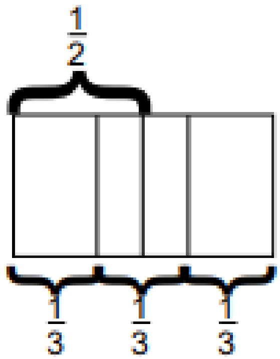


$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Fonte: Ministério da Educação do Brasil (1998)

Em relação a divisão de frações, podemos interpretar essa operação como "partes que cabem em partes". Um exemplo seria a divisão de $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$, que pode ser compreendida como quantas partes de $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$. Esta operação pode ser representada da seguinte forma (Figura 5).

Figura 5 – Divisão de frações



Fonte: Ministério da Educação do Brasil (1998)

Ao compararmos $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$ podemos concluir que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$. Sendo assim, temos:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \tag{3.1}$$

Outra forma de resolver as divisões de frações é multiplicar o dividendo e o divisor por um mesmo número, permitindo assim, obter na divisão de frações uma fração que tenha o denominador igual a 1. Ou seja, a divisão $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3}$ tem a sua resolução dada por:

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{8}}{1} = \frac{15}{8}. \tag{3.2}$$

Conforme a Equação (3.2), pode-se interpretar a divisão utilizando a ideia do inverso multiplicativo de um racional diferente de zero, ou seja, quando dividimos duas frações, devemos multiplicar a primeira pelo inverso da segunda.

3.3 O ENSINO DE FRAÇÕES CONFORME A BNCC

A BNCC é um documento que aborda as aprendizagens fundamentais que todos os estudantes devem ter acesso durante a Educação Básica, se tornando uma referência nacional para a elaboração do currículo das escolas públicas e privadas do Brasil. Este documento organiza o Ensino Fundamental em quatro áreas do conhecimento dadas por: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas.

Com relação à Matemática, como afirma Ministério da Educação do Brasil (2017), a BNCC abrange os diferentes campos que compõem esta disciplina e que se reúnem em um conjunto de ideias que são fundamentais, produzindo assim, articulações entre as ideias de equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias são necessárias para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e são convertidas em objetos de conhecimento no âmbito escolar.

A completa abrangência dos campos que compõem a matemática, através do cumprimento da BNCC, faz com que sejam propostas cinco unidades temáticas, que correlacionadas, orientam a formulação de habilidades que devem ser desenvolvidas durante a etapa do Ensino Fundamental. As habilidades são as aprendizagens que devem ser garantidas aos alunos nos contextos escolares e estão relacionadas aos objetos de conhecimento. As unidades temáticas abordadas são os Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

Na unidade temática denominada por Números, encontramos os objetos de conhecimento relacionados às frações, constando no currículo desde o terceiro até o oitavo ano.

A seguir, será feita a análise das respectivas habilidades envolvendo as frações que os estudantes devem adquirir durante esse período do ensino fundamental. Conforme Ministério da Educação do Brasil (2017), temos:

Terceiro ano: Relacionar o quociente de uma divisão exata de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

Quarto ano: Os estudantes devem reconhecer as frações unitárias mais usuais (aquelas que possuem denominadores dados por dois, três, quatro, cinco, dez e cem) como unidades de medida menores do que uma unidade, podendo utilizar a reta numérica como recurso.

Quinto ano: Os educandos devem ser capazes de identificar e representar as frações que são menores ou maiores do que uma unidade, através da associação das frações ao resultado de uma divisão ou como a parte de um todo utilizando como recurso a reta numérica; Reconhecer as frações equivalentes; Estar apto para realizar a comparação e ordenação dos números racionais positivos tanto na forma fracionária quanto na forma decimal, relacionando os pontos na reta numérica; Ser capaz de associar as representação dadas por 10%, 25%, 50%, 75% e 100% como décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, respectivamente, para realizar o cálculo de porcentagens através do uso de estratégias pessoais, cálculo mental e uso da calculadora, podendo ser aplicadas em diversos contextos, principalmente na educação financeira.

Sexto ano: Compreender, comparar e ordenar frações associando as ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, possibilitando a identificação de frações equivalentes; Reconhecer que os números racionais positivos podem ser representados na forma fracionária e decimal e estabelecer relações entre as duas formas de representação de modo que o estudante seja capaz de passar de uma representação para outra e consiga relacionar os pontos na reta numérica; Os educandos devem estar aptos a resolver e elaborar problemas cuja resolução envolva adição ou subtração de números racionais positivos na forma de fração e também situações-problema que envolva cálculo da fração de quantidades e que tenha como resultado final um número natural, podendo para isso utilizar ou não a calculadora.

Sétimo ano: Resolver problemas utilizando variados algoritmos; Perceber que um procedimento de resolução pode ser utilizado para resolver um grupo de problemas que apresentam a mesma estrutura e representar através de um fluxograma os passos para resolver problemas semelhantes; Realizar comparações e ordenar frações utilizando a noção de partes de inteiros, o resultado da divisão, razão e operador; Realizar associações entre razão e fração; Utilizar as operações com números racionais para resolver e elaborar problemas; Comparar e ordenar números racionais nos mais diversos contextos, sabendo associar aos pontos da reta numérica; Compreender e utilizar a multiplicação e divisão de números racionais, fazendo relações entre elas e as suas propriedades operatórias.

Oitavo ano: Reconhecer e utilizar procedimentos para encontrar a fração geratriz de uma determinada dízima periódica.

Nono ano: Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

3.4 O ENSINO DE FRAÇÕES TENDO COMO REFERÊNCIA A COLEÇÃO DE LIVROS “A CONQUISTA DA MATEMÁTICA”

Nas escolas da rede municipal de ensino da cidade de Joinville, os livros didáticos utilizados no sexto ano pertencem à coleção de livros de título “A Conquista da Matemática”, dos autores Benedicto Castrucci e José Ruy Giovanni Júnior.

Ao analisarmos os livros, em geral, podemos identificar três etapas na metodologia utilizada.

Na primeira etapa, os conceitos referentes às frações e a resolução das operações básicas envolvendo os números fracionários são inicialmente abordados com a apresentação de exemplos resolvidos, utilizando como ferramentas os desenhos para representar as situações propostas. Com base nos desenhos, são apresentados os conceitos e também os algoritmos de resolução de forma a encontrar a solução correta, seguido por conclusões referentes ao tema.

Na segunda etapa, são propostos mais exemplos para complementar o que foi discutido, com soluções sendo obtidas através de aplicação direta de algoritmos de resolução.

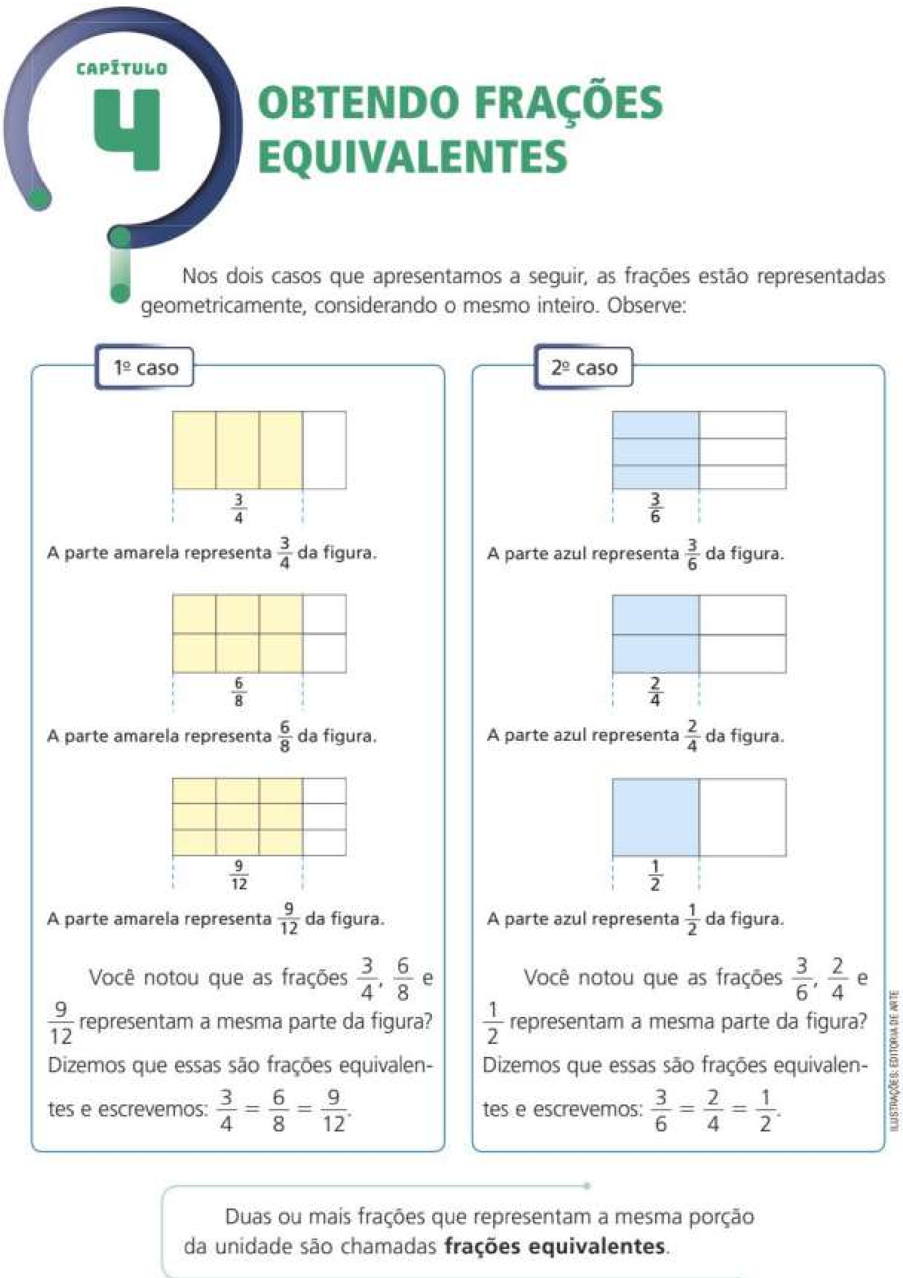
Por fim, na terceira etapa, para aplicação dos conceitos e algoritmos estudados, é disponibilizada para os alunos uma lista de atividades.

3.4.1 EXEMPLOS DA ABORDAGEM SOBRE FRAÇÕES NA COLEÇÃO DE LIVROS “A CONQUISTA DA MATEMÁTICA”

De modo a exemplificar a abordagem dos conceitos relacionados às frações, serão apresentadas as sequências de atividades para expor aos estudantes as noções de equivalência. Os demais tópicos relacionados a este objeto de estudo seguem o mesmo modelo.

De acordo com a Figura 6, as noções de equivalência são abordadas através de desenhos, e tendo como base as imagens, há a definição de frações equivalentes.

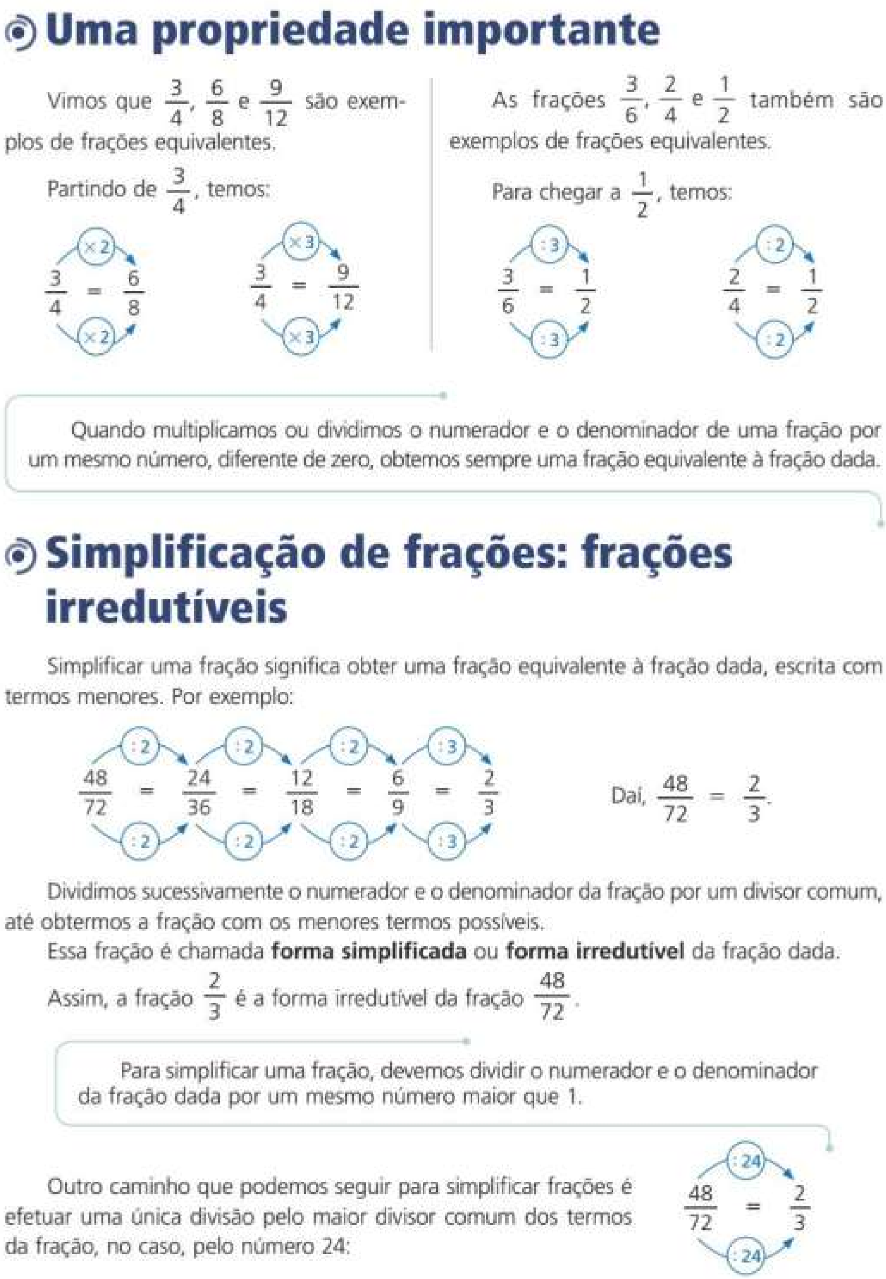
Figura 6 – Introdução das frações equivalentes



Fonte: Castrucci e Júnior (2018)

Após a definição das frações equivalentes, é descrito o algoritmo para encontrar essas frações: multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, mostrando também, como simplificar as frações. Na sequência, há a apresentação de exemplos resolvidos por meio de algoritmos. A Figura 7 ilustra essa etapa da metodologia utilizada.

Figura 7 – Método para encontrar frações equivalentes



Uma propriedade importante

Vimos que $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{9}{12}$ são exemplos de frações equivalentes.

Partindo de $\frac{3}{4}$, temos:

$\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{9}{12}$

As frações $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ também são exemplos de frações equivalentes.

Para chegar a $\frac{1}{2}$, temos:

$\frac{3}{6} \xrightarrow{:3} \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{2}{4} \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}$

Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada.

Simplificação de frações: frações irredutíveis

Simplificar uma fração significa obter uma fração equivalente à fração dada, escrita com termos menores. Por exemplo:

$\frac{48}{72} \xrightarrow{:2} \frac{24}{36} \xrightarrow{:2} \frac{12}{18} \xrightarrow{:2} \frac{6}{9} \xrightarrow{:3} \frac{2}{3}$ $\qquad$ Daí, $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$.

Dividimos sucessivamente o numerador e o denominador da fração por um divisor comum, até obtermos a fração com os menores termos possíveis.

Essa fração é chamada **forma simplificada** ou **forma irredutível** da fração dada.

Assim, a fração $\frac{2}{3}$ é a forma irredutível da fração $\frac{48}{72}$.

Para simplificar uma fração, devemos dividir o numerador e o denominador da fração dada por um mesmo número maior que 1.

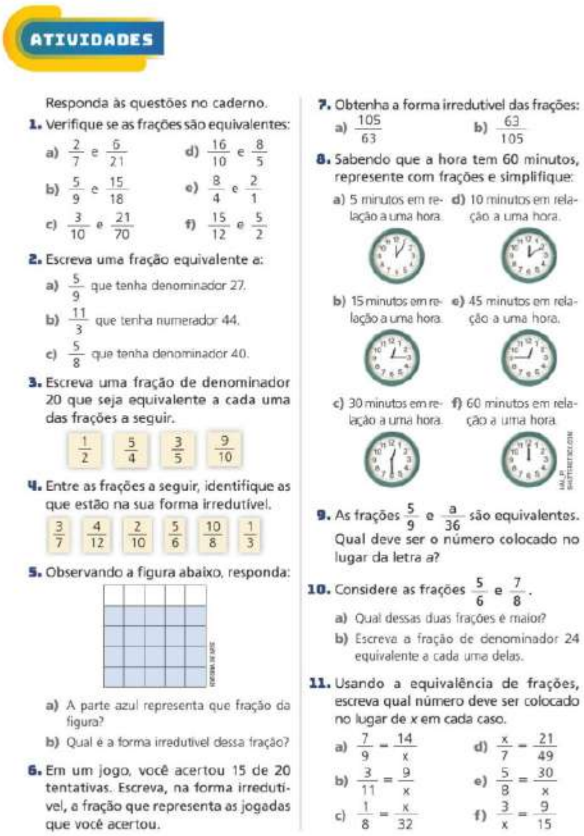
Outro caminho que podemos seguir para simplificar frações é efetuar uma única divisão pelo maior divisor comum dos termos da fração, no caso, pelo número 24:

$\frac{48}{72} \xrightarrow{:24} \frac{2}{3}$

Fonte: Castrucci e Júnior (2018)

No prosseguimento das atividades, são propostas listas de exercícios de modo que os estudantes apliquem os conceitos estudados durante a aula. Pode-se perceber que poucas atividades utilizam imagens para ilustrar as situações propostas, porém as demais atividades não sugerem o uso de imagens ou materiais concretos como forma de resolução, levando os estudantes à aplicação direta de algoritmos. A Figura 8, exemplifica como as atividades são apresentadas aos estudantes.

Figura 8 – Lista de exercícios sobre frações equivalentes proposta no livro “A Conquista da Matemática”



ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Verifique se as frações são equivalentes:

a) $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ b) $\frac{5}{9}$ e $\frac{15}{18}$ c) $\frac{3}{10}$ e $\frac{21}{70}$ d) $\frac{16}{10}$ e $\frac{8}{5}$ e) $\frac{8}{4}$ e $\frac{2}{1}$ f) $\frac{15}{12}$ e $\frac{5}{2}$

2. Escreva uma fração equivalente a:

a) $\frac{5}{9}$ que tenha denominador 27.

b) $\frac{11}{3}$ que tenha numerador 44.

c) $\frac{5}{8}$ que tenha denominador 40.

3. Escreva uma fração de denominador 20 que seja equivalente a cada uma das frações a seguir.

$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{9}{10}$

4. Entre as frações a seguir, identifique as que estão na sua forma irredutível.

$\frac{3}{7}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{10}{8}$ $\frac{1}{3}$

5. Observando a figura abaixo, responda:

a) A parte azul representa que fração da figura?

b) Qual é a forma irredutível dessa fração?

6. Em um jogo, você acertou 15 de 20 tentativas. Escreva, na forma irredutível, a fração que representa as jogadas que você acertou.

7. Obtenha a forma irredutível das frações:

a) $\frac{105}{63}$ b) $\frac{63}{105}$

8. Sabendo que a hora tem 60 minutos, represente com frações e simplifique:

a) 5 minutos em relação a uma hora. b) 15 minutos em relação a uma hora. c) 30 minutos em relação a uma hora. d) 10 minutos em relação a uma hora. e) 45 minutos em relação a uma hora. f) 60 minutos em relação a uma hora.

9. As frações $\frac{5}{9}$ e $\frac{a}{36}$ são equivalentes. Qual deve ser o número colocado no lugar da letra *a*?

10. Considere as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$.

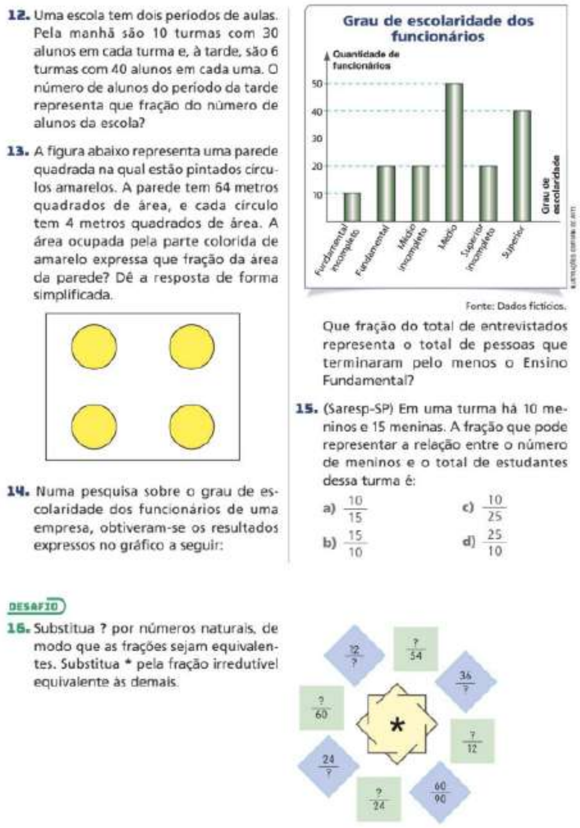
a) Qual dessas duas frações é maior?

b) Escreva a fração de denominador 24 equivalente a cada uma delas.

11. Usando a equivalência de frações, escreva qual número deve ser colocado no lugar de *x* em cada caso.

a) $\frac{7}{9} = \frac{14}{x}$ b) $\frac{3}{11} = \frac{9}{x}$ c) $\frac{1}{8} = \frac{x}{32}$ d) $\frac{x}{7} = \frac{21}{49}$ e) $\frac{5}{8} = \frac{30}{x}$ f) $\frac{3}{x} = \frac{9}{15}$

(a) Questões 1 a 11



12. Uma escola tem dois períodos de aulas. Pela manhã são 10 turmas com 30 alunos em cada turma e, à tarde, são 6 turmas com 40 alunos em cada uma. O número de alunos do período da tarde representa que fração do número de alunos da escola?

13. A figura abaixo representa uma parede quadrada na qual estão pintados círculos amarelos. A parede tem 64 metros quadrados de área, e cada círculo tem 4 metros quadrados de área. A área ocupada pela parte colorida de amarelo expressa que fração da área da parede? Dê a resposta de forma simplificada.

14. Numa pesquisa sobre o grau de escolaridade dos funcionários de uma empresa, obtiveram-se os resultados expressos no gráfico a seguir:

Que fração do total de entrevistados representa o total de pessoas que terminaram pelo menos o Ensino Fundamental?

15. (Saresp-SP) Em uma turma há 10 meninos e 15 meninas. A fração que pode representar a relação entre o número de meninos e o total de estudantes dessa turma é:

a) $\frac{10}{15}$ b) $\frac{15}{10}$ c) $\frac{10}{25}$ d) $\frac{25}{10}$

DESAFIO

16. Substitua ? por números naturais, de modo que as frações sejam equivalentes. Substitua * pela fração irredutível equivalente às demais.

(b) Questões 12 a 16

Na sequência do tópico sobre as frações equivalentes, os autores desta coleção de livros abordam o método para reduzir duas frações ao mesmo denominador. Aplicando assim, os conhecimentos adquiridos em relação às frações equivalentes.

No próximo capítulo veremos a metodologia aplicada em Singapura no ensino de frações.

4 ENSINO DE FRAÇÕES ATRAVÉS DE METODOLOGIAS UTILIZADAS EM SINGAPURA

Nesta seção será apresentada a metodologia utilizada em Singapura no ensino de frações. De acordo com a coleção de livros *My Pals Are Here!*, serão abordadas as etapas para o ensino dos números mistos, frações impróprias, frações equivalentes e também a forma de ensino das operações envolvendo os números fracionários.

4.1 NÚMEROS MISTOS E FRAÇÕES IMPRÓPRIAS

A introdução dos números mistos e frações impróprias [1] torna-se mais interessante aos estudantes quando podemos mostrar as aplicações desses conteúdos em situações cotidianas. Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a) aborda esse conteúdo com a seguinte situação (Figura 9):

Figura 9 – Atividade introdutória sobre números mistos e frações impróprias

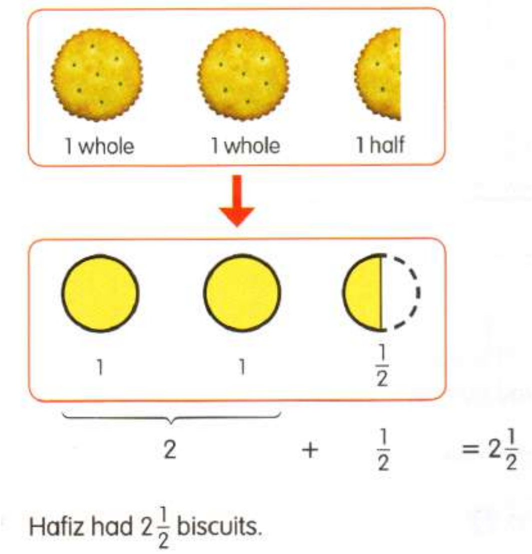
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

[1] As Frações Próprias são aquelas que possuem o numerador menor que o denominador. E as Frações Impróprias possuem o numerador maior ou igual ao denominador.

Nesta ilustração temos duas crianças na qual o menino tem $\frac{4}{4}$ de pizza e a menina tem $\frac{2}{4}$ de outra pizza. Os estudantes são questionados sobre qual fração representa a quantidade de pizza que os dois tem juntos. A resposta é $1\frac{2}{4}$, que é definido como número misto por apresentar um número inteiro e uma fração.

Outro exemplo é citado por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a), onde se supõe que Hafiz tem dois biscoitos e Jess deu a metade do seu para Hafiz. Ao ilustrar a situação apresentada, teremos dois biscoitos e mais uma metade, ou seja, $2\frac{1}{2}$. A resolução dessa questão é ilustrada na Figura 10 da seguinte forma:

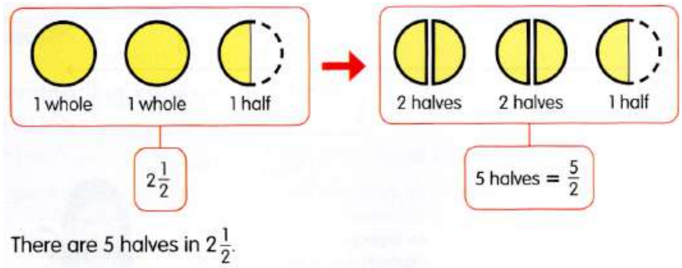
Figura 10 – Resolução do exemplo



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

A partir dos números mistos podemos escrever as frações impróprias. Para exemplificar o surgimento das frações impróprias, Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a) sugerem a seguinte questão: Quantas metades há em $2\frac{1}{2}$? Sabendo que um inteiro tem duas metades, temos que em 2 inteiros e $\frac{1}{2}$ teremos cinco metades, ou seja, $2\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{5}{2}$. A conversão é ilustrada na Figura 11 da seguinte forma:

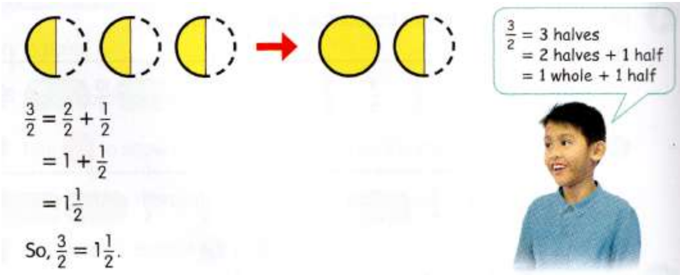
Figura 11 – Convertendo $2\frac{1}{2}$ em $\frac{5}{2}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

Para converter $\frac{3}{2}$ em um número misto, tomemos por exemplo as metades de três inteiros, se agruparmos duas metades teremos um inteiro e sobra uma metade. Logo, $\frac{3}{2}$ é igual a $1\frac{1}{2}$. Esta solução é representada da seguinte forma na Figura 12:

Figura 12 – Convertendo $\frac{3}{2}$ em $1\frac{1}{2}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

4.2 COMPARAÇÃO E EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

A ideia relacionada à comparação e equivalência de frações é iniciada com a apresentação de uma situação na qual um jovem precisa entregar $\frac{1}{4}$ de bolo de morango para um cliente, porém estão disponíveis um bolo com oito fatias e um bolo com doze fatias. A questão levantada é a quantidade de fatias que corresponde a $\frac{1}{4}$ de cada bolo.

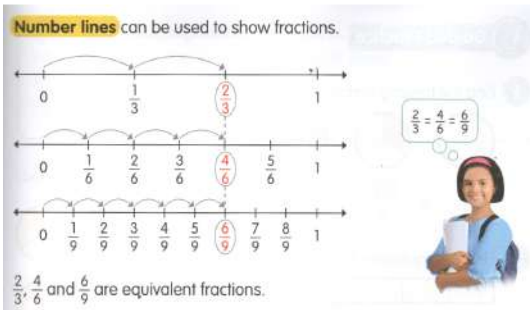
Outra atividade interessante é solicitar que os educandos dobrem uma tira em quatro partes iguais, marque as partes destacadas e pinte uma delas. Depois, dobrem novamente a mesma tira em oito partes iguais e marquem as partes destacadas. Na sequência, os estudantes devem identificar a fração que representa a parte colorida da tira com o objetivo de que os estudantes concluam que $\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{2}{8}$.

As duas atividades iniciais estão relacionadas às noções de equivalência e comparação de frações. Para que os estudantes possam construir a noção de equivalência, Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) utilizam situações cotidianas dos alunos e a reta numérica.

Para representar o uso de noções de equivalência no dia a dia, Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) abordam a seguinte situação: Andy, Betty e Cory possuem uma pizza de mesmo tamanho para cada um deles. Andy cortou sua pizza em 2 partes iguais e comeu um pedaço, logo ele comeu $\frac{1}{2}$ da sua pizza. Betty dividiu a sua pizza em 4 partes iguais e comeu dois pedaços, sendo assim, ela comeu $\frac{2}{4}$ da sua pizza. E Cory cortou sua pizza em 6 partes iguais e comeu três pedaços, logo ele comeu $\frac{3}{6}$ da sua pizza. Ao representar através de desenhos as frações encontradas, pode-se observar que $\frac{1}{2}$ da pizza de André é o mesmo tamanho de $\frac{2}{4}$ da pizza de Betty e $\frac{2}{4}$ da pizza de Betty é o mesmo tamanho de $\frac{3}{6}$ da pizza de Cory. Portando, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são frações equivalentes.

A reta numérica pode ser útil para encontrar frações equivalentes. Um exemplo é mostrar que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes. A resolução se inicia construindo três retas numéricas onde é determinado o intervalo entre zero e um, sendo dividido, respectivamente, em três, seis e nove subintervalos. Ao compararmos as retas numéricas, podemos verificar que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ correspondem ao mesmo intervalo em relação às três retas. Sendo assim, as frações são equivalentes. Corroborando com o pensamento de Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015), temos a resolução representada na Figura 13.

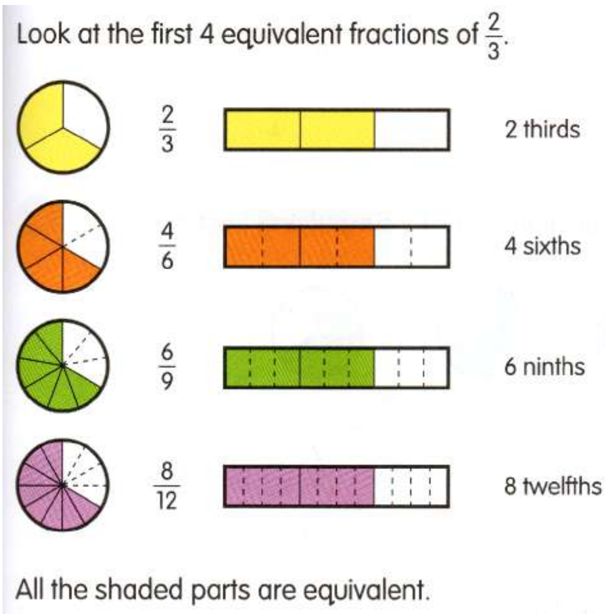
Figura 13 – Equivalência entre $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

As frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ também podem ser determinadas e visualizadas utilizando desenhos, que podem ser círculos, retângulos ou outros formatos que possibilitem a visualização das partes tomadas em cada um. Conforme a resolução de Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015), as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ são representadas da seguinte forma na Figura 14:

Figura 14 – Equivalência entre $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$

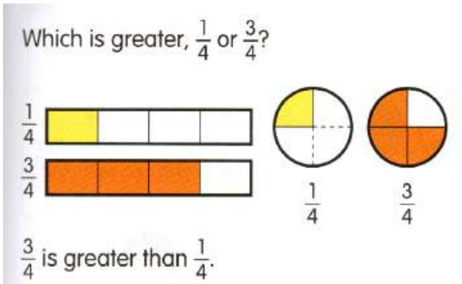


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Um método geral de encontrar frações equivalentes é multiplicar ou dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número. Ao realizar a divisão, estaremos simplificando as frações.

A noção de comparação de frações pode ser construída através de desenhos para que o estudante possa comparar duas ou mais frações. Um exemplo apresentado por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) é a comparação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ de modo que se queira identificar qual das frações é a maior, podendo ser encontrada a menor de maneira análoga. De acordo com Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015), temos a comparação através do uso de desenhos (Figura 15), onde é possível visualizar que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{1}{4}$:

Figura 15 – Comparação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

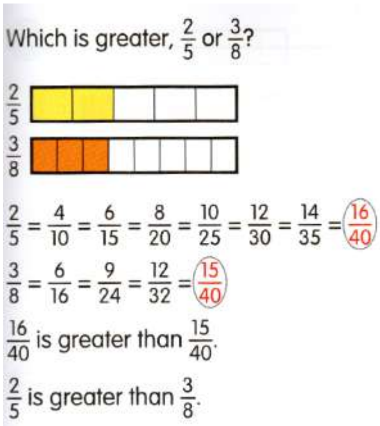
Diferentes frações podem ser comparadas utilizando frações de mesmo denominador, porém com o numerador sendo igual a um. Como exemplo, queremos comparar $\frac{5}{6}$ e $\frac{5}{7}$, onde se quer determinar qual das frações é a menor. Conforme Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015), ao compararmos as representações das frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$ podemos verificar que $\frac{1}{7}$ é menor do que $\frac{1}{6}$, logo $\frac{5}{7}$ é menor do que $\frac{5}{6}$.

Podemos também ter frações com denominadores diferentes, porém sendo um denominador múltiplo do outro. Um método de comparação seria encontrar frações equivalentes de modo que as frações a serem comparadas tenham o mesmo denominador. Ao realizar a comparação utilizando desenhos podemos perceber que a maior fração será aquela que tem o maior numerador.

Outra forma de comparar frações de denominadores diferentes é realizar a comparação tendo uma fração diferente como referência. Um exemplo é dado por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) ao compararmos $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{7}$ de modo a identificar qual dela é a menor. Utilizando $\frac{1}{2}$ como referência, temos que $\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{1}{2}$ que é maior do que $\frac{3}{7}$. Logo temos que $\frac{3}{7}$ é menor do que $\frac{2}{3}$.

A equivalência de frações pode ser usada como um método para comparação ao fazermos com que duas ou mais frações com denominadores diferentes tenham frações equivalentes com denominadores iguais. Assim que o denominador seja igual, podemos verificar qual fração é maior ou menor observando o numerador. Um dos exemplos apontado por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) é a comparação entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, onde se deseja identificar qual das frações é a maior. Multiplicando o denominador e o numerador sucessivas vezes, temos que $\frac{2}{5}$ é equivalente a $\frac{16}{40}$ e $\frac{3}{8}$ é equivalente a $\frac{15}{40}$. Como $\frac{16}{40}$ é maior do que $\frac{15}{40}$, podemos concluir que $\frac{2}{5}$ é maior do que $\frac{3}{8}$. A representação através de desenhos, na Figura 16, é dada por:

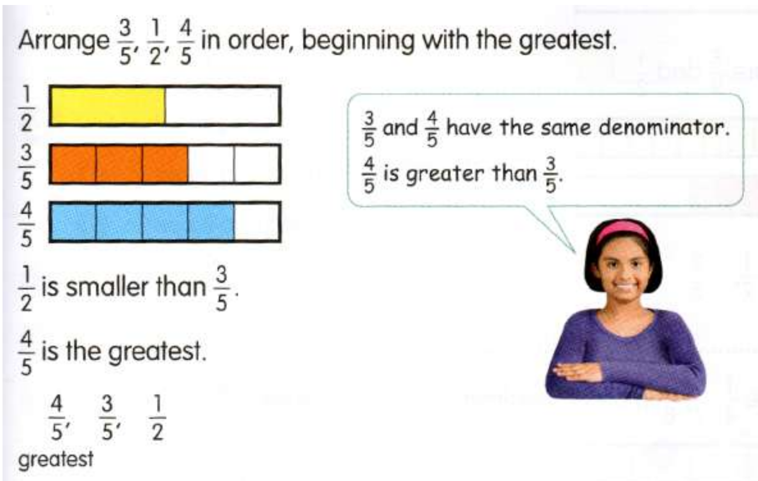
Figura 16 – Comparação entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

A comparação de frações possibilita ordenar frações tanto em ordem crescente quanto em ordem decrescente. Um dos métodos é a comparação e ordenação utilizando a representação na forma de desenhos. Para exemplificar a ordenação de frações utilizando desenhos, vamos colocar as frações $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{5}$ em ordem decrescente, utilizando para isso, a representação das frações tomando como base retângulos de mesmas dimensões como sendo os inteiros. A resolução é apresentada por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) conforme a Figura 17:

Figura 17 – Ordenação de $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{5}$



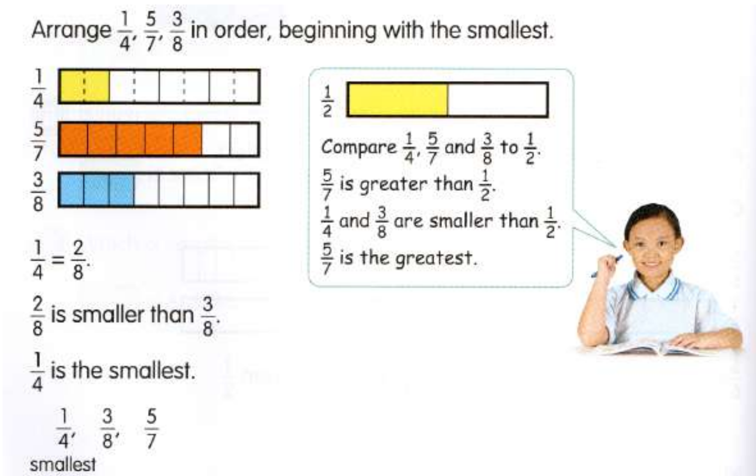
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Na Figura 17, podemos perceber que $\frac{1}{2}$ é menor do que $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ é a maior fração em comparação as demais. Logo, a sequência que apresenta a ordem crescente das frações é dada por $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

Um método para ordenar frações também pode ser a comparação de uma ou mais frações em relação a menor fração apresentada na situação. Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) exemplifica colocando as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{12}$ em ordem decrescente. Ao comparar as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{2}$, temos que $\frac{5}{6}$ é maior do que $\frac{1}{2}$, e se compararmos $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{2}$, temos que $\frac{1}{12}$ é menor do que $\frac{1}{2}$. Sendo assim, a sequência composta pelos números $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{12}$ em ordem decrescente é dada por $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{12}$.

A equivalência também é útil para ordenar frações. De acordo com o exemplo apresentado por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015), queremos ordenar as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{8}$ em ordem decrescente. Utilizando as noções de frações equivalentes, temos que $\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{2}{8}$, logo $\frac{2}{8}$ é menor que $\frac{3}{8}$. E como $\frac{3}{8}$ é menor do que $\frac{5}{7}$, podemos escrever a seguinte sequência decrescente: $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{1}{4}$. A seguir, temos a representação da situação proposta acima na Figura 18.

Figura 18 – Ordenação de $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{8}$



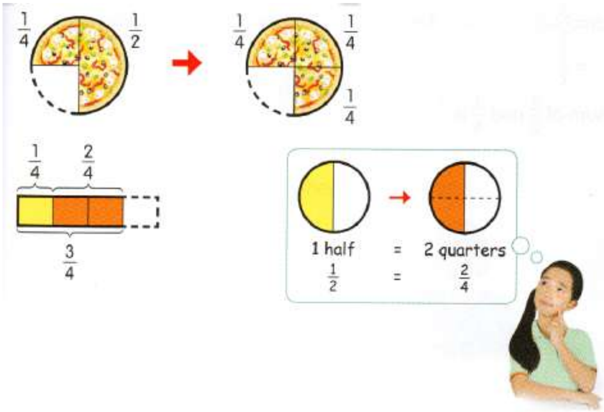
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

4.3 ADIÇÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

A adição de frações pode ser abordada utilizando situações cotidianas dos estudantes. Para isso, Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015) apresentam a seguinte questão: Lana comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza e Farah comeu $\frac{1}{2}$ da mesma pizza. O questionamento feito aos estudantes tem como objetivo encontrar a fração que corresponde a quantidade de pizza que os dois comeram juntos.

Ao utilizar desenhos para representar a pizza e as partes que Lana e Farah comeram, podemos perceber que $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ e que $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$. As ilustrações são apresentadas na Figura 19.

Figura 19 – Adição de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$

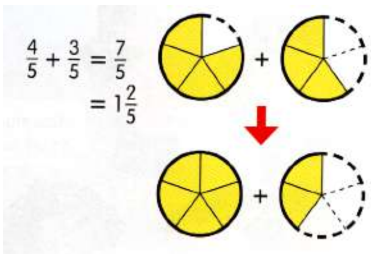


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

No exemplo acima, está presente a noção de equivalência de frações ao encontrar a fração $\frac{2}{4}$ que é equivalente a $\frac{1}{2}$, pois para adicionar duas frações é necessário que as duas possuam o mesmo denominador. Sendo assim, a fração $\frac{1}{2}$ é substituída por $\frac{2}{4}$, possibilitando descobrir a fração que corresponde à quantidade que foi consumida da pizza.

A soma de frações com denominadores iguais é solucionada somando os seus numeradores. Para exemplificar, queremos adicionar as frações dadas por $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$. Se aplicarmos o algoritmo da adição de frações temos que a solução é $\frac{7}{5}$ ou $1\frac{2}{5}$. Outro método de resolução é a utilização de desenhos, ao somar $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$ podemos completar o inteiro $\frac{5}{5}$ e sobra $\frac{2}{5}$. Deste modo, temos como solução $1\frac{2}{5}$. A Figura 20 ilustra a resolução utilizando desenhos.

Figura 20 – Adição de $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$

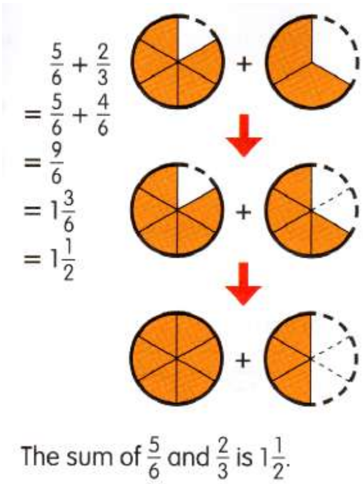


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

Uma questão importante é exemplificada na soma de $\frac{5}{6}$ por $\frac{2}{3}$. Como visto nos exemplos anteriores, podemos adicionar frações somente quando os denominadores são iguais. Utilizando as noções de equivalência, temos que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Sendo assim, a solução é dada por $\frac{9}{6}$ ou $1\frac{1}{2}$. Porém, a resolução através de desenhos se mostra muito interessante, pois inicialmente representamos as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{3}$ e utilizamos a mesma imagem que representa $\frac{2}{3}$ para ilustrar a fração $\frac{4}{6}$, mostrando que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Sendo assim, temos que $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6}$.

Ainda utilizando desenhos, temos que $\frac{5}{6}+\frac{4}{6}$ é igual a $\frac{6}{6}$ mais $\frac{3}{6}$, ou seja, $\frac{9}{6} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$. A solução é ilustrada na Figura 21.

Figura 21 – Adição de $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{3}$

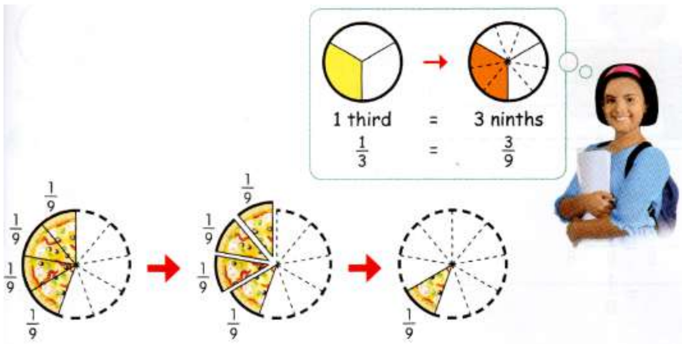


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

4.4 SUBTRAÇÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

As atividades relacionadas à subtração de frações podem ser abordadas utilizando situações como as sugeridas por Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a). Umas das questões levantadas supõe que Leo comeu $\frac{4}{9}$ de uma pizza e Jiemin comeu $\frac{1}{3}$ da mesma pizza, gerando como questionamento a quantidade de pizza que Leo comeu a mais do que Jiemin. A resolução através de desenhos, nos traz a representação de $\frac{4}{9}$, onde temos que $\frac{4}{9}$ é equivalente a quatro fatias de $\frac{1}{9}$ e também que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$. Sendo assim, a solução é apresentada retirando três do total de quatro fatias, tendo como resposta para a subtração a fração $\frac{1}{9}$, como ilustrado na Figura 22.

Figura 22 – Subtração de $\frac{4}{9}$ por $\frac{1}{3}$



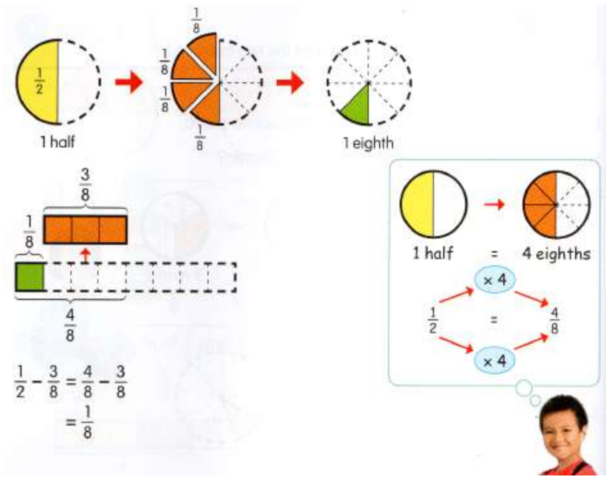
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

De acordo com a atividade acima, podemos concluir que de forma semelhante à adição de frações, a subtração só é possível de ser realizada quando o denominador é igual. Bastando assim, diminuir os numeradores. Uma forma de exemplificar a subtração de denominadores diferentes é realizar a operação $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$. A fim de resolver essa operação, podemos encontrar a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ que tenha denominador igual a oito, ou seja, $\frac{4}{8}$. Sendo assim, o resultado é dado por:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}. \tag{4.1}$$

Ao utilizar desenhos para a resolução da subtração $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$, podemos visualizar que $\frac{1}{2}$ é igual a soma de quatro parcelas iguais a $\frac{1}{8}$. Sendo assim, temos que a solução é dada fazendo $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}$, como ilustrado na Figura 23

Figura 23 – Subtração de $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Nos exemplos anteriores, é possível observar que o menor denominador é múltiplo do maior em cada um dos casos, facilitando assim a aplicação das noções de equivalência. Contudo, em alguns casos os denominadores não possuem nenhum divisor comum, tendo como exemplo as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{3}$. Conforme Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a), para que as duas frações apresentadas possam ser subtraídas precisamos que os denominadores sejam iguais, sendo assim, devemos considerar o número doze por ser mínimo múltiplo comum dos números quatro e três. Deste modo, teremos as seguintes igualdades: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ e $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Em suma, a solução de $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ é dada por:

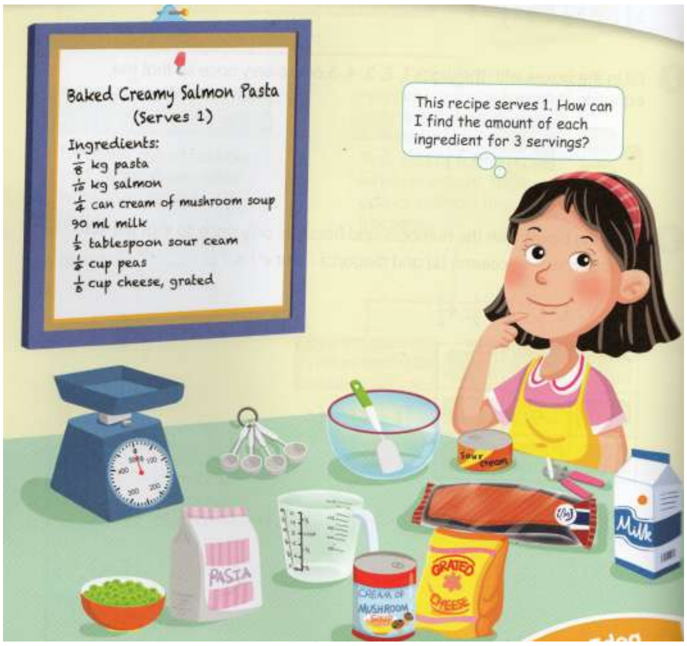
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}. \tag{4.2}$$

A operação de subtração envolvendo frações também pode ocorrer quando pretendemos subtrair uma parte de um inteiro. No que se refere a esta situação, tomemos como exemplo a subtração entre três inteiros e $\frac{2}{3}$. Ao subtrair de um inteiro a fração $\frac{2}{3}$, temos como resposta a fração dada por $\frac{1}{3}$. Deste modo, teremos como solução da subtração entre três inteiros e $\frac{2}{3}$ o resultado dado por dois inteiros e $\frac{2}{3}$, ou seja, $2\frac{1}{3}$.

4.5 PRODUTO ENVOLVENDO FRAÇÕES

Para iniciar as atividades relacionadas a operação de multiplicação, é proposta uma atividade do cotidiano que envolve a reprodução de uma receita de bolo que inicialmente serve uma única pessoa. Porém, os estudantes deverão calcular a quantidade necessária para que a receita sirva para três pessoas. De acordo com Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a), a atividade é apresentada conforme Figura 24.

Figura 24 – Atividade introdutória sobre produto de números racionais



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

Após ser apresentada a situação inicial, é iniciado o estudo das operações envolvendo o produto de frações por números inteiros e o produto de duas frações.

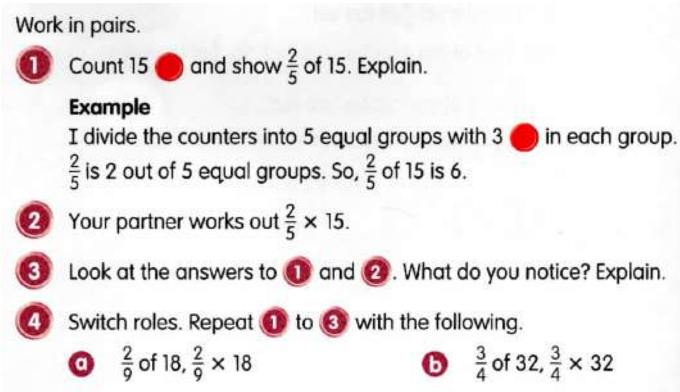
4.5.1 PRODUTO ENVOLVENDO FRAÇÕES E NÚMEROS INTEIROS

A abordagem da multiplicação de frações por números inteiros se inicia propondo que os alunos utilizem materiais concretos e também desenhos de um inteiro dividido em três partes iguais, com a finalidade de calcular o valor de $\frac{2}{3}$ de 9. O principal objetivo é que os estudantes concluam que os resultados encontrados são iguais. Em seguida, é apresentada uma situação que envolve o cálculo de $\frac{3}{4}$ de 16 através do seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \text{ de } 16 &= \frac{3}{4} \times 16 \\ &= \frac{3 \times 16}{4} \\ &= \frac{48}{4} \\ &= 12. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Após as atividades iniciais, é proposta a realização de atividades em duplas no qual um dos estudantes deve calcular o valor de $\frac{2}{5}$ de 15 utilizando materiais concretos e o outro integrante deve realizar o cálculo da mesma operação utilizando o algoritmo apresentado no exemplo anterior. Esta atividade tem o objetivo de validar o algoritmo através do uso de materiais concretos e é apresentada aos educandos no formato da Figura 25.

Figura 25 – Atividade realizada em dupla



Work in pairs.

1 Count 15 and show $\frac{2}{5}$ of 15. Explain.

Example

I divide the counters into 5 equal groups with 3 in each group.

$\frac{2}{5}$ is 2 out of 5 equal groups. So, $\frac{2}{5}$ of 15 is 6.

2 Your partner works out $\frac{2}{5} \times 15$.

3 Look at the answers to 1 and 2. What do you notice? Explain.

4 Switch roles. Repeat 1 to 3 with the following.

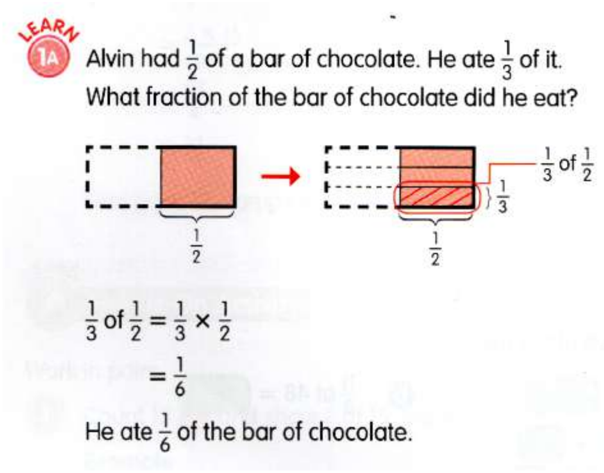
a $\frac{2}{9}$ of 18, $\frac{2}{9} \times 18$ b $\frac{3}{4}$ of 32, $\frac{3}{4} \times 32$

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

4.5.2 PRODUTO ENVOLVENDO DUAS FRAÇÕES

O produto envolvendo duas frações se inicia propondo uma situação na qual deve ser pintado $\frac{3}{4}$ de um retângulo e na sequência, deve ser cortada $\frac{1}{2}$ da parte pintada. O estudante é questionado sobre qual seria a fração do retângulo cortado, que no caso seria $\frac{3}{8}$. A partir desta atividade, são apresentados exemplos com o intuito de estabelecer as relações entre os numeradores e denominadores das frações que estão sendo multiplicadas, utilizando como base o uso de desenhos que representam a situação que esta sendo trabalhada. Na situação apresentada a seguir, na Figura 26, podemos verificar a resolução do produto entre as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, tendo como conclusão que o algoritmo utilizado na multiplicação de duas frações é realizar o produto dos numeradores e na sequência, o produto dos denominadores, formando uma nova fração.

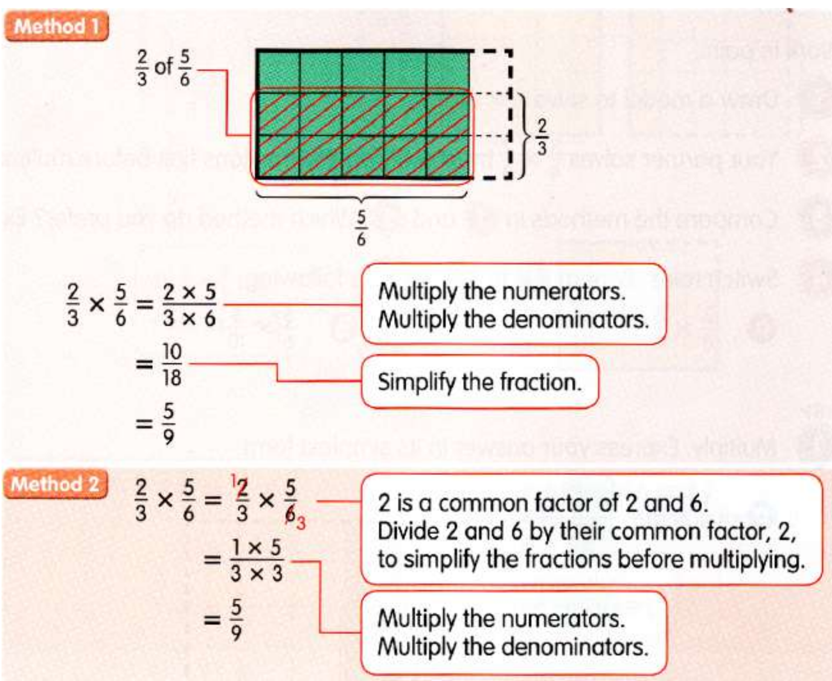
Figura 26 – Produto entre as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

Após a construção do algoritmo, é proposta uma nova situação em que o numerador e o denominador do produto encontrado tem fator comum, utilizando assim, a simplificação de frações para encontrar a solução que apresenta a fração mais simples possível. Para isso, a resolução do produto das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$ é feita através de dois métodos diferentes. No primeiro método, após a aplicação do algoritmo estudado anteriormente, a fração encontrada como solução é simplificada, e no segundo método, a simplificação das frações ocorre antes da multiplicação, para que na sequência seja multiplicado os numeradores e depois os denominadores. A Figura 27 ilustra a solução.

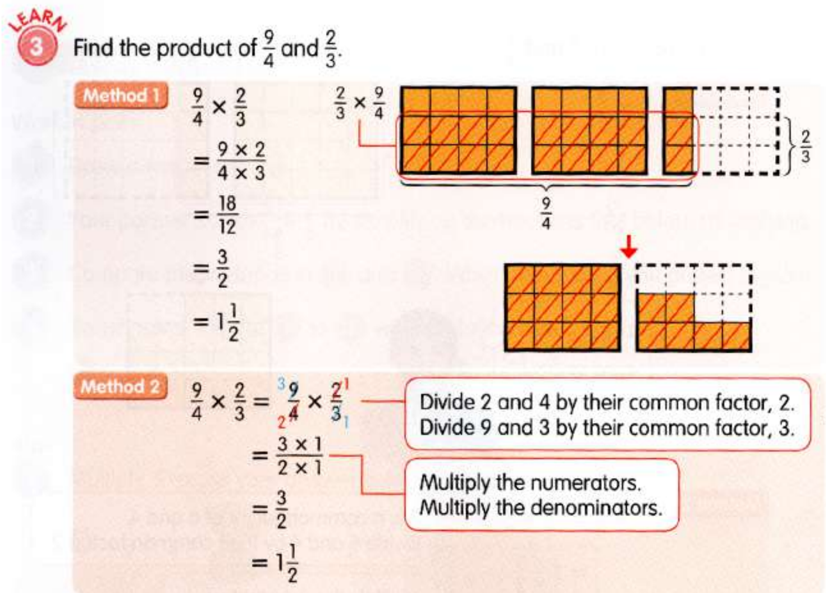
Figura 27 – Produto entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

A solução do produto entre frações próprias e impróprias é feita aplicando o algoritmo da multiplicação de frações, onde a simplificação destas pode ocorrer após encontrar a solução final ou antes da multiplicação dos numeradores e denominadores. Porém, a resolução utilizando como recurso a construção de desenhos para representar o produto se mostra interessante, pois se inicia representando a fração imprópria ou própria e depois é representada a outra fração que compõem o produto. Representando como o inteiro a parte pintada inicialmente, a solução é encontrada ao formar desenhos que representam o inteiro considerado no início da resolução, usando as partes pintadas que correspondem a fração imprópria e a fração própria. A seguir, é representada a solução do produto entre as frações $\frac{9}{4}$ e $\frac{2}{3}$, onde a solução encontrada é uma fração mista (Figura 28).

Figura 28 – Produto entre as frações $\frac{9}{4}$ e $\frac{2}{3}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

A multiplicação entre frações impróprias é apresentada através da resolução de situações utilizando como recurso o algoritmo que foi discutido durante as soluções das atividades posteriores.

4.6 DIVISÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

Os estudos sobre a divisão envolvendo frações começa com a apresentação de uma situação cotidiana aos educandos. Nesta atividade, as questões apresentadas se referem às seguintes situações: Na primeira situação, a criança usou $\frac{1}{6}$ de um papel amarelo para fazer uma roseta [2] amarela e tem como dúvida a quantidade de rosetas que podem ser feitas utilizando o restante do papel não aproveitado. Na segunda situação, outra criança

[2] Conforme Michaelis (2008), a roseta é uma pequena rosa.

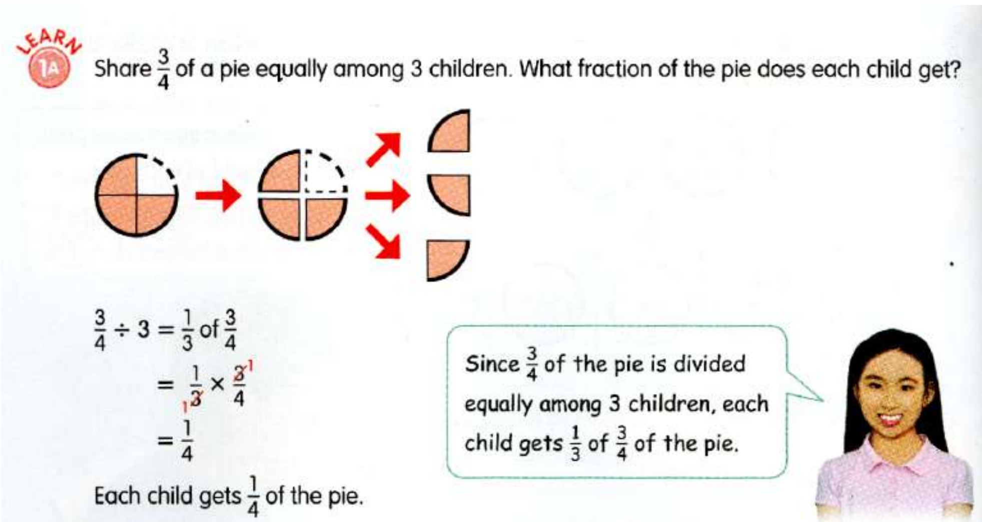
questiona sobre qual seria a fração que será encontrada se dividir em duas partes iguais $\frac{2}{5}$ de um bloco de argila roxa. Sendo necessário para essas soluções a divisão entre uma fração e um número inteiro e também a divisão entre duas frações.

4.6.1 DIVISÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES E NÚMEROS INTEIROS

A divisão de uma fração por um número inteiro se inicia propondo aos alunos que realizem a divisão de $\frac{1}{4}$ de pizza em três pessoas, de modo que a quantidade de cada pedaço seja igual, e a seguir, indique a fração que representa cada porção encontrada. Assim que os estudantes encontrem a resposta correta utilizando desenhos, são apresentadas as resoluções de atividades semelhantes, onde são representadas as situações através de desenhos e é apresentado o algoritmo de resolução. Um dos exemplos abordados é a divisão de $\frac{3}{4}$ de uma torta de forma que três crianças recebam a mesma quantidade.

Na representação através de desenhos da situação abordada (Figura 29), dividimos $\frac{3}{4}$ em três pedaços iguais, sendo assim, cada pedaço corresponde a $\frac{1}{4}$ da torta inteira. Através das imagens, há a conclusão de que a divisão de uma fração por um número inteiro é equivalente a multiplicar o inverso do número inteiro pela fração que deve ser dividida, estabelecendo assim, o algoritmo da divisão. A seguir, temos a resolução do problema apresentado como afirma Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a).

Figura 29 – Divisão de $\frac{3}{4}$ por 3



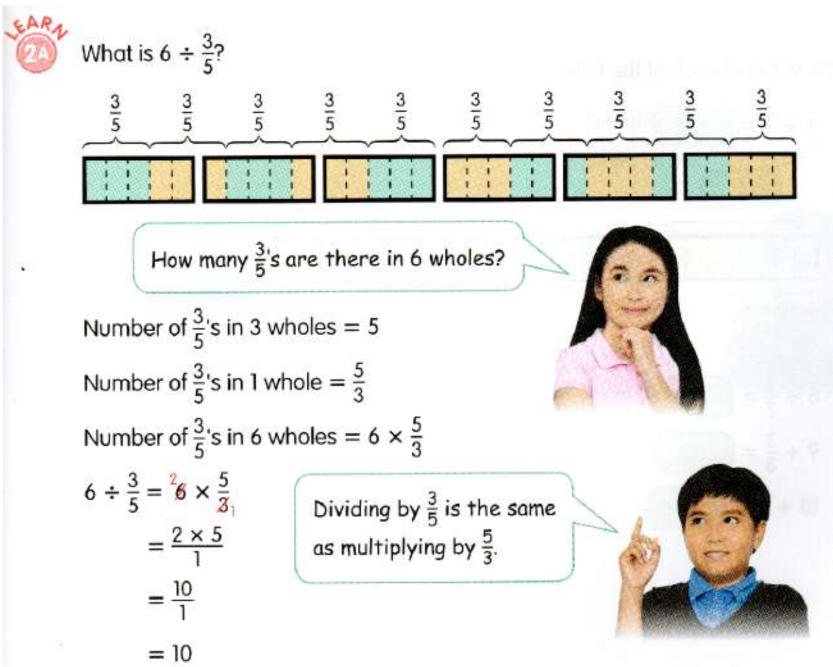
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Para abordar a divisão de um número inteiro por uma fração, é proposto aos estudantes que determinem o número de crianças que receberam $\frac{1}{4}$ de *waffle* sabendo que foram divididos três *waffle* inteiros. Os estudantes devem utilizar desenhos para encontrar a solução correta. Em continuidade ao desenvolvimento do conteúdo, há a resolução de exemplos utilizando desenhos e a partir destes, é demonstrado que a divisão de um número inteiro por uma fração é igual a fazer a multiplicação deste número pelo inverso da fração.

Uma das situações discutidas é a divisão de dois bolos em pedaços iguais que equivalem a $\frac{1}{4}$ do bolo e a questão levantada é a quantidade de pedaços que serão cortados utilizando os dois bolos inteiros. Os dois bolos serão divididos em quatro partes cada um, concluindo que haverá oito pedaços de bolo.

Outra questão apresentada, é a divisão de 6 por $\frac{3}{5}$. Inicialmente, a situação é representada através do uso de desenhos (Figura 30), onde são apresentados seis inteiros divididos cada um em cinco partes. A resolução começa identificando que três inteiros podem ser divididos cinco vezes por $\frac{3}{5}$ e que o número de $\frac{3}{5}$ em um inteiro corresponde a $\frac{5}{3}$. Sendo assim, seis dividido por $\frac{3}{5}$ é igual ao produto entre seis e $\frac{5}{3}$. Aplicando o algoritmo da multiplicação, temos que a solução final é igual a dez, como elucida Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a).

Figura 30 – Divisão de 6 por $\frac{3}{5}$



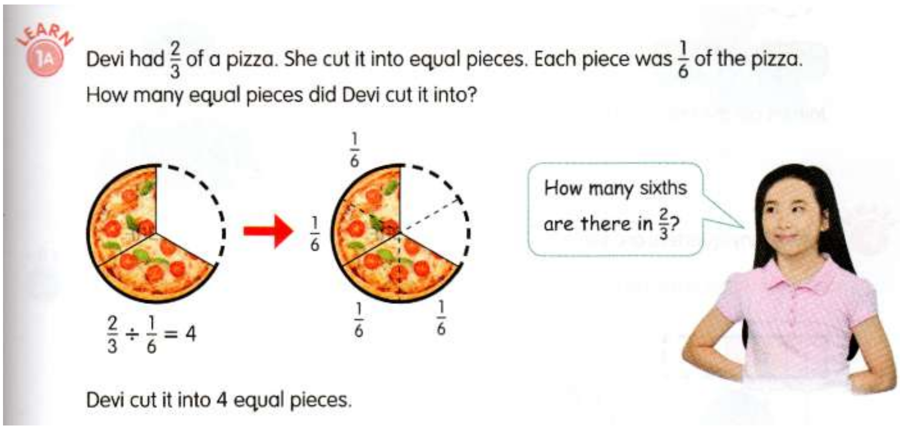
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

4.6.2 DIVIDINDO DUAS FRAÇÕES PRÓPRIAS

O ensino da divisão entre duas frações próprias é abordado com a resolução da seguinte questão: Nas palavras de Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a), Devi tinha $\frac{2}{3}$ de uma pizza e dividiu em pedaços correspondentes a $\frac{1}{6}$ da pizza. A questão a ser respondida é a quantidade de fatias encontradas.

A resolução da divisão de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ ocorre através de desenhos que representam a situação apresentada. Na representação (Figura 31) há um desenho que indica $\frac{2}{3}$ da pizza e utilizando a mesma imagem, é representado a quantidade de vezes que $\frac{1}{6}$ cabe no inteiro. Sendo assim, a solução da situação apresentada é quatro, como pode-se observar em Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a).

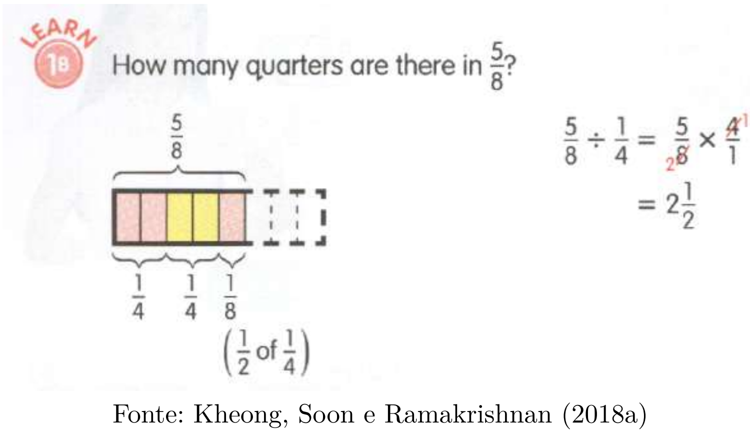
Figura 31 – Divisão de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Outra situação apresentada na Figura 32 é o cálculo da divisão de $\frac{5}{8}$ por $\frac{1}{4}$ e a solução através de desenhos acontece com a representação de $\frac{5}{8}$ e também a representação de $\frac{1}{4}$ tendo o mesmo inteiro como referência. É verificado assim, que em $\frac{5}{8}$ cabe duas vezes $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{8}$, pois $\frac{1}{8}$ é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$. Logo, a solução da situação proposta é 2 inteiros e $\frac{1}{2}$. Um segundo método seria o uso do algoritmo para divisão de frações discutido anteriormente, onde temos que a divisão ocorre fazendo a multiplicação de $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{1}$. Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a) apresenta a solução da seguinte forma:

Figura 32 – Divisão de $\frac{5}{8}$ por $\frac{1}{4}$



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

4.7 ASPECTOS GERAIS DA METODOLOGIA UTILIZADA EM SINGAPURA

A análise do método de ensino utilizado pelos autores da coleção de livros *My Pals Are Here!* mostra a aplicação da metodologia de ensino em Singapura. Inicialmente, os conteúdos são abordados utilizando como exemplos as situações em que serão aplicados os conhecimentos daquela seção e também há o questionamento relacionado a um problema matemático, onde os alunos são levados a procurar as respostas da forma que acharem mais conveniente ou é indicado a representação através de desenhos.

Em relação ao uso de desenhos, todos os exemplos resolvidos no livro possuem a representação por imagens e são apresentados os cálculos e, em alguns casos, são construídos os algoritmos de resolução tendo como base o raciocínio utilizado para representar as situações trabalhadas.

Durante as seções são sugeridas atividades em grupo ou individuais. Em grande parte das atividades em duplas são proporcionadas questões onde são sugeridos dois métodos de resolução, onde um estudante resolve através de representação na forma de desenhos e o outro estudante utiliza o algoritmo que foi trabalhado, com o objetivo de utilizar várias ferramentas de resolução e verificar a veracidade das soluções. Durante as resoluções das questões, cada aluno da dupla realiza a atividade duas vezes, uma por construção e outra por uso de algoritmos.

As atividades individuais que possuem como fim a construção ou a fixação dos algoritmos são estruturadas de forma que os estudantes completem cada passo necessário, sendo disponibilizados espaços para que os cálculos sejam anotados. Em algumas destas atividades o aluno deve aplicar o algoritmo, porém na grande maioria é sugerido que os alunos utilizem desenhos e também os algoritmos. Há também sugestões aos educandos para usarem calculadoras para conferir as atividades realizadas de forma individual.

Além das atividades acima, nos livros dos estudantes há seções voltadas à resolução de problemas e os livros dos professores contém uma série de outras atividades de fixação em que os estudantes devem aplicar os algoritmos, utilizar desenhos ou solucionar as situações através dos dois métodos. No livro do professor, ou seja, o *Workbook*, são encontradas outras situações-problema para serem aplicados em sala de aula e também desafios a serem respondidos pelos estudantes.

Uma das características que se distingue em relação aos livros é o número de exemplos resolvidos e de atividades, porém distribuídos em um formato agradável onde há espaços para a resolução sem apresentar muitas informações nas páginas e também o uso de crianças com aspectos físicos semelhantes aos habitantes de Singapura.

5 APLICAÇÃO E RESULTADOS

Este capítulo apresenta a metodologia e os resultados alcançados na aplicação do Método de Singapura no ensino de frações, sendo as atividades aplicadas em uma escola da cidade de Joinville.

5.1 APLICAÇÃO

A escolha pela aplicação do Método de Singapura no ensino de frações surgiu a partir das recorrentes dificuldades apresentadas pelos estudantes no momento de efetuar cálculos que envolvam as frações. As principais dificuldades surgem no momento de realizar comparações entre frações e resolver situações envolvendo as operações com números fracionários, principalmente a adição e subtração com denominadores diferentes, divisão de frações e simplificação de frações.

As atividades foram realizadas na Escola Municipal Dom Jaime de Barros Câmara, situada na cidade de Joinville. A aplicação ocorreu em uma turma de oitavo ano, a qual já tinha tido contato com o estudo de frações usando o método tradicional de ensino (sem utilização de materiais concretos).

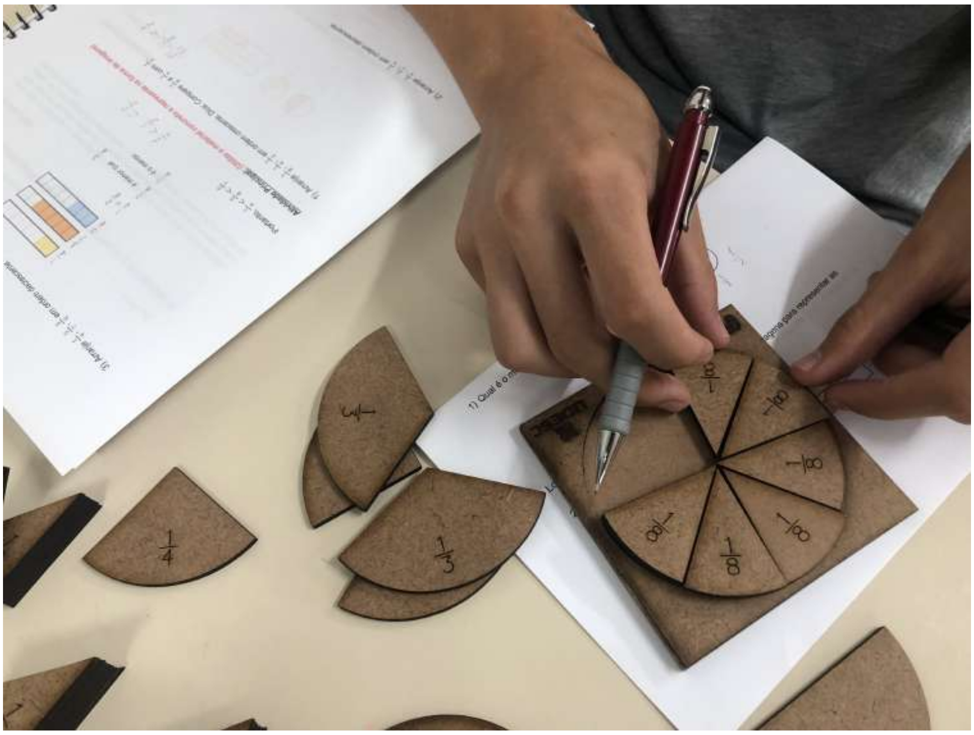
Os conteúdos abordados durante a aplicação foram a equivalência de frações, comparação e ordenação de frações e as quatro operações envolvendo frações, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão de frações. Na multiplicação de frações foram abordadas a multiplicação de fração por número inteiro e a multiplicação entre duas frações. Na divisão de frações foram trabalhadas a divisão de frações por números inteiros, de números inteiros por frações e de fração própria por fração própria.

As atividades propostas estão contidas na coleção de livros *My Pals Are Here!*, cuja coleção aborda o ensino de diversos conteúdos matemáticos através da metodologia utilizada em Singapura. Durante as aulas, também foram utilizados materiais concretos como Barras de Frações e Fração em Pizza, que foram disponibilizados pelo laboratório Fábrica Matemática FAB3D, situado nas dependências da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) em Joinville. Outros materiais utilizados foram a disponibilização de materiais impressos para que os estudantes realizassem as atividades propostas e também o uso de materiais diversos, como por exemplo, tampinhas de garrafa PET. As

Barras de Frações e Fração em pizza são apresentados na Figura 33.

Figura 33 – Materiais Didáticos

(a) Barras de Fração



(b) Fração em Pizza

Em cada tópico trabalhado, os estudantes deveriam solucionar as atividades utilizando as Barras de Frações ou Fração em Pizza, representar na forma de desenho se solicitado e, por fim, resolver as atividade através dos algoritmos, confirmando desta forma, as soluções encontradas no primeiro momento.

5.2 AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Para dar início às atividades propostas, foi realizada uma Avaliação Diagnóstica com o objetivo de verificar o conhecimento dos estudantes em relação ao conteúdo de frações, como por exemplo, noções de equivalência e as operações com números fracionários.

As atividades que compõem a Avaliação Diagnóstica possuem como finalidade a aplicação direta dos algoritmos ou o uso de outra forma de resolução. As questões propostas envolvem as noções de equivalência, comparação e ordenação de frações e também as operações, como adição, subtração, multiplicação e divisão. O Quadro 1 apresenta a avaliação aplicada aos estudantes do oitavo ano.

Quadro 1 – Avaliação Diagnóstica

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1) Encontre o numerador ou denominador ausente:

   a) $\frac{1}{4} = \frac{}{8} = \frac{3}{}$
   b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{} = \frac{}{9}$
   c) $1 = \frac{2}{} = \frac{}{3}$

2) Compare as seguintes frações utilizando o símbolo do (>) maior, (<) menor ou (=) igual:

   a) $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ — $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{7}$ — $\frac{1}{2}$

3) Coloque as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ em ordem decrescente.

4) Calcule:

   a) $\frac{3}{10} + \frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{2} \times 4$ d) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$
   e) $\frac{3}{4} \div 12$ f) $12 \div \frac{9}{10}$ g) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{12}$

5) Encontre o valor de cada sentença:

   a) $\frac{5}{6}$ de 12 b) $\frac{4}{7}$ de 35

A primeira questão da Avaliação Diagnóstica tem como finalidade avaliar o conhecimento dos estudantes referente a aplicação de noções de equivalência. Na questão de número dois, o objetivo da resolução é a comparação entre duas frações e, na sequência, a questão três propõe a ordenação de frações. A questão quatro tem como fim verificar a capacidade dos alunos em aplicar os algoritmos para a resolução das quatro operações básicas envolvendo frações, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão. A questão cinco avalia o conhecimento dos estudantes em calcular a fração de uma determinada quantidade, cuja resolução pode ser feita através da multiplicação da fração por um número inteiro.

Entre as turmas de oitavo ano, a classe escolhida para a aplicação das atividades é composta por vinte e três alunos, sendo que vinte alunos estavam presentes no dia da realização da Avaliação Diagnóstica. De modo geral, as resoluções foram feitas através da tentativa de aplicação dos algoritmos resolução.

A fim de analisar a quantidade de acertos e erros nas resoluções, foram coletados os dados sobre o número de questões corretas e questões parcialmente corretas (quando houve algum erro na resolução mas com a aplicação do algoritmo feita corretamente ou nos tópicos que possuíam mais de um item, o estudante acertou pelo menos algum item). Também foram coletados os dados de acordo com o número de resoluções incorretas e as que não foram resolvidas. A Tabela 1 apresenta os dados coletados.

Tabela 1 – Avaliação Diagnóstica: Primeira Aplicação

Tópicos	**Correto**	**Parcial**	**Incorreto**	**Em branco**
Equivalência de Frações	2	9	8	1
Comparação de Frações	1	10	8	1
Ordenação de Frações	9	0	7	4
Adição de Frações	2	0	14	4
Subtração de Frações	2	0	14	4
Multiplicação de Frações	2	7	7	4
Divisão de Frações	1	0	11	8
Fração de uma quantidade	2	3	7	8

Fonte: Produção Própria

Ao analisarmos os dados da Tabela 1, podemos verificar que os estudantes compreendem o que é fração mas não sabem realizar os cálculos.

Para elucidar o conteúdo sobre frações, propomos uma série de atividades sobre cada um dos tópicos abordados na Avaliação Diagnóstica, que serão descritos a seguir.

5.3 PLANOS DE AULA REFERENTES À APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SINGAPURA

As aulas que sucederam a aplicação da Avaliação Diagnóstica tiveram como propósito construir os conhecimentos necessários para solucionar questões que envolvam as noções de equivalência, comparação e ordenação de frações e também a resolução de operações que envolvam as frações, cujas operações são a adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para cada tópico citado acima, foram planejadas atividades que envolvessem a aplicação da metodologia de ensino utilizada nas escolas de Singapura, onde o conhecimento é construído a partir do uso de materiais concretos e de desenhos, para que no fim do processo, os conceitos sejam formalizados de forma abstrata.

Em cada planejamento aplicado, as atividades foram divididas em Atividade Inicial, Exemplos Resolvidos, Atividade Principal, Conclusões, Atividade Avaliativa e Atividades Complementares. A Atividade Inicial tem como finalidade instigar o estudante à encontrar a solução das questões propostas utilizando materiais concretos, desenhos ou seus conhecimentos prévios. Tendo realizada a primeira atividade, é apresentado aos alunos o Exemplo Resolvido, onde a professora junto com os estudantes, encontram a solução de uma determinada questão e, na sequência, os estudantes resolvem a Atividade Principal com o intuito de aplicar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Ao ser concluída a Atividade Principal, pode-se questionar os estudantes sobre o que pode ser observado nas resoluções já trabalhadas, procurando assim, estabelecer um método de resolução ou um algoritmo que poderia ser utilizado em outras atividades similares. Essa atividade deve ser realizada conjuntamente pelos alunos e a professora. As anotações devem ser registradas em materiais impressos fornecidos anteriormente.

Para finalizar o tópico que esta sendo trabalhado, os estudantes devem encontrar as soluções das Atividades Avaliativas que possuem como objetivo avaliar o conhecimento adquirido ao longo das resoluções das atividades anteriores. As Atividades Complementares são aplicadas como atividades extras para aqueles alunos que terminaram a Atividade Principal antes dos demais estudantes da classe ou são aplicadas como tarefa de casa.

Das atividades que foram citadas acima, somente o Exemplo Resolvido e as Conclusões foram realizadas pela professora junto com os estudantes. As demais atividades foram resolvidas pelos estudantes, onde a professora sanou as dúvidas e fez as correções ao fim de cada atividade.

A seguir, serão detalhadas as atividades para a construção dos conhecimentos sobre os tópicos apresentados na Avaliação Diagnóstica, contendo como exemplos de resoluções, as devolutivas feitas pelos alunos mostrando as resoluções das atividades propostas durante as aulas de aplicação do Método de Singapura. As resoluções que serão apresentadas foram realizadas por vários estudantes cujos nomes não serão divulgados. Estas atividades e algumas outras adicionais geraram um Caderno Pedagógico que está no Apêndice A.

5.3.1 PLANO DE AULA SOBRE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

O primeiro tópico a ser trabalhado durante a aplicação do método de ensino de Singapura é a equivalência de frações. Segundo Castrucci e Júnior (2018), as frações equivalentes são duas ou mais frações que representam a mesma parte do inteiro.

Como os demais tópicos a serem apresentados, a noção de equivalência de frações é construída utilizando materiais concretos e representações das situações através do uso de desenhos. As atividades propostas foram realizadas durante duas aulas de quarenta e oito minutos e registradas em materiais impressos. A seguir, todas as atividades sobre frações equivalentes serão descritas:

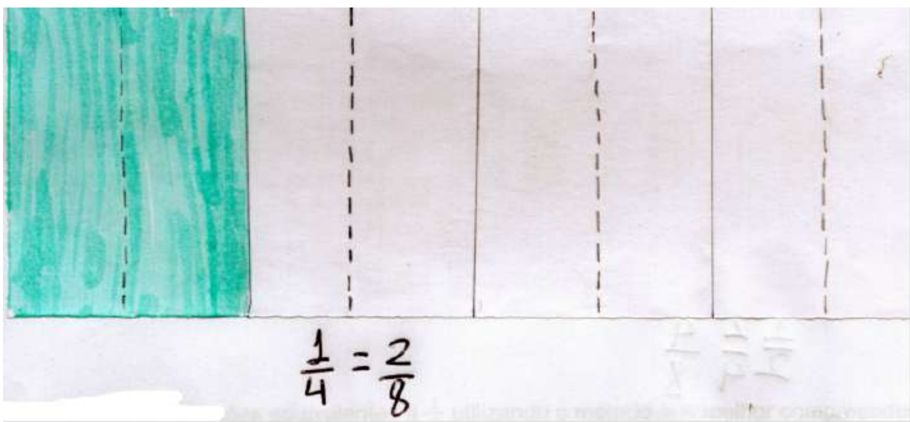
Atividade inicial: A questão proposta aos estudantes tem como objetivo reconhecer o que são frações equivalentes utilizando material concreto para este fim, onde o aluno é instigado a tirar as suas próprias conclusões sem o auxílio da professora.

A atividade se inicia com cada estudante recebendo uma tira de papel e dividindo a mesma em quatro partes iguais, marcando com um lápis as partes destacadas. Os estudantes deveriam pintar uma parte delas e escrever a fração que representava a parte pintada.

Utilizando a mesma tira de papel, os estudantes deveriam dividi-la em oito partes iguais e desenhar linhas tracejadas para marcar as partes encontradas. Novamente, os estudantes deveriam escrever a fração que representa a parte pintada inicialmente.

A partir da observação da parte pintada da tira, os estudantes concluíram que $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ representam a mesma parte do todo. Ou seja, as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são equivalentes. Uma das resoluções é do Aluno A, que será apresentada na Figura 34 a seguir:

Figura 34 – Atividade Inicial sobre Frações Equivalentes



Fonte: Resolução do Aluno A

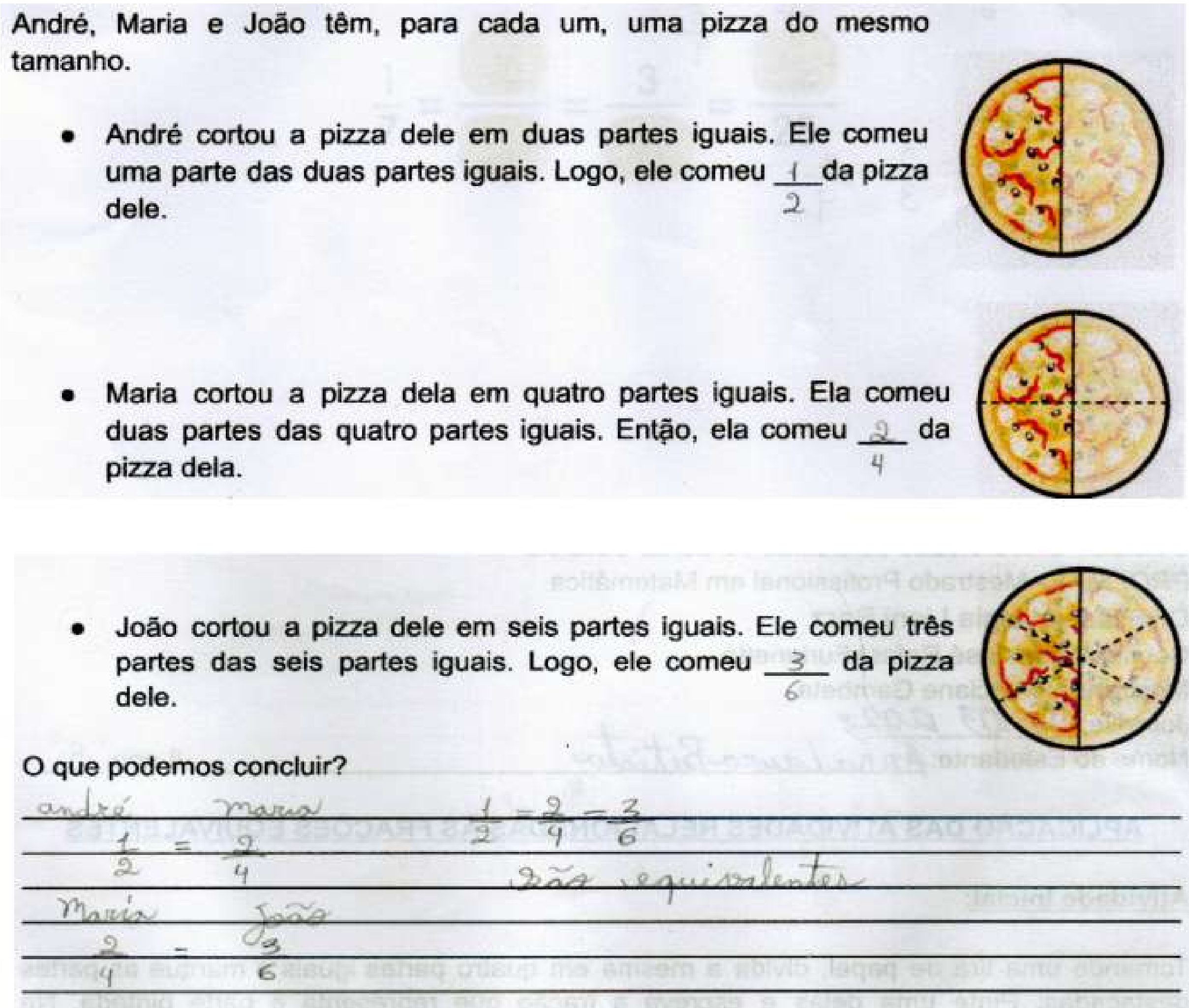
Exemplos Resolvidos: Para exemplificar e definir frações equivalentes, foi proposto aos estudantes a resolução de um exemplo, a solução deveria ser encontrada pela professora juntamente com os estudantes da classe.

Nesta questão, se supõe que André, Maria e João têm, para cada um, uma pizza de mesmo tamanho. André cortou a pizza dele em duas partes iguais e comeu uma parte, Maria cortou a pizza dela em quatro partes iguais e comeu duas partes e João cortou a pizza dele em seis partes iguais e comeu três partes.

Os estudantes deveriam escrever as frações que representam as partes que cada pessoa comeu e identificar que as frações são equivalentes pois representam a mesma parte do inteiro. Por fim, os estudantes anotaram as conclusões que puderam ser feitas em relação ao exemplo resolvido.

A Figura 35 apresenta a resolução deste exemplo feita pelo Aluno B.

Figura 35 – Exemplo Resolvido sobre Frações Equivalentes



André, Maria e João têm, para cada um, uma pizza do mesmo tamanho.

- André cortou a pizza dele em duas partes iguais. Ele comeu uma parte das duas partes iguais. Logo, ele comeu $\frac{1}{2}$ da pizza dele.

- Maria cortou a pizza dela em quatro partes iguais. Ela comeu duas partes das quatro partes iguais. Então, ela comeu $\frac{2}{4}$ da pizza dela.

- João cortou a pizza dele em seis partes iguais. Ele comeu três partes das seis partes iguais. Logo, ele comeu $\frac{3}{6}$ da pizza dele.

O que podemos concluir?

andré maria $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

são equivalentes

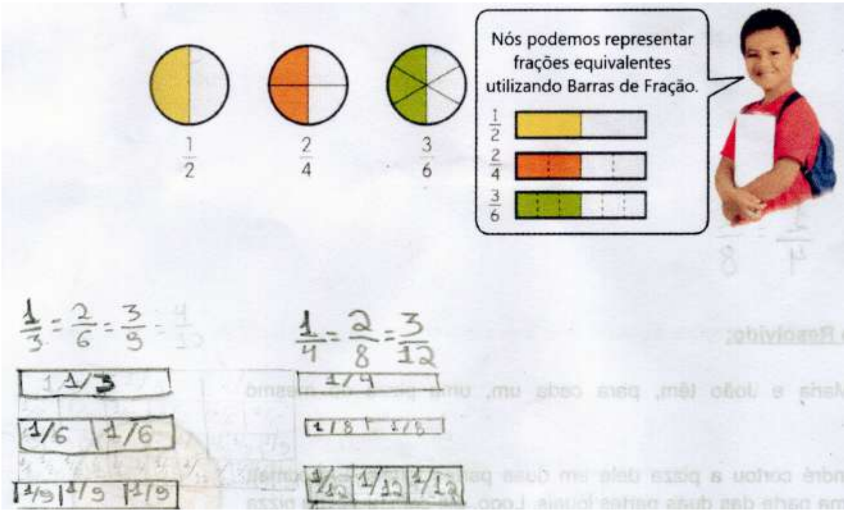
Maria João

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

Fonte: Resolução do Aluno B

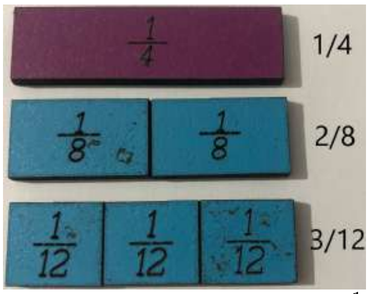
Atividade Principal: Nesta atividade, os estudantes deveriam encontrar as três primeiras frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ conforme o exemplo que representa as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ através de desenhos. Para que esta atividade fosse resolvida, os métodos que poderiam ser utilizados foram o uso de materiais concretos e desenhos. A resolução desta atividade, que foi realizada pelo Aluno C na forma de desenhos e também através do uso de materiais concretos, é apresentada na Figura 36.

Figura 36 – Atividade Principal sobre Frações Equivalentes



(a) Resolução do Aluno C

(b) Frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ com uso de material concreto, cuja resolução foi feita pelo Aluno C.



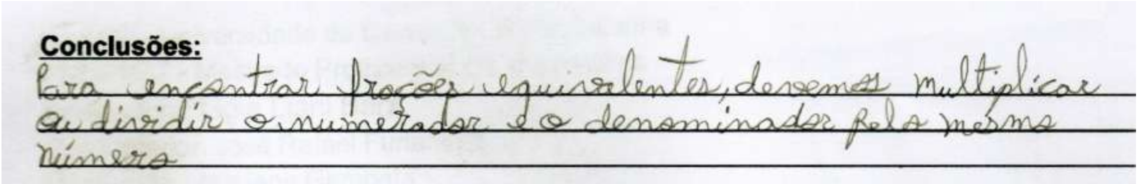
(c) Frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ com uso de material concreto, cuja resolução foi feita pelo Aluno C.

Conclusões: Neste momento da aula, a professora questionou os estudantes sobre o que poderiam observar das atividades anteriores, ou seja, como encontrar frações equivalentes sem representar por desenhos ou utilizar materiais concretos.

A conclusão da classe foi que ao multiplicar ou dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número, encontra-se frações equivalentes. A Figura 37 exemplifica o registro dessa conclusão através das anotações do Aluno D.

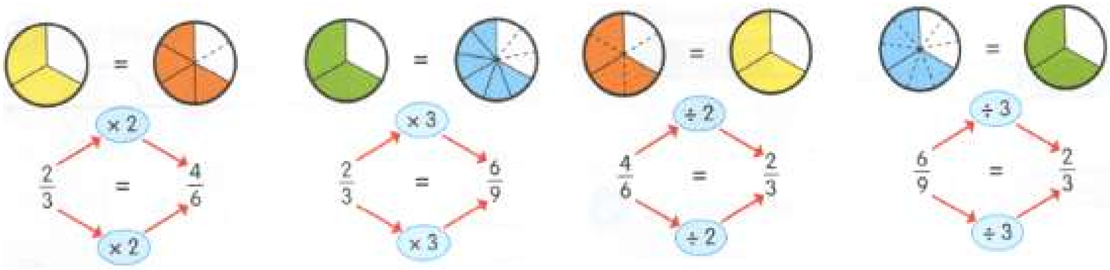
Na sequência destas atividades, foram apresentados exemplos adicionais através de imagens, com o intuito de revisar o método de encontrar frações equivalentes, tanto multiplicando quanto dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número. No caso da divisão, foi estabelecido o que seria a simplificação de frações. A Figura 38 ilustra o exemplo disponibilizado aos estudantes.

Figura 37 – Conclusões sobre Frações Equivalentes


Conclusões:
Para encontrar frações equivalentes, devemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número

Fonte: Conclusões do Aluno D

Figura 38 – Exemplos adicionais sobre Frações Equivalentes



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

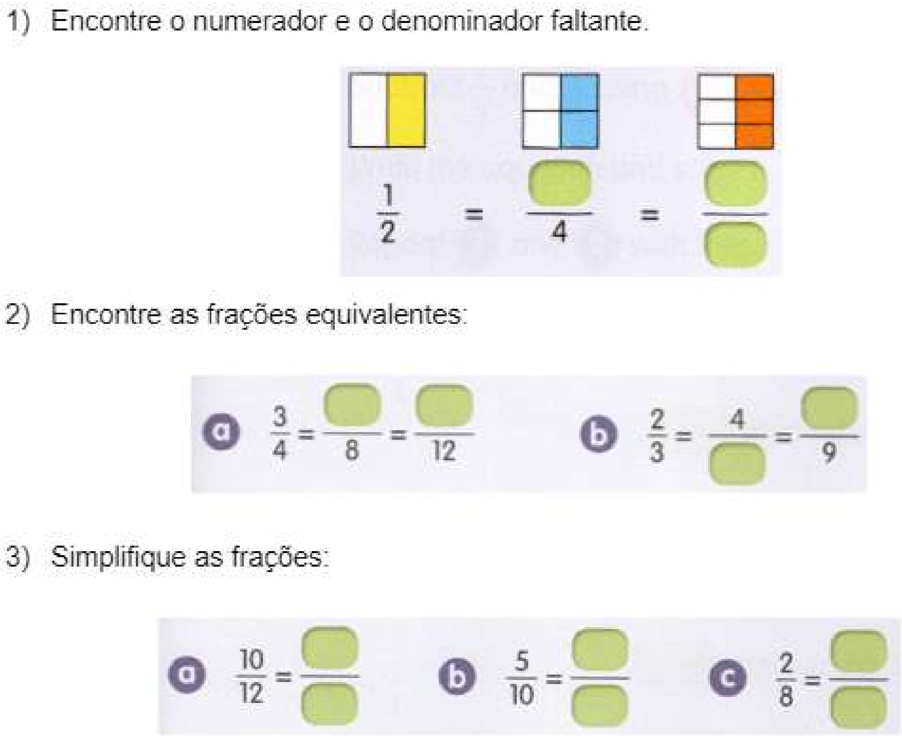
Atividades Complementares: Estas atividades foram propostas como tarefa para casa e tinham como objetivo o encontro de frações equivalentes utilizando para isto ferramentas como o uso de desenhos e também a aplicação do método para encontrar frações equivalentes, cujo método mencionado seria multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. A Figura 39 apresenta a questão proposta.

Atividades Avaliativas: Para encerrar as atividades sobre as frações equivalentes, os estudantes foram avaliados de forma individual para verificar os conhecimentos adquiridos. Com este objetivo, foi proposta a resolução de duas questões envolvendo o conteúdo estudado neste tópico.

Nas duas questões apresentadas, os estudantes deveriam completar os numeradores e denominadores faltantes para que fossem encontradas as frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{7}$. A primeira questão tem como objetivo encontrar as três primeiras frações equivalentes a $\frac{1}{4}$, utilizando para este fim, o uso de imagens. A segunda questão tinha como finalidade determinar as quatro primeiras frações equivalentes a $\frac{1}{7}$, multiplicando o numerador e o denominador por números iguais conforme as conclusões relatadas anteriormente.

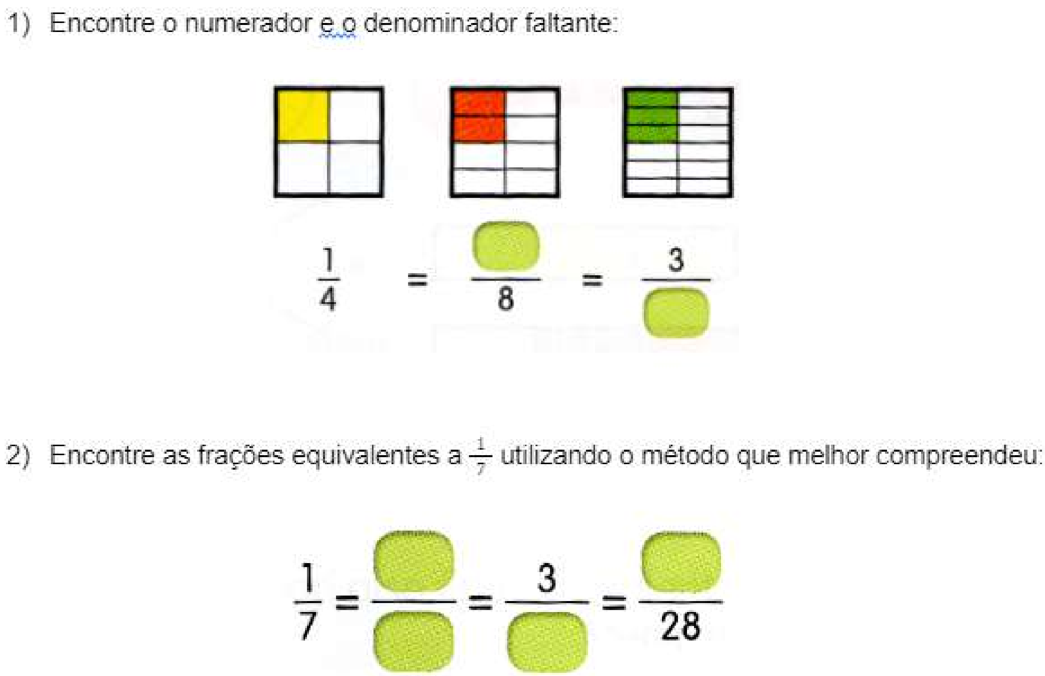
Neste dia, estavam presentes os vinte e um alunos que frequentam as aulas diariamente. Após a correção das atividades avaliativas, foi possível verificar que 81% dos estudantes responderam as questões de forma totalmente correta e 19% acertou de forma parcial ou totalmente incorreta. A Figura 40 e a Figura 41 mostram as questões que compõem a atividade avaliativa e a resolução correta, assim como uma das resoluções cuja solução esta parcialmente correta.

Figura 39 – Atividades Complementares sobre Frações Equivalentes



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

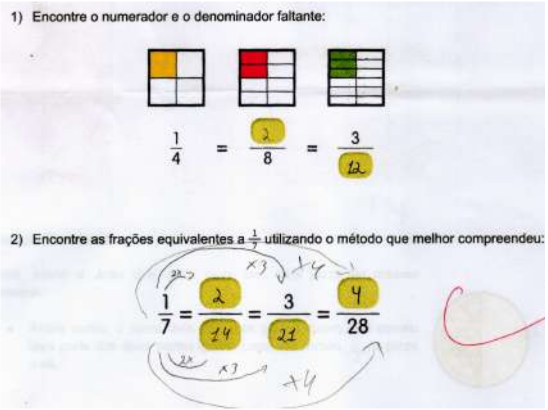
Figura 40 – Atividades Avaliativas sobre Frações Equivalentes



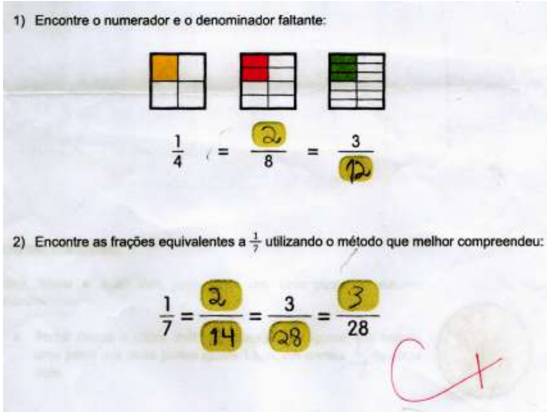
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Ao analisar as resoluções incorretas, é possível identificar que a principal dificuldade apresentada pelos estudantes foi a aplicação do método para encontrar as frações

Figura 41 – Resoluções das Atividades Avaliativas sobre Frações Equivalentes



(a) Atividade Avaliativa resolvida corretamente



(b) Atividade avaliativa resolvida de forma parcialmente correta

equivalentes, pois cometeram erros ao multiplicar os numeradores e denominadores.

5.3.2 PLANOS DE AULA SOBRE COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DE FRAÇÕES E OPERAÇÕES ENVOLVENDO FRAÇÕES

Neste momento, serão apresentados os planos de aula referentes a Comparação e Ordenação de Frações e as operações envolvendo as frações, cujas operações são adição, subtração, multiplicação e divisão. Em cada plano que será descrito, serão relatadas as **Atividades Principais**, as **Conclusões** e as **Atividades Avaliativas**.

As demais atividades como **Atividade Inicial**, **Exemplos Resolvidos** e **Atividades Complementares** estão presentes no Produto Educacional no Apêndice A dessa dissertação junto com as demais sugestões de atividades.

Para cada tópico a seguir, serão apontados o número de aulas que foram necessárias, os materiais utilizados e também a porcentagem de questões corretas ou incorretas relacionadas às Atividades Avaliativas.

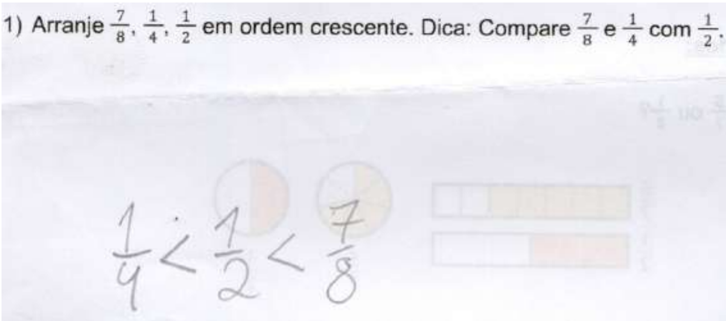
5.3.2.1 COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DE FRAÇÕES

O tópico sobre Comparação e Ordenação de Frações foi trabalhado ao longo de duas aulas de quarenta e oito minutos cada. As resoluções se baseiam no uso de imagens para representar a parte do inteiro e também no uso de materiais concretos.

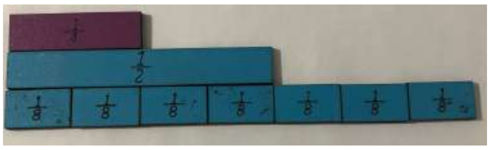
As Atividades Principais foram compostas por duas questões, na qual a primeira tinha como proposta ordenar as frações $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ em ordem crescente, usando como dica a comparação de $\frac{7}{8}$ e $\frac{1}{4}$ com $\frac{1}{2}$. A segunda questão tinha como finalidade ordenar as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ em ordem decrescente.

Nas duas questões, o método mais utilizado pelos estudantes foi o uso de materiais concretos, para na sequência, anotar a resposta correta nos materiais impressos. A Figura 42 e a Figura 43 apresentam as resoluções das Atividades Principais feitas pelos Aluno E e F, respectivamente.

Figura 42 – Primeira Questão das Atividades Principais sobre Comparação e Ordenação de Frações

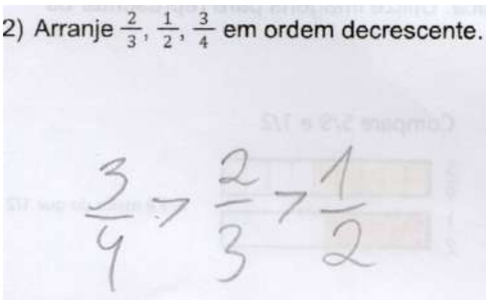


(a) Resolução do Aluno E

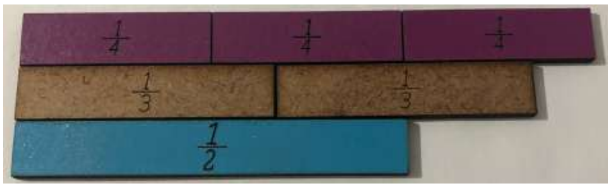


(b) Resolução com Material Concreto

Figura 43 – Segunda Questão das Atividades Principais sobre Comparação e Ordenação de Frações



(a) Resolução do Aluno F

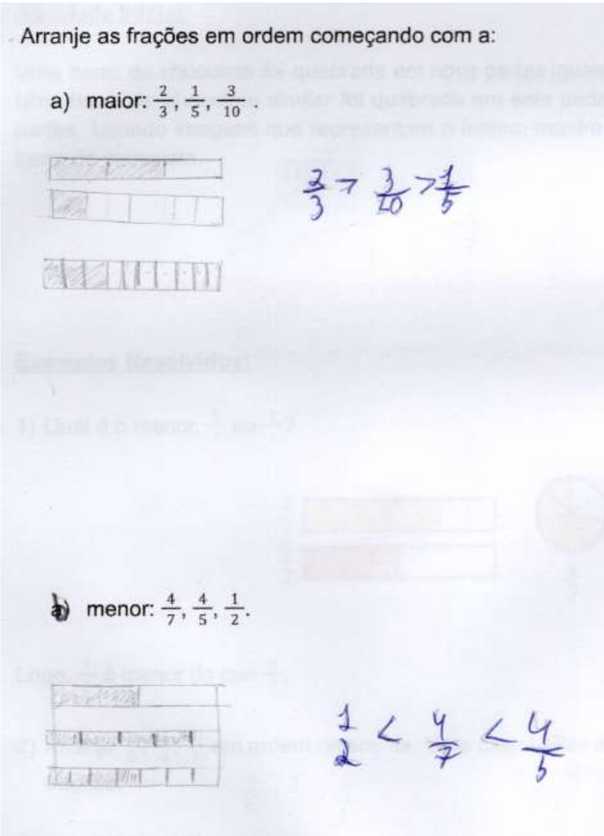


(b) Resolução com Material Concreto

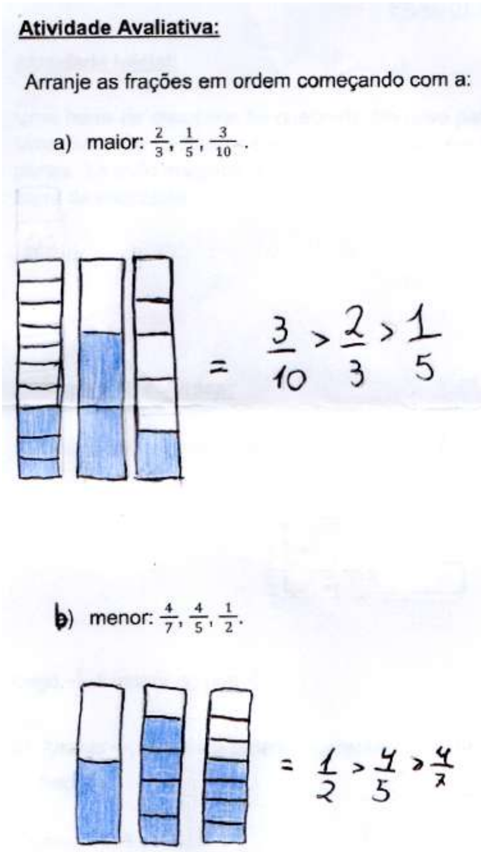
Ao encontrar as soluções das atividades anteriores, os estudantes concluíram junto com a professora que para comparar e ordenar frações pode-se utilizar desenhos que representam partes do inteiro e também frações equivalentes. A partir desta conclusão, os estudantes resolveram as Atividades Avaliativas que tinham como finalidade arranjar as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$ em ordem decrescente e arranjar as frações $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{2}$ em ordem crescente. O método mais utilizado pelos estudantes foi representar as frações através de desenhos e com isso, realizar a comparação e ordenação das frações.

Na aula em que ocorreu a Atividade Avaliativa, estavam presentes os vinte e um alunos que frequentam as aulas diariamente. Ao serem corrigidas as atividades avaliativas, foi possível verificar que 81% dos estudantes responderam as questões de forma totalmente correta e 19% acertou de forma parcial ou totalmente incorreta. A Figura 44 exemplifica a resolução feita corretamente pelo Aluno G e outra situação na qual ocorreu um erro de comparação na resolução do Aluno H.

Figura 44 – Resoluções das Atividades Avaliativas sobre Comparação e Ordenação de Frações



(a) Resolução Correta do Aluno G



(b) Resolução Incorreta do Aluno H

O principal motivo para que as resoluções ficassem incorretas foi a dificuldade dos alunos em analisar quais das frações correspondiam a maior ou menor parte do inteiro.

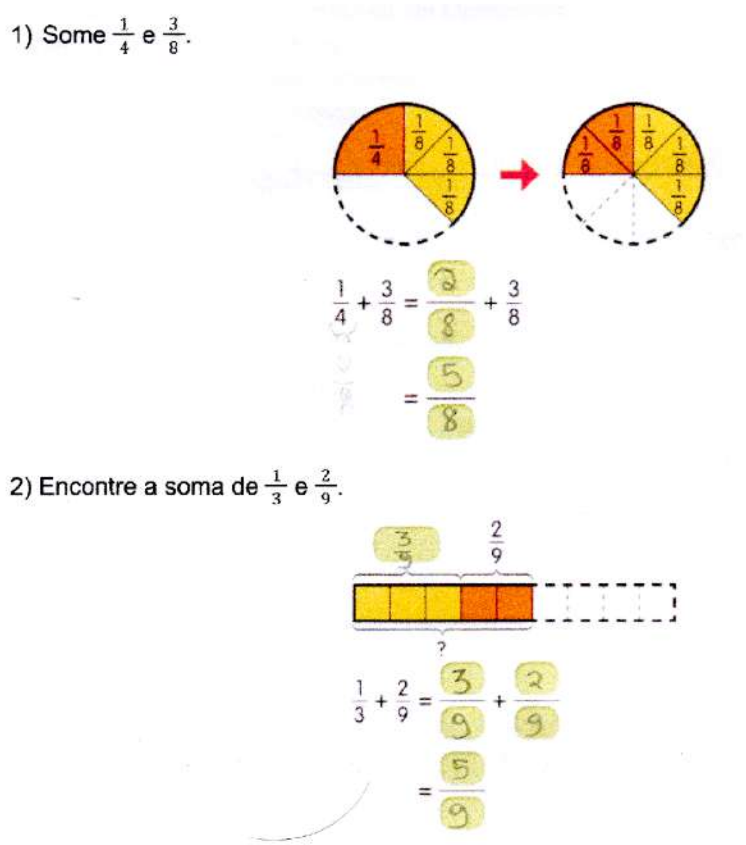
5.3.2.2 ADIÇÃO DE FRAÇÕES

As atividades relacionadas à adição de frações foram aplicadas durante uma aula de quarenta e oito minutos. As soluções das atividades foram encontradas ao utilizar noções de equivalência através do uso de material concreto e de desenhos.

Os materiais concretos foram usados para introduzir o conteúdo na Atividade Inicial e o Exemplo Resolvido. Para as demais atividades, foram utilizados o desenho para representar as resoluções e encontrar a solução correta.

Duas questões compõem as Atividades Principais, que possuem como objetivo a adição de frações. Na primeira questão é proposta a resolução da soma de $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$ e na questão dois, é sugerida a resolução da soma de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{9}$. Nas duas atividades, as resoluções são baseadas no uso de desenhos e são atividades guiadas, pois a solução é encontrada ao completar os números faltantes na aplicação do algoritmo. A Figura 45 apresenta a resolução feita pelo Aluno I.

Figura 45 – Atividades Principais sobre Adição de Frações



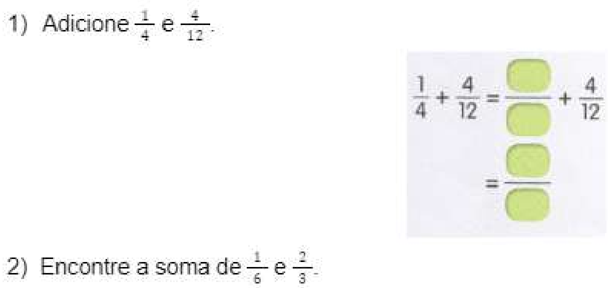
Fonte: Resolução do Aluno I

Após solucionada as atividades anteriores, os estudantes foram questionados pela professora a fim de encontrar um método para calcular a adição de frações. De acordo com os estudantes, para adicionar frações com denominadores diferentes devemos utilizar as noções de equivalência de modo a encontrarmos frações como os mesmos denominadores, para a seguir, somarmos os numeradores e copiarmos os denominadores.

As Atividades Avaliativas foram compostas por duas questões que tinham como objetivo achar as soluções da soma de $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{12}$ e também a soma de $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{3}$.

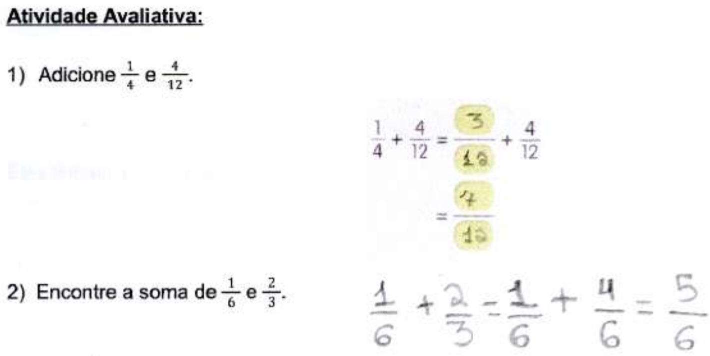
O método mais usado para as resoluções foi a aplicação do algoritmo da adição de frações, utilizando as noções de equivalência para que as frações tivessem os mesmos denominadores. As questões que compõem as Atividades Avaliativas e as resoluções dadas pelos Alunos J e K, onde uma está correta e outra parcialmente correta, são representadas na Figura 46 e na Figura 47.

Figura 46 – Atividades Avaliativas sobre Adição de Frações

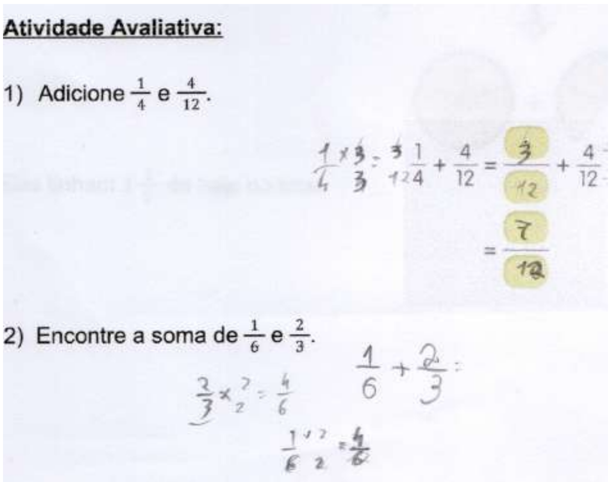


Fonte: Fong2015

Figura 47 – Resoluções das Atividades Avaliativas sobre Adição de Frações



(a) Resolução Correta do Aluno J



(b) Resolução Parcialmente Correta do Aluno K

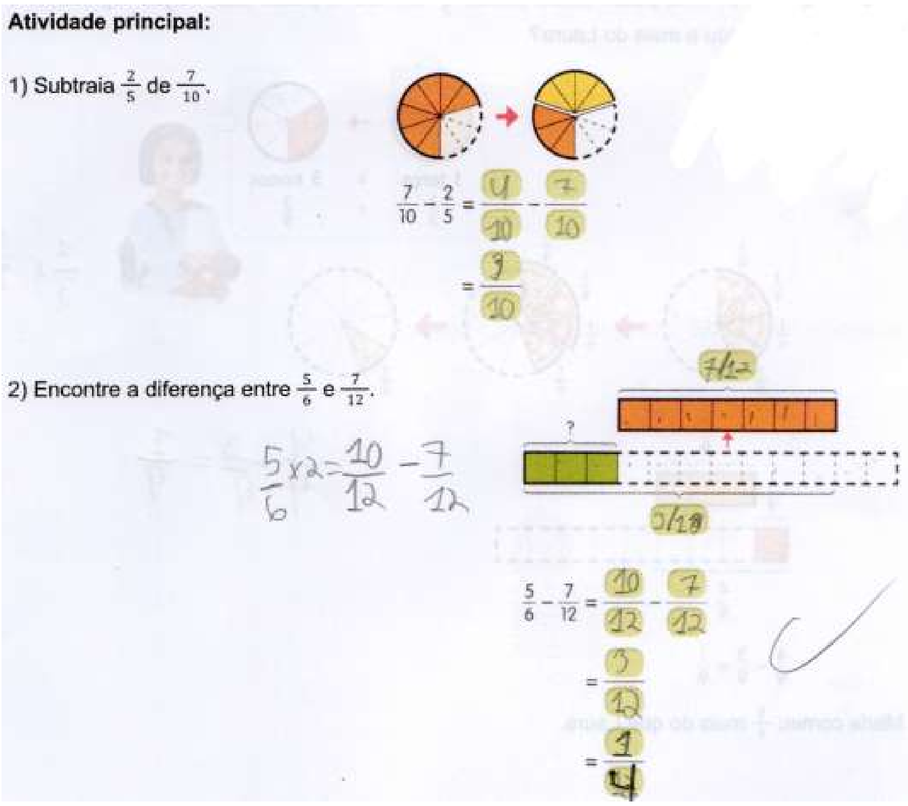
Na aula que foram resolvidas as questões das Atividades Avaliativas, haviam vinte e um alunos presentes. De acordo com as resoluções apresentadas, 85% apresentaram a resolução de forma correta e 15% resolveram incorretamente ou de forma parcial. A principal dificuldade apresentada foi em encontrar as frações equivalentes necessárias para as resoluções.

5.3.2.3 SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

O tópico sobre subtração de frações foi trabalhado durante uma aula de quarenta e oito minutos. De forma semelhante à adição de frações, o principal meio de resolução foi a aplicação das noções de equivalência, tendo como ferramentas o material concreto e o uso de desenhos para representar as situações a serem solucionadas. Os materiais concretos foram usados na Atividade Inicial e no Exemplo Resolvido, e nas demais atividades, o recurso mais utilizado foi o desenho.

As Atividades Principais foram compostas por duas questões que tinham como finalidade aplicar as noções de equivalência. As soluções poderiam ser encontradas utilizando como recurso os desenhos e atividades guiadas, onde os estudantes deveriam preencher os espaços destacados com os números faltantes da resolução. Na primeira questão, os estudantes deveriam encontrar a solução da subtração entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{10}$, sendo necessário verificar qual era a maior das frações para que fosse feita a resolução. Na segunda questão, era solicitado o encontro da diferença entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{12}$. Através da Figura 48 podemos visualizar as questões e as resolução feita pelo Aluno L.

Figura 48 – Atividades Principais sobre Subtração de Frações

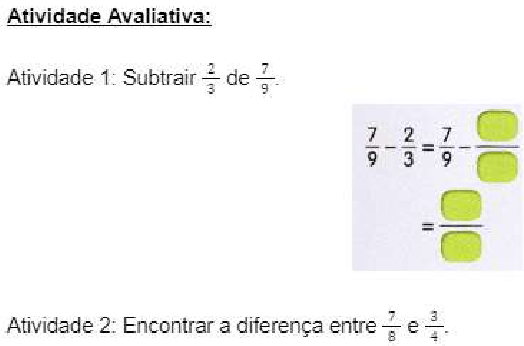


Fonte: Resolução do Aluno L

Com base nas resoluções feitas nas Atividades Principais e nas outras resolvidas anteriormente, os alunos junto com a professora, concluíram que a solução das subtrações de frações com denominadores diferentes é encontrada através do uso das noções de equivalência, permitindo assim, encontrar frações com denominadores iguais. Na sequência, basta subtrair os numeradores e manter o mesmo denominador.

Tendo a conclusão como referência, os estudantes resolveram as questões das Atividades Avaliativas. Conforme a Figura 49, os estudantes deveriam encontrar a solução da subtração entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{9}$ e calcular a diferença entre $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{4}$.

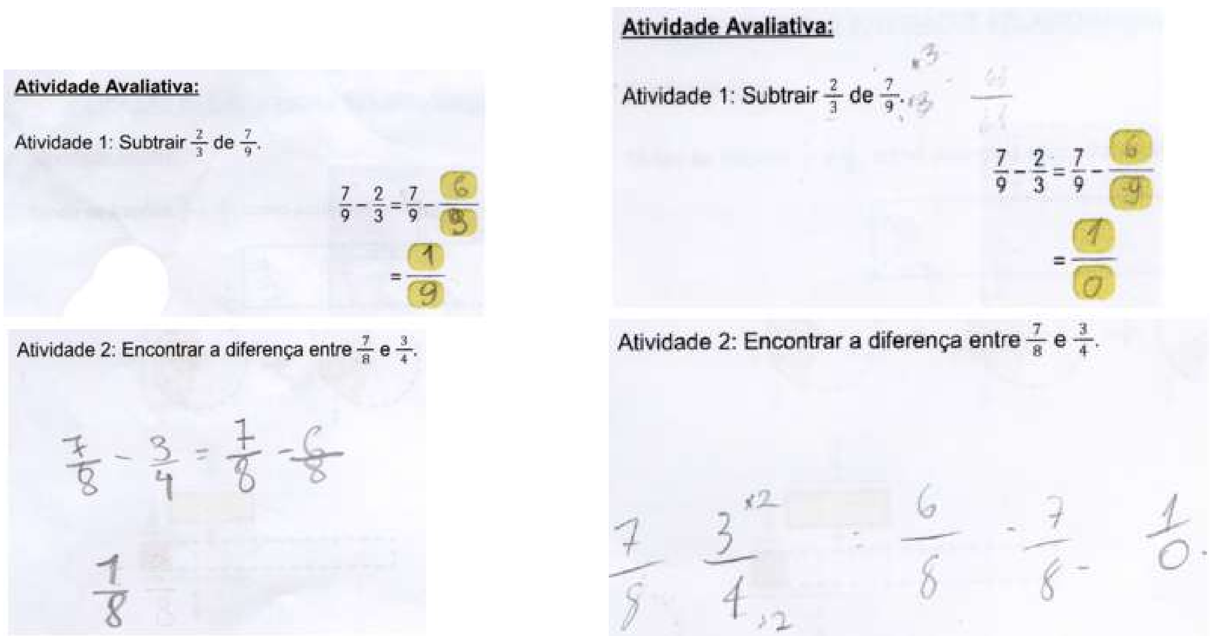
Figura 49 – Atividades Avaliativas sobre Subtração de Frações



Fonte: Fong2015

As resoluções foram feitas através da aplicação das noções de equivalência e são exemplificadas através da 50, onde podemos observar os registros feitos pelos Alunos M e N.

Figura 50 – Resoluções da Atividade Avaliativa sobre Subtração de Frações



(a) Resolução Correta do Aluno M

(b) Resolução Parcialmente Correta do Aluno N

Na aplicação das Atividades Avaliativas estavam presentes vinte e um alunos e conforme as resoluções apresentadas pelos estudantes, 80% das soluções estavam corretas e 20% foram resolvidas incorretamente. Entre os erros cometidos pelos estudantes, destacam-se a dificuldade em encontrar as frações equivalentes que permitiriam a resolução e também houve casos em que os estudantes subtraíram os numeradores e denominadores.

5.3.2.4 MULTIPLICAÇÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

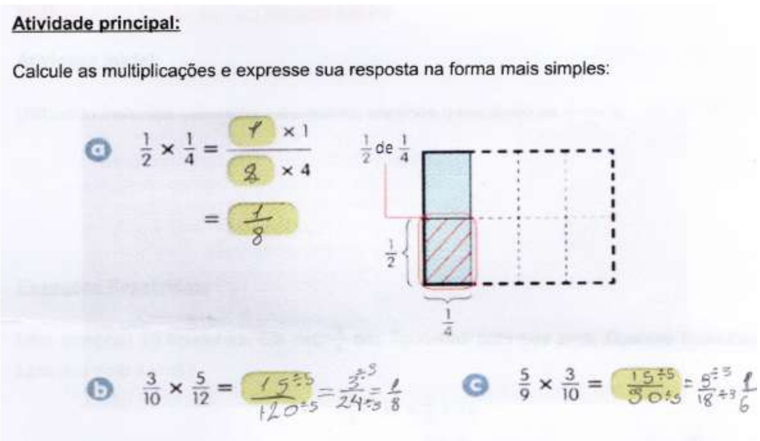
A Multiplicação de Frações foi trabalhada durante três aulas de quarenta e oito minutos cada uma. Neste tópico foram abordados dois casos de multiplicação que envolvem as frações, que são a multiplicação de uma fração por um número inteiro e a multiplicação de uma fração por outra fração.

As Atividades Iniciais e os Exemplos Resolvidos foram resolvidos utilizando materiais concretos como tampinhas de garrafa PET e tiras de papel. Para as demais atividades, o recurso mais usado foi o uso de desenhos e do algoritmo da multiplicação abordado nos Exemplos Resolvidos.

Para exemplificar as Atividades Principais que foram abordadas neste tópico, utilizaremos a atividade que relaciona a multiplicação de uma fração por outra fração. As demais Atividades Principais podem ser consultadas no Produto Educacional, no Apêndice A.

Na questão colocada como exemplo, os estudantes deveriam resolver três itens relacionados ao tema que estava sendo trabalhado, e deveriam apresentar a solução expressa da forma mais simples possível. No primeiro item, foi proposto aos estudantes o cálculo do produto entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, cujo enunciado continha a proposta de resolução através do uso de desenhos. Os demais itens questionavam a solução da multiplicação entre $\frac{3}{10}$ e $\frac{5}{12}$ e também a resolução da multiplicação entre $\frac{5}{9}$ e $\frac{3}{10}$. A Figura 51 apresenta as questões propostas e a resolução feita pelo Aluno O.

Figura 51 – Atividade Principal sobre Multiplicação de Frações

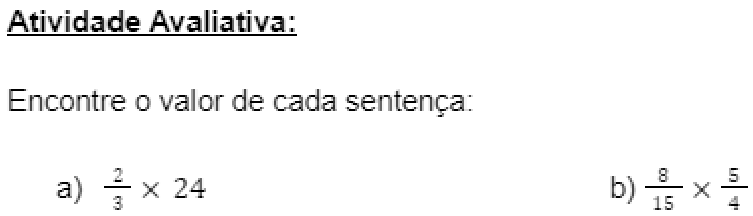


Fonte: Resolução do Aluno O

Após as resoluções das atividades dos dois casos abordados neste tópico, a professora questionou os estudantes sobre qual seria o algoritmo de resolução. Os estudantes concluíram que o algoritmo da multiplicação de frações refere-se à multiplicação dos numeradores e dos denominadores e, por fim, a simplificação do resultado se possível.

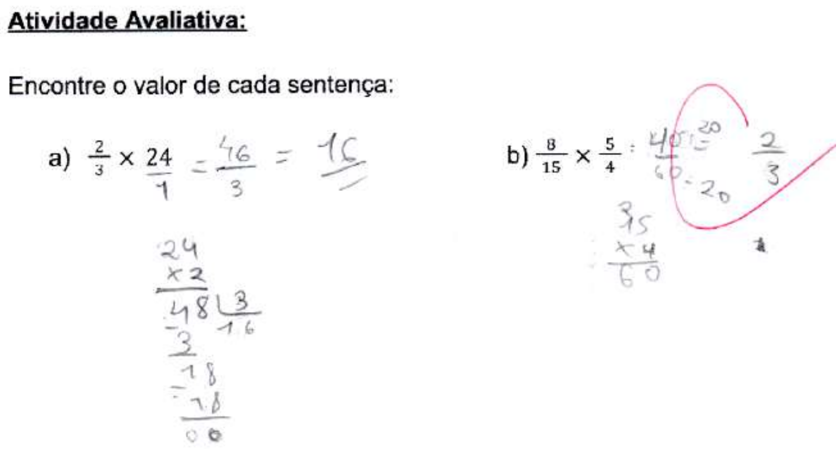
Para encerrar as atividades sobre a Multiplicação de Frações, os estudantes resolveram as Atividades Avaliativas que eram compostas por dois itens. No primeiro item, os estudantes deveriam encontrar a solução da multiplicação entre $\frac{2}{3}$ e 24 e no segundo item, calcular o valor do produto entre $\frac{8}{15}$ e $\frac{5}{4}$. A Figura 52 contém as Atividades Avaliativas. Duas resoluções feitas pelos Alunos P e Q, uma de forma correta e outra com a solução incorreta, estão ilustradas na Figura 53.

Figura 52 – Atividades Avaliativas sobre Multiplicação de Frações

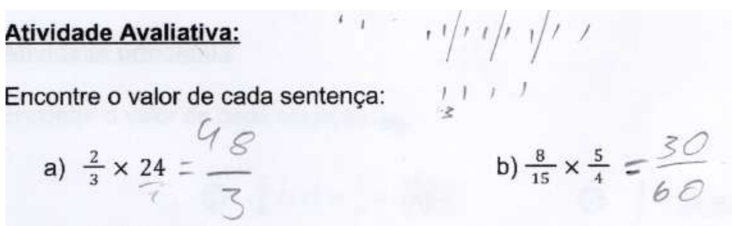


Fonte: Resolução do Aluno O

Figura 53 – Resoluções das Atividades Avaliativas sobre Multiplicação de Frações



(a) Resolução Correta do Aluno P



(b) Resolução Parcialmente Correta do Aluno Q

De acordo com a resoluções das Atividades Avaliativas, foi verificado que houve 76% de questões corretas e 24% de questões incorretas ou parcialmente corretas. As maiores dificuldades apresentadas nas resoluções foram a aplicação do algoritmo e a multiplicação dos numeradores e denominadores da forma incorreta.

5.3.2.5 DIVISÃO DE FRAÇÕES

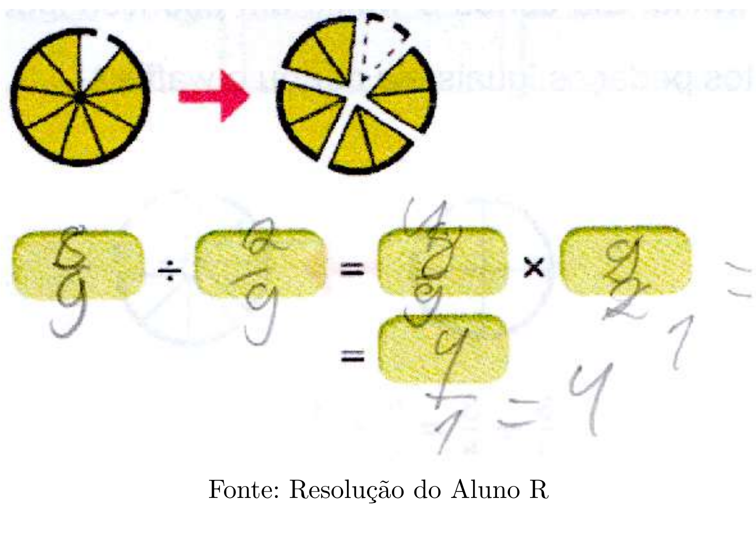
O tópico sobre Divisão de frações foi o conteúdo mais longo da aplicação, levando um total de quatro aulas de quarenta e oito minutos cada. Em relação à divisão envolvendo frações, foram abordados três casos que são: divisão de frações por um número inteiro, de número inteiro por fração e divisão de frações próprias por frações próprias.

Nas Atividades Iniciais e Exemplos Resolvidos, as resoluções foram feitas a partir do uso de materiais concretos descritos anteriormente. Nas demais atividades, as ferramentas mais utilizadas foram os desenhos e o uso do algoritmo nas atividades guiadas, principalmente nas Atividades Principais que compõe o Produto Educacional.

Em relação às Atividades Principais, foram resolvidas várias questões. Para exemplificar, consideramos a questão três das Atividades Principais sobre a divisão entre duas frações próprias. O enunciado supõe que João tem $\frac{8}{9}$ de um bolo e alguns pratos. Ele quer colocar $\frac{2}{9}$ deste bolo em cada prato. Sendo assim, os estudantes deveriam calcular o número de pratos que João tinha.

Nesta atividade é apresentado um desenho que representa o bolo e como ficaria a solução da divisão. A Figura 54 exemplifica a resolução da questão através das anotações do Aluno R.

Figura 54 – Atividades Principais sobre Divisão de Frações

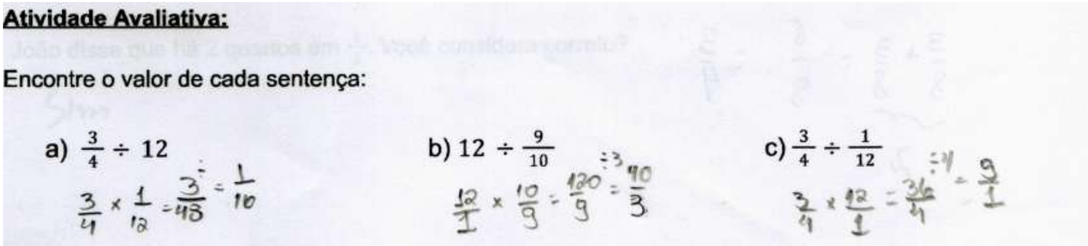


Fonte: Resolução do Aluno R

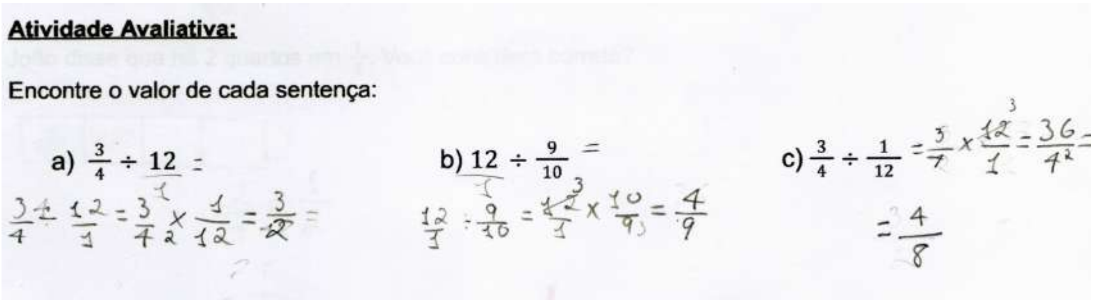
Com a resolução das atividades feitas, os estudantes junto com a professora concluíram sobre qual é o método para realizar a operação da divisão de frações, sendo colocado que basta multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda e por fim, simplificar o resultado se possível.

As questões que foram propostas nas Atividades Avaliativas tinham como finalidade encontrar o resultado da divisão de $\frac{3}{4}$ por 12, de 12 por $\frac{9}{10}$ e de $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{12}$. No dia da aplicação destas atividades, estavam presentes vinte e um alunos. A Figura 55 apresenta as resoluções dos Alunos S e T, sendo uma correta e uma incorreta.

Figura 55 – Resoluções das Atividades Avaliativas sobre Divisão de Frações



(a) Resolução Correta do Aluno S



(b) Resolução Incorreta do Aluno T

Com base nas resoluções entregues pelos alunos, podemos concluir que houve 85% de acertos e 15% de resoluções incorretas ou parcialmente corretas. A principal dificuldade apresentada pelos estudantes, foi a multiplicação dos numeradores e denominadores.

5.4 OBSERVAÇÕES E REAPLICAÇÃO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

No início deste processo de aplicação foi possível identificar uma relutância no uso de material concreto ou de desenhos por aqueles estudantes que já possuíam conhecimento sobre as operações com frações e a dificuldade de outros na manipulação do material didático, pois não tinham vivenciado situações parecidas ao longo da vida escolar.

No decorrer das aulas, a classe foi dividida em duplas e a professora circulava pela sala para explicar as atividades e sanar as dúvidas dos estudantes. Esse atendimento mais próximo aos alunos possibilitou uma maior compreensão sobre como manipular os materiais concretos e o entendimento do conteúdo, sendo possível notar a melhora da compreensão em relação às resoluções das questões utilizando o material didático ou os desenhos. Essa avaliação do nível de compreensão dos estudantes ocorreu através de questionamentos, observações das resoluções apresentadas e o interesse em resolver as situações propostas

Através da observação das atividades e relatos por parte dos alunos, foi possível identificar a melhora da visualização dos resultados das operações e o encontro das frações equivalentes, tendo como ferramenta os materiais didáticos. Para a comparação e ordenação das frações, o uso de desenhos foi o método mais utilizado, pois possibilita aos estudantes a compreensão da ideia da fração como parte de um todo.

Para avaliar se houve de fato um ganho de conhecimento sobre os tópicos estudados através do uso da metodologia utilizada em Singapura, os estudantes foram submetidos à resolução da mesma Avaliação Diagnóstica aplicada no início do processo. No dia da aplicação da avaliação final, compareceram vinte alunos de um total de vinte e dois, ou seja, a mesma quantidade de estudantes presentes na avaliação da primeira fase e que participaram das aulas. A Tabela 2 apresenta os dados obtidos após a correção das provas.

Tabela 2 – Avaliação Diagnóstica: Segunda Aplicação

Tópicos	**Correto**	**Parcial**	**Incorreto**	**Em branco**
Equivalência de Frações	12	7	1	0
Comparação de Frações	12	7	1	0
Ordenação de Frações	14	0	6	0
Adição de Frações	16	1	3	0
Subtração de Frações	9	3	7	1
Multiplicação de Frações	14	3	3	0
Divisão de Frações	9	8	3	0
Fração de uma quantidade	10	2	6	2

Fonte: Produção Própria

Na próxima seção deste capítulo, será feita a comparação entre os dados coletados na primeira aplicação da Avaliação Diagnóstica com os dados da segunda aplicação da mesma avaliação.

5.5 ANÁLISE DOS DADOS

Ao compararmos os dados coletados na primeira e segunda aplicações da avaliação Diagnóstica, podemos perceber que há um aumento na quantidade de alunos que resolveram as questões propostas de forma correta. A Tabela 3 mostra a porcentagem de alunos que encontraram as soluções corretas em cada um dos itens avaliados.

Tomando o número de alunos que encontraram a solução correta ou de forma parcial, o aumento da quantidade de questões que englobam esse critério chega até 95%

Tabela 3 – Porcentagem de Alunos que Resolveram as Questões Corretamente

Tópicos	**Primeira Aplicação (%)**	**Segunda Aplicação (%)**
Equivalência de Frações	10	60
Comparação de Frações	5	65
Ordenação de Frações	45	75
Adição de Frações	10	80
Subtração de Frações	10	45
Multiplicação de Frações	10	70
Divisão de Frações	5	45
Fração de uma quantidade	10	50

Fonte: Produção Própria

dos estudantes em alguns dos tópicos avaliados. Estes dados são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Porcentagem de Alunos que Resolveram as Questões de Forma Correta ou Parcialmente

Tópicos	**Primeira Aplicação (%)**	**Segunda Aplicação (%)**
Equivalência de Frações	55	95
Comparação de Frações	55	95
Ordenação de Frações	45	70
Adição de Frações	10	85
Subtração de Frações	10	60
Multiplicação de Frações	45	85
Divisão de Frações	5	85
Fração de uma quantidade	25	60

Fonte: Produção Própria

Na análise do número de estudantes que resolveram as questões de forma incorreta ou deixaram em branco, podemos perceber uma diminuição da porcentagem de ocorrências, indicando assim, que a Metodologia de Singapura utilizada nas aulas possibilitou um melhor entendimento dos tópicos trabalhados. A Tabela 5 apresenta a porcentagem referente a quantidade de questões que foram respondidas de forma incorreta ou deixadas em branco.

Após realizar o levantamento da quantidade de questões com a solução incorreta foi organizada uma roda de conversa com os estudantes, tendo como objetivo, que estes pudessem expor os motivos que levaram a um baixo entendimento sobre a ordenação de frações, subtração de frações e o cálculo da fração de uma quantidade. As alegações feitas pelos alunos foram:

- Ordenação de frações: Uma das principais dificuldades apresentadas foi relacionar crescimento e decrescimento de frações. Porém, a representação de desenhos foi um

Tabela 5 – Porcentagem de Alunos que Responderam as Questões de Forma Incorreta ou Deixadas em Branco

Tópicos	**Primeira Aplicação (%)**	**Segunda Aplicação (%)**
Equivalência de Frações	45	5
Comparação de Frações	45	5
Ordenação de Frações	55	25
Adição de Frações	90	15
Subtração de Frações	90	40
Multiplicação de Frações	55	15
Divisão de Frações	95	15
Fração de uma quantidade	75	40

Fonte: Produção Própria

dos métodos mais utilizados para comparar e ordenar frações. Por este motivo, podemos identificar a melhora neste tópico a partir da aplicação da metodologia utilizada em Singapura.

- Subtração de frações: Foi alegado pelos estudantes a falta de atenção no momento da resolução, mas ao analisar as resoluções que foram feitas é possível perceber que não houve o entendimento de forma completa sobre o uso das frações equivalentes, pois não foi utilizado pelos estudantes este método.

- Cálculo da fração de uma quantidade: foi colocado como motivo das resoluções incorretas a falta de interpretação da expressão “de” entre a fração e a quantidade, levando os estudantes à utilizarem o algoritmo da divisão invés da multiplicação.

Após a alegação dos estudantes, a professora sugere as seguintes mudanças em futuras aplicações da Metodologia de Singapura:

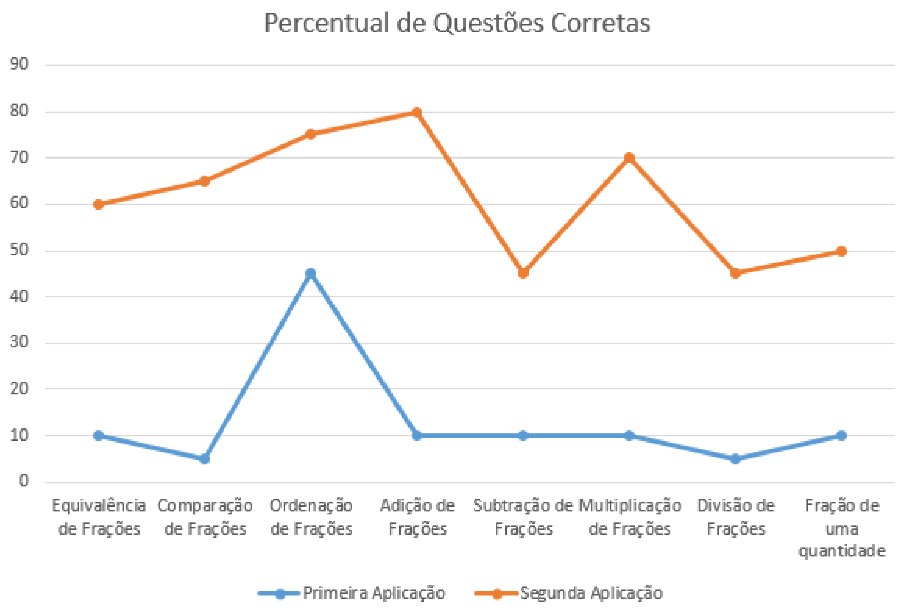
- Ordenação de frações: Revisar o uso de sinais matemáticos como $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$, para facilitar a ordenação das frações em relação ao crescimento ou decrescimento.

- Subtração de frações: Dispor de um intervalo de tempo maior para aplicar o método de Singapura, possibilitando o acompanhamento da resolução das atividades de maneira mais próxima e a aplicação de mais atividades para que haja uma maior compreensão do método de resolução. Ao questionar sobre o uso dos materiais didáticos ou de desenhos, os estudantes apontaram uma melhor compreensão dos resultados quando foram utilizados os materiais didáticos como a Barra de Frações ou Fração em Pizza para adicionar ou subtrair frações. No caso do uso dos desenhos, foi relatado por parte dos educandos que a visualização obtida não era clara o suficiente.

- Cálculo da fração de uma quantidade: Dedicar maior atenção sobre o método de resolução das situações exemplificadas por $\frac{1}{2}$ de 20.

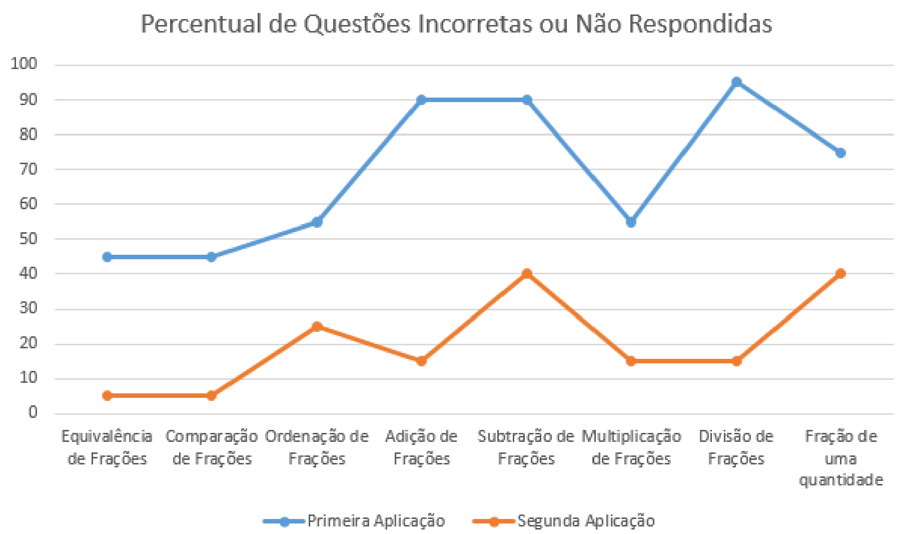
Apesar das melhorias que poderão ser feitas nas próximas aplicações, as Figuras 56 e 57 possibilitam visualizar os resultados alcançados na primeira e segunda aplicações da Avaliação Diagnóstica em relação ao percentual de questões corretas ou incorretas (incluindo as questões que não foram respondidas).

Figura 56 – Percentual de Questões Corretas



Fonte: Produção própria

Figura 57 – Percentual de Questões Incorretas ou Não Respondidas



Fonte: Produção própria

Ao analisarmos os dois gráficos, podemos concluir que houve um aumento significativo no número de questões resolvidas corretamente e uma redução importante na quantidade de questões resolvidas incorretamente ou deixadas sem resolução. Isso nos permite inferir que para os alunos dessa turma, a aplicação do método utilizado em Singapura possibilitou uma compreensão mais fundamentada sobre frações e suas operações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar das dificuldades encontradas em introduzir uma metodologia diferente da tradicional, ao decorrer das aulas de aplicação das atividades, tive a oportunidade de presenciar a alegria dos estudantes em manipular os materiais e encontrar as soluções corretas. E principalmente, observar os estudantes se ajudando de forma mútua a compreender e construir os conhecimentos que estavam sendo abordados.

De acordo com as observações da realização de atividades e dos resultados alcançados nas duas etapas de aplicação da Avaliação Diagnóstica, podemos concluir que realmente houve melhora em relação à resolução das operações que envolvem as frações e também em relação às noções de equivalência, comparação e ordenação de frações. Possibilitando o uso destes conhecimentos nas resoluções de atividades futuras.

As situações propostas em sala de aula e outras atividades complementares como desafios e situações-problema, geraram o Produto Educacional que se encontra no Apêndice dessa dissertação, possibilitando aos professores dos mais diversos níveis de ensino aplicar as sequências didáticas em suas aulas, de forma que outros estudantes também possam construir seu conhecimento. Outra possível aplicação das atividades é na educação de jovens e adultos e também a aplicação do Método de Singapura no ensino de outros conhecimentos matemáticos, através do uso dos mais diversos materiais concretos, e de desenhos, esquemas ou gráficos que permitam representar as situações que estão sendo propostas.

Como experiência pessoal, posso concluir que ao longo do programa de mestrado e através da pesquisa e aplicação envolvida nessa dissertação, houve a transformação de uma professora que teve a sua formação inicial através da metodologia tradicional em uma nova profissional que busca possibilitar aos estudantes a construção dos conhecimentos através de atividades variadas e realização de questionamentos.

Sendo assim, esperamos que essa pesquisa e o Caderno de Atividades motive outros professores a pesquisar e aplicar novas formas de ensino, oferecendo uma educação matemática de qualidade a todos os estudantes.

Referências

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Citado na página 17.

CASTRUCCI, B.; JÚNIOR, J. R. G. *A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais*. São Paulo: FTD, 2018. Citado 9 vezes nas páginas 17, 44, 45, 70, 99, 107, 122, 144 e 147.

DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2010. Citado na página 36.

FERNANDES, D. Sendas de sucesso com o "método de singapura". *Ozarfaxinars*, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 19, 21, 22 e 23.

INSTITUTO DE MATEMáTICA PURA E APLICADA (IMPA). *Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. 2023. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 04 jun. 2023. Citado 3 vezes nas páginas 140, 141 e 142.

JIANG, C.; CHUA, B. L. Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between chinese and singaporean students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2010. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/225687607_Strategies_for_solving_three_fraction-related_word_problems_on_speed_A_comparative_study_between_Chinese_and_Singaporean_students>. Acesso em: 18 maio. 2023. Citado na página 18.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Pupil´s book - maths 3b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2015. Citado 26 vezes nas páginas 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 73, 74, 103, 104, 105, 106, 109, 111, 113, 114, 115, 116, 119, 120, 121, 143, 144 e 145.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Pupil´s book - maths 4b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2016. Citado 7 vezes nas páginas 47, 48, 49, 54, 55, 56 e 113.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Workbook - maths 4b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 117 e 146.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Pupil´s book - maths 5a. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2017. Citado 8 vezes nas páginas 57, 58, 59, 60, 124, 125, 126 e 127.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Workbook - maths 5a. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 128 e 148.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Pupil´s book - maths 6a. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2018. Citado 11 vezes nas páginas 61, 62, 63, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137 e 138.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. *My Pals Are Here!*: Workbook - maths 6a. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 138 e 139.

LEE, S. K.; GOH, C. B.; FREDRIKSEN, B. *Toward a better future: education and training for economic development in Singapure since 1965*. Washington: Banco Mundial, 2008. Citado na página 21.

LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B.; FRANCHI, A. *Curso moderno de matemática para o ensino de primeiro grau*. Volume 1. São Paulo: Editora Nacional, 1974. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208798>. Acesso em: 10 jan. 2023. Citado na página 35.

MICHAELIS, D. *Michaelis: dicionário prático da língua portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 99.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO DE SINGAPURA. *Mathematics Syllabus - Primary One to Six*. 2012. Disponível em: <https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf>. Acesso em: 26 set. 2022. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 26 e 27.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO DO BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases*. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 15 nov. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO DO BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. 1998. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/biblioteca-de-apoio/pcn-ensino-fundamental-6-ao-9-ano/>. Acesso em: 17 dez. 2022. Citado 5 vezes nas páginas 36, 38, 39, 40 e 41.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO DO BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 nov. 2022. Citado 3 vezes nas páginas 28, 41 e 42.

MORAIS, R. dos S.; BERTINI, L. de F.; VALENTE, W. R. *A matemática do ensino de fração: do século XIX à BNCC*. São Paulo: Livraria da Física, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 34.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Citado na página 37.

SANTOS, J. C. M. dos. Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de singapura. 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4819&id2=160090452>. Citado na página 19.

SMARJASSI, C.; ARZANI, B. J. H. As políticas públicas e o direito à educação no brasil: uma perspectiva histórica. *Revista Educação Pública*, 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/15/as-politicas-publicas-e-o-direito-a-educacao-no-brasil-uma-perspectiva-historica>. Acesso em: 25 junho. 2021. Citado na página 30.

SUTHERLAND, R. *Ensino eficaz de matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2009. Citado na página 37.

TEIXEIRA, R. C. Ensino da matemática: O método de singapura. *Atlântico Expresso*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.

TEIXEIRA, R. C. O modelo pentagonal do currículo de matemática de singapura. *Atlântico Expresso*, 2016. Citado na página 22.

PRODUTO EDUCACIONAL: FRAÇÕES E O MÉTODO DE SINGAPURA

1 Reflexão

Reflita sobre as dificuldades dos seus alunos em relação as frações

2 Método de Singapura

Conheça as teorias que baseiam esse método.

3 Analise as atividades propostas

Leia e reflita sobre os objetivos de cada aula.

4 Adaptação

Faça adaptações das atividades de forma que alcance os objetivos de cada turma.

5 Resultados

Proporcione momentos de construção de conhecimento através do uso de materiais concretos e também pela troca de ideias.

Autora: Marciane Gambeta
Orientadora: Dra. Ligia Liani Barz
Coorientador: Dr. José Rafael Furlanetto

2023

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Docente,

Este Caderno Pedagógico é produto de uma Dissertação intitulada "Frações e o Método de Singapura", realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) sob a orientação da Professora Doutora Ligia Liani Barz e coorientação do professor José Rafael Furlanetto.

O presente Caderno Pedagógico se destina ao professor(a) e contém uma sequência de 12 aulas, que podem ser adaptadas conforme as necessidades dos estudantes, e são voltadas para a resolução de atividades desafiadoras e significativas relacionadas ao ensino-aprendizagem de frações através da aplicação do Método de Singapura. Após as apresentações dos planejamentos de cada aula, o professor encontrará uma seleção de questões retiradas das provas da OBMEP, cujas resoluções envolvem os conhecimentos dos estudantes em relação às frações, podendo ser utilizadas no formato de desafios ou atividades complementares além daquelas já presentes nas aulas anteriores.

O produto educacional é voltado para o ensino fundamental a partir do terceiro ano além de pode ser aplicado na Educação de Jovens e Adultos. O Caderno Pedagógico também pode ser adaptado para a construção de outros conceitos matemáticos.

As atividades foram elaboradas e pensadas para oferecer subsídios que contribuirão com o enriquecimento de seus conhecimentos docentes bem como a sugestão de uma metodologia para que sejam construídas as noções de equivalência, proporcione aos estudantes ferramentas para comparar e ordenar frações e também que possibilite aos estudantes o encontro dos algoritmos para resolver operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo frações.

Dessa forma, professor(a), quero registrar que é muito gratificante fazer parte desse momento, onde se busca ampliar o referencial teórico sobre esse tema da Matemática, permitindo assim, melhorar sua prática docente com novos métodos de ensino e proporcionar aos estudantes práticas metodológicas que transcendem as tradicionais. Trazendo dessa forma, avanços para o ensino de frações.

Espero que esse material contribua de forma efetiva no seu aperfeiçoamento profissional e pessoal, possibilitando aos estudantes usufruir dos conhecimentos gerados no âmbito escolar e ao longo das aplicações das atividades desse Caderno Pedagógico.

Desejamos que você faça um excelente uso desse material tornando suas aulas mais interessantes e junto com seus alunos, possa construir o conhecimento matemático necessário a fim de que eles possam ajudar a sociedade em suas necessidades, utilizando para isso, os aprendizados gerados no âmbito escolar.

Marciane Gambeta

SUMÁRIO

A PRODUTO EDUCACIONAL

A.1 INTRODUÇÃO

Ao longo de anos em sala de aula, foi possível perceber a dificuldade dos estudantes em resolver situações que envolvem os cálculos com frações, sendo um objeto de estudo presente no currículo do quarto até o nono ano do ensino fundamental.

Mas o que são frações? Nas palavras de Michaelis (2008), fração é o “ato de dividir ou quebrar”, “parte de um todo” e matematicamente, é um “número que exprime uma ou mais partes iguais em que foi dividida uma unidade”. No cotidiano do ambiente escolar, é apresentada a definição de fração como sendo representações utilizadas para indicar partes de figuras ou de quantidades e estão relacionadas à ideia do resultado de divisão de dois números, segundo palavras de Castrucci e Júnior (2018).

Como meio de sanar as dificuldades dos estudantes, foram realizadas algumas pesquisas a fim de encontrar uma metodologia que possibilitasse uma maior compreensão dos conceitos relacionados as frações, e também a construção dos algoritmos necessários para solucionar as operações básicas envolvendo frações, ou seja, a adição, subtração, multiplicação e divisão. A metodologia escolhida para ser aplicada foi o Método de Singapura e esse material tem como objetivo aplicar a metodologia de ensino de Singapura na construção dos conceitos e algoritmos utilizados nas operações com frações.

A metodologia utilizada em Singapura é baseada em três teorias principais: Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA) desenvolvida por Jerome Bruner; Princípios de variabilidade matemática e perspectivas que apontam para o uso de diversos exemplos, contextos e representações na aprendizagem de um conceito, cuja teoria é desenvolvida por Zoltan Paul Dienes, que também defende a necessidade de selecionar os conteúdos a lecionar, ter intencionalidade pedagógica na escolha das tarefas de forma crítica e dar enfoque a uma prática que faz sentido para o estudante; Desenvolvida por Richard Skemp, a terceira teoria aborda a importância de estabelecer conexões e compreender as relações matemáticas e a sua estrutura com o objetivo de alcançar maior conhecimento das matérias estudadas.

Na sequência deste Produto Educacional, temos a descrição do formato do Caderno de Atividades e seus principais objetivos, e também a apresentação de uma série de atividades que poderão ser propostas em um período de aproximadamente 12 horas/aula.

Para finalizar este material, será disponibilizado o gabarito com todas as questões propostas durante as aulas e um conjunto de situações que foram aplicadas nas provas da OBMEP, cujas soluções são encontradas através da resolução de operações básicas envolvendo frações.

A.1.1 CADERNO DE ATIVIDADES

O Caderno de Atividades apresenta uma sequência de atividades com o objetivo de desenvolver as habilidades e competências relacionadas ao estudo de frações. O método de ensino utilizado é o mesmo aplicado nas escolas em Singapura. Uma das principais características deste método é apresentar os conteúdos através do uso de materiais concretos (Barra de Frações, Fração em Pizza e demais objetos presentes no cotidiano dos estudantes) ou a representação das situações na forma de imagens, para na sequência, os estudantes compreenderem os objetos de estudo na forma abstrata.

A finalidade de cada aula é construir o conhecimento através da resolução de situações diversas, para que junto ao professor, os educandos possam apreender as ideias principais e desenvolver os algoritmos usuais de forma lógica.

Em cada aula, o professor terá acesso aos objetos de conhecimento, as habilidades e objetivos que serão abrangidos em cada planejamento, sendo apresentados conforme a BNCC. Cada roteiro de aprendizagem começa com uma Atividade Inicial, na qual é proposto aos estudantes situações em que eles devem buscar as soluções aplicando conhecimentos prévios, para que, posteriormente, o professor apresente a resolução dos Exemplos Resolvidos. Feita a introdução do conteúdo e a explanação dos demais exemplos, é direcionado aos estudantes a resolução da Atividade Principal, tendo como objetivo, a aplicação dos conhecimentos construídos nas questões anteriores.

Com base nas resoluções das atividades, os estudantes junto com o professor, devem discutir o que foi descoberto ao longo da aula. Sendo o entendimento de noções relacionados aos conteúdos estudados ou o desenvolvimento dos algoritmos, os principais objetivos deste momento. Após a aplicação da sequência de cada aula, é realizada a resolução de Atividades Avaliativas para verificar se houve a construção do conhecimento e a capacidade para aplicar o que foi estudado.

Para finalizar cada aula, teremos as Atividades Complementares, que são novas questões referentes ao conteúdo que está sendo estudado. Estas atividades poderão ser propostas aos estudantes na forma de tarefa ou na forma de atividades extras para serem aplicadas aos alunos que solucionaram rapidamente as atividades principais.

As aulas que compõem este Caderno de Atividades estão divididas em uma série de etapas, que são definidas quanto aos objetivos e as ações que deverão ser executadas, conforme as descrições a seguir:

1. **Atividade Inicial:** Neste momento, o professor apresenta uma situação-problema aos estudantes, para que estes, procurem as soluções utilizando os materiais sugeridos no enunciado ou os seus conhecimentos prévios. A resolução é feita pelos estudantes e no fim, eles devem explicar as resoluções feitas para encontrar a solução correta.

2. **Exemplo Resolvido:** Os exemplos são apresentados e resolvidos pelo professor com a ajuda dos estudantes, cujo objetivo é mostrar a resolução de situações semelhantes a atividade inicial. De forma geral, os exemplos devem ser resolvidos através de desenhos que representam a situação proposta e também, o uso de cálculos aritméticos.

3. **Atividade Principal:** Essa é a etapa na qual os estudantes devem resolver situações-problema aplicando os conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores. Neste momento, devem ser utilizados materiais concretos e desenhos com a finalidade de representar a situação que foi proposta, e é necessário anotar os cálculos realizados para encontrar a solução correta.

4. **Conclusões:** Esse momento tem como objetivo promover a discussão sobre a análise das soluções apresentadas, onde devem ser generalizadas as noções referentes aos conteúdos abordados ou as construções dos algoritmos relacionados aos itens abordados em cada aula.

5. **Atividade Avaliativa:** Nessa fase é proposto aos alunos, de forma individual, a resolução de questões referentes ao conteúdo estudado naquela aula. O objetivo dessas atividades é avaliar a aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo abordado.

6. **Atividade Complementar:** Serão apresentadas questões complementares referentes ao conteúdo trabalhado durante a aula. As atividades podem ser aplicadas aos estudantes que solucionaram a Atividade Principal com maior rapidez, podem ser propostas como tarefas, ou até mesmo, na forma de desafios.

Ao fim deste caderno, o professor tem acesso às soluções das questões apresentadas ao longo deste material e também encontrará uma seleção de questões retiradas das provas da OBMEP, sendo questões que utilizam noções de fração e aplicação de algoritmos para resolver as operações necessárias. Estas questões adicionais poderão ser utilizadas como desafios ou questões suplementares das atividades já aplicadas durante as aulas. É de suma importância a observação das resoluções para que na sequência sejam aplicadas as atividades.

A.2 AULA 1: EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

O objetivo desta aula é construir a noção de equivalência entre frações, reconhecer frações equivalentes e encontrar estas frações.

Objetos de Ensino: Significados de fração (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; Forma mista de uma fração.

Habilidades: (EF06MA07) [1] Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão; identificar frações equivalentes.

Objetivos de Aprendizagem: Relacionar frações pela equivalência; Identificar frações com representações do quociente (exato) de dois inteiros.

Quantidade de aulas: 2 horas/aula.

Recursos Utilizados: Lousa interativa, materiais impressos, materiais concretos, folhas de papel em branco, caderno, régua, caneta, lápis de cor, lápis preto e borracha.

1. **Atividade Inicial:** Tomando uma tira de papel, divida a mesma em quatro partes iguais e marque as partes destacadas. Pinte uma delas e escreva a fração que representa a parte pintada. Na sequência, você deve dividir a mesma tira em oito partes iguais e desenhar linhas pontilhadas para marcar as partes. Novamente, reescreva a fração que representa a parte pintada. Observando as frações encontradas, o que podemos concluir sobre elas?

   Materiais utilizados: Tiras de papel, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

   Dicas para o professor: Uma sugestão é dividir a classe em duplas para gerar discussões sobre a solução encontrada e fazer questionamentos sobre os resultados encontrados.

   Observação: Os estudantes devem concluir que as duas frações correspondem a mesma parte do inteiro. Sendo assim, elas são equivalentes.

2. **Exemplo Resolvido:** André, Maria e João têm, para cada um, uma pizza do mesmo tamanho. Conforme Figura 58, temos:

[1] O código EF06MA07 significa que essa habilidade é do Ensino Fundamental, das turmas de sexto ano, disciplina de Matemática e é a sétima habilidade

Figura 58 – Frações equivalentes a $\frac{1}{2}$

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Comparando as informações acima, podemos concluir que $\frac{1}{2}$ da pizza de André é do mesmo tamanho de $\frac{2}{4}$ da pizza de Maria e $\frac{2}{4}$ da pizza de Maria é do mesmo tamanho que $\frac{3}{6}$ da pizza de João. Logo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. Portanto, as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são equivalentes.

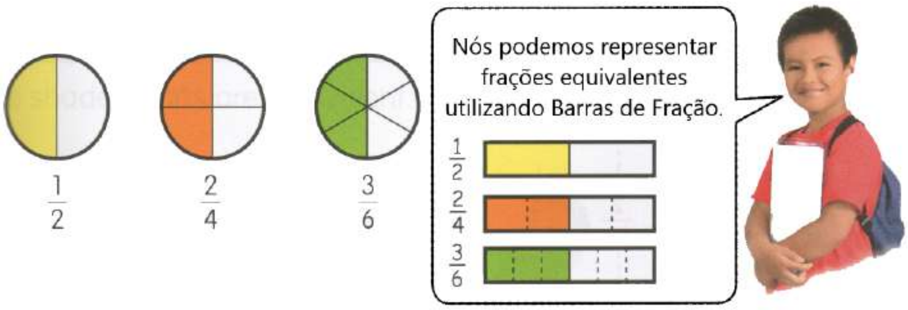
Materiais utilizados: Lousa interativa, caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Durante a resolução do exemplo, procure questionar os estudantes de modo que os levem a tirar as suas próprias conclusões. Por exemplo: Qual fração corresponde às partes que foram consumidas por cada personagem? O que você pode observar sobre as frações que representam os pedaços de pizza consumidos por André e Maria? E por Maria e João? O que podemos concluir sobre as três frações encontradas?

Observação: Defina o que são as frações equivalentes, tendo como principal recurso as imagens ilustrativas.

3. **Atividade Principal:** Encontre as três primeiras frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ tendo como ferramenta de resolução o uso de imagens conforme o exemplo apresentado na Figura 59 abaixo:

Figura 59 – Frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ - Atividade Principal



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Materiais utilizados: Materiais concretos, régua, caderno, lápis de cor, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Durante a resolução da atividade, circule pela sala para acompanhar a resolução das atividades e solucionar as possíveis dúvidas; Os estudantes devem manipular materiais concretos ou utilizar imagens para representar as situações que estão sendo solucionadas.

Observação: A correção pode ser feita oralmente.

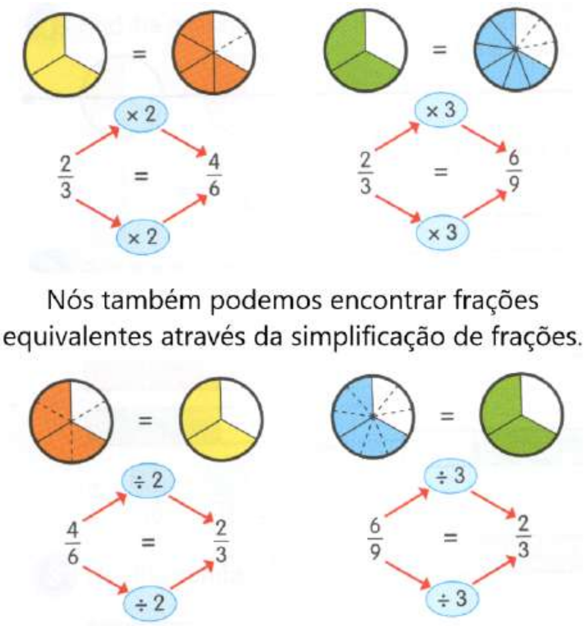
4. **Conclusões:** Os alunos devem analisar as frações encontradas na atividade anterior e tirar as suas conclusões sobre o modo de encontrar frações equivalentes sem utilizar imagens como recurso. Ou seja, os estudantes devem perceber que podemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número para encontrar frações equivalentes.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor pode apresentar a Figura 60 para que os estudantes percebam o que ocorre quando encontramos frações equivalentes através da multiplicação. Caso os estudantes não identifiquem o algoritmo para encontrar frações equivalentes, é necessário que o professor apresente novos exemplos e realize questionamentos à classe de modo que eles consigam compreender a relação entre as duas frações. Ao fim desta etapa, os estudantes devem registrar as conclusões em seus cadernos.

Obervação: Dê alguns minutos para os estudantes refletirem sobre os questionamentos levantados e procure aceitar as opiniões destes. Caso estejam incorretas, aponte os erros para que os estudantes possam compreender o conteúdo de modo mais abrangente. O professor deve registrar as conclusões no quadro e solicitar aos estudantes o registro destas no caderno.

Figura 60 – Frações equivalentes

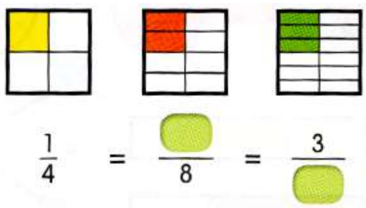


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

5. **Atividades Avaliativas**

a) Encontre o numerador e o denominador faltante na Figura 61.

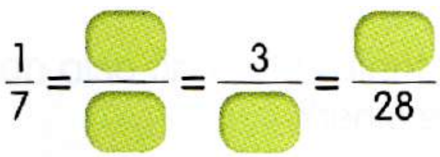
Figura 61 – Primeira Atividade Avaliativa sobre Frações Equivalentes



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

b) Complete a Figura 62 com as frações equivalentes a $\frac{1}{7}$ utilizando o método que melhor compreendeu:

Figura 62 – Segunda Atividade Avaliativa sobre Frações Equivalentes



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Materiais utilizados: Materiais concretos, folhas de papel, caneta, lápis de cor, lápis preto e borracha.

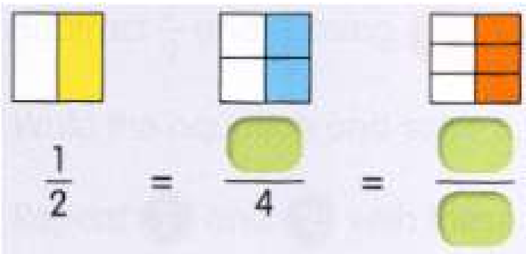
Dicas para o professor: A Atividade Avaliativa deverá ser realizada individualmente. O professor deve resolver as questões previamente, para que na sequência aplique em sua classe.

Observação: Os estudantes devem resolver as situações utilizando o método que desejar. O professor deverá circular pela sala de aula de modo que esclareça alguma dúvida referente à questão a ser resolvida e não sobre o conteúdo que está sendo avaliado.

6. **Atividades Complementares**

a) Encontre o numerador e o denominador ausentes na Figura 63.

Figura 63 – Primeira Atividade Complementar sobre Frações Equivalentes



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

b) Encontre as frações equivalentes conforme a Figura 64

Figura 64 – Segunda Atividade Complementar sobre Frações Equivalentes

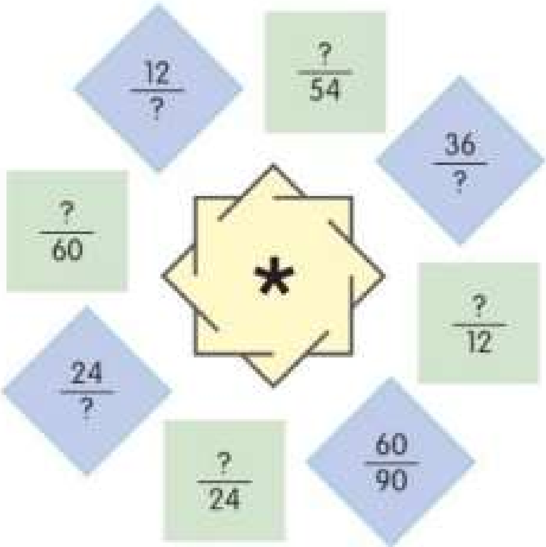
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

c) Simplifique as frações da Figura 65.

Figura 65 – Terceira Atividade Complementar sobre Frações Equivalentes

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Figura 66 – Desafio sobre Frações Equivalentes



Fonte: Castrucci e Júnior (2018)

d) De acordo com a Figura 66, substitua o **símbolo** "?" por números naturais, de modo que as frações sejam equivalentes. Substitua o **símbolo** "*" pela fração irredutível equivalente às demais.

Materiais utilizados: Caderno, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: As Atividades Complementares deverão estar impressas para que os estudantes realizem no horário disponível entre a resolução das demais atividades ou na forma de tarefa para casa.

REFERÊNCIAS

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Pupil´s Book** - maths 3b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2015.

CASTRUCCI, B.; JÚNIOR, J. R. G. **A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais.** São Paulo: FTD, 2018.

A.3 AULA 2: COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DE FRAÇÕES

Esta aula tem como finalidade proporcionar aos estudantes o conhecimento necessário para comparar e ordenar frações.

Objetos de Ensino: Significados de fração (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; Forma mista de uma fração.

Habilidades: (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão; identificar frações equivalentes.

Objetivos de Aprendizagem: Relacionar frações pela equivalência; Identificar frações a representações do quociente (exato) de dois inteiros; Comparar frações menores e maiores do que um inteiro.

Quantidade de aulas: 2 horas/aula.

Recursos utilizados: Lousa interativa, materiais impressos, materiais concretos, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

1. **Atividade Inicial:** Uma barra de chocolate foi quebrada em nove partes iguais e Lucas comeu cinco pedaços. Uma barra de chocolate similar foi quebrada em sete pedaços iguais e Ana comeu quatro partes. Usando imagens que representam o inteiro, mostre quem comeu a menor parte da barra de chocolate.

   Materiais utilizados: Material concreto, caderno, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

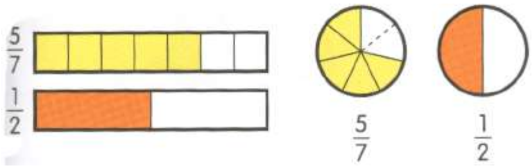
   Dicas para o professor: Uma sugestão é dividir a classe em duplas para gerar discussões sobre a solução encontrada; O professor deve solicitar que a resolução seja feita através da representação da situação na forma de desenhos ou com materiais concretos.

   Observação: Os estudantes devem concluir qual é a menor fração.

2. **Exemplos Resolvidos**

   a) Qual é a menor fração, $\frac{5}{7}$ ou $\frac{1}{2}$? Através da ilustração da Figura 67, podemos concluir que a parte ocupada pelo inteiro é maior para $\frac{5}{7}$ do que para $\frac{1}{2}$. Sendo assim, temos que $\frac{1}{2}$ é menor que $\frac{5}{7}$.

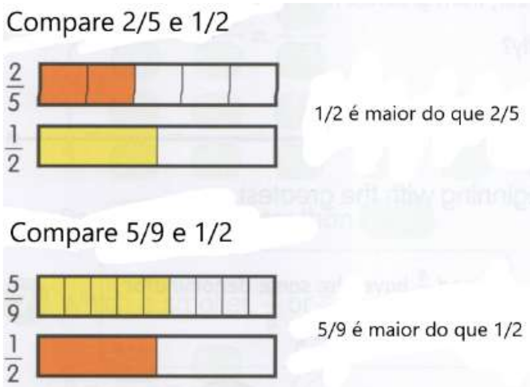
Figura 67 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Comparação de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

b) Ordene $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{9}$ e $\frac{1}{2}$ em ordem crescente. Utilizando a Figura 68 para representar as frações, teremos:

Figura 68 – Segundo Exemplo Resolvido sobre Comparação e Ordenação de Frações

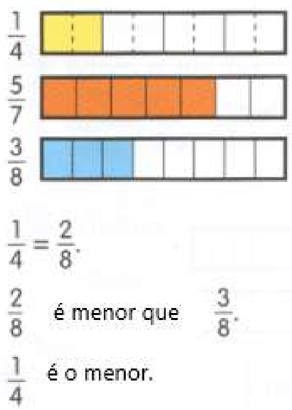


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Segundo a Figura 68, como $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{2}{5}$, mas $\frac{1}{2}$ é menor do que $\frac{5}{9}$, teremos que $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9}$.

c) Ordene $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{8}$ em ordem decrescente. A Figura 69 representa esta situação da seguinte forma:

Figura 69 – Terceiro Exemplo Resolvido sobre Comparação e Ordenação de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

No entender da Figura 69, utilizando as noções de equivalência de frações, temos que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Sabendo que $\frac{2}{8} < \frac{3}{8}$, podemos concluir que $\frac{5}{7} > \frac{3}{8} > \frac{1}{4}$.

Materiais utilizados: Material concreto, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve, inicialmente, sugerir aos estudantes que exponham possíveis métodos de resolução e a partir destes, resolver o problema junto com eles. É importante que os estudantes concluam a solução correta.

Observação: Os estudantes devem ser capazes de comparar e ordenar frações utilizando as noções de equivalência ou imagens para representar as situações.

3. **Atividades Principais**

   a) Ordene $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ em ordem crescente. Dica: Compare $\frac{7}{8}$ e $\frac{1}{4}$ com $\frac{1}{2}$.

   b) Ordene $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ em ordem decrescente.

Materiais utilizados: Materiais concretos, caderno, caneta, régua, lápis de cor, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Durante a realização das atividades, circule pela sala para acompanhar a resolução e solucionar as possíveis dúvidas. Solicite aos estudantes a manipulação de materiais concretos ou o uso de imagens para representar as situações que estão sendo solucionadas;

Observação: Para a correção, solicite aos estudantes a exposição das suas soluções de forma oral ou escrita na lousa.

4. **Conclusões:** Os estudantes devem concluir que os métodos para comparar e ordenar frações são o uso de imagens que representam as situações que estão sendo propostas e a equivalência de frações.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Dê um momento para que os estudantes levantem os possíveis métodos de comparação e ordenação, fazendo correções quando necessário.

Observação: O professor deve registrar as conclusões no quadro e os estudantes devem realizar as anotações no caderno.

5. **Atividades Avaliativas:** Ordene as frações na ordem solicitada em cada item:

   a) Crescente: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$.

   b) Decrescente: $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis colorido, régua, lápis preto e borracha.

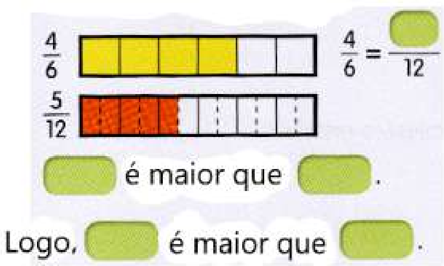
Dicas para o professor: A Atividade Avaliativa deverá ser realizada individualmente. O professor deve resolver as questões previamente, para que na sequência aplique em sua classe.

Observação: Os estudantes devem resolver as atividades com o método que melhor compreendeu.

6. **Atividades Complementares**

   a) Qual é a maior fração, $\frac{4}{6}$ ou $\frac{5}{12}$? Para comparar as frações, analise o desenho da Figura 70 e complete com os números que faltam.

Figura 70 – Primeira Atividade Complementar sobre Comparação e Ordenação de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

   b) Ordene $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{14}$ em ordem decrescente.

   c) Em uma empresa de Joinville, $\frac{2}{3}$ dos funcionários usam carro para chegar na empresa, enquanto $\frac{1}{6}$ vão de ônibus. Qual o tipo de veículo usado pelo maior número de funcionários?

   d) João trabalha em uma loja de materiais de construção e ele precisa organizar os tubos de PVC. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são tubos de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$. Ajude o João a organizar os tubos em ordem crescente, apresentando a sequência correta das frações.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

Dicas para o professor: As Atividades Complementares deverão estar impressas para que os estudantes realizem no horário disponível entre a resolução das demais atividades ou na forma de tarefa para casa.

REFERÊNCIAS

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*****: Pupil´s Book** - maths 3b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2015.

A.4 AULA 3: ADIÇÃO DE FRAÇÕES

Esta seção tem como objetivo construir o algoritmo para a adição de frações.

Objetos de Ensino: Significados de fração (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; forma mista de uma fração.

Habilidades: (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Objetivos de Aprendizagem: Identificar em uma situação-problema a necessidade da adição ou da subtração de frações; Calcular a adição e a subtração de frações; Analisar a resposta obtida em situações-problema que envolvam números racionais; Elaborar situações em que é preciso adicionar ou subtrair frações.

Quantidade de aulas: 1 hora/aula.

Recursos utilizados: Lousa interativa, materiais impressos, materiais concretos, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

1. **Atividade Inicial** Represente as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ utilizando desenhos ou utilizando material concreto. Qual é o resultado da soma das frações?

Materiais utilizados: Material concreto, caneta, caderno, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

Dicas para o professor: Uma sugestão é dividir a classe em duplas para gerar discussões sobre a solução encontrada. O professor deve solicitar que a resolução seja feita através da representação da situação na forma de desenhos e com materiais concretos. No fim da atividade, questione sobre os resultados encontrados e exponha o motivo para que a solução esteja correta.

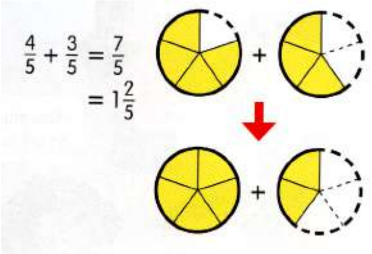
Observação: Os estudantes devem encontrar a solução correta da soma de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$.

2. **Exemplos Resolvidos**

a) Luana tinha $\frac{4}{5}$ de um bolo. Mariana tinha $\frac{3}{5}$ de um bolo similar. Quantos bolos elas tinham no total?

Conforme Figura 71, temos:

Figura 71 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Adição de Frações

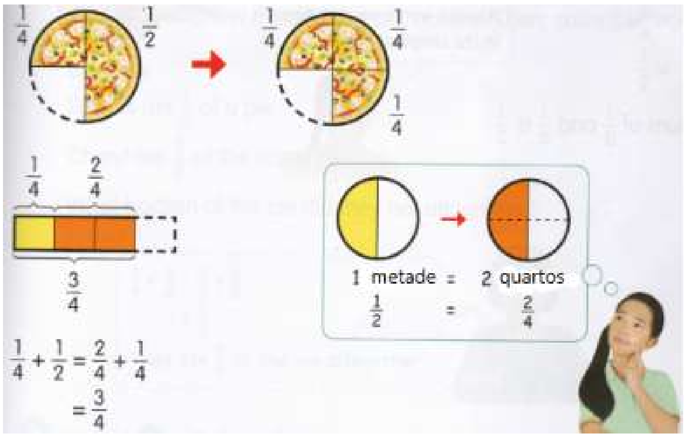


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016a)

Logo, eles tinham $1\frac{2}{5}$ de bolo no total.

b) João comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza. Marcos comeu $\frac{1}{2}$ da mesma pizza. Qual fração da pizza eles comeram ao todo? Segundo a Figura 72, a resolução é dada por:

Figura 72 – Segundo Exemplo Resolvido sobre Adição de Frações

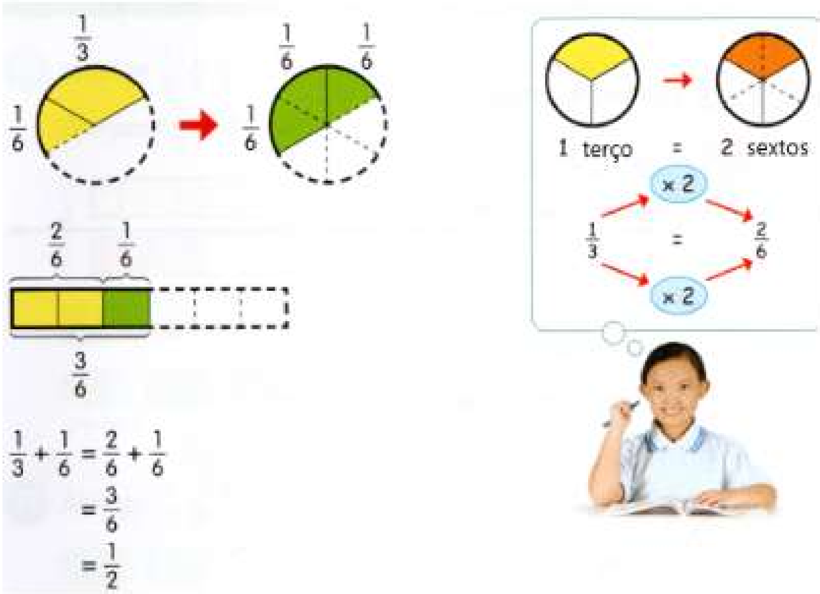


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

A resposta correta é: João e Marcos comeram $\frac{3}{4}$ da pizza no total.

c) Encontre o resultado de $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. De acordo com a Figura 73, teremos:

Figura 73 – Terceiro Exemplo Resolvido sobre Adição de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

A soma é igual a $\frac{1}{2}$.

Materiais utilizados: Material concreto, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve solicitar que os estudantes procurem resolver as situações através do uso de desenhos e com materiais concretos.

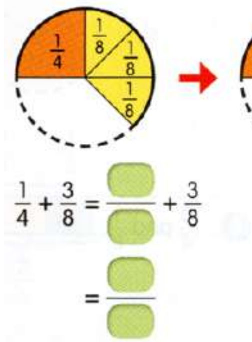
Observação: Os estudantes devem compreender que para adicionar duas frações ou mais, os denominadores precisam ser iguais. Para isto, devem ser utilizados materiais concretos para que os estudantes reconheçam o uso das noções de equivalência para encontrar a solução correta.

3. **Atividades Principais**

a) Some $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$.

Tendo como base a Figura 74, a solução é encontrada preenchendo as igualdades abaixo.

Figura 74 – Primeira Atividade Principal sobre Adição de Frações

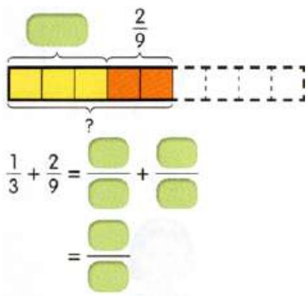


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

b) Encontre a soma de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{9}$.

Em concordância com a Figura 75, a resolução da operação é dada ao completar as igualdades apresentadas na imagem abaixo.

Figura 75 – Segunda Atividade Principal sobre Adição de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve instruir os alunos a observar a imagem para encontrar as frações equivalentes necessárias para adicionar as frações. O professor deve circular pela sala para sanar as dúvidas dos estudantes.

Observação: Os estudantes devem preencher de maneira correta os espaços em branco. A correção poderá ser feita no quadro através da descrição das etapas de resolução ditadas pelos estudantes. O professor deverá transcrever os cálculos de modo a encontrar a solução correta.

4. **Conclusões:** Para somar frações com denominadores diferentes devemos encontrar frações equivalentes de modo que os denominadores fiquem iguais. Por fim, soma os numeradores, copia o denominador e simplifica a resposta final se possível.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

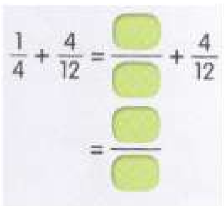
Dicas para o professor: O professor deve instigar os alunos a identificarem o método de resolução da adição de frações, citando principalmente a equivalência de frações. Para isto, é necessário que seja proporcionado um intervalo de tempo para que os estudantes tirem as suas conclusões. Após este momento, o professor deve expor no quadro as conclusões realizadas.

Observação: Os estudantes devem anotar as conclusões no caderno.

5. **Atividades Avaliativas**

   a) Adicione $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{12}$. A resolução dessa operação deve ser feita completando os espaços em branco na Figura 76.

   Figura 76 – Primeira Atividade Avaliativa sobre Adição de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

   b) Encontre a soma de $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{3}$.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, régua, lápis de cor, lápis preto e borracha.

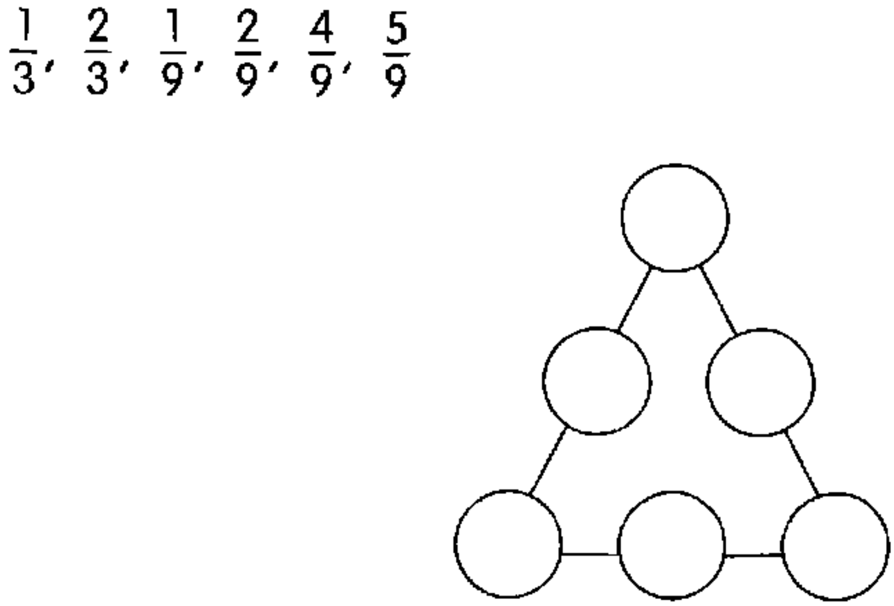
Dicas para o professor: O professor deve instruir os estudantes a resolver a primeira questão completando os espaços em branco. A segunda atividade pode ser resolvida com o método mais simples na visão dos estudantes. O professor deve circular pela sala de aula para sanar as dúvidas em relação a interpretação das questões apresentadas

6. **Atividades Complementares**

   a) Encontre a soma de $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$.

   b) Preencha os círculos com as frações abaixo de modo que a soma ao longo de cada lado do triângulo seja 1. A Figura 77 apresenta as frações e o triângulo com os espaços a serem preenchidos.

Figura 77 – Segunda Atividade Complementar sobre Adição de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016b)

c) Uma garrafa contém $\frac{3}{4}$ L de água. Um balde contém $\frac{1}{8}$ l de água a mais do que a garrafa. Qual a quantidade total em litros de água nos dois recipientes?

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: As Atividades Complementares deverão estar impressas para que os estudantes realizem no horário disponível entre a resolução das demais atividades ou na forma de tarefa para casa.

REFERÊNCIAS

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Pupil´s Book** - maths 3b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2015.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Pupil´s Book** - maths 4b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2016.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Workbook** - maths 4b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2016.

A.5 AULA 4: SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

O objetivo desta seção é construir o algoritmo para a subtração de frações.

Objetos de Ensino: Significados de fração (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; Cálculo da fração de um número natural; Adição e subtração de frações; Forma mista de uma fração.

Habilidades: (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Objetivos de Aprendizagem: Identificar em uma situação-problema a necessidade da adição ou da subtração de frações; Calcular a adição e a subtração de frações; Analisar a resposta obtida em situações-problema que envolvam números racionais; Elaborar situações em que é preciso adicionar ou subtrair frações.

Quantidade de aulas: 1 hora/aula.

Recursos utilizados: Lousa interativa, materiais impressos, materiais concretos, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

1. **Atividade Inicial:** Tendo as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$, como podemos encontrar a diferença entre as duas frações?

   Materiais utilizados: Materiais concretos, caderno, caneta, régua, lápis preto e borracha.

   Dicas para o professor: O professor deve disponibilizar um intervalo de tempo para que os estudantes consigam encontrar um método de subtrair as frações. É importante que o professor circule pela sala para sanar as dúvidas que são levantadas durante a realização da atividade.

   Observação: Para a correção, solicite aos estudantes a exposição das suas soluções de forma oral ou escrita na lousa.

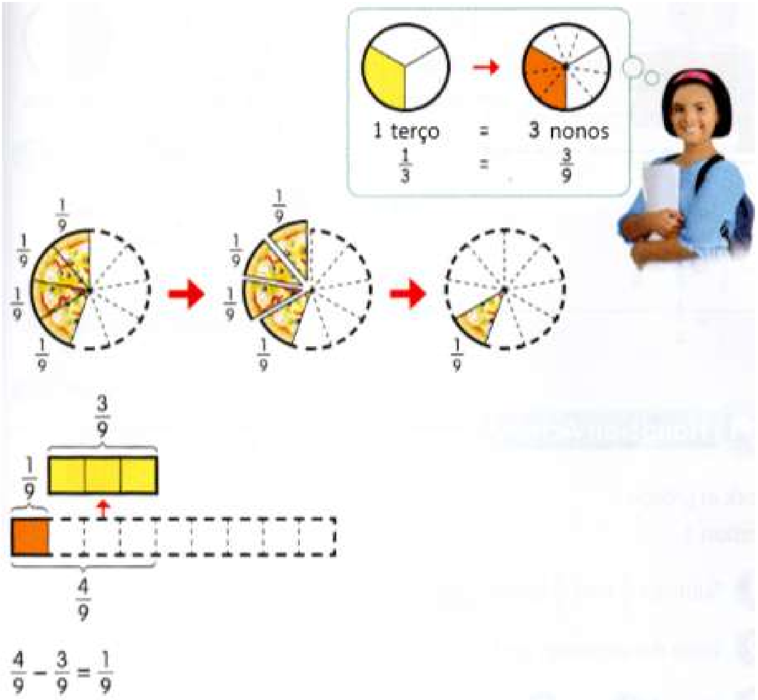
2. **Exemplos Resolvidos**

   a) Maria comeu $\frac{4}{9}$ de uma pizza. Laura comeu $\frac{1}{3}$ da mesma pizza. Qual fração representa o quanto Maria comeu a mais do Laura?

   A resolução é apresentada conforme a Figura 78.

   Sendo assim, a resposta correta é: Maria comeu $\frac{1}{9}$ a mais do que Laura.

Figura 78 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Subtração de Frações

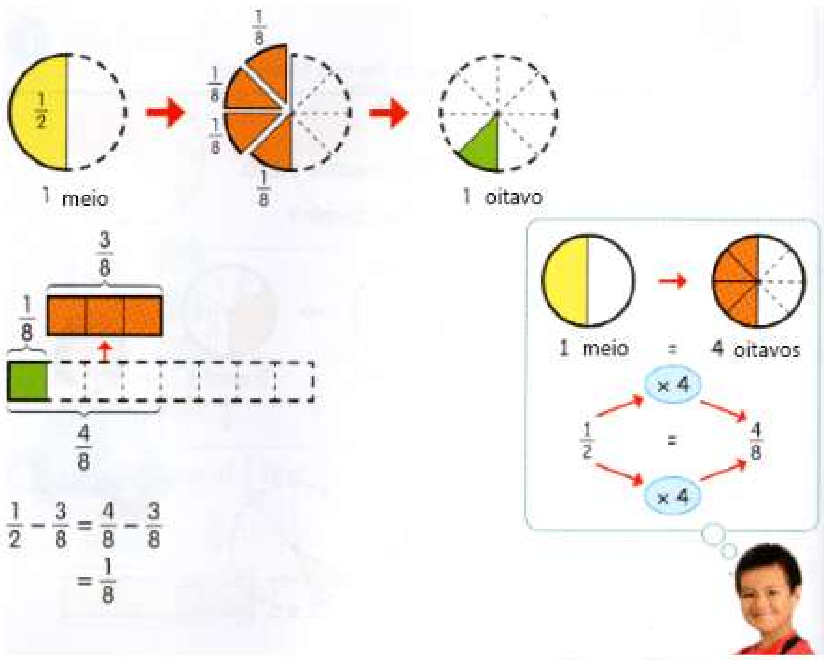


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

b) Subtraia $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$.

A Figura 79 aborda a seguinte resolução:

Figura 79 – Segundo Exemplo Resolvido sobre Subtração de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Materiais utilizados: Material concreto, caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem procurar as soluções das questões através de materiais concretos ou desenhos.

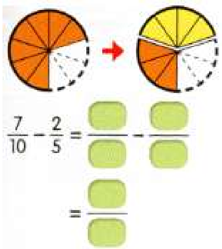
Observação: Os estudantes devem compreender que para subtrair duas frações ou mais, os denominadores devem ser iguais. Para isto, devem ser utilizados materiais concretos para que os estudantes reconheçam o uso das noções de equivalência para encontrar a solução correta.

3. **Atividades Principais**

a) Subtraia $\frac{2}{5}$ de $\frac{7}{10}$.

Na sequência, a Figura 80 apresenta os passos para a resolução da questão:

Figura 80 – Primeira Atividade Principal sobre Subtração de Frações

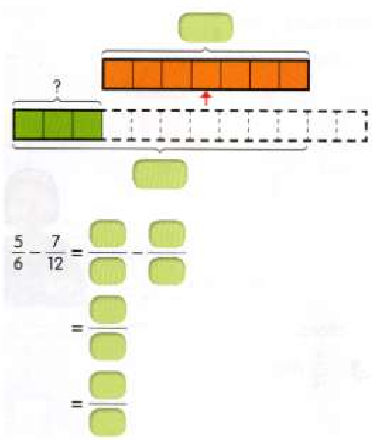


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

b) Encontre a diferença entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{12}$.

Como podemos observar, a resolução apresentada na Figura 81 é dada ao completar os espaços em branco na figura e no algoritmo de resolução.

Figura 81 – Segunda Atividade Principal sobre Subtração de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Materiais utilizados: Material concreto, caneta, caderno, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem procurar as soluções das questões através de materiais concretos ou desenhos.

Observação: Os estudantes devem preencher os espaços em branco ao ser utilizado o algoritmo de resolução para a subtração. A correção poderá ser feita no quadro.

4. **Conclusões** Para subtrair frações com denominadores diferentes teremos que encontrar frações equivalentes de modo que os denominadores fiquem iguais. Por fim, subtrai os numeradores, copia o denominador e simplifica a resposta final se possível.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

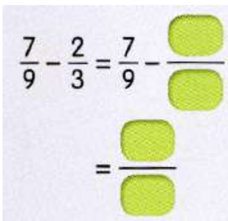
Dicas para o professor: O professor deve provocar questionamentos para que os alunos identifiquem o método de resolução da subtração de frações, citando principalmente a equivalência de frações. Para isto, é necessário que seja proporcionado um intervalo de tempo para que os estudantes tirem as suas conclusões. Após este momento, o professor deve expor no quadro as conclusões realizadas.

Observação: Os estudantes devem anotar as conclusões no caderno.

5. **Atividades Avaliativas**

   a) Subtrair $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{9}$. A resolução dessa questão pode ser feita completando os espaços em branco na Figura 82.

   Figura 82 – Primeira Atividade Avaliativa sobre Subtração de Frações

   Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

   b) Encontre a diferença entre $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{4}$.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

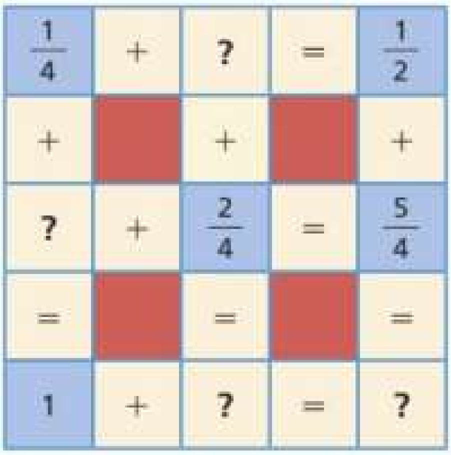
Dicas para o professor: O professor deve instruir os estudantes a resolver a primeira questão completando os espaços em branco. A segunda atividade pode ser resolvida com o método mais simples na visão dos estudantes. O professor deve circular pela sala de aula para sanar as dúvidas em relação a interpretação das questões apresentadas

6. **Atividades Complementares**

   a) Encontre a diferença entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

   b) Complete o quadro abaixo encontrando os números que faltam. A Figura 83 apresenta o quadro do seguinte modo:

Figura 83 – Atividade Complementar sobre Subtração de Frações



Fonte: Castrucci e Júnior (2018)

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: As Atividades Complementares deverão estar impressas para que os estudantes realizem no horário disponível entre a resolução das demais atividades ou na forma de tarefa para casa. O professor deve sanar as dúvidas dos estudantes em relação ao modo de resolver a atividade.

REFERÊNCIAS

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*****: Pupil´s Book** - maths 3b. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2015.

CASTRUCCI, B.; JÚNIOR, J. R. G. **A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais.** São Paulo: FTD, 2018.

A.6 AULA 5: MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Esta seção tem como finalidade construir o algoritmo para a multiplicação de frações e está dividido em dois tópicos [2]:

- Multiplicando fração por um número inteiro.
- Multiplicando fração por fração.

Em relação ao BNCC, os pontos abordados são:

Objetos de Ensino: Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, que envolvam razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Habilidades: (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, com relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Objetivos de Aprendizagem: Realizar multiplicação com frações; Perceber que problemas que envolvem fração de fração podem ser resolvidos por multiplicação de frações.

Quantidade de aulas: 3 horas/aula.

Recursos utilizados: Lousa interativa, materiais impressos, materiais concretos, objetos diversos, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

I. Multiplicando fração por um número inteiro

1. **Atividade Inicial:** Utilizando materiais concretos e desenhos, encontre o resultado de $\frac{2}{3}$ de 9.

> **Materiais utilizados:** Material concreto, objetos diversos, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

> **Dicas para o professor:** Uma sugestão é dividir a classe em duplas para gerar discussões sobre a solução encontrada. O professor deve distribuir nove objetos para cada dupla afim de que encontrem a solução correta. No fim da atividade, questione sobre os resultados encontrados e exponha o motivo para que a solução esteja correta.

[2] Em cada um dos tópicos serão apresentadas as atividades iniciais, exemplos resolvidos e atividades principais. Para concluir a aula sobre Multiplicação de Frações, teremos a conclusão, as atividades avaliativas e as atividades complementares relacionadas aos dois tópicos trabalhados.

Observação: Os objetos que serão manipulados podem ser tampinhas de garrafa PET, geralmente encontrado nas turma do ensino fundamental I. Os estudantes devem concluir a solução correta de $\frac{2}{3}$ de 9.

2. **Exemplos Resolvidos:** Lara comprou 16 figurinhas. Ela deu $\frac{3}{4}$ das figurinhas para sua irmã. Quantas figurinhas Lara deu para a irmã?

   Considerando a Figura 84, a solução é dada por:

Figura 84 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Multiplicação de Fração por um Número Inteiro

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4} \text{ de } 16 &= \tfrac{3}{4} \times 16 \\ &= \frac{3 \times 16}{4} \\ &= \frac{48}{4} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

A resposta correta é: Lara deu 12 figurinhas para a irmã dela.

Materiais utilizados: Objetos diversos, caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve distribuir 16 objetos para cada dupla afim de que os estudantes verifiquem a solução da questão e compreendam o algoritmo da multiplicação.

Observação: Os objetos que serão manipulados podem ser tampinhas de garrafa PET.

3. **Atividade principal:** Encontre o valor de cada situação preenchendo os espaços vazios na Figura 85.

Figura 85 – Primeira Atividade Principal sobre Multiplicação de Fração por um Número Inteiro

a) $$\begin{aligned} \tfrac{5}{6} \text{ de } 12 &= \tfrac{5}{6} \times \square \\ &= \frac{5 \times \square}{6} \\ &= \frac{\square}{6} \\ &= \square \end{aligned}$$

b) $\tfrac{4}{7}$ de $35 = \square$

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem procurar as soluções das questões através de materiais concretos ou aplicando o algoritmo. É necessário que o professor circule pela sala para sanar as possíveis dúvidas.

Observação: Os estudantes devem preencher os espaços em branco ao ser utilizado o algoritmo de resolução para a multiplicação. A correção poderá ser feita no quadro.

II. Multiplicando fração por fração

1. **Atividade Inicial:** Pinte $\frac{3}{4}$ de um retângulo e na sequência, divida $\frac{1}{2}$ da parte pintada. Qual fração corresponde a parte destacada?

Materiais utilizados: Tiras de papel, caneta. lápis de cor, lápis preto, régua, cola e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem seguir os passos solicitados no enunciado. O professor deve fazer a atividade junto com os alunos para demonstrar como realizar os passos. No fim da atividade, os alunos devem ser questionados sobre a solução encontrada.

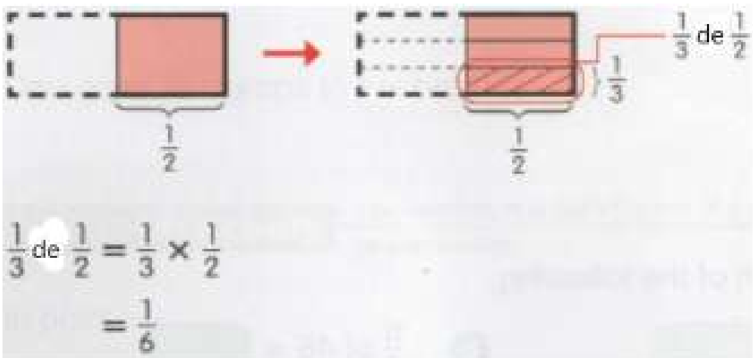
Observação: Os estudantes devem concluir que a solução correta é $\frac{3}{8}$.

2. **Exemplos Resolvidos**

   a) Mariana tem $\frac{1}{2}$ de uma barra de chocolate. Ela comeu $\frac{1}{3}$ disto. Qual a fração da barra de chocolate que ela comeu?

   A solução é apresentada conforme a Figura 86:

Figura 86 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Multiplicação de Fração por Fração

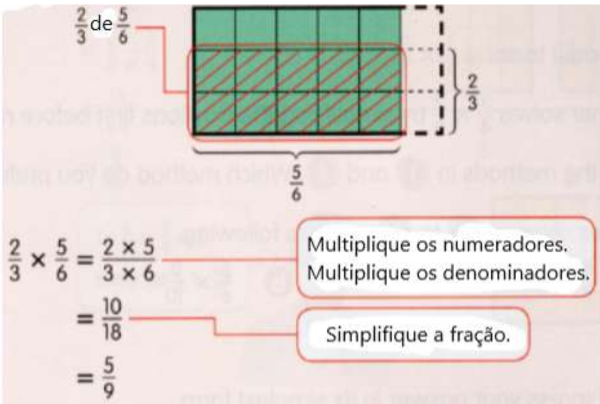


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

A solução correta é: Ela comeu $\frac{1}{6}$ da barra de chocolate.

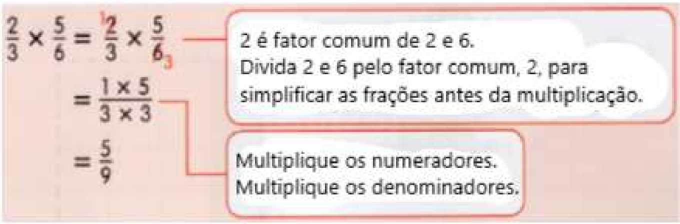
b) Encontre $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$. As Figuras 87 e 88 demonstram a resolução da questão através do uso de dois métodos distintos.

Figura 87 – Método 1 sobre Multiplicação de Fração por Fração



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

Figura 88 – Método 2 sobre Multiplicação de Fração por Fração



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

Materiais utilizados: Material concreto, caderno, caneta, lápis preto e borracha.

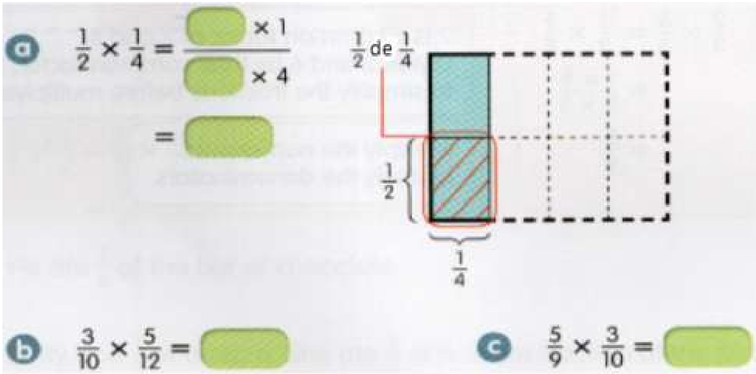
Dicas para o professor: Os estudantes devem verificar as soluções das questões através do uso do material concreto, tendo como objetivo a compreensão do algoritmo da multiplicação. O professor deve circular pela sala para identificar os estudantes que apresentam dificuldade, procurando assim, responder os seus questionamentos.

3. **Atividade Principal:** De acordo com a Figura 89, calcule as multiplicações e expresse sua resposta na forma mais simples:

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem aplicar o algoritmo da multiplicação utilizando o desenho e o item “a” como exemplo.

Figura 89 – Atividade Principal sobre Multiplicação de Fração por Fração



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017a)

Observação: A correção poderá ser feita no quadro através da descrição das etapas de resolução ditadas pelos estudantes. O professor deverá transcrever os cálculos de modo a encontrar a solução correta.

4. **Conclusões:** Para efetuar a multiplicação de frações, devemos multiplicar os numeradores e os denominadores, simplificando as frações sempre que possível.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve provocar questionamentos para que os alunos identifiquem o algoritmo de multiplicação de frações, incluindo a simplificação de frações sempre que possível. Para isto, é necessário que seja proporcionado um intervalo de tempo para que os estudantes tirem as suas conclusões. Após este momento, o professor deve expor no quadro as conclusões realizadas.

Observação: Os estudantes devem anotar as conclusões no caderno.

5. **Atividades Avaliativas**

Encontre o valor de cada sentença:

a) $\frac{2}{3} \times 24$

b) $\frac{8}{15} \times \frac{5}{4}$

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: As atividades podem ser resolvida com o método mais simples na visão dos estudantes. O professor deve circular pela sala de aula para sanar as dúvidas dos estudantes.

6. **Atividades Complementares**

a) Encontre o valor de cada situação da Figura 90.

Figura 90 – Primeira Atividade Complementar sobre Multiplicação de Frações

(a) $\frac{1}{2}\text{de}\,18 = \frac{1}{2} \times \square$

$= \frac{1 \times \square}{2}$

$= \frac{\square}{2}$

$= \square$

(b) $\frac{1}{4}\text{de}\,28 =$ ________

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017b)

b) Calcule as multiplicações e expresse sua resposta na forma mais simples de acordo com a Figura 91.

Figura 91 – Segunda Atividade Complementar sobre Multiplicação de Frações

(a) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{\overset{\square}{\cancel{2}}}{5} \times \frac{1}{\cancel{6}_{\square}}$

$= \frac{\square \times 1}{5 \times \square}$

$=$ ________

(b) $\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} =$ ________

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017b)

c) Lucas tem uma coleção de 80 veículos de brinquedo. $\frac{3}{5}$ de seus veículos de brinquedo são carros. Os restantes são motos e ônibus. O número de motos é três vezes o número de ônibus. Quantas motos de brinquedo Lucas tem?

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: As Atividades Complementares deverão estar impressas para que os estudantes realizem no horário disponível entre a resolução das demais atividades ou na forma de tarefa para casa. O professor deve sanar as dúvidas dos estudantes em relação ao modo de resolver a atividade.

Observação: Para a correção, é interessante propor aos alunos a apresentação das soluções encontradas. Pois pode haver várias formas de resolução.

REFERÊNCIAS

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Pupil´s Book** - maths 5A. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2017.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Workbook** - maths 5A. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2017.

A.7 AULA 6: DIVISÃO DE FRAÇÕES

Esta seção tem como objetivo a construção do algoritmo para a divisão de frações e está dividido em três tópicos [3]:

- Divisão de frações por um número inteiro.
- Divisão de números inteiros por frações.
- Divisão de fração própria por outra fração própria.

Em relação ao BNCC, os pontos abordados são:

Objetos de Ensino:

- Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, que envolvam razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- Significados de fração (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; Forma mista de uma fração.

Habilidades:

- (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, com relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

[3] Em cada um dos tópicos serão apresentadas as atividades iniciais, exemplos resolvidos e atividades principais. Para concluir a aula sobre Divisão de Frações, teremos a conclusão, as atividades avaliativas e as atividades complementares relacionadas aos três tópicos trabalhados.

Objetivos de Aprendizagem:

- Realizar multiplicação com frações; Perceber que problemas que envolvem fração de fração podem ser resolvidos por multiplicação de frações.
- Identificar em uma situação-problema a necessidade da adição ou da subtração de frações; Calcular a adição e a subtração de frações; Analisar a resposta obtida em situações-problema que envolvam números racionais; Elaborar situações em que é preciso adicionar ou subtrair frações.

Quantidade de aulas: 4 horas/aula.

Recursos utilizados: Lousa interativa, materiais impressos, materiais concretos, objetos diversos, caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

I. Divisão de frações por um número inteiro

1. **Atividade Inicial:** Luana tem $\frac{1}{4}$ de uma pizza. Ela dividiu a pizza igualmente com seu irmão. Utilizando desenhos, mostre a quantidade de pizza que cada um recebeu.

   Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

   Dicas para o professor: Uma sugestão é dividir a classe em duplas para gerar discussões sobre a solução encontrada. Ao final da atividade, questione sobre os resultados encontrados e exponha o motivo para que a solução esteja correta.

2. **Exemplos Resolvidos:**

   a) João dividiu $\frac{3}{4}$ de uma pizza igualmente entre 3 crianças. Qual fração da pizza cada criança receberá?

   A resolução desse exemplo esta representado na Figura 92,

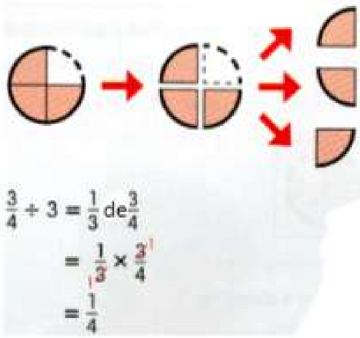
   b) $\frac{4}{5}$ de uma torta de fruta foi dividida igualmente entre 2 meninas. Qual fração da torta de fruta cada uma das meninas recebeu?

   Conforme a Figura 93, a divisão relacionada a resolução desse exemplo pode ser feito por 2 métodos distintos.

   Sendo assim, cada criança recebeu $\frac{2}{5}$ de uma torta de fruta.

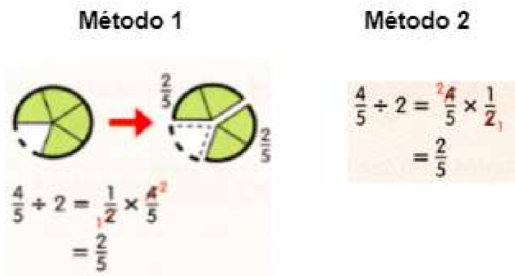
   Materiais utilizados: Material concreto, caneta, caderno, lápis preto e borracha.

Figura 92 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Divisão de Frações por Números Inteiros



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Figura 93 – Segundo Exemplo Resolvido sobre Divisão de Frações por Números Inteiros



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Dicas para o professor: O professor deve mostrar a diferença entre os dois métodos de resolução, lembrando que os resultados serão iguais. É interessante que os estudantes verifiquem a solução encontrada utilizando o material concreto.

3. **Atividades Principais:**

   a) $\frac{1}{3}$ de um bolo foi dividido igualmente entre 4 pessoas. Qual fração de bolo cada uma recebeu?

      A resolução deve ser feita observando os desenhos que representam a situação na Figura 94 e também completar os números faltantes na aplicação do algoritmo.

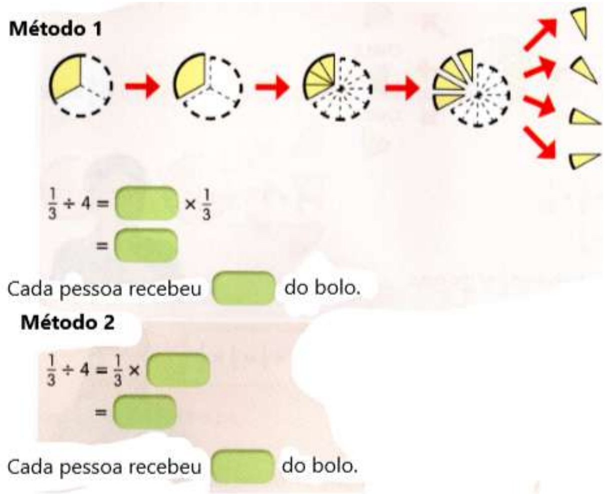
   b) Pedro cortou $\frac{3}{4}$ de um bloco de argila em 6 peças iguais. Qual é a fração do bloco de cada pequeno pedaço?

      A solução é encontrada observando os desenhos apresentados na Figura 95, na sequencia complete a aplicação do algoritmo com os números faltantes.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

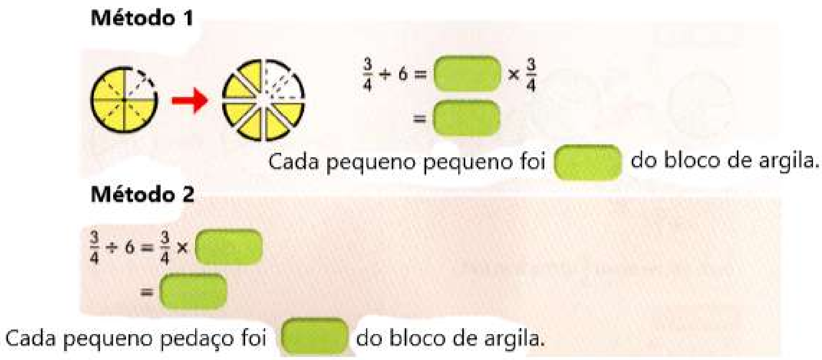
Dicas para o professor: Os estudantes devem observar os desenhos que representam as situações e completar os cálculos com os números faltantes.

Figura 94 – Primeira Atividade Principal sobre Divisão de Frações por Números Inteiros



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Figura 95 – Segunda Atividade Principal sobre Divisão de Frações por Números Inteiros



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Observações: O professor poderá fazer a correção no quadro com a ajuda dos estudantes ao descrever os passos para a resolução.

II. Divisão de números inteiros por frações

1. **Atividade Inicial:** João tem 3 pizzas inteiras. Ele dividiu a pizza igualmente entre algumas crianças. Cada criança recebeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza. Usando desenhos, mostre o número de crianças na qual foi dividida a pizza.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis de cor, lápis preto, régua e borracha.

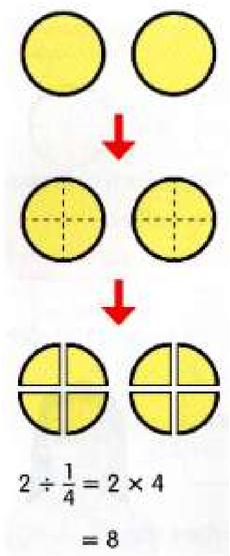
Dicas para o professor: Ao final da atividade, questione sobre os resultados encontrados e exponha o motivo para que a solução esteja correta.

2. **Exemplos Resolvidos**

a) Lucas cortou 2 bolos idênticos em pedaços iguais. Cada pedaço era $\frac{1}{4}$ de um bolo. Quantos pedaços iguais ele cortou?

Segundo a Figura 96, a resolução é dada da seguinte forma:

Figura 96 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Divisão de Número Inteiro por Fração

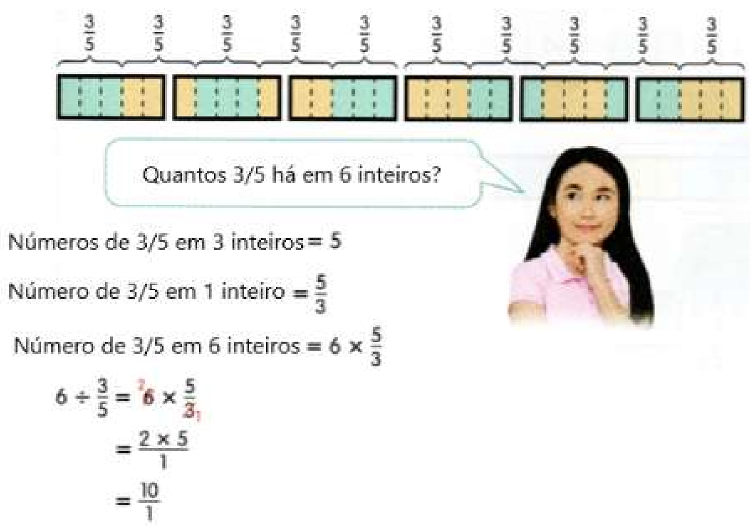


Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

b) Qual é o resultado de $6 \div \frac{3}{5}$?

Observando a Figura 97, temos o desenho que representa a operação e também o método numérico para a resolução.

Figura 97 – Segundo Exemplo Resolvido sobre Divisão de Números Inteiros por Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Materiais utilizados: Objetos diversos, caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve distribuir os materiais concretos e 30 objetos diversos para cada dupla, afim de que os estudantes verifiquem a solução da questão e compreendam o algoritmo da divisão de um número inteiro por uma fração.

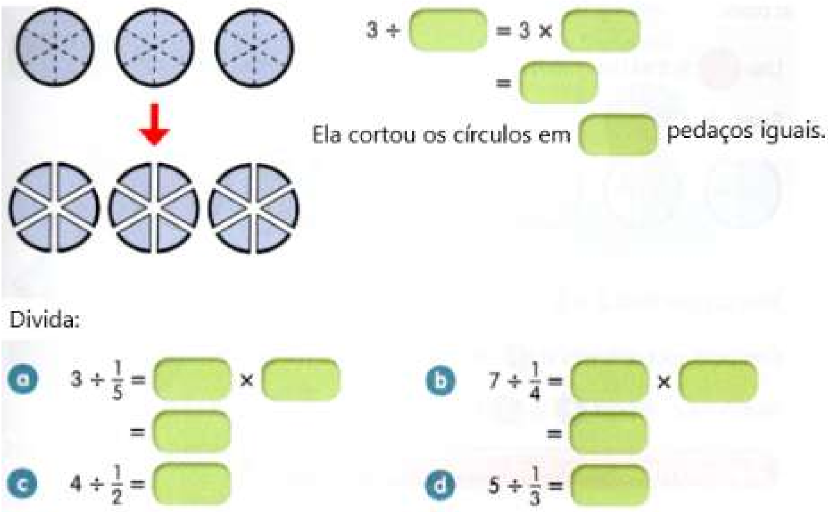
Observação: Os objetos que serão manipulados podem ser tampinhas de garrafa PET.

3. **Atividades Principais:**

a) Joana cortou 3 círculos em pedaços iguais. Cada pedaço era $\frac{1}{6}$ de um círculo. Em quantos pedaços iguais ela cortou os círculos?

De acordo com o desenho representado na Figura 98, complete os espaços com os números faltantes e calcule os demais itens.

Figura 98 – Primeira Atividade Principal sobre Divisão de Números Inteiros por Frações



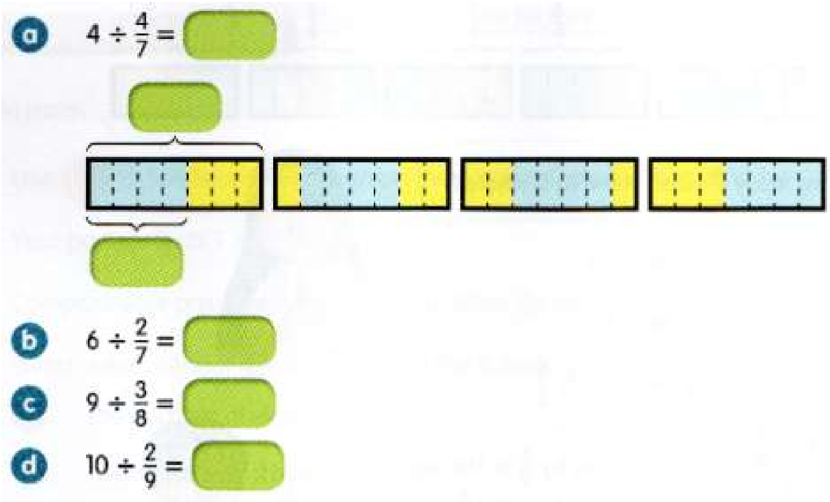
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

b) Encontre o valor de cada uma das sentenças da Figura 99. Para isso, observe o desenho do item "a" e faça a resolução da mesma. Seguindo o primeiro item como exemplo, resolva as demais operações que constam na imagem.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem observar os desenhos que representam as situações e resolver o item "a". Tomando como exemplo o primeiro item, os demais itens devem ser resolvidos utilizando o mesmo método.

Figura 99 – Segunda Atividade Principal sobre Divisão de Números Inteiros por Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Observações: O professor poderá fazer a correção no quadro com a ajuda dos estudantes ao descrever os passos para a resolução.

III. Divisão de fração própria por outra fração própria

1. **Atividade Inicial:** João disse que há 2 quartos em $\frac{1}{2}$. Você considera correto?

Materiais utilizados: Material concreto, caderno, caneta, lápis preto, régua e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve questionar sobre os resultados encontrados e expor o motivo para que a solução esteja correta.

Observação: O professor deve revisar o que são Frações Próprias, ou seja, são aquelas que possuem o numerador menor que o denominador.

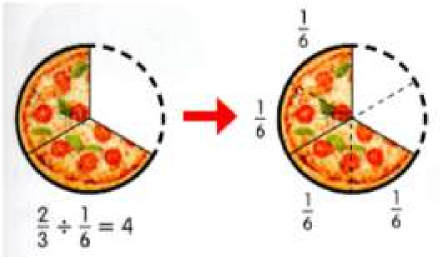
2. **Exemplos Resolvidos**

a) Maria tem $\frac{2}{3}$ de uma pizza. Ela cortou a pizza em pedaços iguais. Sabendo que cada pedaço equivale a $\frac{1}{6}$, em quantos pedaços iguais Maria cortou a pizza?
Considerando a resolução da Figura 100, Maria cortou a pizza em 4 pedaços.

b) Quantos quartos há em $\frac{5}{8}$?
A Figura 101 apresenta como solução $2\frac{1}{2}$.

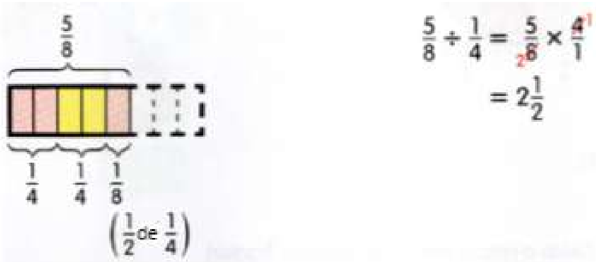
c) Ana tem $\frac{3}{4}$ de um waffle. Ela cortou o waffle em pedaços iguais, onde cada pedaço era $\frac{3}{8}$ do waffle. Em quantos pedaços iguais ela cortou o waffle?
Conforme a Figura 102, temos que a resposta correta é dois pedaços.

Figura 100 – Primeiro Exemplo Resolvido sobre Divisão de Fração Própria por outra Fração Própria



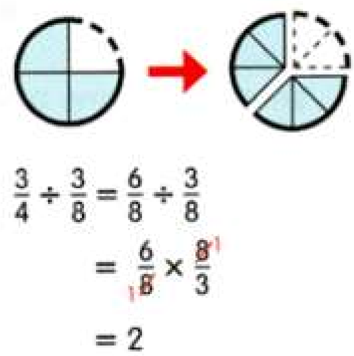
Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Figura 101 – Segundo Exemplo Resolvido sobre Divisão de Fração Própria por outra Fração Própria



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Figura 102 – Terceiro Exemplo Resolvido sobre Divisão de Fração Própria por outra Fração Própria



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

Materiais utilizados: Material concreto, caderno, caneta, lápis preto e borracha.

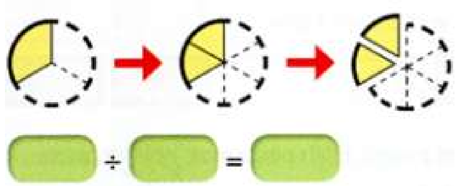
Dicas para o professor: O professor deve distribuir os materiais concretos afim de que os estudantes verifiquem a solução da questão e compreendam o algoritmo da divisão de uma fração própria por outra fração própria.

3. **Atividades Principais**

a) A vizinha de Luís deu a ele $\frac{1}{3}$ de um bolo. Luís cortou o bolo em pequenos pedaços, onde cada pedaço é $\frac{1}{6}$ do bolo original. Em quantos pedaços pequenos Luís cortou o bolo?

Para encontrar a solução correta, complete a Figura 103 com as frações adequadas.

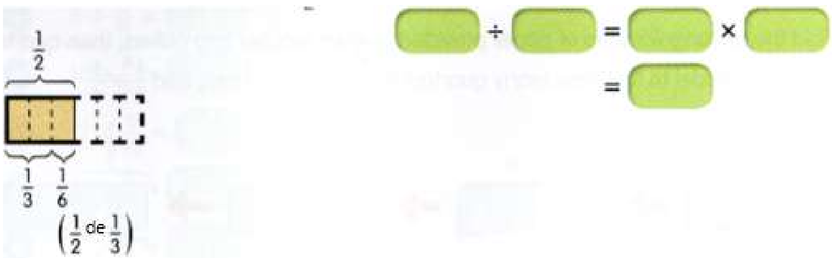
Figura 103 – Primeira Atividade Principal sobre Divisão de Fração Própria por outra Fração Própria



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

b) Quantos terços há em $\frac{1}{2}$? Analise a Figura 104 e encontre a solução certa preenchendo os espaços em branco com as frações corretas.

Figura 104 – Segunda Atividade Principal sobre Divisão de Fração Própria por outra Fração Própria



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

c) João tem $\frac{8}{9}$ de um bolo e alguns pratos. Ele quer colocar $\frac{2}{9}$ do bolo em cada prato. Quantos pratos ele terá?

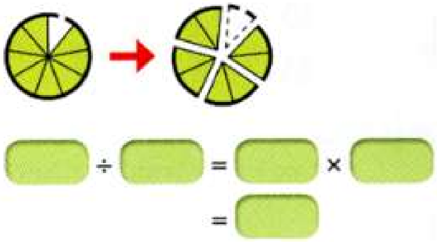
Descubra a solução correta completando a Figura 105.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve instruir os alunos sobre a observação das imagens e o preenchimento adequado das figuras, de modo a aplicar corretamente o algoritmo da divisão.

Observações: O professor poderá fazer a correção no quadro com a ajuda dos estudantes ao descrever os passos para a resolução.

Figura 105 – Terceira Atividade Principal sobre Divisão de Fração Própria por outra Fração Própria



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018a)

4. **Conclusões:** O algoritmo para dividir frações é multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração. Na sequência, simplifica o resultado se possível.

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: O professor deve realizar questionamentos para que os alunos identifiquem o algoritmo da divisão de frações, incluindo a simplificação de frações sempre que possível. Após este momento, o professor deve expor no quadro as conclusões realizadas.

Observação: Os estudantes devem registrar as conclusões no caderno.

5. **Atividades Avaliativas:** Encontre o valor de cada sentença:

   a) $\frac{3}{4} \div 12$
   b) $12 \div \frac{9}{10}$
   c) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{12}$

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: Os estudantes devem escolher o método de resolução que pareça mais simples para eles. O professor deve circular pela sala de aula para sanar as dúvidas dos estudantes.

6. **Atividades Complementares:**

   a) Calcule o valor de cada divisão: Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018b)

      i. $\frac{9}{10} \div 3$
      ii. $10 \div \frac{4}{5}$
      iii. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$

b) Julia usou $\frac{1}{6}$ de um pacote de farinha para fazer alguns muffins e $\frac{1}{4}$ do mesmo para fazer um bolo. Ela usou o restante para fazer alguns cupcakes. Sabendo que Julia usou $\frac{1}{12}$ da farinha restante para fazer cada cupcake, quantos cupcakes ela fez? Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2018b)

Materiais utilizados: Caderno, caneta, lápis preto e borracha.

Dicas para o professor: As Atividades Complementares deverão estar impressas para que os estudantes realizem no horário disponível entre a resolução das demais atividades ou na forma de tarefa para casa. O professor deve sanar as dúvidas dos estudantes em relação ao modo de resolver a atividade.

REFERÊNCIAS

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Pupil´s Book** - maths 6A. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2018.

KHEONG, F. H.; SOON, G. K.; RAMAKRISHNAN, C. ***My Pals Are Here!*: Workbook** - maths 6A. Terceira edição. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2018.

A.8 OBSERVAÇÕES REFERENTES AO CADERNO DE ATIVIDADES E SUGESTÕES DE QUESTÕES DA OBMEP

Até o presente momento, foi proposta aos professores uma sequência de atividades com o objetivo de ensinar conceitos e construir algoritmos para resolver situações envolvendo frações.

A metodologia utilizada é a aplicação do Método de Singapura, sendo propostas atividades nas quais as resoluções são baseadas no uso de materiais concretos e também no uso de desenhos, para no fim, os estudantes concluírem sobre quais serão os passos necessários para as resoluções das operações trabalhadas em cada tópico, ou seja, quais são os algoritmos de resolução. Essa etapa do Caderno de Atividades é concluída com a resolução das atividades que compõem esse material.

Na sequência, serão apresentadas dez questões propostas nas provas da OBMEP e também as soluções corretas, cujas resoluções envolvem o uso de algoritmos para resolver operações básicas envolvendo as frações. Estas atividades poderão ser aplicadas em sala de aula na forma de desafios ou em outros contextos conforme as necessidades dos estudantes. De acordo com Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (2023), as questões selecionadas são:

Questão 1 Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito $\frac{1}{3}$ da obra e no segundo mês mais $\frac{1}{3}$ do que faltava. A que fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{5}{6}$

Questão 2 Luísa pagou quatro reais e cinquenta centavos por $\frac{3}{8}$ de um bolo, e João comprou o resto do bolo. Quanto João pagou?

A) Seis reais.

B) Seis reais e cinquenta centavos.

C) Sete reais.

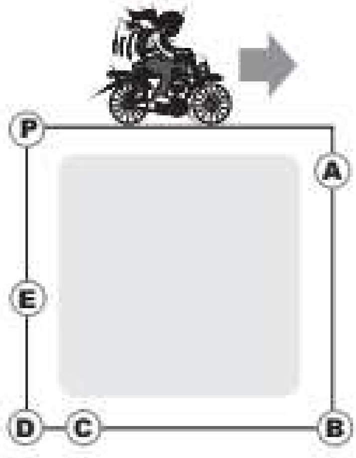
D) Sete reais e cinquenta centavos.

E) Oito reais.

Questão 3 Sueli resolveu dar quatro voltas em torno de uma praça quadrada, no sentido indicado pela flecha. Ela partiu do vértice P e caiu ao atingir do $\frac{3}{7}$ do percurso total de quatro voltas. Qual ponto da Figura 106 indica o lugar em que Sueli caiu?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

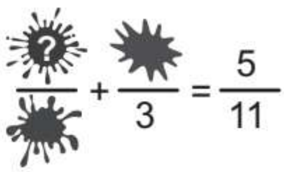
Figura 106 – Terceira questão extraída das provas da OBMEP



Fonte: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (2023)

Questão 4 A Figura 107 mostra a fração $\frac{5}{11}$ como a soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração de acordo com a Figura 107?

Figura 107 – Quarta questão extraída das provas da OBMEP



Fonte: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (2023)

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Questão 5 Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos, $\frac{2}{5}$ são homens e, entre os mineiros, $\frac{3}{7}$ são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?

A) 12 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 21

Questão 6 Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

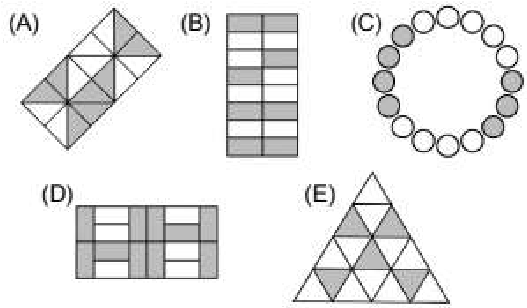
A) $\frac{7}{12}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{4}{3}$

Questão 7 Juca colocou algumas bolinhas em uma caixa na qual cabem, no máximo, 100 bolinhas. Artur tirou $\frac{1}{2}$ das bolinhas dessa caixa, depois Bernardo tirou $\frac{1}{3}$ das restantes, em seguida Carlos tirou $\frac{1}{4}$ das que sobraram e, finalmente, Danilo tirou $\frac{1}{5}$ das que restaram. Quantas bolinhas ficaram na caixa?

A) 0 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 24

Questão 8 Cada uma das Figuras 108 está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a $\frac{5}{8}$ da área total?

Figura 108 – Oitava questão extraída das provas da OBMEP



Fonte: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (2023)

Questão 9 Os números a e b são números inteiros positivos tais que $\frac{a}{13} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a + b$?

A) 5 **B)** 7 **C)** 14 **D)** 20 **E)** 31

Questão 10 Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche $\frac{3}{5}$ da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche $\frac{5}{8}$ da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

A) Ela ficará preenchida em $\frac{7}{8}$ de sua capacidade.

B) Ela ficará preenchida em $\frac{8}{13}$ de sua capacidade.

C) Ela ficará preenchida em $\frac{5}{8}$ de sua capacidade.

D) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.

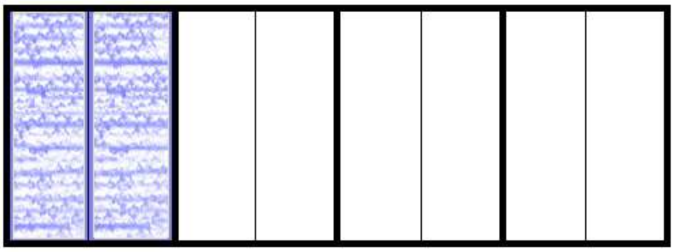
E) Ela vai transbordar.

A.9 RESOLUÇÕES

Aula 1: Equivalência de Frações

1. Atividade Inicial (Figure 109):

Figura 109 – Resolução da Atividade Inicial sobre fração equivalente



Fonte: Produção Própria

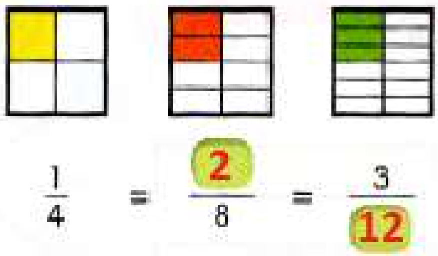
2. Atividades Principais

   a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

   b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

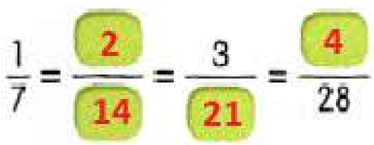
3. Atividades Avaliativas

Figura 110 – Resolução da Primeira Atividade Avaliativa sobre Fração Equivalente



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

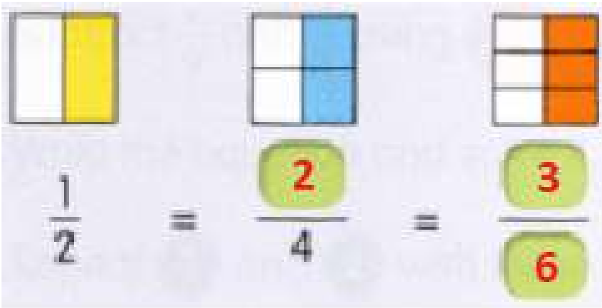
Figura 111 – Resolução da Segunda Atividade Avaliativa sobre Fração Equivalente



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

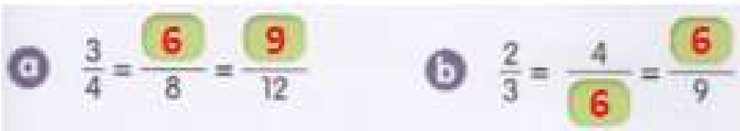
4. Atividades Complementares

Figura 112 – Resolução da Primeira Atividade Complementar sobre Fração Equivalente



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Figura 113 – Resolução da Segunda Atividade Complementar sobre Fração Equivalente



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Figura 114 – Resolução da Terceira Atividade Complementar sobre Fração Equivalente

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

Figura 115 – Resolução da Quarta Atividade Complementar sobre Fração Equivalente

Fonte: Castrucci e Júnior (2018)

Aula 2: Comparação e Ordenação de Frações

1. Atividade Inicial: **Lucas**

2. Atividades Principais

   a) $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{7}{8}$

   b) $\frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

3. Atividades Avaliativas

   a) $\frac{2}{3} > \frac{3}{10} > \frac{1}{5}$

   b) $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{4}{5}$

4. Atividades Complementares

   a) Figura 116

Figura 116 – Resolução da Primeira Atividade Complementar sobre Comparação e Ordenação de Frações

Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2015)

   b) $\frac{2}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{14}$

   c) **Carro**

   d) $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$

Aula 3: Adição de Frações

1. Atividade Inicial

   $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

2. Atividades Principais

   a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

3. Atividades Avaliativas

a) $\frac{1}{4} + \frac{4}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

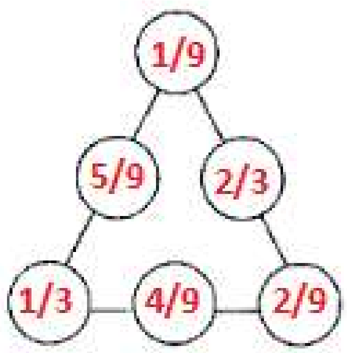
b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$

4. Atividades Complementares

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

b) Figura 117

Figura 117 – Resolução da Primeira Atividade Complementar sobre Adição de Frações



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2016b)

c) Quantidade de água balde: $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Quantidade total de água nos recipientes: $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{6}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$

Aula 4: Subtração de Frações

1. Atividade Inicial

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Atividades Principais

a) $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{5}{6} - \frac{7}{12} = \frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

3. Atividades Avaliativas

a) $\frac{7}{9} - \frac{2}{3} = \frac{7}{9} - \frac{6}{9} = \frac{1}{9}$

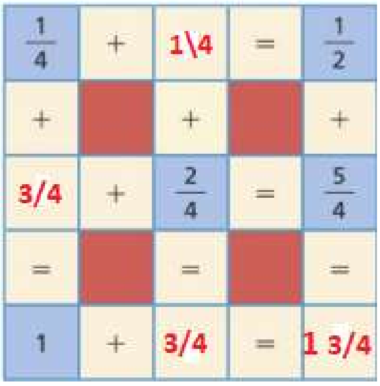
b) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$

4. Atividades Complementares

   a) $\frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{6}{9} - \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$

   b) Figura 118.

Figura 118 – Resolução da Segunda Atividade Complementar sobre Subtração de Frações



Fonte: Castrucci e Júnior (2018)

Aula 5: Multiplicação de Frações

I. Multiplicando fração por um número inteiro

1. Atividade Inicial $\frac{2}{3} \times 9 = \frac{2\times9}{3} = \frac{18}{3} = 6$

2. Atividades Principais

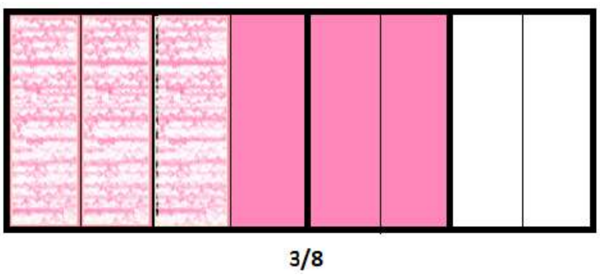
   a) $\frac{5}{6}\text{de}12 = \frac{5}{6} \times \frac{12}{1} = \frac{5\times12}{6} = \frac{60}{6} = 10$

   b) $\frac{4}{7}\text{de}35 = \frac{4}{7} \times \frac{35}{1} = \frac{4\times35}{7} = \frac{140}{7} = 20$

II. Multiplicando fração por fração

1. Atividade Inicial

Figura 119 – Atividade Inicial sobre Multiplicação de Fração por Fração



Fonte: Produção Própria

2. Atividades Principais

    a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$
    b) $\frac{3}{10} \times \frac{5}{12} = \frac{3 \times 5}{10 \times 12} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$
    c) $\frac{5}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{5 \times 3}{9 \times 10} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

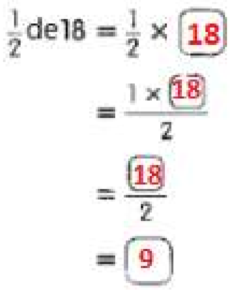
3. Atividades Avaliativas

    a) $\frac{2}{3} \times 24 = \frac{2 \times 24}{3 \times 1} = \frac{48}{3} = 16$
    b) $\frac{8}{15} \times \frac{5}{4} = \frac{8 \times 5}{15 \times 4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

4. Atividades Complementares

    a) Figura 120

Figura 120 – Item “a” da Segunda Atividade Complementar sobre Divisão de Fração por Fração



Fonte: Kheong, Soon e Ramakrishnan (2017b)

    b) $\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{1 \times 5}{3 \times 8} = \frac{5}{824}$

5. Número de carros: $\frac{3}{5} \times 80 = \frac{3 \times 80}{5 \times 1} = \frac{240}{5} = 48$

    Sabendo que o número de motos e ônibus é igual a 32 e que o número de motos é três vezes o número de ônibus, temos o número de motos dada pela expressão $(32 \div 4) \times 3 = 24$.

Aula 6: Divisão de Frações

I. Divisão de frações por um número inteiro

1. Atividade Inicial $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2. Atividades Principais

    a) $\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b) $\frac{3}{4} \div 6 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

II. Divisão de números inteiros por frações

1. Atividade Inicial $3 \div \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{1} = 12$

2. Atividades Principais

   Exemplo da questão 1: $3 \div \frac{1}{6} = 3 \times \frac{6}{1} = \frac{3 \times 6}{1} = \frac{18}{1} = 18$

   a) $3 \div \frac{1}{5} = 3 \times \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{1} = \frac{15}{1} = 15$

   b) $7 \div \frac{1}{4} = 7 \times \frac{4}{1} = \frac{7 \times 4}{1} = \frac{28}{1} = 28$

   c) $4 \div \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{1} = \frac{4 \times 2}{1} = \frac{8}{1} = 8$

   d) $5 \div \frac{1}{3} = 5 \times \frac{3}{1} = \frac{5 \times 3}{1} = \frac{15}{1} = 15$

3. a) $4 \div \frac{4}{7} = 4 \times \frac{7}{4} = \frac{4 \times 7}{4} = \frac{28}{4} = 7$

   b) $6 \div \frac{2}{7} = 6 \times \frac{7}{2} = \frac{6 \times 7}{2} = \frac{42}{2} = 21$

   c) $9 \div \frac{3}{8} = 9 \times \frac{8}{3} = \frac{9 \times 8}{3} = \frac{72}{3} = 24$

   d) $10 \div \frac{2}{9} = 10 \times \frac{9}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = \frac{90}{2} = 45$

III. Divisão de fração própria por outra fração própria

1. Atividade Inicial

   Sim; Pois $\frac{1}{2}$ dividido por 2 é igual a $\frac{1}{4}$.

2. Atividades Principais

   a) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$

   b) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

   c) $\frac{8}{9} \div \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{72}{18} = 4$

3. Atividades Avaliativas

   a) $\frac{3}{4} \div 12 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

   b) $12 \div \frac{9}{10} = 12 \times \frac{10}{9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$

   c) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \times \frac{12}{1} = \frac{36}{4} = 9$

4. Atividades Complementares

   a) i. $\frac{9}{10} \div 3 = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

ii. $10 \div \frac{4}{5} = 10 \times \frac{5}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

iii. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$

b) O trigo usado para fazer os muffins e o bolo é dado por: $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4+6}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.
O trigo restante corresponde a seguinte fração: $1 - \frac{5}{12} = \frac{12-5}{12} = \frac{7}{12}$.
Logo, a quantidade de cupcake é o resultado da divisão de $\frac{7}{12}$ por $\frac{1}{12}$.
Portanto, a solução final é dada por $\frac{7}{12} \div \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \times \frac{12}{1} = 7$ cupcakes.

RESOLUÇÕES DA QUESTÕES SELECIONADAS NAS PROVAS DA OBMEP

Questão 1: (B)	Questão 4: (D)	Questão 7: (D)	Questão 10: (D)
Questão 2: (D)	Questão 5: (C)	Questão 8: (D)	
Questão 3: (C)	Questão 6: (C)	Questão 9: (A)	