

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

HENRIQUE CARLOS LUNARDI

**PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO USANDO REALIMENTAÇÃO NÃO
LINEAR PARA SISTEMAS CHAVEADOS LIMITADOS EM SETOR COM ESTUDO
DE CASO NA GERAÇÃO FOTOVOLTAICA**

JOINVILLE

2021

HENRIQUE CARLOS LUNARDI

**PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO USANDO REALIMENTAÇÃO NÃO
LINEAR PARA SISTEMAS CHAVEADOS LIMITADOS EM SETOR COM ESTUDO
DE CASO NA GERAÇÃO FOTOVOLTAICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuó

JOINVILLE

2021

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lunardi, Henrique Carlos

Projeto de lei de chaveamento usando realimentação
não linear para sistemas chaveados limitados em setor
com estudo de caso na geração fotovoltaica / Henrique
Carlos Lunardi. -- 2021.

95 p.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo

Dissertação (Mestrado) -- Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,
Joinville, 2021.

1. Realimentação de Estado Não Linear. 2. Lei de
Chaveamento Robusta. 3. Não Linearidade Limitada
por Setor. 4. LMI. I. Dezuo, Tiago Jackson May. II.
Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica. III. Título.

HENRIQUE CARLOS LUNARDI

**PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO USANDO REALIMENTAÇÃO NÃO
LINEAR PARA SISTEMAS CHAVEADOS LIMITADOS EM SETOR COM ESTUDO
DE CASO NA GERAÇÃO FOTOVOLTAICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo
UDESC

Membros:

Profa. Dra. Mariana Santos Matos Cavalca
UDESC

Prof. Dr. Alexandro Garro Brito
UFSC

Joinville, 17 de fevereiro de 2021

Dedico este trabalho a minha família e a todos os meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de expressar minha gratidão a meus pais Eliane e Evandro, que não só neste momento, mas em toda a minha vida estiveram comigo, ao meu lado, fornecendo apoio, compreensão e estímulo em todos os momentos.

Aos meus irmãos Emanuel e Emilly, que sempre me incentivaram, e me animaram nos momentos mais difíceis, além disso, por compreenderem a minha ausência nos últimos anos.

À minha tia Rosângela, que sempre serviu de motivação e fonte de incentivo para que eu continuasse nessa caminhada mesmo nos momentos mais difíceis.

Também sou grato ao professor Tiago Dezuco pela orientação excepcional. Toda sua atenção, amizade e conhecimento compartilhado foi de fundamental importância para a realização deste trabalho.

Meu agradecimento também a todos os amigos, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte desta etapa e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Agradeço também ao povo brasileiro (CAPES) pela ajuda financeira.

Mais uma vez, obrigado a todos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

“I don’t know anything, but I do know that
everything is interesting if you go into it
deeply enough.” - Richard Feynman

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma técnica para projetar leis de chaveamento que garantem a convergência do estado de um sistema chaveado não linear e incerto para uma referência constante desejada. O método proposto é baseado em uma transformação de estado particular que depende das não linearidades do sistema original e considera uma lei de chaveamento usando a composição ‘max’ de funções auxiliares. Os resultados são apresentados em termos de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e garantem estabilidade assintótica global do sistema de malha fechada, mesmo que modos de deslizamento ocorram em qualquer superfície de chaveamento. A classe de sistemas considerada é abrangente o suficiente para incluir várias não linearidades limitadas por setores e variáveis no tempo, associadas a alterações em tempo real no ponto de operação. Assumindo algumas condições de regularidade para as funções não lineares, é possível executar uma transformação de estado levando as funções não lineares a serem estados da nova representação do sistema. Para o sistema transformado, os casos de informações completas e parciais do estado são considerados na construção das leis de chaveamento. O método é ilustrado por meio de um sistema fotovoltaico, no qual a característica não linear I - V dos módulos é tratada como uma função limitada por setores. Como a inclinação dos setores depende das condições ambientais, setores robustos contendo as não linearidades para qualquer condição de operação não uniformes e incertas são obtidos. São apresentados resultados de simulação para dois exemplos numéricos baseados em topologias usuais do sistema fotovoltaico e requisitos importantes, como o MPPT (Rastreamento de Máximo Ponto de Potência) e robustez em relação aos parâmetros incertos do arranjo fotovoltaico.

Palavras-chave: Realimentação de Estado Não Linear. Lei de Chaveamento Robusta. Não Linearidade Limitada por Setor. LMI.

ABSTRACT

This dissertation presents a technique for designing switching rules that guarantee convergence of the state of a nonlinear and uncertain switched systems to a desired constant reference. The proposed method is based on a particular state transformation that depends on the original system nonlinearities and considers a switching rule using the ‘max’ composition of auxiliary functions. The results are given in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs) and they guarantee global asymptotic stability of the closed-loop system even if sliding modes occur on any switching surface. The class of systems considered is general enough to include multiple time varying sector bounded nonlinearities associated with real-time changes in the operation point. Assuming some regularity conditions to the nonlinear functions it is possible to perform a state transformation leading the nonlinear functions to be states of the new system representation. For the transformed system, the cases of complete and partial state information is considered in constructing the switching rules. The potential of the method is illustrated through a photovoltaic system in which the nonlinear I - V characteristic of the modules is treated as sector-bounded functions. As the slope of the sectors depend on the environmental conditions, robust sectors containing the nonlinearities for any uncertain uniform operation condition are derived. Simulation results for two numerical examples based on usual PV system topologies are presented and important requirements, such as the Maximum Power Point Tracking (MPPT) and robustness with respect to the uncertain parameters of the PV array, are shown to be achieved.

Keywords: Nonlinear State Feedback. Robust Switching Rule. Sector-Bounded Nonlinearity. LMI.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.	24
Figura 2 – Exemplo de uma curva φ limitada pelos setores $[l, u]$	37
Figura 3 – Ilustração da definição das variáveis e coordenadas de translação para uma função não linear genérica.	45
Figura 4 – Modelo simplificado de uma célula fotovoltaica.	56
Figura 5 – Topologias típicas de arranjos fotovoltaicos.	58
Figura 6 – Modelagem de um painel fotovoltaico sob condições uniformes.	59
Figura 7 – Exemplos de topologias de circuitos e suas respectivas variáveis do sistema: (a) Arranjo conectado a um indutor L ; (b) Arranjo conectado a um capacitor C ; (c) Arranjo conectado com um circuito misto.	60
Figura 8 – Curva característica I - V sob condições uniformes.	61
Figura 9 – Curva característica P - V sob condições uniformes.	61
Figura 10 – Curva característica I - V com temperatura de 25 °C e variação na irradiação.	61
Figura 11 – Curva característica I - V com irradiação de 1000 W/m ² e variação na temperatura.	62
Figura 12 – Fluxograma MPPT P&O convencional.	63
Figura 13 – Curva característica I - V sob condições não uniformes.	64
Figura 14 – Curva característica P - V sob condições não uniformes.	65
Figura 15 – Fluxograma MPPT global.	65
Figura 16 – Curva I - V de um sistema fotovoltaico sob condições uniformes limitado por setores.	67
Figura 17 – Curva I - V de um sistema fotovoltaico sob condições não uniformes limitado por setores para o caso uniforme.	67
Figura 18 – Curva I - V de um sistema fotovoltaico sob condições não uniformes limitado por setores para o caso não uniforme.	68
Figura 19 – Conexão de um conversor CC-CC.	69
Figura 20 – Topologias de conversores CC-CC.	70
Figura 21 – Arranjo fotovoltaico simulado.	72
Figura 22 – Topologia do sistema fotovoltaico considerado no Exemplo 1.	73
Figura 23 – Exemplo da translação de uma curva característica I - V (em preto) e os setores limitantes (em vermelho).	74
Figura 24 – Figura (a) curva P - V característica sob STC e para $T = 20^\circ\text{C}$, $P_{sun} = 1200 \text{ W/m}^2$ (não STC). Figura (b) curva I - V característica sob STC e não STC. Figura (c) curva $\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}}$ e seus setores limitantes.	75

Figura 25 – Figura (a) $I_{pv}(t)$. Figura (b) $V_{pv}(t)$ (curva em preto) e a referência $\bar{V}_{pv}$ (linha verde). Figura (c) $P_{pv} = V_{pv}(t) \cdot I_{pv}(t)$ (curva em preto) e o MPP para cada condição de T , P_{sun} (linha vermelha).	76
Figura 26 – Topologia do sistema PV considerado no Exemplo 2.	77
Figura 27 – Exemplo da translação de uma curva característica $I-V$ (em preto) e os setores limitantes (em vermelho).	78
Figura 28 – Sombreamento parcial utilizado para simulação do Exemplo 2.	79
Figura 29 – Figura (a) $P-I$ para STC e para o sistema não uniforme da Figura 28. Figura (b) $V-I$ para STC e para o mesmo sistema não uniforme. Figura (c) $\frac{dV_{pv}}{dI_{pv}}$ e seus setores limitantes.	80
Figura 30 – Figura (a) $V_{pv}(t)$ Figura (b) $I_L(t)$ e Figura (c) $I_{pv}(t)$ (curvas em preto) e suas referências $\bar{I}_{pv}(t)$ (linhas verdes). Figura (d) $P_{pv}(t) = V_{pv}(t)I_{pv}(t)$ (curva em preto) e o MPP global para cada condição de T , P_{sun} (linha vermelha).	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do painel KC200GT.	71
Tabela 2 – Parâmetros do conversor Boost.	71
Tabela 3 – Modos de operação do sistema chaveado.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LMI	Desigualdade Matricial Linear - <i>Linear Matrix Inequality</i>
LMIs	Desigualdades Matriciais Lineares - <i>Linear Matrix Inequalities</i>
BMI	Desigualdade Matricial Bilinear - <i>Bilinear Matrix Inequality</i>
BMIs	Desigualdades Matriciais Bilineares - <i>Bilinear Matrix Inequalities</i>
PWM	Modulação de Largura de Pulso - <i>Pulse-Width Modulation</i>
CC	Corrente Contínua
SP	Série Paralelo - <i>Series Parallel</i>
BL	<i>Bridge Link</i>
HC	<i>Honey Comb</i>
TCT	<i>Total Cross Tied</i>
P&O	Perturba & Observa - <i>Perturb and Observe</i>
MPPT	Rastreamento do Ponto de Máxima Potência - <i>Maximum Power Point Tracking</i>
MPP	Ponto de Máxima Potência - <i>Maximum Power Point</i>
PID	Proporcional Integral Derivativo
PV	Fotovoltaico - <i>Photovoltaic</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço euclidiano de dimensão $n \times m$
$\mathcal{M}$	Conjunto de índices finitos $\{1, 2, \dots, m\}$
$\dot{f}$	Derivada de f em função do tempo
$\bar{f}$	Valor constante de equilíbrio de f em regime
$\aleph_a(a)$	Anulador linear de a
D_h	Derivada diferencial em direção a h
∇f	Gradiente de f
$\mathcal{S}$	Superfície de chaveamento
σ	Sinal de chaveamento
$\otimes$	Produto de Kronecker
$\max\{f_i\}$	Maior valor entre as f_i
$\min\{f_i\}$	Menor valor entre as f_i
$\arg \max\{f_i\}$	Índice i do argumento de maior valor entre as f_i
$\mathbf{0}_m$	Vetor de zeros de dimensão $1 \times m$
$\mathbf{1}_m$	Vetor de uns com dimensão $1 \times m$
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matriz de zeros com dimensão $m \times n$
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz cujos elementos, indicados entre parênteses, são diagonalmente concatenados
$\mathcal{C}^1$	Função de classe C1
M'	Transposto da matriz real (ou vetor) M
M^{-1}	Inversa da matriz real M
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana de vetores e norma induzida de matrizes
$\text{row}_j(M)$	Representa a j -ésima linha da matriz M
$M > 0$	Significa que a matriz M é simétrica e definida positiva
$M < 0$	Significa que a matriz M é simétrica e definida negativa

$\star$	São os blocos dos termos de uma matriz que podem ser deduzidos da simetria
$\mathcal{V}(\nu)$	Conjunto de todos os vértices do politopo (ou simplex) ν
$\lambda_{min}(M)$	Representa o menor autovalor da matriz M
$\exp(f)$	Função exponencial de (f)
V_{cel}	Tensão de saída nos terminais da célula fotovoltaica, em Volts
I_{cel}	Corrente de saída nos terminais da célula fotovoltaica, em Amperes
I_{ph}	Fotocorrente, em Amperes
I_r	Corrente de saturação reversa da célula, em Amperes
R_s	Resistência série da célula, em Ohms
R_p	Resistência paralelo da célula, em Ohms
ϵ	Carga do elétron (1.6×10^{-19} C)
η	Fator de qualidade da junção p-n
κ	Constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K)
T_r	Temperatura de referência (298K)
P_{sun_r}	Intensidade de irradiação de referência (1000 W/m ²)
I_{sc}	Corrente de curto circuito da célula, em Amperes
V_{oc}	Tensão de circuito aberto da célula, em Volts
γ	Coefficiente de temperatura de I_{sc}
I_{rr}	Corrente de saturação reversa de referência, em Amperes
E_g	Energia de banda do silício (1.1 eV)
T	Temperatura da célula, em Kelvin
P_{sun}	Intensidade de irradiação solar recebida, em W/m ¹
N_s	Número de células em série no módulo
M_s	Número de módulos em série
M_p	Número de <i>strings</i> em paralelo
V_{pv}	Tensão do arranjo, em Volts
I_{pv}	Corrente do arranjo, em Amperes

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS	19
2	SISTEMAS CHAVEADOS	21
2.1	INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS CHAVEADOS	21
2.1.1	Classificação quanto ao tipo de chaveamento	22
2.1.2	Modo deslizante	23
2.2	ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS	25
2.2.1	Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação arbitrária	25
2.2.2	Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação restrita	26
2.2.3	Estabilização de sistemas chaveados	27
2.3	SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO AFIM	28
2.3.1	Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo afim	30
2.3.2	Anulador linear	31
2.3.3	Projeto utilizando medição parcial de estados	33
2.4	SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO NÃO LINEAR E LIMITADO EM SETORES	34
2.4.1	Função não linear limitada em setores	36
2.4.2	Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo não linear e limitado em setores	37
2.4.3	LMIs independentes do ponto de equilíbrio	39
3	TRANSFORMAÇÃO NÃO LINEAR	41
3.1	LEI DE CHAVEAMENTO	46
3.1.1	Não linearidades limitadas em setores	46
3.2	PROJETO DA LEI DE CHAVEAMENTO	47
3.2.1	Caso 1: Função não linear limitada em setores com equilíbrio conhecido	47
3.2.2	Caso 2: Sistema com funções não lineares incertas	51
3.2.3	Caso 3: Sistema com alteração de referência online	53
4	SISTEMAS FOTOVOLTAICOS	56
4.1	MODELAGEM DE UMA CÉLULA FOTOVOLTAICA	56
4.2	CURVAS CARACTERÍSTICAS	60
4.3	SISTEMAS FOTOVOLTAICOS SOB CONDIÇÕES NÃO UNIFORMES	64
4.4	SISTEMAS FOTOVOLTAICOS LIMITADOS POR SETORES	65
4.5	CONVERSORES CC-CC	69
5	APLICAÇÃO EM SISTEMAS FOTOVOLTAICOS	71
5.1	CARACTERÍSTICAS BASE PARA AS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	71

5.2	APLICAÇÃO DE UM ARRANJO FOTOVOLTAICO MODELADO COMO UMA FONTE DE TENSÃO	72
5.3	APLICAÇÃO DE UM ARRANJO FOTOVOLTAICO MODELADO COMO UMA FONTE DE CORRENTE	77
6	CONCLUSÃO	83
6.1	PUBLICAÇÕES RELACIONADAS	84
	REFERÊNCIAS	86
	APÊNDICE A – CONCEITOS PRELIMINARES	91
A.1	PROCEDIMENTO S	91
A.2	PRODUTO DE KRONECKER	91
A.3	LEMA DE FINSLER	92
A.4	ANULADOR LINEAR	92
A.5	FUNÇÃO CLASSE $\mathcal{K}$	93
A.6	FUNÇÃO LOCALMENTE LIPSCHITZ	93
	APÊNDICE B – DEDUÇÃO DOS LIMITES	94

1 INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados podem ser definidos como sistemas dinâmicos compostos por um conjunto de subsistemas com dinâmica de tempo contínua e uma lei que organiza a alternância entre eles (LIBERZON; MORSE, 1999). A gama de aplicações de sistemas chaveados é vasta. Dispositivos eletrônicos de potência podem ser encontrados desde em simples eletrodomésticos até em *drives* industriais de velocidade variável operando com dezenas de *megawatts*. Embora existam sistemas chaveados lineares e afins em contextos simples, os sistemas chaveados não lineares são comuns em aplicações mais complexas. Por exemplo, sistemas de geração de energia renovável, como os sistemas fotovoltaicos, podem ser tidos como sistemas chaveados não lineares devido à característica não linear intrínseca do sistema de geração e aos dispositivos eletrônicos de potência usados para controlar seu fluxo de energia. De acordo com Blaabjerg et al. (2011), o progresso nesse campo depende da melhoria das estruturas dos conversores de energia e também das técnicas de controle aplicadas a eles, aumentando sua eficiência e reduzindo os custos do sistema.

A elaboração de projetos de leis de chaveamento para sistemas chaveados foi amplamente estudada e diversos resultados estão agora disponíveis na literatura (DECARLO et al., 2000; LIN; ANTSAKLIS, 2005). Algumas técnicas são baseadas nas funções Lyapunov e nas técnicas de Desigualdade Linear Matricial (LMI¹), como apresentado em Bolzern e Spinelli (2004), Trofino et al. (2011) e Scharlau et al. (2014). Reescrever um sistema utilizando LMIs² se torna interessante por facilitar a incorporação de novas restrições ao problema, desde que essas restrições também possam ser expressas como LMIs, e pela disponibilidade de pacotes computacionais poderosos para resolver problemas de LMIs.

Muitas técnicas utilizadas na elaboração de projetos para a classe de sistemas chaveados afins estão disponíveis atualmente, incluindo o caso de condição de equilíbrio incerto. Condições de LMI utilizadas para garantir um desempenho robusto da implementação de PWM³ dos Reguladores Quadráticos Lineares (LQR⁴) podem ser encontradas em Olalla et al. (2009). No entanto, esses resultados são baseados na aproximação do sistema chaveado por seu modelo médio, o que pode apresentar um impacto na robustez do controle proposto e também incluir a necessidade de restringir a amplitude da ação de controle (*Duty Cycle*). Uma alternativa interessante seria projetar leis de chaveamento com base no modelo instantâneo, permitindo também requisitos de desempenho robustos de controladores $\mathcal{H}_\infty$ (TROFINO et al., 2012) e controladores de custo garantido (SENGER; TROFINO, 2016), por exemplo.

Enfatiza-se que estender as técnicas apresentadas acima para sistemas chaveados não lineares é uma tarefa difícil, e as condições de projeto para sistemas não lineares

¹ Do inglês: *Linear Matrix Inequality*.

² Do inglês: *Linear Matrix Inequalities*.

³ Do inglês: *Pulse Width Modulation*.

⁴ Do inglês: *Linear Quadratic Regulators*.

globalmente geralmente resultam em LMIs muito conservadoras. Uma possível solução para reduzir o conservadorismo seria considerar uma classe específica de funções não lineares e então derivar condições específicas para essa classe, levando em consideração a sua estrutura em particular. Para a classe de funções cujos estados são limitados por setores, pode-se mencionar Hajiahmadi, Schutter e Hellendoorn (2014), Dezuo, Trofino e Scharlau (2014) e Dezuo, Lunardi e Trofino (2017). No entanto, a classe de sistemas considerada nos documentos anteriores não é genérica, múltiplas não linearidades não são cobertas e a lei de chaveamento é baseada na disponibilidade de informações completas sobre o estado. Além disso, Hajiahmadi, Schutter e Hellendoorn (2014) consideram setores genéricos em todo o quadrante, enquanto Dezuo, Trofino e Scharlau (2014) e Dezuo, Lunardi e Trofino (2017) aproveitam o conhecimento dos sistemas para propor setores menos conservadores, porém ainda robustos.

Na literatura atual, as transformações de estado são usadas por diversos motivos. Por exemplo, para sistemas holonômicos, existem transformações que convertem sistemas não lineares em lineares nas novas coordenadas (LANTOS; MÁRTON, 2011). Os autores Gao et al. (2015) fazem uso de transformações para projetar controladores para uma classe de sistemas não lineares na presença de saturação do atuador sem usar métodos conhecidos de *backstepping*. Em Zhao, Chen e Zhao (2018), uma transformação de estado é proposta para converter o estado limitado em um estado globalmente ilimitado para controlar veículos autônomos.

Considerando que em algumas aplicações reais o vetor de estados é o resultado de algumas funções não lineares, propõe-se neste trabalho uma transformação que converte as não linearidades em estados em uma nova representação. Graças a essa nova representação do sistema, não apenas a lei de chaveamento pode ser projetada mais facilmente, mas também pode tornar mais fácil o tratamento das funções não lineares, à medida que as funções limitadas por setor se tornam mais tratáveis nessas novas coordenadas.

Este trabalho apresenta extensões dos resultados obtidos em Dezuo, Trofino e Scharlau (2014) e Dezuo, Lunardi e Trofino (2017), considerando leis de chaveamento baseadas em realimentação de saída não linear. Procura-se realizar uma transformação de estado em que as funções não lineares apareçam como estados na nova representação do sistema. Isso é especialmente interessante nos casos em que é mais conveniente medir a saída das não linearidades do que medir alguns estados do sistema original. Em um arranjo fotovoltaico, por exemplo, a saída da não linearidade que expressa a característica $I-V$ do arranjo é a tensão do arranjo, enquanto os estados do sistema são as variáveis internas do conversor. O conhecimento da tensão e da corrente do arranjo é essencial para uma técnica de Rastreamento de Máximo Ponto de Potência (MPPT⁵), mas não é trivial usar os estados do conversor para essa finalidade. Entre outros sistemas chaveados que podem se beneficiar do método proposto estão o controle de máquinas de relutância

⁵ Do inglês: *Maximum Power Point Tracking*.

comutada, onde as correntes são funções não lineares do fluxo (que é o estado do sistema, geralmente é estimado, devido à dificuldade de medição), e sistemas de gerenciamento de bateria, onde existe uma relação não linear entre o estado de carga e a tensão da bateria. Além disso, neste trabalho, uma classe mais abrangente de sistemas chaveados não lineares é considerada e múltiplas não linearidades são permitidas. Também é mostrado que, dependendo da estrutura do sistema, não é necessário conhecer inicialmente o vetor completo dos estados no ponto de equilíbrio desejado ao projetar a lei de chaveamento. Esse é um recurso interessante do método proposto que permite alterações em tempo real no ponto de operação necessário para a maximização de energia das técnicas usuais de MPPT.

Motivado pela complexidade da função não linear presente nos sistemas de geração fotovoltaica, utiliza-se esta aplicação para ilustrar o método de projeto. Um dos maiores desafios para o controle de sistemas fotovoltaicos é o fato de o modelo do sistema também ser altamente não linear em relação a parâmetros incertos. A maioria das soluções presentes na literatura atual para esse tipo de sistema é baseada em estratégias de controle Proporcional Integral Derivativo (PID), *fuzzy*, neural e controle adaptativo (JARAMILLO-LOPEZ; KENNE; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2017), usando a aproximação e linearização médias do modelo em torno de um ponto de operação. Esse é um problema em potencial, pois para executar o MPPT, uma ampla variedade de funções não lineares deve ser abrangida. Por esse motivo, a solução proposta nesta dissertação é de grande interesse, pois o método considera o modelo instantâneo e é fornecida uma fórmula para determinar limites setoriais robustos para o sistema fotovoltaico não linear e incerto. Simulações baseadas em configurações usuais de arranjos fotovoltaicos ilustram a aplicação do método e apresentam o alcance de requisitos importantes, como MPPT *online* e o controle do sistema sem medir seus estados originais.

1.1 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

- Capítulo 2: Este capítulo apresenta uma introdução a sistemas chaveados e também uma revisão de algumas técnicas de controle já encontradas na literatura, com o objetivo de contextualizar o leitor no que já foi desenvolvido até o momento por outros autores, este capítulo também serve como base para o que será apresentado no Capítulo 3.
- Capítulo 3: Este capítulo apresenta as principais contribuições desta dissertação, onde é desenvolvida uma lei de chaveamento para sistemas do tipo não linear limitado em setores. Propõem-se nesta técnica aplicar uma transformação de estado em que as funções não lineares apareçam como estados na nova representação do sistema. Essa nova técnica apresentada pode ser aplicada em diversos sistemas, mas

é especialmente interessante nos casos em que é mais conveniente medir a saída das não linearidades do que alguns estados do sistema original.

- Capítulo 4: Este capítulo introduz os sistemas fotovoltaicos e justifica sua possibilidade de aplicação na técnica proposta. Apresenta uma modelagem para os sistemas fotovoltaicos, além das curvas características $I-V$ e $P-V$ de sistemas fotovoltaicos sob condições uniformes e não uniformes, além de seus setores limitantes. Também, são apresentadas as funções dos conversores CC-CC nesses sistemas.
- Capítulo 5: Neste capítulo são apresentados dois exemplos distintos para a técnica desenvolvida no Capítulo 3, utilizando sistemas fotovoltaicos como aplicação.
- Capítulo 6: Apresenta as conclusões e comentários finais do trabalho.

2 SISTEMAS CHAVEADOS

O objetivo deste capítulo é contextualizar o leitor em relação às propriedades, características e ferramentas utilizadas na análise de sistemas chaveados, além disso, serão apresentadas algumas técnicas de controle para sistemas chaveados não lineares, estas técnicas, já consolidadas na literatura, servirão de base para o que será apresentado no Capítulo 3.

Inicialmente serão apresentadas as características e propriedades que distinguem a classe de sistemas chaveados, os diferentes tipos de comutação, o conceito de estabilidade aplicado à sistemas chaveados, além de uma revisão com as principais ferramentas utilizadas para análise. Por fim, será apresentado o projeto de um controlador para sistemas chaveados não lineares e limitados em setores.

2.1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS CHAVEADOS

Sistemas dinâmicos que são descritos por uma interação entre dinâmica contínua e discreta são chamados geralmente de sistemas híbridos (LIBERZON, 2003). Podem ser classificados como tal o controle de tráfego aéreo, os sistemas de transportes, processos químicos, sistemas de potência (ANTSAKLIS, 2000), e praticamente todos os processos que utilizam chaves eletrônicas ou válvulas para seu funcionamento.

Existem duas abordagens distintas quando se trabalha com sistemas híbridos: uma com foco no comportamento discreto, tratando a dinâmica em tempo contínuo de forma simplificada, e outra com ênfase na dinâmica em tempo contínuo (LIBERZON, 2005). A abordagem utilizada nessa dissertação tem como base as dinâmicas de tempo contínuo com representação dos eventos discretos de forma isolada. Com isso, é possível distinguir uma classe particular dos sistemas híbridos, denominada sistemas chaveados.

Sistemas chaveados são uma classe de sistemas híbridos compostos de vários subsistemas (modos de operação) e uma lei de chaveamento indicando o subsistema ativo em cada instante de tempo (LIBERZON; MORSE, 1999). É possível obter um sistema chaveado a partir de um sistema híbrido simplificando os detalhes do comportamento dos eventos discretos e então considerando todos os possíveis sinais de chaveamento para uma determinada classe. Por isso, os sistemas chaveados podem ser classificados como um caso particular de nível mais elevado dos sistemas híbridos. Normalmente, esta simplificação acaba gerando um sistema com descrição mais simples, porém com mais soluções que o sistema original (LIBERZON, 2005). Mais detalhes sobre a relação entre sistemas híbridos e sistemas chaveados podem ser vistos em Hespanha (2004).

Um sistema chaveado pode ser modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) , \quad i \in \mathcal{M} , \quad (2.1)$$

onde $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma família de funções suficientemente regulares (pelo menos

localmente Lipschitz, ver Apêndice A.6), onde:

$$\mathcal{M} := \{1, 2, \dots, m\} , \quad (2.2)$$

é um conjunto finito de índices, sendo m o número de subsistemas (ou modos de operação) do sistema chaveado. O sistema chaveado em malha fechada opera de acordo com um sinal de chaveamento $\sigma : [0; \infty) \rightarrow \mathcal{M}$, que é uma função constante por partes, apresentando uma quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo e sendo constante entre as descontinuidades consecutivas (HESPANHA, 2004).

Um sistema chaveado pode ser classificado de acordo com as características dos subsistemas que o compõem. Quando um sistema chaveado apresenta todos os subsistemas lineares, o mesmo é denominado sistema chaveado linear e sua dinâmica de malha fechada é dada por:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) , \quad \sigma \in \mathcal{M} . \quad (2.3)$$

2.1.1 Classificação quanto ao tipo de chaveamento

Pode-se classificar diversas categorias de chaveamento para sistemas chaveados (LIBERZON, 2003). A seguir serão apresentadas as classificações e suas principais características:

- **Chaveamento dependente dos estados:** nesses sistemas, o sinal de chaveamento varia de acordo com o valor dos estados, sendo o espaço de estados particionado em regiões. Cada região correspondente à ativação de um dos subsistemas que compõem o sistema chaveado. As fronteiras dessas regiões são denominadas superfícies de chaveamento;
- **Chaveamento dependente do tempo:** nesses sistemas, ocorre uma variação no sinal de chaveamento após um intervalo de tempo determinado, sendo que para este tipo de chaveamento, o sinal de chaveamento é descrito como $\sigma(t)$, enfatizando a dependência temporal direta;
- **Chaveamento autônomo:** nesses sistemas, não existe controle direto sobre o sinal de chaveamento. Inclui-se, neste grupo, os sistemas com comutação dependentes dos estados, com a localização das superfícies de chaveamento pré-determinadas. Também incluem-se os sistemas com comutação dependentes do tempo, onde a lei que define o sinal de chaveamento é desconhecida ou foi desprezada na etapa de modelagem do sistema;
- **Chaveamento controlado:** nesses sistemas, o sinal de chaveamento é imposto para atingir um comportamento desejado. O mecanismo de chaveamento é controlado diretamente, podendo ser dependente dos estados ou dependente do tempo.

É importante destacar que combinações entre os diferentes tipos de chaveamento podem existir em um sistema chaveado. Além disso, torna-se difícil a determinação de uma distinção precisa entre chaveamento autônomo e controlado, assim como a determinação da diferença entre chaveamento dependente de estados ou dependente do tempo (SCHARLAU, 2013).

2.1.2 Modo deslizante

Uma das propriedades mais interessantes quando se fala em sistemas chaveados é o comportamento do sistema nos chamados modos deslizantes (*sliding modes*), onde os sistemas podem apresentar dinâmicas que não são encontradas em apenas um modo de operação isoladamente (LIBERZON, 2003).

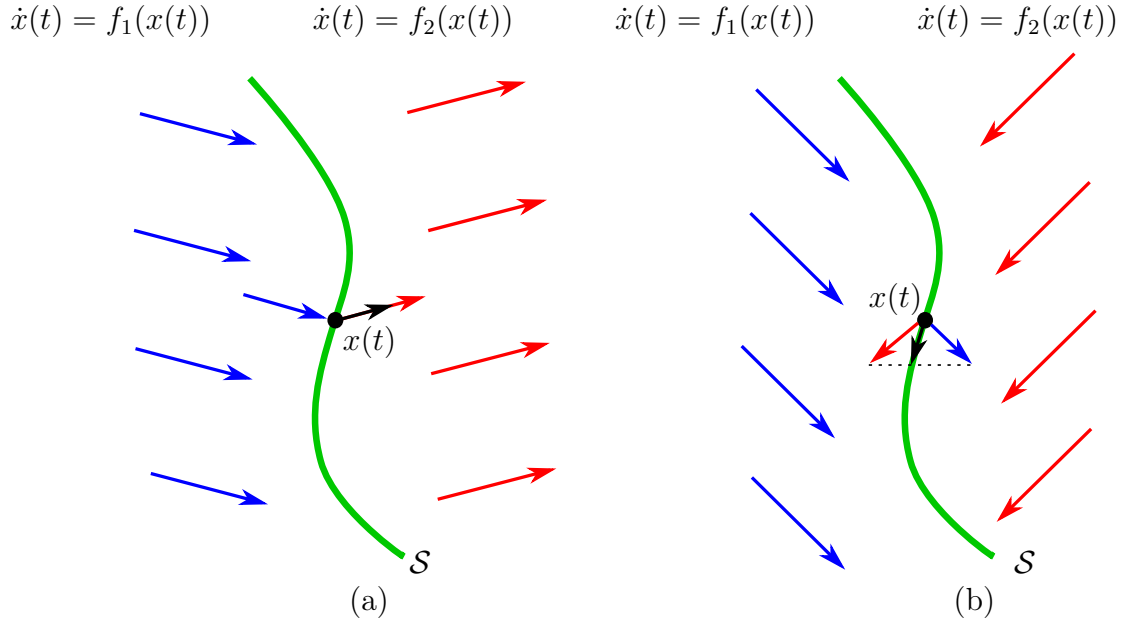
Para a definição de modos deslizantes, será considerado como exemplo um sistema chaveado com comutação dependente dos estados definida pela superfície de chaveamento representada por $\mathcal{S}$, com dois modos de operação, ou seja, dois subsistemas $\dot{x} = f_i(x)$, $i = \{1, 2\}$, cada um ativo em um lado de $\mathcal{S}$. Nesse caso, supõe-se que não ocorram saltos nos valores dos estados no momento do chaveamento. Caso um campo vetorial $f_1(x)$ estiver apontando para a superfície $\mathcal{S}$ e o outro $f_2(x)$ não, a trajetória contínua atinge essa superfície e cruza diretamente para o outro lado. Essa situação é demonstrada na Figura 1(a). Por outro lado, é possível que os campos vetoriais $f_1(x)$ e $f_2(x)$ apontem ambos em direção à superfície, como pode ser observado na Figura 1(b). Neste caso, quando a trajetória atinge a superfície $\mathcal{S}$, ela é impossibilitada de sair dessa região e se desloca sobre a superfície. Desse modo, o campo vetorial que define a dinâmica neste caso é tangente à superfície.

O comportamento do sistema em modo deslizante foi profundamente abordado por Filippov (1988). De acordo com os conceitos desenvolvidos, o campo vetorial que define a dinâmica em modo deslizante é tangente à superfície de chaveamento, sendo que existem várias formas de se definir este campo vetorial. A forma mais simples e mais utilizada na literatura baseia-se na definição do campo vetorial tangente através da combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas em cada ponto da trajetória sobre a superfície. Por exemplo, na Figura 1(b), o campo vetorial tangente é dado por:

$$f_\theta := \theta(x(t))f_1(x(t)) + (1 - \theta(x(t)))f_2(x(t)), \quad \theta(x(t)) \in [0, 1], \quad (2.4)$$

onde $\theta(x(t))$ é o elemento de combinação convexa que pode ser obtido através de regras de projeção ortogonal (FILIPPOV, 1988). Essa forma de definir o campo vetorial tangente também permite caracterizar a dinâmica do sistema nos modos isolados, isto é, para $\dot{x}(t) = f_1(x(t))$, $\theta(x(t)) = 1$ e para $\dot{x}(t) = f_2(x(t))$, $\theta(x(t)) = 0$. Desse modo, a dinâmica de um sistema chaveado com ou sem modos deslizantes pode ser vista como uma inclusão

Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.



Fonte: Próprio autor.

diferencial:

$$\dot{x}(t) = f_\theta(x(t)) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t)) f_i(x(t)), \quad \theta \in \Theta, \quad (2.5)$$

onde Θ é o simplex que representa as possíveis combinações convexas de θ , definido como:

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Uma dedução formal e genérica dos modos deslizantes é apresentada em Filippov (1988), onde também encontram-se algumas formas alternativas para a determinação de campos vetoriais tangentes.

O modo deslizante pode ser interpretado como uma comutação infinitamente rápida. Este fenômeno não é desejado na prática, pois corresponde a chaveamentos de alta frequência (*chattering*) que causam desgaste excessivo nos dispositivos (LIBERZON, 2003). Por esse motivo, a limitação da frequência de chaveamento é um ponto importante no que diz respeito ao controle de sistemas chaveados. Uma forma de se obter a limitação de frequência é através da introdução de um requisito adicional de tempo mínimo de residência em cada modo de operação do sistema (SUN, 2006). A introdução desse requisito não é uma tarefa simples, e o desenvolvimento de uma metodologia adequada para limitação da frequência ainda representa um problema em aberto no caso geral.

Uma outra forma de evitar a ocorrência de *chattering* consiste em introduzir uma histerese, cuja ideia básica consiste em definir duas regiões sobrepostas através do deslocamento da superfície de chaveamento $\mathcal{S}$ (SCHARLAU, 2013). Mais detalhes sobre

a introdução de histerese em sistemas chaveados podem ser vistos em Bolzern e Spinelli (2004) e DeCarlo et al. (2000).

2.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS

A análise da estabilidade de sistemas chaveados, em particular dos sistemas lineares, é um assunto cujo interesse tem aumentado nos últimos anos, sendo que algumas situações merecem destaque. Uma delas é que mesmo quando todos os subsistemas que compõem um sistema chaveado são exponencialmente estáveis, o sistema pode apresentar instabilidade para determinados sinais de comutação. Outro aspecto relevante é a possibilidade de realizar o chaveamento entre subsistemas instáveis e obter um sistema chaveado exponencialmente estável. Esses dois casos sugerem que a estabilidade de um sistema chaveado depende não somente da dinâmica de cada subsistema, mas também das propriedades do sinal de chaveamento (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

O estudo da estabilidade de sistemas chaveados pode ser dividido em dois tipos de problemas: quando o sistema encontra-se sob comutação arbitrária ou quando encontra-se sob comutação controlada (SCHARLAU, 2013). Maiores detalhes sobre cada um desses tipos serão vistos na sequência.

2.2.1 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação arbitrária

O problema da análise da estabilidade sob comutação arbitrária consiste em determinar em que condições um sistema chaveado se apresenta estável levando em consideração que a princípio não existem informações sobre o sinal de chaveamento e que o mesmo não possui restrições. Nesse caso, é necessário que todos os subsistemas que compõem o sistema sejam assintoticamente estáveis. No entanto, essa hipótese não é suficiente para garantir a estabilidade, pois mesmo quando isso acontece, ainda assim é possível obter uma trajetória dos estados divergente para uma condição inicial qualquer. Por outro lado, é possível garantir a estabilidade global uniforme¹ exponencial de um sistema chaveado linear sob comutação arbitrária se existir uma Função Quadrática Comum de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function*) para todos os subsistemas (LIBERZON; MORSE, 1999).

Muitos esforços têm sido direcionados para o estudo de funções quadráticas comuns de Lyapunov, motivados principalmente pelo fato de que as condições de existência dessa função não são fáceis de serem atingidas. Como exemplos de trabalhos já publicados sobre esse tema, é possível citar Liberzon (2003), King e Shorten (2004). Liberzon e Morse (1999) propõem um método para sistemas chaveados lineares e invariantes no tempo baseado na solução da álgebra de Lie, gerada pelas matrizes da dinâmica dos estados dos subsistemas,

¹ Nesse caso, a palavra “uniforme” é utilizada para descrever a uniformidade com relação aos sinais de comutação.

sendo que esse método leva em consideração que as condições para solução dessa álgebra implicam na existência de uma função quadrática comum de Lyapunov.

Para sistemas de ordem elevada com mais de dois subsistemas, as condições necessárias e suficientes para a existência de uma função quadrática comum de Lyapunov de um sistema chaveado linear e invariante no tempo ainda apresentam-se como um problema em aberto (LIN; ANTSAKLIS, 2005). É importante salientar que a existência de uma função quadrática comum de Lyapunov é uma condição somente suficiente, porém não necessária para estabilidade de um sistema chaveado sob comutação arbitrária. Desse modo, existem sistemas chaveados que não possuem uma função quadrática comum de Lyapunov, mas que apresentam estabilidade sob comutação arbitrária (LIBERZON, 2003; SCHARLAU, 2013).

2.2.2 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação restrita

Nesta subseção será abordada a análise de estabilidade de sistemas chaveados considerando que o sinal de chaveamento possui restrições, que podem existir no domínio do tempo (por exemplo, limites para o tempo de permanência ou tempo médio de permanência) ou no espaço de estados, sendo possível determinar quais dessas restrições devem ser incluídas no sinal de chaveamento para garantir a estabilidade (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

Uma das ferramentas utilizadas na análise de estabilidade de sistemas chaveados com comutação restrita são as Múltiplas Funções de Lyapunov (*Multiple Lyapunov Functions*). A ideia básica consiste em utilizar uma função de Lyapunov associada a cada modo ou região do espaço de estados do sistema chaveado. Essas funções concatenadas formam uma função de Lyapunov com características não convencionais: podem apresentar descontinuidades, não decrescem monotonicamente ao longo das trajetórias dos estados e são diferenciáveis apenas por trechos.

A utilização dessa abordagem pode ser explicada através da seguinte situação: supondo que todos os modos sejam estáveis, cada modo pode ser associado a uma função de Lyapunov. Quando o modo estiver ativo, o valor da função desse modo deve decrescer. Se for incluída uma restrição no sinal de chaveamento de forma que cada vez que o sistema realiza a ativação de um modo o valor da função de Lyapunov correspondente seja menor que o valor na ativação anterior, então o sistema chaveado será assintoticamente estável (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

O uso de múltiplas funções de Lyapunov tem sido tema de várias pesquisas (BRANNICKY, 1998; DECARLO et al., 2000; LIBERZON; MORSE, 1999). A busca por funções de Lyapunov também pode ser formulada como um problema de desigualdades matriciais lineares (LMIs), conforme apresentado em trabalhos anteriores (COUTINHO et al., 2003; SCHARLAU, 2013; DEZUO, 2014).

2.2.3 Estabilização de sistemas chaveados

O objetivo desta subseção é estabelecer leis de chaveamento para uma família de subsistemas que compõem o sistema chaveado de modo a torná-lo estável. Esse problema pode ser resolvido de forma trivial quando pelo menos um dos subsistemas apresenta estabilidade, pois nesse caso basta manter ativo o modo cujo subsistema é estável (LIBERZON, 2003). Por outro lado, quando nenhum dos subsistemas apresenta estabilidade, é necessário projetar uma lei de chaveamento que consiga levar o sistema chaveado à estabilidade.

Uma das abordagens para o problema de estabilização de sistemas chaveados é focada na estabilização quadrática. Foi demonstrado em Wicks, Peleties e DeCarlo (1994) que a existência de uma combinação convexa estável das matrizes de dinâmica de um sistema chaveado linear implica na existência de uma lei de chaveamento dependente dos estados que estabiliza o sistema chaveado juntamente com uma função quadrática de Lyapunov. Feron (1996) provou que a condição de existência de uma combinação convexa estável é suficiente e necessária quando o número de subsistemas é igual a dois. Os resultados destas duas referências foram estendidos para o caso de sistemas chaveados afins em Bolzern e Spinelli (2004).

Infelizmente, a busca de uma combinação convexa e estável das matrizes de dinâmica dos subsistemas apresenta-se como um problema NP-Difícil (*NP-Hard*) (SKAFIDAS et al., 1999). O projeto de uma lei de chaveamento para estabilização quadrática utilizando LMIs e considerando um sistema chaveado linear com incertezas politópicas é apresentado em Zhai, Lin e Antsaklis (2003). Deve-se salientar, contudo, que todos estes métodos garantem a estabilidade pela utilização de uma função quadrática comum de Lyapunov. Isso representa uma abordagem conservadora pois, conforme já visto anteriormente, existem sistemas chaveados que podem apresentar estabilidade sem possuírem uma função quadrática comum de Lyapunov.

Uma alternativa para este problema consiste em utilizar múltiplas funções de Lyapunov no projeto de uma lei de chaveamento para estabilização. Esta abordagem foi proposta pela primeira vez em Wicks e DeCarlo (1997), empregando funções de Lyapunov quadráticas por partes para sistemas chaveados lineares e invariantes no tempo com dois modos. Em Mignone, Ferrari-Trecate e Morari (2000) é apresentado um método baseado em LMIs para projeto de realimentação de estados de sistemas discretos afins por partes. Um método de projeto para sistemas chaveados com campos vetoriais lineares empregando desigualdades matriciais bilineares (BMIs²) é proposto em Pettersson (2003). É importante salientar que grande parte das condições de estabilização utilizadas nos resultados já publicados e que podem ser verificadas através da solução de conjuntos de LMIs ou BMIs são somente suficientes, exceto para casos particulares de estabilização quadrática (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

² Do inglês: *Bilinear Matrix Inequalities*.

Com relação às leis de chaveamento, é possível identificar nos trabalhos já publicados diferentes tipos de estruturas utilizadas para estabilização. Por exemplo, alguns resultados empregam leis baseadas na função ‘ $\min$ ’ ou na função ‘ $\max$ ’ de um conjunto de funções auxiliares dependentes dos estados. Como exemplos, é possível citar Geromel e Colaneri (2006), Deaecto et al. (2010) para a função ‘ $\min$ ’ e Ji, Xiaoxia e Xie (2006), Trofino et al. (2012) para função ‘ $\max$ ’. Por um lado, as condições para garantia de estabilidade em modos deslizantes são mais simples quando a função ‘ $\min$ ’ é utilizada. Veja Liberzon (2003) para mais detalhes sobre esse aspecto. Por outro lado, o uso da função ‘ $\max$ ’ não restringe as funções auxiliares a serem positivas, ao contrário do que acontece quando se emprega a função ‘ $\min$ ’ associada aos argumentos de estabilidade de Lyapunov. Outras abordagens definem as leis de chaveamento através da derivada da função de Lyapunov (BOLZERN; SPINELLI, 2004; HU; MA; LIN, 2008).

Uma outra questão relevante é saber sob quais condições é possível estabilizar um sistema chaveado pelo projeto adequado de leis de chaveamento. Algumas condições suficientes foram propostas em Sun (2004). Lin e Antsaklis (2005) estabelecem condições suficientes e necessárias para um classe de sistemas chaveados lineares com base em funções de Lyapunov poliedrais. No entanto, este resultado depende de uma transformação de coordenadas e ainda não se conhece um método eficiente para a determinação dessa transformação.

2.3 SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO AFIM

A maioria dos sistemas chaveados presente em aplicações práticas não pode ser modelada na forma de sistemas lineares, por isso se faz necessária a expansão da seção anterior para classes mais abrangentes.

Nesta seção será abordada uma expansão para quando o sistema chaveado for composto por subsistemas do tipo afim:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad i \in \mathcal{M}, \quad (2.7)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados do sistema, supostamente disponível para medição, e $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{M}$, são as matrizes de cada subsistema.

Supõe-se que a comutação entre os m subsistemas da Equação (2.7) ocorra de acordo com uma lei de chaveamento representada pelo sinal de chaveamento:

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.8)$$

que pode ser visto como um mapeamento do vetor de estados, tomado a cada instante de tempo t , para o conjunto de índices $\sigma(x(t)) \in \mathcal{M}$ do modo de operação corrente (ativo). Se, em um dado instante de tempo, $\sigma(x(t))$ possuir somente um elemento, esse elemento define o subsistema ativo. Caso contrário $\sigma(x(t))$ possui mais de um elemento e pode estar

ocorrendo o fenômeno de modos deslizantes nesse instante. Utilizando os resultados de Filippov (1988) para definir a dinâmica em modos deslizantes, $\sigma(x(t))$ se torna um sinal constante por partes e descontínuo apenas nos instantes onde a trajetória do sistema entra ou sai de uma superfície de chaveamento.

O objetivo é projetar uma lei de chaveamento $\sigma(x(t))$ que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante $\bar{x}$, ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} . \quad (2.9)$$

Dado $\bar{x}$, é possível definir o erro do sistema como sendo:

$$e(t) = x(t) - \bar{x} \quad (2.10)$$

e com isso reescrever a Equação (2.7) em termos de $e(t)$:

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i , \quad k_i := b_i + A_i \bar{x} . \quad (2.11)$$

Como $\bar{x}$ é constante, é possível reescrever a lei de chaveamento em função de $e(t)$, ou seja $\sigma(e(t))$. Caso ocorra o fenômeno de modos deslizantes, assume-se então que a dinâmica do erro pode ser representada como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema da Equação (2.11), assim:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) (A_i e(t) + k_i) , \quad \theta(e(t)) \in \Theta \quad (2.12)$$

e $\theta(e(t))$ é um vetor com elementos $\theta_i(e(t))$ definidos de acordo com Filippov (1988) e Θ é o simplex definido na Equação (2.6). Observe que $\theta_i(e(t)) = 0$ caso $i \notin \sigma(e(t))$. Os modos deslizantes podem ocorrer em um ponto $e(t)$ caso exista uma combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas tal que seja um vetor que pertence ao hiperplano tangente da superfície de chaveamento no ponto $e(t)$.

Para atingir globalmente o objetivo de seguimento, como descrito por Trofino et al. (2009), é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável da Equação (2.11). Com isso é possível estabelecer Lema 1.

Lema 1. *A origem é um ponto de equilíbrio da Equação (2.11) se e somente se existir $\bar{\theta} \in \Theta$ tal que:*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0 . \quad (2.13)$$

□

Demonstração. *Basta substituir $\dot{e} = 0$ e $e = 0$ na Equação (2.11).*

□

Com base nas considerações vistas anteriormente, o problema será reformulado como sendo o projeto de uma lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ que conduza os estados da Equação (2.11) para a origem.

2.3.1 Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo afim

Nessa subseção será apresentada os resultados obtidos em Trofino et al. (2011) para uma lei de chaveamento para sistemas afins que é obtida pela aplicação da função ‘max’ na forma:

$$\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} , \quad (2.14)$$

onde $v_i(e(t))$, $i \in \mathcal{M}$, são funções auxiliares associadas aos subsistemas da Equação (2.11), a função max representa o valor máximo entre as funções $v_i(e(t))$ e a função arg é responsável por encontrar qual o argumento i do sistema que retorna o valor máximo. O sinal de chaveamento definido por $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}$ mapeia dentre o conjunto de subsistemas aquele que possui a “energia máxima”. Por exemplo, $\sigma(e(t_0)) = \{j, k, l\}$ significa que no instante $t = t_0$ a trajetória do erro está na superfície de comutação definida pelos subsistemas $\{j, k, l\}$ pois $v_j(e(t_0)) = v_k(e(t_0)) = v_l(e(t_0)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t_0))\}$. Sempre que o conjunto $\sigma(e(t))$ tiver mais de um elemento, um modo deslizante pode estar ocorrendo naquele instante, e os elementos da combinação convexa, as entradas do vetor $\theta(e(t))$ são tais que $\theta_i(e(t)) = 0$ se $i \notin \sigma(e(t))$. Maiores detalhes podem ser obtidos em Filippov (1988, p.50). É possível perceber que a Equação (2.14) é uma lei de chaveamento dependente dos estados que utiliza a ideia de função de Lyapunov múltipla.

A lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ deve fazer com que a origem da dinâmica do erro de seguimento seja globalmente assintoticamente estável. Portanto, busca-se obter condições de projeto que resultam em uma lei de chaveamento que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para a origem, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema.

A seguir são apresentadas condições suficientes para o protejo utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov e o processo para descrevê-las como um conjunto de LMIs. Considerando que as funções auxiliares $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$; $i \in \mathcal{M}$, da Equação (2.14) possuem a seguinte estrutura particular:

$$v_i(e(t)) = e(t)' P_i e(t) + 2e(t)' S_i , \quad (2.15)$$

onde $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^n$ são matrizes a serem determinadas. É possível notar que as funções auxiliares possuem termos quadráticos e lineares. Os termos lineares adicionam graus de liberdade significativos no problema de estabilidade de sistemas afins, no entanto na maioria dos casos estes termos são desprezados (BOLZERN; SPINELLI, 2004; XU; ZHAI; HE, 2008).

Antes de apresentar o próximo teorema, é importante definir a notação auxiliar utilizada para expressar as condições. Considerando os seguintes vetores auxiliares θ , $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$.

$$\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} , \quad \bar{\theta} := \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\theta}_m \end{bmatrix} , \quad e_\theta := \theta \otimes e(t) , \quad (2.16)$$

onde $\theta \in \Theta$ e $\bar{\theta} \in \Theta$ são definidos através da Equação (2.13). O símbolo $\otimes$ representa o produto de Kronecker, vide Apêndice A.2.

2.3.2 Anulador linear

Sendo um anulador linear $\aleph_\theta(\theta)$ definido como a seguir e apresentado com mais detalhes no Apêndice A.4. Dada uma função vetorial $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$, uma função matricial $\aleph_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ será chamada de um Anulador Linear de $f(\cdot)$ se este satisfaz as duas seguintes condições **(i)** $\aleph_f(\cdot)$ é linear e **(ii)** $\aleph_f(h)f(h) = 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^q$ de interesse.

O anulador linear será usado juntamente com o Lema de Finsler, vide Apêndice A.3, para reduzir o conservadorismo das LMIs como apresentado em (TROFINO; DEZUO, 2014).

Antes de apresentar o próximo teorema, é importante definir a notação auxiliar utilizada para expressar as condições. Seja $\aleph_\theta(\theta) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ o anulador linear de θ , vide Apêndice A.4 para mais informações sobre anuladores lineares, $\aleph_\theta(\theta)$ é uma função linear de θ com $\aleph_\theta(\theta)\theta = 0$, $\forall \theta \in \Theta$ e as constantes positivas α_i , $i \in \mathcal{M}$ escolhidas pelo projetista. Considere as seguintes matrizes auxiliares:

$$A := [A_1 \ \cdots \ A_m] , \quad K := [k_1 \ \cdots \ k_m] , \quad (2.17)$$

$$P := [P_1 \ \cdots \ P_m] , \quad S := [S_1 \ \cdots \ S_m] , \quad (2.18)$$

$$\alpha := [\alpha_1 I_n \ \cdots \ \alpha_m I_n] , \quad I_a := \mathbf{1}_m \otimes I_n , \quad (2.19)$$

$$\mathbf{1}_m := [1 \ \cdots \ 1] \in \mathbb{R}^m , \quad P_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i , \quad (2.20)$$

$$P_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i P_i , \quad A_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i A_i , \quad (2.21)$$

$$K_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i k_i , \quad S_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i S_i , \quad (2.22)$$

$$L_a(\theta) := \sum_{i=1}^m \theta_i L_i , \quad \aleph_\theta(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times m} , \quad (2.23)$$

$$\Psi_a := \begin{bmatrix} A'P + P'A & \star \\ K'P + S'A & K'S + S'K \end{bmatrix} , \quad (2.24)$$

$$\Phi_a := \begin{bmatrix} \alpha'(P - P_{\bar{\theta}}I_a) + (P' - I_a'P_{\bar{\theta}})\alpha & \star \\ 2S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} , \quad (2.25)$$

onde $\star$ são os blocos dos termos de uma matriz que podem ser deduzidos da simetria.

As condições de projeto são apresentadas no Teorema 1, extraídos de Trofino et al. (2011).

Teorema 1. *Seendo $\bar{x}$ um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado afim apresentado pela Equação (2.7) e supondo que todos os estados $x(t)$ possam ser medidos. Considere o sistema afim da Equação (2.11) cujo estado é o erro de seguimento e assumindo que exista $\bar{\theta} \in \Theta$ definido de acordo com o Lema 1. Utilizando as notações auxiliares das Equações (2.17)-(2.25) e seja L_i , $i \in m$, matrizes a serem determinadas com as dimensões de $C_b(\theta)'$, sendo:*

$$C_a = [\mathbf{0}_{mn} \quad \mathbf{1}_m] , \quad C_b(\theta) = [\aleph_\theta(\theta) \otimes I_n \quad \mathbf{0}_{rn \times m}] , \quad (2.26)$$

com o anulador linear $\aleph_\theta(\theta)$. Sejam as constantes $\alpha_i > 0$ escolhidas pelo projetista. Supondo que existam matrizes P , S , L_b e L_i , $i \in \mathcal{M}$ que resolvam o seguinte problema LMI:

$$P_{\bar{\theta}} > 0 , \quad (2.27)$$

$$S_{\bar{\theta}} = 0 , \quad (2.28)$$

$$\Psi_a + \Phi_a + L_b C_b(\theta) + C_b(\theta)' L_b' + L_a(\theta) C_a + C_a' L_a(\theta)' < 0 , \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (2.29)$$

onde, $\vartheta(\Theta)$ representa o conjunto de todos os vértices do simplex Θ .

Com isso, a origem da Equação (2.11) sob efeito da lei de chaveamento da Equação (2.14) é globalmente assintoticamente estável e:

$$V(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} \quad (2.30)$$

é uma função de Lyapunov para este sistema em malha fechada. □

Demonstração. A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em (DEZUO, 2014, p. 80). □

Pode-se perceber que a Desigualdade (2.29) é dividida em diversas partes, uma responsável por garantir que a derivada da função de Lyapunov seja decrescente e as demais responsáveis por diminuir o conservadorismo da LMI proposta.

A condição sendo resolvida para a Desigualdade (2.29) é obtida a partir do sistema original multiplicando-a à esquerda e a direita por $\xi = \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix}$. Isso leva aos seguintes termos:

- $\xi' \Psi_a \xi$ - É a parcela correspondente à derivada da Equação (2.15).

- $\xi' \Phi_a \xi \geq 0$ - É necessária para diminuir o conservadorismo utilizando Procedimento S, vide Apêndice A.1 para mais informações, permitindo que apenas a função ‘max’ de $v_i(x(t))$ seja necessariamente decrescente.
- $\xi'(LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L')\xi = 0$ - São responsáveis por diminuir o conservadorismo utilizando o anulador linear, vide Apêndice A.3 para mais informações, sabendo que:

$$\aleph_\theta(\theta) \cdot \theta = 0 . \quad (2.31)$$

- $\xi'(L_a(\theta)C_a + C_a'L_a(\theta)')\xi$ - São responsáveis por diminuir o conservadorismo utilizando o Lema de Finsler, vide Apêndice A.3 para mais informações, sabendo que:

$$1 - \sum_{i=1}^m (\theta_i) = 0 \quad \& \quad 1 - \sum_{i=1}^m (\bar{\theta}_i) = 0 . \quad (2.32)$$

2.3.3 Projeto utilizando medição parcial de estados

Os resultados do Teorema 1 apenas podem ser aplicados caso haja medição de todos os estados do sistema para a determinação do modo ativo de acordo com a Equação (2.15). No entanto, na prática, muitas vezes alguns estados não estão disponíveis para medição, seja pelo custo elevado de sua medição ou até mesmo a impossibilidade física de medição. Para esses casos, se faz necessária uma lei de chaveamento que utilize uma medição parcial de estados. Considerando o sistema da Equação (2.7) com os estados medidos $y(t) = C_i x(t) \in \mathbb{R}^g$, onde $C_i \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $i \in \mathcal{M}$ é uma matriz dada. Define-se então o erro de medição como:

$$\epsilon(t) = y(t) - C_i \bar{x}(t) = C_i e(t) . \quad (2.33)$$

Assumindo que as funções auxiliares $v_i(e(t))$, $i \in \mathcal{M}$, tenham a estrutura:

$$P_i := P_0 + C_i' Q_i C_i , \quad S_i := S_0 + C_i' R_i , \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (2.34)$$

onde $P_0 = P_0' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{g \times g}$, $S_0 \in \mathbb{R}^n$, $R_i \in \mathbb{R}^g$. Neste caso as funções auxiliares $v_i(e(t))$ podem ser reescritas como:

$$v_i(e(t)) = e(t)'(P_0 + C_i' Q_i C_i)e(t) + 2e(t)'(S_0 + C_i' R_i) \quad (2.35)$$

$$= e(t)'P_0 e(t) + 2e(t)'S_0 + \mu_i(\epsilon(t)) , \quad (2.36)$$

onde:

$$\mu_i(\epsilon(t)) = \epsilon(t)'C_i' Q_i C_i \epsilon(t) + 2\epsilon(t)'C_i' R_i . \quad (2.37)$$

Consequentemente:

$$\max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = e(t)'P_0 e(t) + 2e(t)'S_0 + \max_{i \in \mathcal{M}} \{\mu_i(\epsilon(t))\} \quad (2.38)$$

como os termos P_0 e S_0 independem do modo i , é possível reescrever a lei de chaveamento apenas em função dos termos que variam dependendo do modo:

$$\arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{\mu_i(\epsilon(t))\} = \sigma(\epsilon(t)) . \quad (2.39)$$

Assim a lei de chaveamento fica em função apenas de $\epsilon(t)$ que é conhecido.

2.4 SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO NÃO LINEAR E LIMITADO EM SETORES

Essa seção apresenta uma extensão da Seção 2.3, desenvolvida em Dezuo (2014), para uma classe de sistemas chaveados com subsistemas não lineares dependentes do estado. Essa classe é a das funções limitadas em setores.

Entre as diversas técnicas para o controle de sistemas chaveados poucas são capazes de tratar o problema para sistemas chaveados não lineares. Neste quesito técnicas que baseadas em funções de Lyapunov e LMIs como as apresentadas em Bolzern e Spinelli (2004) e Trofino et al. (2011) quando modificadas adequadamente são capazes de tratar esta classe de sistemas. A vantagem de reformular um problema como LMI é que dessa forma fica fácil incorporar novas restrições, desde que essas restrições também sejam expressas como LMIs. Contudo, expandir os resultados obtidos da classe de sistemas chaveados afins para não lineares é uma tarefa difícil, as condições de projeto que abranjam todos os sistemas não lineares geralmente resultam em LMIs conservadoras demais. Uma forma utilizada para reduzir o conservadorismo é observar a estrutura específica de uma classe de funções não lineares, como as delimitadas por setores em função do estado (ver Khalil (2002)).

Considerando um sistema chaveado não linear composto por m subsistemas:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i + B \psi_x(q_x(x(t))), \quad i \in \mathcal{M} \quad (2.40)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ são os estados do sistema, $\psi_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função não linear dependente de um único estado:

$$q_x(x(t)) := C_q x(t) \quad (2.41)$$

com um dado vetor $C_q \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, e $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^n$ dados pela modelagem do sistema.

O problema então está em projetar uma lei de chaveamento que leva os estados do sistema de forma assintótica para uma referência constante $\bar{x}$. Ou seja, o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ desejado do sistema chaveado (malha fechada) deve ser assintoticamente estável.

Dado $\bar{x}$, pode-se reescrever o sistema apresentado pela Equação (2.40) em função do erro:

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + A_i \bar{x} + b_i + B \psi(q(e(t))) , \quad i \in \mathcal{M} , \quad (2.42)$$

onde:

$$\psi(q(e(t))) := \psi_x(q(e(t)) + C_q \bar{x}) = \psi_x(q_x(e(t))) \quad (2.43)$$

é apenas uma translação das coordenadas ψ_x, q_x , para coordenadas ψ, q e

$$e(t) := x(t) - \bar{x} , \quad q(e(t)) := C_q e(t) . \quad (2.44)$$

É possível perceber que $\psi(q(e(t)))$ é apenas $\psi_x(q_x(x(t)))$ reescrito em função de $e(t)$.

Considerando a seguinte decomposição de A_i e b_i :

$$A_i := \bar{A}_0 + \bar{A}_i , \quad b_i := \bar{b}_0 + \bar{b}_i , \quad (2.45)$$

onde $\bar{A}_0, \bar{b}_0$ são as componentes de A_i e b_i , respectivamente, que são iguais para todo $i \in \mathcal{M}$ e $\bar{A}_i, \bar{b}_i$ contêm os termos que variam de acordo com i .

Definindo:

$$h_0 := \bar{A}_0 \bar{x} + \bar{b}_0 , \quad h_i := \bar{A}_i \bar{x} + \bar{b}_i , \quad (2.46)$$

pode-se reescrever:

$$A_i \bar{x} + b_i = h_0 + h_i . \quad (2.47)$$

Assume-se que o modo deslizante do sistema pode ser representado por uma combinação convexa dos seus subsistemas como apresentado na Seção 2.1.2. Com isso, a equação que inclui as dinâmicas dos subsistemas juntamente com os modos deslizantes que podem eventualmente ocorrer em qualquer superfície de chaveamento, é dada por:

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) (A_i e(t) + h_0 + h_i + B\psi(q(e(t)))) , \quad \theta(e(t)) \in \Theta , \quad (2.48)$$

onde $\theta(e(t))$ é o vetor de elementos $\theta_i(e(t))$ e Θ é o simplex definido pela Equação (2.6).

Sabendo de que um modo deslizante pode estar ocorrendo no ponto $e(t)$ se for possível encontrar uma combinação convexa dos campos vetoriais do subsistema, de modo que $\dot{e}(t)$ seja um vetor que pertença ao hiperplano tangente à superfície de comutação no ponto $e(t)$.

Para garantir que erro seja nulo em regime, a origem deve ser um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da Equação (2.48), é necessário que:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i(0) (h_0 + h_i + B\psi(0)) = 0 , \quad (2.49)$$

onde $\theta_i(0)$, $i \in \mathcal{M}$ são funções contínuas por trechos em relação ao tempo e caracterizam a condição de equilíbrio. Com isso, pode-se definir:

$$\bar{\psi} := \psi(0) , \quad (2.50)$$

e escalares constantes $\bar{\theta}_i$ que satisfazem o Lema 2.

Lema 2. *A origem é um ponto de equilíbrio da Equação (2.48) se e somente se existe $\bar{\theta} \in \Theta$ tal que:*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (h_0 + h_i + B\bar{\psi}) = 0 . \quad (2.51)$$

□

Demonstração. *Basta substituir $\dot{e}(t) = 0$ e $e(t) = 0$ na Equação (2.48).* □

Enquanto $\theta(0)$ está associado à condição de equilíbrio que em geral é desconhecido e possivelmente varie devido a parâmetros incertos, o parâmetro $\bar{\theta}$ é uma constante auxiliar que representa um valor particular que $\theta(0)$ pode assumir.

Como a Equação (2.51) é igual a zero, pode-se subtrair seu lado esquerdo na Equação (2.48) e reescrever a dinâmica do erro de uma forma mais conveniente.

$$\dot{e}(t) = A_\theta e(t) + k_\theta , \quad \theta_i \in \Theta \quad (2.52)$$

sendo $A_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i(e) A_i$ e $k_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i(e) k_i$ com:

$$k_i = h_i - h_{\bar{\theta}} + B\Delta\psi , \quad (2.53)$$

sendo $h_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i h_i$ e $\Delta\psi := \psi(t) - \bar{\psi}$. É possível perceber que o termo h_0 não está mais presente, isso se deve ao fato de que é possível eliminá-lo das equações com este procedimento, como mostrado por Dezuo (2014, p. 86).

2.4.1 Função não linear limitada em setores

Uma função é denominada limitada em setores caso satisfaça a Definição 1.

Definição 1. *A função $\varphi(q) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, com $\varphi(0) = 0$ é dita limitada em setores $[l, u]$ se para todo $q \in \mathbb{R}$, $p = \varphi(q)$ fica limitada entre as retas $p = lq$ e $p = uq$. Com isso, a desigualdade:*

$$(p - uq)(p - lq) \leq 0 \quad (2.54)$$

é válida para todo q , $p = \varphi(q)$. □

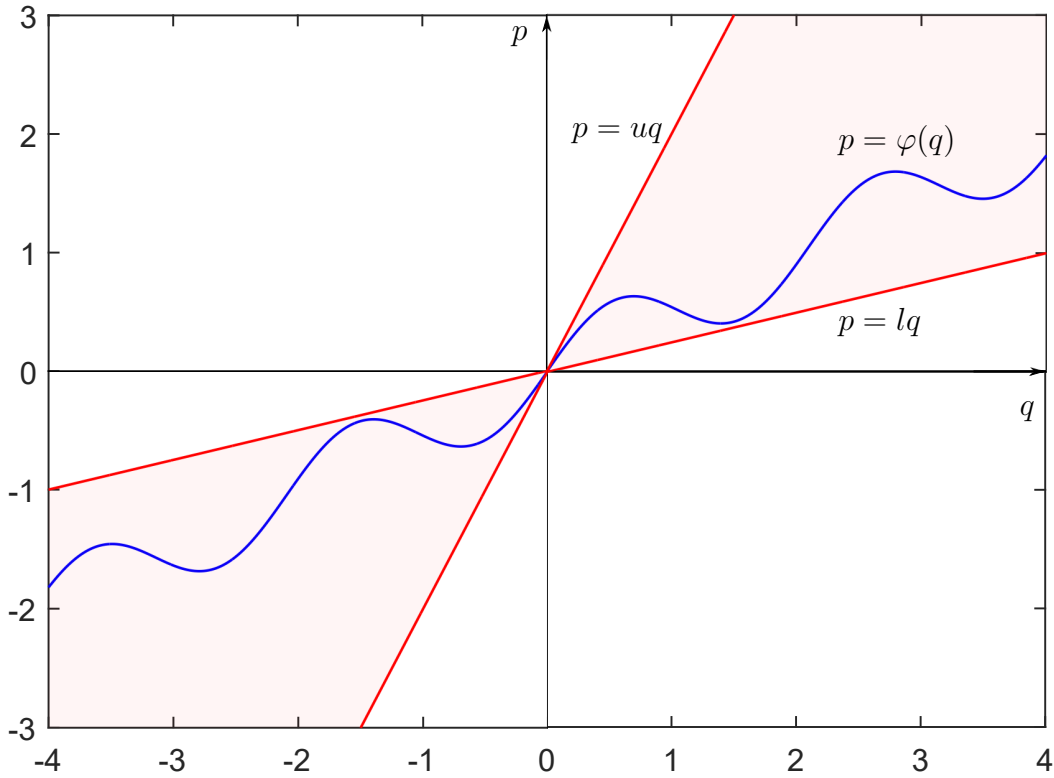
Uma representação visual de uma função limitada em setores pode ser vista na Figura 2, onde a função $\varphi(q) = \sin(3q)/3 + q/2$ é sempre limitada nos setores $[l, u] = [1/4, 2]$.

Considerando a Definição 1 com a função não linear $p = \Delta\psi(q)$, $q = C_q e$, e sabendo que $\Delta\psi(0) = 0$ quando $C_q e = 0$ é possível reescrever a Equação (2.54) como:

$$-(\Delta\psi - uC_q e)(\Delta\psi - lC_q e) \geq 0 . \quad (2.55)$$

Observação 1. *Sempre existe um setor $[l, u]$ grande o suficiente para conter uma função não linear contínua $\varphi(q)$. Por exemplo, o setor $[-\infty, \infty]$ contém todos os pontos $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Mais informações sobre funções não lineares limitadas por setor podem ser encontradas em Khalil (2002, p. 232).*

Figura 2 – Exemplo de uma curva φ limitada pelos setores $[l, u]$.



Fonte: Próprio autor.

2.4.2 Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo não linear e limitado em setores

Nessa subseção será apresentada uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo não linear e limitado em setor, que é obtida pela aplicação da função ‘ $\max$ ’ na forma apresentada pela Equação (2.14).

A lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ deve fazer com que a origem da dinâmica do erro de seguimento seja globalmente assintoticamente estável. Portanto, busca-se obter condições de projeto que resultam em uma lei de chaveamento que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para a origem, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema.

A seguir são apresentadas condições suficientes para o projeto utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov e o processo para descrevê-las como um conjunto de LMIs. Considerando que as funções auxiliares $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$, $i \in \mathcal{M}$, da Equação (2.14) possuem a seguinte estrutura particular:

$$v_i(e(t)) = e(t)' P_i e(t) + 2e(t)' (S_i - S_{\bar{\theta}}), \quad (2.56)$$

onde $S_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i$, e $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^n$ são matrizes a serem determinadas.

Antes de apresentar o próximo teorema, é importante definir a notação auxiliar

utilizada para expressar as condições. Seja $\aleph_\theta(\theta) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ o anulador linear de θ , vide Apêndice A.4 para mais informações sobre anuladores lineares, $\aleph_\theta(\theta)$ é uma função linear de θ com $\aleph_\theta(\theta)\theta = 0$, $\forall \theta \in \Theta$ e as constantes positivas α_i , $i \in \mathcal{M}$, escolhidas pelo projetista. Considere as seguintes matrizes auxiliares:

$$A := [A_1 \ \cdots \ A_m] , \quad H := [h_1 \ \cdots \ h_m] , \quad (2.57)$$

$$P := [P_1 \ \cdots \ P_m] , \quad S := [S_1 \ \cdots \ S_m] , \quad (2.58)$$

$$\alpha := [\alpha_1 I_n \ \cdots \ \alpha_m I_n] , \quad I_a := \mathbf{1}_m \otimes I_n , \quad (2.59)$$

$$\mathbf{1}_m := [1 \ \cdots \ 1] \in \mathbb{R}^m , \quad P_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i , \quad (2.60)$$

$$C_a := [\mathbf{0}_{mn} \ \mathbf{1}_m \ 0] , \quad C_b(\theta) := [\aleph_\theta(\theta) \otimes I_n \ \mathbf{0}_{rn \times m+1}] , \quad (2.61)$$

$$L_a(\theta) := \sum_{i=1}^m \theta_i L_i , \quad \aleph_\theta(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times m} , \quad (2.62)$$

$$\Gamma_n := \begin{bmatrix} -I'_a C'_q(u) C_q I_a & \star & \star \\ \mathbf{0}_{m \times mn} & \mathbf{0}_{m \times m} & \star \\ (1/2) C_q I_a(u+l) & \mathbf{0}_m & -1 \end{bmatrix} , \quad (2.63)$$

$$\Psi_n := \begin{bmatrix} A'P + P'A & \star & \star \\ H'P + S'A & H'S + S'H & \star \\ B'P & B'S & 0 \end{bmatrix} , \quad (2.64)$$

$$\Phi_n := \begin{bmatrix} \alpha'(P - P_{\bar{\theta}} I_a) + (P' - I'_a P_{\bar{\theta}}) \alpha & \star & \star \\ 2S' \alpha & \mathbf{0}_{m \times m} & \star \\ 0 & \mathbf{0}_m & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.65)$$

Teorema 2. *Seja $\bar{x}$ um vetor constante que representa o ponto de equilíbrio do sistema dado pela Equação (2.40) e supondo que $x(t)$ é uma variável disponível online. Considerando o erro do sistema como o dado pela Equação (2.48) e seja $\bar{\theta} \in \Theta$ um vetor constante que atenda o Lema 2. Utilizando a notação auxiliar das Equações (2.57)-(2.65), sendo L_b , L_i , $i \in \mathcal{M}$, matrizes a serem determinadas com as dimensões $C_b(\theta)'$, C'_a , respectivamente.*

Supondo que $\exists P, S, \tau, L_b, L_i$, $i \in \mathcal{M}$ que resolvam as seguintes LMIs:

$$P_{\bar{\theta}} > 0 , \quad (2.66)$$

$$\Psi_n + \Phi_n + \tau \Gamma_n + L_b C_b(\theta) + C'_b(\theta) L'_b + L_a(\theta) C_a + C'_a L_a(\theta)' < 0 , \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (2.67)$$

onde $\vartheta(\Theta)$ representa o conjunto de todos os vértices do simplex Θ , então, o sistema chaveado não linear da Equação (2.48) é globalmente assintoticamente estável utilizando a lei de chaveamento da Equação (2.56) e com isso:

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} , \quad v_i(e) = e' P_i e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}) , \quad (2.68)$$

é uma função de Lyapunov do sistema. $\square$

Demonstração. A demonstração do Teorema 2 é apresentada em Dezuo (2014, p. 101). $\square$

2.4.3 LMIs independentes do ponto de equilíbrio

Nessa subseção é apresentado que é possível obter LMIs do Teorema 2, independentes do ponto de equilíbrio das variáveis $\bar{x}$, $\bar{\theta}$, se as matrizes A_i (provenientes do sistema) e P_i (provenientes da função de Lyapunov) possuírem uma estrutura particular. A aplicação do resultado apresentado a seguir só pode acontecer caso as matrizes sejam iguais para todos os subsistemas, ou seja:

$$A_i = \bar{A}_0 , \quad P_i = P_0 , \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (2.69)$$

onde $\bar{A}_0$ é dado pela decomposição como na Equação (2.45) quando $\bar{A}_i = 0$ $i \in \mathcal{M}$, e $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz a ser determinada. Além disso, considerando a seguinte notação auxiliar usada no próximo corolário.

$$\Phi_s := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \star & \star \\ 2S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times m} & \star \\ 0 & \mathbf{0}_m & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.70)$$

Corolário 1. Seja $\bar{x}$ um vetor constante, não necessariamente conhecido, que representa o ponto de equilíbrio do sistema dado pela Equação (2.40) e supondo que $x(t)$ é uma variável disponível para medição em tempo real. Considerando o erro do sistema como o dado pela Equação (2.48) e seja $\bar{\theta} \in \Theta$ um vetor constante que atenda o Lema 2. Utilizando a notação auxiliar das Equações (2.57) - (2.64) e (2.70), sendo L_b , L_i , $i \in \mathcal{M}$ matrizes a serem determinadas com as dimensões $C_b(\theta)'$, C'_a , respectivamente.

Supondo que existam P , S , τ , L_b , L_i , $i \in \mathcal{M}$, que resolvam as seguintes LMIs:

$$P_{\theta} > 0 , \quad (2.71)$$

$$\Psi_n + \Phi_s + \tau \Gamma_n + L_b C_b(\theta) + C'_b(\theta) L'_b + L_a(\theta) C_a + C'_a L_a(\theta)' < 0 , \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (2.72)$$

então, o sistema chaveado não linear da Equação (2.48) é globalmente assintoticamente estável utilizando a lei de chaveamento da Equação (2.56) e com isso:

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} , \quad v_i(e) = e' P_0 e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}) , \quad (2.73)$$

é uma função de Lyapunov do sistema. $\square$

Demonstração. A demonstração do Corolário 1 é apresentada por Dezuo (2014, p. 108).

□

3 TRANSFORMAÇÃO NÃO LINEAR

Este capítulo apresenta as principais contribuições desta dissertação, onde é desenvolvida uma lei de chaveamento para sistemas do tipo não linear limitado em setores. Propõem-se nesta técnica aplicar uma transformação de estado em que as funções não lineares apareçam como estados na nova representação do sistema. Essa nova técnica apresentada é especialmente interessante nos casos em que é mais conveniente medir a saída das não linearidades do que alguns estados do sistema original.

Existem diversas aplicações para essa nova técnica de projeto. Em um arranjo fotovoltaico, por exemplo, a saída da não linearidade que expressa a característica da curva $I-V$ do arranjo é a sua tensão, enquanto os estados do sistema são as variáveis internas do conversor. O conhecimento da tensão e da corrente do arranjo é essencial para uma máxima geração do sistema, no entanto, não é trivial utilizar os estados do conversor para esse fim. Entre outros sistemas chaveados que podem se beneficiar do método proposto se encontram: o controle de máquinas de relutância comutada, onde as correntes mensuráveis são funções não lineares do fluxo (que é o estado do sistema, geralmente estimado por ser difícil de medir), e os sistemas de gerenciamento para carga de baterias, onde existe uma relação não linear entre o estado de carga e a tensão da bateria.

Além disso, uma classe mais geral de sistemas chaveados não lineares pode ser abrangida e múltiplas não linearidades são permitidas. Os resultados anteriores podem ser incluídos como casos particulares. Uma função Lyapunov do tipo ‘max’, como em Trofino et al. (2011), Scharlau et al. (2014), é projetada resultando em uma lei de chaveamento que garante uma convergência globalmente assintoticamente estável do sistema chaveado em malha fechada para o ponto de equilíbrio desejado, mesmo que ocorram modos deslizantes em qualquer superfície de comutação. Também é mostrado que, dependendo da estrutura do sistema, não é necessário conhecer o vetor de estado no ponto de equilíbrio desejado na etapa de projeto da lei de chaveamento. Essa é uma característica interessante do método proposto que permite alterações em tempo real no ponto de operação necessário. Essa característica pode ser interessante em alguns casos, como por exemplo, quando usada para a maximizar a potência gerada em um sistema fotovoltaico, em que a referência ótima se altera com as condições de operação do sistema.

Considerando um sistema chaveado não linear composto por m subsistemas:

$$\dot{x} = A_i x(t) + B_i p(t) + b_i, \quad i \in \mathcal{M} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ são os estados do sistema, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $B_i \in \mathbb{R}^n$, são matrizes obtidas através da modelagem do sistema, $q(t) = Dx(t)$, $D \in \mathbb{R}^{d \times n}$ é um vetor que seleciona os elementos de $x(t)$ que influenciam a não linearidade e incertezas do vetor $p(t) = \phi(q(t), \delta)$,

definido como:

$$\phi(q(t), \delta) := \begin{bmatrix} \phi_1(q_1(t), \delta) \\ \vdots \\ \phi_d(q_d(t), \delta) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde $\delta \in \mathbb{R}^r$ é um vetor de parâmetros incertos constantes e cada elemento $\phi_j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função não linear de seu respectivo escalar $q_j(t) := \text{row}_j(D)x(t)$. Analogamente, definindo $z(t) := Ex(t)$, $E \in \mathbb{R}^{(n-d) \times n}$, como um vetor que compreende os elementos de $x(t)$ que não influenciam $\phi(q(t), \delta)$ de forma que a matriz concatenada $[E \ D]'$ seja ortogonal.

Suposição 1. A função $p(t)$ é contínua e bijetora em relação a $q(t)$, $\forall \delta \in \mathbb{R}^r$. $\square$

A Suposição 1 significa que existe uma função $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ tal que $q(t) = \psi(p(t), \delta)$, definida como:

$$\psi(p(t), \delta) := \begin{bmatrix} \psi_1(p_1(t), \delta) \\ \vdots \\ \psi_d(p_d(t), \delta) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde cada elemento $\psi_j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função não linear do seu respectivo escalar $p_j(t) := \phi_j(t)$. Em outras palavras, enquanto, ϕ define p como uma função não linear de q , ψ define q como uma função não linear de p .

Na sequência, será apresentada uma forma de aplicar uma transformação de estado onde as funções não lineares aparecem como estados na nova representação do sistema. Como discutido na introdução do capítulo, isso é especialmente interessante nos casos em que é mais conveniente medir a saída das não linearidades ao invés de alguns estados do sistema original.

Considere a derivada temporal de $p_j(t)$ reescrita, usando a regra da cadeia, como:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \nu_j(p_j, q_j, \delta) \frac{dq_j}{dt}, \quad \nu_j(p_j, q_j, \delta) := \frac{dp_j(t)}{dq_j}. \quad (3.4)$$

A dependência de ν_j em relação a (p_j, q_j, δ) será omita para simplificar a notação. Com isso:

$$\dot{p}(t) = \nu \dot{q}(t), \quad \nu := \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_d). \quad (3.5)$$

Considere o vetor $\chi(t)$ e sua derivada no tempo definido na Equação (3.6), respectivamente

$$\chi(t) := \begin{bmatrix} z(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\chi}(t) = H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \dot{x}(t) \quad (3.6)$$

onde, $H(\nu) := \text{diag}(\mathbf{I}_{(n-d) \times (n-d)}, \nu)$ e sabendo que qualquer matriz de permutação é ortogonal, com isso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} z(t) \\ q(t) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Substituindo a Equação (3.1) na Equação (3.6), é possível obter:

$$\dot{\chi}(t) = H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \left(A_i x(t) + B_i p(t) + b_i \right), \quad (3.8)$$

e utilizando a Equação (3.7), chega-se a:

$$\dot{\chi}(t) = H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \left(A_i \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} z(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + B_i p(t) + b_i \right). \quad (3.9)$$

O objetivo é manipular a Equação (3.9) de modo que a variável $p(t)$ passe a ser um estado e a variável $q(t)$ seja a entrada da função não linear. Com isso:

$$\dot{\chi}(t) = H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \left(A_i \begin{bmatrix} E' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + B_i p(t) + b_i \right) \quad (3.10)$$

$$= H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_i E' & A_i D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + B_i p(t) + b_i \right) \quad (3.11)$$

$$= H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} (A_i E' z(t) + A_i D' q(t) + B_i p(t) + b_i) \quad (3.12)$$

Com isso, chega-se a Equação (3.13).

$$\dot{\chi}(t) = H(\nu) \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_i E' & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + A_i D' q(t) + b_i \right). \quad (3.13)$$

Com isso, pode-se reescrever a dinâmica do sistema apresentado na Equação (3.1) na seguinte forma alternativa:

$$\dot{\chi}(t) = H(\nu) \left(F_i \chi(t) + G_i q(t) + g_i \right), \quad i \in \mathcal{M}, \quad \nu \in \mathcal{V} := \{ \nu : \nu_{j_{min}} \leq \nu_j \leq \nu_{j_{max}} \}, \quad (3.14)$$

onde:

$$F_i := \begin{bmatrix} E A_i E' & E B_i \\ D A_i E' & D B_i \end{bmatrix}, \quad G_i := \begin{bmatrix} E A_i D' \\ D A_i D' \end{bmatrix}, \quad g_i := \begin{bmatrix} E b_i \\ D b_i \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\nu_{j_{max}} := \max_{p_j, \delta} \left\{ \frac{dp_j}{dq_j} \right\}, \quad \nu_{j_{min}} := \min_{p_j, \delta} \left\{ \frac{dp_j}{dq_j} \right\}. \quad (3.16)$$

O problema se resume em projetar uma lei de chaveamento que conduz assintoticamente o estado dual do sistema $\chi(t)$ para uma referência constante $\bar{\chi}$. Em outras palavras, o ponto de equilíbrio desejado $\bar{\chi}$ do sistema chaveado (em malha fechada) deve ser assintoticamente estável. Definindo $e(t) := \chi(t) - \bar{\chi}$, esse problema pode ser reescrito para criar uma lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ que conduza assintoticamente o erro do sistema para a origem.

Observação 2. Observe que a seguinte equivalência é válida na Suposição 1.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \bar{p} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \bar{q} \quad (3.17)$$

Isso significa que, considerando $\bar{q}$, se a estabilidade de $q(t)$ for garantida, $p(t)$ também converge para um valor constante $\bar{p} = \phi(\bar{q}, \delta)$. Como consequência, dado $\bar{p}$, se a estabilidade de $p(t)$ for garantida, $q(t)$ também converge para um valor constante $\bar{q} = \psi(\bar{p}, \delta)$.

□

Demonstração. A Suposição 1 implica uma correspondência individual entre $\bar{p}$ e $\bar{q}$, $\forall \delta \in \mathbb{R}^r$. □

Dado $\bar{\chi}$, pode-se representar a dinâmica do erro de rastreamento como um sistema chaveado com os subsistemas:

$$\dot{e}(t) = H(\nu) \left(F_i(e(t) + \bar{\chi}) + G_i(\varphi(\pi(t), \delta) + \bar{q}) + g_i \right), \quad i \in \mathcal{M}, \quad \nu \in \mathcal{V}, \quad (3.18)$$

onde:

$$e(t) := \chi(t) - \bar{\chi}, \quad (3.19)$$

$$\varphi(\pi(t), \delta) := \psi(\pi(t) + \bar{p}, \delta) - \bar{q} = q(t) - \bar{q}, \quad (3.20)$$

$$\pi(t) := p(t) - \bar{p} = W e(t), \quad W = [\mathbf{0}_{d \times (n-d)} \quad \mathbf{I}_d]. \quad (3.21)$$

A Figura 3 ajuda a esclarecer a interpretação de cada variável e a translação para o sistema de erros.

Supõe-se que a dinâmica do modo deslizante do sistema possa ser representada como combinações convexas dos subsistemas, como em Filippov (1988), então o sistema chaveado global, que inclui a dinâmica dos subsistemas e a dinâmica do modo deslizante (que pode eventualmente ocorrer em qualquer superfície de chaveamento), é representado por:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) H(\nu) \left(F_i e(t) + G_i \varphi(\pi(t), \delta) + F_i \bar{\chi} + G_i \bar{q} + g_i \right), \quad \nu \in \mathcal{V}, \quad \theta(e(t)) \in \Theta, \quad (3.22)$$

onde Θ é um simplex unitário definido na Equação (2.6) e $\theta(e(t))$ é o vetor com as entradas $\theta_i(e(t))$ que são definidas de acordo com os resultados de Filippov (1988, p.50).

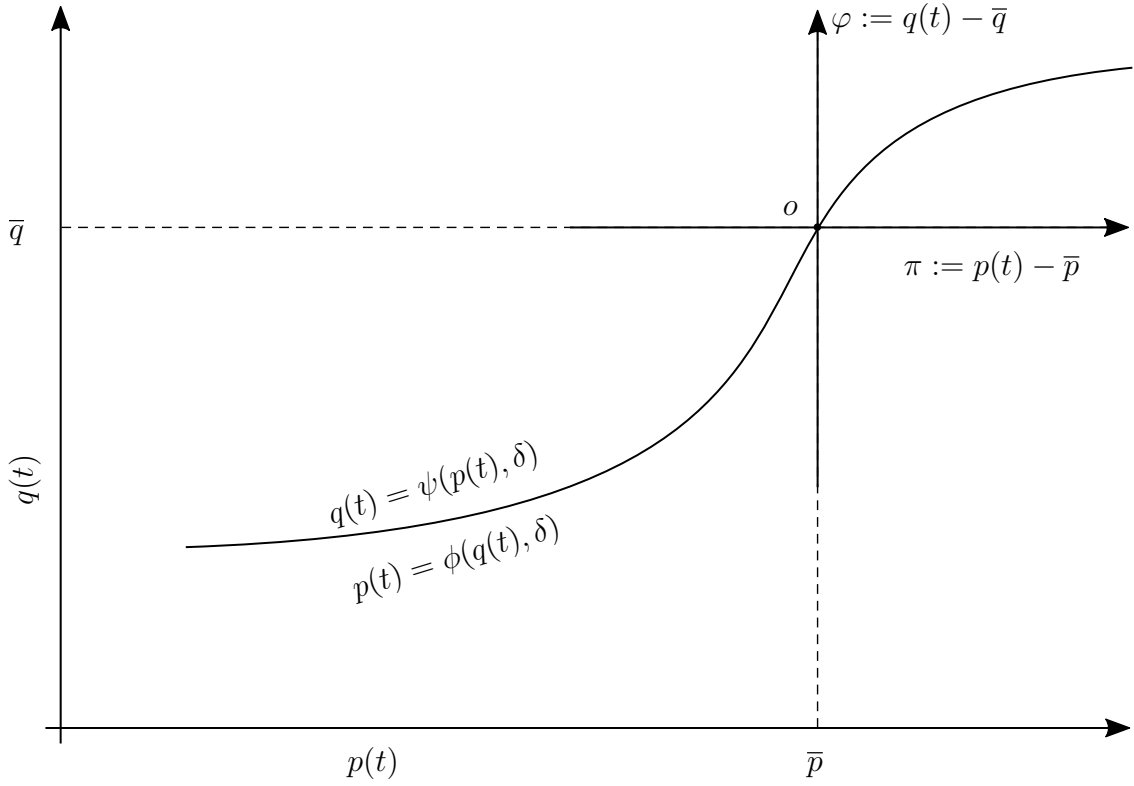
Para atingir o objetivo de rastreamento, a origem deve ser um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da Equação (3.22). Definindo $\bar{\theta} := \theta(0)$ e $\bar{q} := \psi(\bar{p}, \delta)$, o seguinte lema pode ser estabelecido:

Lema 3. A origem é um ponto de equilíbrio da Equação (3.22) se e somente se existir $\bar{\theta} \in \Theta$ tal que:

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (F_i \bar{\chi} + G_i \bar{q} + g_i) = 0. \quad (3.23)$$

□

Figura 3 – Ilustração da definição das variáveis e coordenadas de translação para uma função não linear genérica.



Fonte: Próprio autor.

Demonstração. Nota-se que ν_j tem sinal definido, pois toda função bijetora contínua $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é estritamente monótona, portanto $H(\nu)$ é uma matriz diagonal inversível. Multiplicando ambos os lados da Equação (3.22) à esquerda por $H(\nu)^{-1}$, e definindo a condição de equilíbrio $\dot{e}(t) = 0$ e $e(t) = 0$ para obter $\bar{\theta}$ da Equação (3.23). $\square$

A partir desse ponto assume-se que $\bar{\theta}$ é constante e a dependência do estado no tempo será omitida para simplificar notação. Como a Equação (3.23) é igual a zero, pode-se subtrair o lado esquerdo da Equação (3.23) na Equação (3.22) e reescrever a dinâmica do erro de uma forma mais conveniente:

$$\dot{e} = H(\nu) \left(F_{\theta} e + G_{\theta} \varphi(\pi, \delta) + k_{\theta} \right), \quad \nu \in \mathcal{V}, \quad \theta(e) \in \Theta \quad (3.24)$$

onde $F_{\theta} := \sum_{i=1}^m \theta_i F_i$, $G_{\theta} := \sum_{i=1}^m \theta_i G_i$ e $k_{\theta} := \sum_{i=1}^m \theta_i k_i$ com:

$$k_i := (F_i - F_{\bar{\theta}}) \bar{\chi} + (G_i - G_{\bar{\theta}}) \bar{q} + g_i - g_{\bar{\theta}}, \quad (3.25)$$

e

$$F_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i F_i, \quad G_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i G_i, \quad g_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i g_i. \quad (3.26)$$

3.1 LEI DE CHAVEAMENTO

Considera-se a lei de chaveamento dada por:

$$\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} \quad (3.27)$$

onde $v_i(e(t))$ são funções auxiliares com a estrutura:

$$v_i(e(t)) = e(t)'P_i e(t) + 2e(t)'(S_i - S_{\bar{\theta}}) \quad (3.28)$$

onde $S_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta} S_i$ e $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são matrizes a serem determinadas.

Assume-se que $\sigma(e(t))$ e $\theta(e(t))$, vistos como funções do tempo, são constantes por trechos. Em geral, θ é uma função com múltiplos valores, mas a evolução de $\theta(e(t))$ no tempo é contínua por partes a partir dessa suposição.

3.1.1 Não linearidades limitadas em setores

Considerando o que foi apresentado na Subseção 2.4.1, junto à Definição 2 e ao Lema 4, com $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ e π_j sendo o j -ésimo elemento de $\varphi(\pi, \delta)$ e π , respectivamente, obtém-se as Equações (3.31) e (3.32) que limitam as não linearidades em setores. Tem-se que a Definição 1 reescrita de modo mais abrangente na Definição 2.

Definição 2 (Função limitada em setores). *Uma função escalar $\varphi_j(\pi_j, \delta) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, com $\varphi_j(0, \delta) = 0$, está em setor $[l, u]$ se para todos os $\pi_j \in \mathbb{R}$, $w_j = \varphi_j(\pi_j, \delta)$ fica entre $w_j = u_j \pi_j$ e $w_j = l_j \pi_j$, $\forall \delta \in \mathbb{R}^r$. Então, a desigualdade:*

$$-(\varphi_j - u_j \pi_j)(\varphi_j - l_j \pi_j) \geq 0 \quad (3.29)$$

é válida para todo o π_j , $w_j = \varphi_j(\pi_j, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}^r$. $\square$

Define-se:

$$u_j := \max_{\pi_j, \delta} \left\{ \frac{d\varphi_j(\pi_j, \delta)}{d\pi_j} \right\}, \quad l_j := \min_{\pi_j, \delta} \left\{ \frac{d\varphi_j(\pi_j, \delta)}{d\pi_j} \right\}. \quad (3.30)$$

Lema 4. *Supõe-se que $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ seja uma função contínua com $\varphi_j(0, \delta) = 0$ e sua derivada em relação a π_j esteja limitada entre u_j e l_j definido na Equação (3.30), $\forall (\pi_j, \delta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$. Então $\varphi_j(\pi_j, \delta) \in [l_j, u_j]$, $\forall (\pi_j, \delta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$. $\square$*

Demonstração. *Supõe-se que $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ seja contínua, sua derivada seja limitada pela Equação (3.30) e passe pela origem. Apenas uma das seguintes situações pode ocorrer: (i) $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ está limitada dentro do setor $[l_j, u_j]$ ou (ii) não está. Mostra-se então que a segunda situação não pode ocorrer, indicando que $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ deve estar limitada em $[l_j, u_j]$, considerando as suposições. Por contradição, suponha que em um ponto (π_j, δ) a função $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ esteja fora do setor $[l_j, u_j]$. Como $\varphi_j(\pi_j, \delta)$ é contínuo e sua derivada é limitada pela Equação (3.30), conclui-se que a função não pode cruzar a origem, contradizendo a hipótese. Portanto, a única situação possível é (i), concluindo a prova. $\square$*

Observa-se com a Equação (3.19) e a Figura 3, onde $(\varphi_j, \pi_j) = (0, 0)$ é apenas uma translação de $(q_j, p_j) = (\bar{q}_j, \bar{p}_j)$ e as coordenadas (q_j, p_j) são invertidas, que a Equação (3.16) pode ser reescrita como:

$$\nu_{j_{max}} = \max_{p_j, \delta} \left\{ \frac{dp_j}{dq_j} \right\} = \min_{\pi_j, \delta} \left\{ \frac{d\varphi_j(\pi_j, \delta)}{d\pi_j} \right\}^{-1} = l_j^{-1}, \quad (3.31)$$

$$\nu_{j_{min}} = \min_{p_j, \delta} \left\{ \frac{dp_j}{dq_j} \right\} = \max_{\pi_j, \delta} \left\{ \frac{d\varphi_j(\pi_j, \delta)}{d\pi_j} \right\}^{-1} = u_j^{-1}, \quad (3.32)$$

o que significa que os vértices de $\mathcal{V}$ estão, por definição, relacionados às inclinações que garantem limites robustos do setor.

3.2 PROJETO DA LEI DE CHAVEAMENTO

Esta seção apresenta os principais resultados deste estudo, divididos em três casos: **(i)** sistemas com não linearidades conhecidas (não incertas), **(ii)** sistemas com não linearidades incertas e **(iii)** com troca de referência *online*.

Assume-se que o vetor χ está disponível *online*. O caso de medição parcial de χ pode ser considerado usando as mesmas restrições estruturais nas matrizes P_i, S_i propostas na Subseção 2.3.3. Além disso, os seguintes resultados são apresentados no contexto ideal de modo deslizante, onde a frequência de comutação é ilimitada. A mesma análise e procedimento para limitar a frequência de comutação apresentada na Observação 1 de Senger e Trofino (2014) pode ser aplicada aqui.

3.2.1 Caso 1: Função não linear limitada em setores com equilíbrio conhecido

Nesse primeiro cenário, considera-se o caso em que a função não linear não possui parâmetro incerto ou, pelo menos, se houver incertezas, o equilíbrio $\bar{q} = \psi(\bar{p})$ não é afetado. Em outras palavras, $\bar{q}$ está disponível *a priori* para o projeto da lei de chaveamento proposto no Teorema 3 a seguir.

Antes de apresentar o teorema para o projeto da lei de chaveamento, é necessário definir uma notação auxiliar. Sendo $\aleph_\theta(\theta)$ um anulador linear de θ , como apresentado na Subseção 2.3.2, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \mathcal{M}$; tem-se que α_i são escalares positivos escolhidos de acordo com a Observação 1 de Trofino et al. (2011) e considerando a seguinte notação:

$$F := \begin{bmatrix} F_1 & \dots & F_m \end{bmatrix}, \quad G := \begin{bmatrix} G_1 & \dots & G_m \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$K := \begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_m \end{bmatrix}, \quad \alpha := [\alpha_1 \mathbf{I}_n \quad \dots \quad \alpha_m \mathbf{I}_n], \quad (3.34)$$

$$P := \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_m \end{bmatrix}, \quad S := \begin{bmatrix} S_1 & \dots & S_m \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$P_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i, \quad L_a(\theta) := \sum_{i=1}^m \theta_i L_i, \quad (3.36)$$

$$M_a := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times m(n+d)} & \mathbf{1}_m \end{bmatrix}, \quad M_b(\theta) := \begin{bmatrix} \aleph_{\theta}(\theta) \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{rn \times md} & \mathbf{0}_{rn \times m} \\ \mathbf{0}_{rd \times mn} & \aleph_{\theta}(\theta) \otimes \mathbf{I}_d & \mathbf{0}_{rd \times m} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$u := \text{diag}(u_1, \dots, u_d), \quad l := \text{diag}(l_1, \dots, l_d), \quad (3.38)$$

$$\tau := \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_d), \quad \mathbf{1}_m := [1 \ \cdots \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times m}, \quad (3.39)$$

$$I_o := \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_n, \quad I_a := \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_d, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad W = [\mathbf{0}_{d \times (n-d)} \ \mathbf{I}_d], \quad (3.41)$$

$$\Gamma := \begin{bmatrix} -I_o' W' \tau u l W I_o & \star & \star \\ (1/2) I_a' \tau (u + l) W I_o & -I_a' \tau I_a & \star \\ \mathbf{0}_{m \times mn} & \mathbf{0}_{m \times md} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\Psi(\nu) := \begin{bmatrix} F' H(\nu)' P + P' H(\nu) F & \star & \star \\ G' H(\nu)' P & \mathbf{0}_{md \times md} & \star \\ K' H(\nu)' P + S' H(\nu) F & S' H(\nu) G & K' H(\nu)' S + S' H(\nu) K \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \alpha' (P - P_{\bar{\theta}} I_o) + (P - P_{\bar{\theta}} I_o)' \alpha & \star & \star \\ \mathbf{0}_{md \times mn} & \mathbf{0}_{md \times md} & \star \\ 2S' \alpha & \mathbf{0}_{m \times md} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Teorema 3. *Tem-se que $\bar{\chi}$ e $\bar{q}$ são vetores dados e constantes, representando o ponto de equilíbrio desejado do sistema apresentado pela Equação (3.1), e supõe-se que $\chi(t)$ e $\bar{\chi}$ estejam disponíveis para medição em tempo real. Considera-se o erro do sistema como o apresentado na Equação (3.22), com um determinado setor $[l, u]$, os vértices $\nu_{j_{\min}}$ e $\nu_{j_{\max}}$ definidos como na Equação (3.16), a notação auxiliar apresentada nas Equações (3.33)-(3.44) e sendo L_i, L_b matrizes a serem determinadas com as dimensões de M_a' e M_b' , respectivamente. Supõe-se que existam $P, S, \tau, L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$, que resolvam as seguintes LMIs:*

$$P_{\bar{\theta}} > 0, \quad (3.45)$$

$$\Psi(\nu) + \Phi + \Gamma + L_a(\theta) M_a + M_a' L_a(\theta)' + L_b M_b(\theta) + M_b(\theta)' L_b' < 0, \quad \forall \nu \in \vartheta(\mathcal{V}), \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta). \quad (3.46)$$

Então o sistema apresentado no formato $\dot{\chi}(t) = H(\nu)(F_i\chi(t) + G_iq(t) + g_i)$ é globalmente assintoticamente estável com a lei de chaveamento $\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}$ e com isso,

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} , \quad v_i(e) = e' P_i e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}) \quad (3.47)$$

é uma função Lyapunov para o sistema chaveado. $\square$

A demonstração do Teorema 3 faz parte das contribuições desta dissertação e por isso serão apresentadas neste capítulo, caso não seja de interesse do leitor se aprofundar nas deduções e provas, a leitura pode seguir da Observação 3 localizado na página 51.

Demonstração. Inicialmente, observa-se que as $v_i(e)$ apresentadas na Equação (3.28) são funções contínuas e diferenciáveis e, portanto, $V(e)$ da Equação (3.47) é uma função contínua localmente Lipschitz. Como $\theta_i(e) = 0$ para $i \notin \sigma(e)$ e $V(e) = v_i(e)$, $\forall i \in \sigma(e)$, obtém-se:

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e) v_i(e) , \quad (3.48)$$

como $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = S_{\bar{\theta}}$, obtido através da Equação (3.28):

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e) = e' \left(\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i \right) e + 2e' \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (S_i - S_{\bar{\theta}}) = e' P_{\bar{\theta}} e . \quad (3.49)$$

É possível observar que o elemento máximo de um conjunto finito de números reais é sempre maior ou igual a qualquer combinação convexa dos elementos do conjunto. Portanto, pode-se concluir utilizando das Equações (3.45), (3.48), (3.49) que $\forall e \neq 0$ tem-se:

$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} \geq \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e) = e' P_{\bar{\theta}} e > 0 . \quad (3.50)$$

Assim, $V(e)$ é uma função positiva definida e radialmente ilimitada, pois $e' P_{\bar{\theta}} e$ apresenta uma forma quadrática positiva, proveniente da Equação (3.45). Além disso, $v_i(e) \leq \beta_i(\|e\|)$ em que $\beta_i(\|e\|) := \|P_i\| \|e\|^2 + 2\|S_i - S_{\bar{\theta}}\| \|e\|$. Por consequência:

$$\lambda_{\min}(P_{\bar{\theta}}) \|e\|^2 \leq V(e) \leq \max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e\|)\} \quad (3.51)$$

onde os limites inferiores e superiores são funções da classe $\mathcal{K}_{\infty}^1$.

A seguir, mostra-se que se $V(e)$ está decrescendo estritamente ao longo de qualquer trajetória do sistema para qualquer φ pertencente a um determinado setor $[l, u]$. Lasdon (1970, p.420) apresenta que, para qualquer ponto e e direção h , a derivada direcional de $V(e)$ existe e é dada por:

$$D_h V(e) = \max_{i \in \sigma(e)} \nabla v_i(e) h , \quad (3.52)$$

¹ Para mais informações sobre funções de classe $\mathcal{K}$ vide Apêndice A.5.

onde $\nabla v_i(e) = 2(e'P_i + S'_i - S'_{\bar{\theta}})$ indica o gradiente de $v_i(e)$. Com a Equação (3.18), considerando a notação $\dot{e} = f(e)$ com:

$$f(e) = H(\nu) \left(F_{\theta}e + G_{\theta}\varphi(\pi, \delta) + k_{\theta} \right), \quad (3.53)$$

obtendo a derivada direcional na direção $h = f(e)$. É possível obter a expressão da Equação (3.52) para o sistema da Equação (3.18).

Desta maneira, como Senger e Trofino (2014) e Dezuio, Trofino e Scharlau (2014) demonstram, pode-se reescrever a Equação (3.52) como:

$$D_{f(e)}V(e) = \sum_{i=1}^m \theta_i(e) \nabla v_i(e) f(e). \quad (3.54)$$

Como, em geral, $\theta(e)$ assume múltiplos valores e é de difícil caracterização, usa-se uma condição mais conservadora em que $\theta(e)$ é substituído por um parâmetro arbitrário variante no tempo θ livre dentro do simplex Θ . Para reduzir o conservadorismo associado a esse relaxamento do problema, pode-se aplicar o Procedimento S à condição $D_{f(e)}V(e) < 0$ e levar em consideração a restrição da Equação (3.50). E então obter:

$$D_{f(e)}V(e) + 2\alpha_{\theta} (V(e) - e'P_{\bar{\theta}}e) < 0, \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad (3.55)$$

onde $D_{f(e)}V(e)$ é a função indicada na Equação (3.54) com $\nu(p, q, \delta)$ e $\theta(e)$ substituídos por parâmetros variantes no tempo ν e θ , $V(e)$ são indicados na Equação (3.48) e $\alpha_{\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i \alpha_i > 0$ é um fator de escala com constantes positivas dadas α_i . Observe que a Desigualdade (3.55) implica na Equação (3.54) que $D_{f(e)}V(e) < 0$ pois $\alpha_{\theta} (V(e) - e'P_{\bar{\theta}}e)$ não é negativo como apresentado na Equação (3.50) e $\theta(e) \in \Theta$.

A seguir, será mostrado que a Desigualdade (3.46) implica na Desigualdade (3.55). Considerando a notação $S_{\theta} := \sum_{i=1}^m \theta_i S_i$ e reescrevendo o lado esquerdo da Desigualdade (3.55) como:

$$\begin{aligned} 2e' \left(P_{\theta}H(\nu)F_{\theta} + \alpha_{\theta}(P_{\theta} - P_{\bar{\theta}}) \right) e + 2e'P_{\theta}H(\nu)G_{\theta}\varphi \\ + 2e' \left(P_{\theta}H(\nu)k_{\theta} + 2\alpha_{\theta}(S_{\theta} - S_{\bar{\theta}}) \right) + 2(S_{\theta} - S_{\bar{\theta}})H(\nu)F_{\theta}e \\ + 2(S_{\theta} - S_{\bar{\theta}})H(\nu)G_{\theta}\varphi + 2(S_{\theta} - S_{\bar{\theta}})H(\nu)k_{\theta} < 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Observa-se que $S_{\theta} - S_{\bar{\theta}} = S(\theta - \bar{\theta})$, $k_{\theta} = K(\theta - \bar{\theta})$ e considerando a notação:

$$\xi = \begin{bmatrix} e_{\theta} \\ \varphi_{\theta} \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix}, \quad e_{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 e \\ \vdots \\ \theta_m e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}, \quad \varphi_{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \varphi \\ \vdots \\ \theta_m \varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{md}. \quad (3.57)$$

Utilizando, $e = I_o e_{\theta}$, $\varphi = I_a \varphi_{\theta}$ é possível reescrever as Equações (3.55)-(3.56) usando a notação auxiliar apresentada nas Equações (3.33)-(3.44) como:

$$D_{f(e)}V(e) + 2\alpha_{\theta} (V(e) - e'P_{\bar{\theta}}e) = \xi' (\Psi(\nu) + \Phi) \xi < 0,$$

$$\forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (3.58)$$

Dessa forma é possível incorporar à condição da Equação (3.58) o fato de que φ é uma função do erro limitada pelo setor. Para esse propósito, a desigualdade da Equação (3.58) deve ser satisfeita sempre que a Equação (3.29) for satisfeita, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$. Usando o Procedimento S e a notação apresentada na Equações (3.38)-(3.42), isso ocorre se existirem escalares $\tau_j \geq 0$, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, de modo que:

$$\xi'(\Psi(\nu) + \Phi + \Gamma)\xi < 0, \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (3.59)$$

Com M_a e $M_b(\theta)$ da Equação (3.37), respectivamente, obtêm-se que $M_a\xi = 0$ e $M_b(\theta)\xi = 0$. Tais igualdades, representam relações entre os elementos componentes de ξ e podem ser usadas para relaxar a LMI associada a condição da Equação (3.59). Pelo lema de Finsler, a Desigualdade (3.59) é satisfeita se existirem matrizes $L_b \in \mathbb{R}^{m(n+d+1) \times r(n+d)}$, $L_i \in \mathbb{R}^{m(n+d+1) \times 1}$, $\forall i \in \mathcal{M}$, e $L_a(\theta)$ definidas pela Equação (3.36) de modo que a Desigualdade (3.46) seja satisfeita.

Multiplicando a desigualdade apresentada na Desigualdade (3.46) por ξ para a direita e por sua transposição pela esquerda, lembrando que $M_a\xi = 0$ e $M_b(\theta)\xi = 0$, obtêm-se a Desigualdade (3.59). Além disso, observa-se que a Desigualdade (3.46) implica $\tau > 0$. Assim, mostra-se que a LMI da Desigualdade (3.46) é uma condição suficiente para a Desigualdade (3.59) e, portanto, para a Desigualdade (3.55) sempre que $\varphi \in [l, u]$ e $\nu \in \mathcal{V}$.

Em resumo, a Equação (3.51) mostra que $V(e)$ é definida positiva e radialmente ilimitada. A expressão da Desigualdade (3.55) implica que $V(e)$ está decrescendo globalmente, mesmo que ocorram movimentos deslizantes, e a estabilidade assintótica global segue de forma similar à apresentada em Senger e Trofino (2014) e Dezuo, Trofino e Scharlau (2014) usando os resultados de Filippov (1988, p.155). $\square$

Observação 3. Os resultados apresentados neste teorema são gerais o bastante para abranger qualquer número n de estados e qualquer número $d \leq n$ de não linearidades. O limite em d é resultado da Equação (3.2), onde assume-se que cada elemento do vetor não linear depende apenas de um estado. Essa suposição é feita por dois motivos: (i) a Definição 2 exige que cada ϕ_i seja uma função de apenas um x_i e (ii) múltiplas não linearidades, dependendo do mesmo estado, levam a matriz D a ter linhas iguais e, portanto, a Equação (3.7) não é inversível. O caso $d = n$ implica que todos os estados do sistema original da Equação (3.1) sejam substituídos por suas respectivas funções não-lineares na nova representação do sistema, levando a lei de chaveamento a ser uma função que depende apenas da saída das não linearidades. $\square$

3.2.2 Caso 2: Sistema com funções não lineares incertas

Nota-se que a influência de um δ incerto aparece nas LMIs do Teorema 3 através de $\bar{q} = \psi(\bar{p}, \delta)$, que implica que $\bar{\theta}$ seja alterado também para satisfazer a condição de equilíbrio

da Equação (3.23). Busca-se neste caso eliminar a dependência de δ nas condições de projeto da lei de chaveamento, o que pode ser obtido eliminando $\bar{q}$ e $\bar{\theta}$ dessas condições. Para esse propósito, supõe-se que o sistema apresentado na Equação (3.1) satisfaça a Suposição 2.

Suposição 2. $A_i \in \mathcal{A}_d := \{A_i D' = A_j D', \forall i, j \in \mathcal{M}\}$. □

A notação apresentada nas Equações (3.60)-(3.62) será utilizada no Corolário 2, que apresenta um projeto de lei de chaveamento para sistemas com equilíbrio incerto.

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & \dots & \hat{k}_m \end{bmatrix}, \quad \hat{k}_i = (F_i - F_{\bar{\theta}})\bar{\chi} + g_i - g_{\bar{\theta}}, \quad (3.60)$$

$$\hat{\Psi}(\nu) = \begin{bmatrix} F'H(\nu)'P + P'H(\nu)F & \star & \star \\ G'H(\nu)'P & \mathbf{0}_{md \times md} & \star \\ \hat{K}'H(\nu)'P + S'H(\nu)F & S'H(\nu)G & \hat{K}'H(\nu)'S + S'H(\nu)\hat{K} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{mn \times mn} & \star & \star \\ \mathbf{0}_{md \times mn} & \mathbf{0}_{md \times md} & \star \\ 2S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times md} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Corolário 2. *Supõe-se que o sistema da Equação (3.1) satisfaça a Suposição 2. Seja $\bar{\chi}$ um vetor constante dado, representando o ponto de equilíbrio desejado do sistema da Equação (3.14) e supõe-se que $\chi(t)$ esteja disponível online para medição. Considera-se o erro do sistema como o apresentado na Equação (3.18) com um determinado setor $[l, u]$ e os vértices $\nu_{j_{\min}}, \nu_{j_{\max}}$ definidos como na Equação (3.16). Utiliza-se a notação auxiliar apresentada nas Equações (3.33)-(3.44) e (3.60)-(3.62) sendo L_i, L_b matrizes a serem determinadas com as dimensões de M'_a, M'_b , respectivamente. Supõe-se que $\exists P, S, \tau, L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$, que resolvam as seguintes LMIs:*

$$P_o > 0, \quad P_i = P_o, \quad \forall i \in \mathcal{M}, \quad (3.63)$$

$$\hat{\Psi}(\nu) + \hat{\Phi} + \Gamma + L_a(\theta)M_a + M'_a L_a(\theta)' + L_b M_b(\theta) + M_b(\theta)' L'_b < 0, \quad \forall \nu \in \vartheta(\mathcal{V}), \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta). \quad (3.64)$$

Então o sistema apresentado no formato $\dot{\chi}(t) = H(\nu)(F_i \chi(t) + G_i q(t) + g_i)$ é globalmente assintoticamente estável com a lei de chaveamento $\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}$ e com isso,

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\}, \quad v_i(e) = e' P_o e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}), \quad (3.65)$$

é uma função Lyapunov para o sistema chaveado. □

Demonstração. A demonstração segue as mesmas linhas da demonstração do Teorema 3, portanto somente as diferenças serão destacadas.

Primeiro, percebe-se pelas Equações (3.49), (3.50), e (3.63) que:

$$V(e) \geq \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e) = e' P_o e > 0 . \quad (3.66)$$

garante a positividade de $V(e)$ pois $e' P_o e$ é uma forma quadrática positiva uma vez que satisfaz a Equação (3.63).

É possível observar que, das Equações (3.25) e (3.60), se a Suposição 2 for satisfeita, então $G_i = G_j, \forall i, j \in \mathcal{M}$. Assim, obtêm-se

$$k_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i k_i = \sum_{i=1}^m \theta_i \hat{k}_i , \quad (3.67)$$

o que implica que k_θ não depende de $\bar{q}$ e, por sua vez, não depende de δ . Além disso, a Equação (3.63) implica $P_\theta - P_{\bar{\theta}} = P_o - P_o = 0$, portanto, $\bar{\theta}$ também não aparece mais nas LMIs. Com isso, utilizam-se as Equações (3.56) e (3.67), e a notação apresentada nas Equações (3.33)-(3.44) e (3.60)-(3.62), é possível reescrever a Desigualdade (3.55) como:

$$D_{f(e)} V(e) + 2\alpha_\theta (V(e) - e' P_{\bar{\theta}} e) = \xi' (\hat{\Psi}(\nu) + \hat{\Phi}) \xi < 0 , \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \forall \theta \in \Theta . \quad (3.68)$$

o que leva à Equação (3.64). O restante da demonstração segue inalterado. $\square$

Observação 4. Um subproduto interessante da transformação não linear é a possibilidade de considerar o caso de função não linear incerta sem qualquer suposição sobre a estrutura das matrizes B_i . É possível deduzir que, para uma lei de chaveamento baseada no sistema original apresentado na Equação (3.1), como em Dezuo, Trofino e Scharlau (2014), a condição de equilíbrio do Lema 3 seria substituída por $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (A_i \bar{x} + B_i \bar{p} + b_i) = 0$. Portanto, analogamente ao k_i da Equação (3.25), para eliminar $\bar{p}$ das condições de projeto, é necessário que $B_i = B_j, \forall i, j \in \mathcal{M}$, no método proposto por Dezuo, Trofino e Scharlau (2014). Já a forma transformada do Lema 3 não tem essa restrição, permitindo que diferentes estruturas de sistemas com não linearidades incertas sejam consideradas. $\square$

3.2.3 Caso 3: Sistema com alteração de referência online

Supõe-se que o sistema apresentado na Equação (3.1) satisfaça a suposição a seguir:

Suposição 3. $A_i \in \mathcal{A} := \{A_i : A_i = A_j, \forall i, j \in \mathcal{M}\}$ e $B_i \in \mathcal{B} := \{B_i : B_i = B_j, \forall i, j \in \mathcal{M}\}$. $\square$

Considera-se a notação das Equações (3.69)-(3.71) e o Corolário 3 para o projeto da lei de chaveamento independente de equilíbrio.

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{k}_m \end{bmatrix} , \quad \tilde{k}_i = g_i - g_{\bar{\theta}} , \quad (3.69)$$

$$\tilde{\Psi}(\nu) = \begin{bmatrix} F'H(\nu)'P + P'H(\nu)F & \star & \star \\ G'H(\nu)'P & \mathbf{0}_{md \times md} & \star \\ \tilde{K}'H(\nu)'P + S'H(\nu)F & S'H(\nu)G & \tilde{K}'H(\nu)'S + S'H(\nu)\tilde{K} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{mn \times mn} & \star & \star \\ \mathbf{0}_{md \times mn} & \mathbf{0}_{md \times md} & \star \\ S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times md} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Corolário 3. *Supõe-se que o sistema da Equação (3.1) satisfaça a Suposição 3 e que $\chi(t)$ e $\bar{\chi}$ estejam disponíveis para medição em tempo real. Considera-se o erro do sistema como o apresentado na Equação (3.18) com um determinado setor $[l, u]$ e os vértices $\nu_{j_{min}}$, $\nu_{j_{max}}$ definidos como na Equação (3.16). Utiliza-se a notação auxiliar apresentada nas Equações (3.33)-(3.44) e (3.69)-(3.71) sendo L_i, L_b matrizes a serem determinadas com as dimensões de M'_a, M'_b , respectivamente. Supõe-se que $\exists P, S, \tau, L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$, que resolvam as seguintes LMIs:*

$$P_o > 0, \quad P_i = P_o, \forall i \in \mathcal{M}, \quad (3.72)$$

$$\tilde{\Psi}(\nu) + \tilde{\Phi} + \Gamma + L_a(\theta)M_a + M'_a L_a(\theta)' + L_b M_b(\theta) + M_b(\theta)' L'_b < 0, \quad \forall \nu \in \vartheta(\mathcal{V}), \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (3.73)$$

Então o sistema apresentado no formato $\dot{\chi}(t) = H(\nu)(F_i \chi(t) + G_i q(t) + g_i)$ é globalmente assintoticamente estável com a lei de chaveamento $\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}$ e com isso,

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\}, \quad v_i(e) = e' P_o e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}), \quad (3.74)$$

é uma função Lyapunov para o sistema chaveado. $\square$

Demonstração. A demonstração segue as mesmas linhas da prova do Corolário 2, portanto, apenas as diferenças serão apresentadas. Observa-se, pelas Equações (3.25) e (3.69) que, se a Suposição 3 for satisfeita, então $F_i = F_j$, $G_i = G_j$, $\forall i, j \in \mathcal{M}$. Com isso, obtém-se:

$$k_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i k_i = \sum_{i=1}^m \theta_i \tilde{k}_i, \quad (3.75)$$

o que implica que k_θ não depende de $\bar{\chi}$ e $\bar{q}$. Além disso, a Equação (3.72) implica $P_\theta - P_{\bar{\theta}} = P_o - P_o = 0$, portanto, $\bar{\theta}$ também é eliminado. Portanto, utilizando as Equações (3.56) e (3.75), juntamente com a notação apresentada nas Equações (3.33)-(3.44) e (3.69)-(3.71), pode-se reescrever a Desigualdade (3.55) como:

$$D_{f(e)} V(e) + 2\alpha_\theta (V(e) - e' P_{\bar{\theta}} e) = \xi' (\tilde{\Psi}(\nu) + \tilde{\Phi}) \xi < 0, \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (3.76)$$

o que leva à condição da Desigualdade (3.73). O restante da prova segue inalterado. $\square$

Observação 5. *Devido à Suposição 3 e à condição da Equação (3.72), as LMIs no Corolário 3 não dependem de $\bar{\chi}$, $\bar{q}$ e $\bar{\theta}$. Isso permite que o Corolário 3 seja aplicado mesmo que algumas entradas do ponto de operação desejado $\bar{\chi}$ não sejam conhecidas a priori no projeto. Mudanças no ponto de equilíbrio variantes no tempo passam a serem possíveis, mantendo a garantia de estabilidade, desde que as mudanças possam ser representadas por vetores constantes por partes $\bar{\chi}$ variando lentamente o suficiente quando comparados à dinâmica do sistema.* $\square$

Os resultados teóricos apresentados até aqui são genéricos o suficiente para serem aplicados em quaisquer sistemas chaveados pertencentes à classe apresentada na Equação (3.1) cujas não linearidades satisfazem a Suposição 1.

A técnica de controle proposta neste capítulo apresenta diversas vantagens se comparadas a outras presentes na literatura, como tratar um sistema não linear sem a utilização de linearização ou aproximação, controlar o sistema utilizando unicamente a saída das funções não linear, entre outras. Existem diversas aplicações que poderão usufruir destas vantagens, nos próximos capítulos um sistema fotovoltaico será utilizado como forma de ilustrar possíveis aplicações.

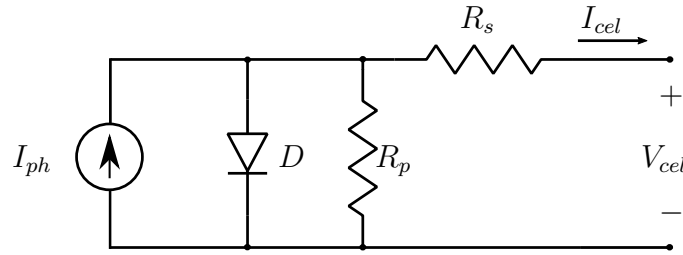
4 SISTEMAS FOTOVOLTAICOS

Este capítulo introduz os sistemas fotovoltaicos e justifica sua possibilidade de aplicação na técnica proposta no Capítulo 3. Para isso, apresenta uma modelagem para estes sistemas, além das curvas características I - V e P - V sob condições uniformes e não uniformes e, com isso, mostra que as curvas I - V podem ser tratadas como não linearidades limitadas em setores. Também, esclarece o motivo da utilização de conversores chaveados CC-CC entre a saída do arranjo e a entrada da carga, o que faz com que este seja um sistema chaveado.

4.1 MODELAGEM DE UMA CÉLULA FOTOVOLTAICA

A modelagem de uma célula fotovoltaica pode ser feita de forma simplificada, por meio de um circuito equivalente contendo uma fonte de corrente, em paralelo a um diodo. Para apresentar o efeito de não idealidades presente no sistema, pode-se adicionar duas resistências, uma em série e a outra em paralelo, como apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Modelo simplificado de uma célula fotovoltaica.



Fonte: Próprio autor.

Desenvolvendo a equação para o circuito da Figura 4, obtém-se os seguintes resultados (CASARO, 2009):

$$I_{ph} - \left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) I_{cel} - \frac{V_{cel}}{R_p} - I_r \left(\exp \left(\frac{\epsilon}{\eta k T} (V_{cel} + R_s I_{cel}) \right) - 1 \right) = 0, \quad (4.1)$$

onde:

$$I_{ph} = (I_{sc} + \gamma (T - T_r)) \frac{P_{sun}}{P_{sun_r}}, \quad (4.2)$$

$$I_r = I_{rr} \left(\frac{T}{T_r} \right)^3 \exp \left(\frac{\epsilon E_g}{\eta \kappa} \left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T} \right) \right), \quad (4.3)$$

$$I_{rr} = \frac{I_{sc} - \frac{V_{oc}}{R_p}}{\exp \left(\frac{\epsilon V_{oc}}{\eta \kappa T_r} \right) - 1}. \quad (4.4)$$

Variáveis:

- V_{cel} - Tensão de saída nos terminais da célula, em Volts;
- I_{cel} - Corrente de saída nos terminais da célula, em Amperes;
- I_{ph} - Fotocorrente, em Amperes;
- I_r - Corrente de saturação reversa da célula, em Amperes.

Constantes retiradas do *datasheet* do módulo ou determináveis:

- R_s - Resistência série da célula, em Ohms;
- R_p - Resistência paralelo da célula, em Ohms;
- e - Carga do elétron (1.6×10^{-19} C);
- η - Fator de qualidade da junção p-n;
- κ - Constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K);
- T_r - Temperatura de referência (298K);
- P_{sun_r} - Intensidade de irradiação de referência (1000 W/m²);
- I_{sc} - Corrente de curto circuito da célula, em Amperes;
- V_{oc} - Tensão de circuito aberto da célula, em Volts;
- γ - Coeficiente de temperatura de I_{sc} ;
- I_{rr} - Corrente de saturação reversa de referência;
- E_g - Energia de banda do silício (1.1 eV).

Parâmetros de entrada:

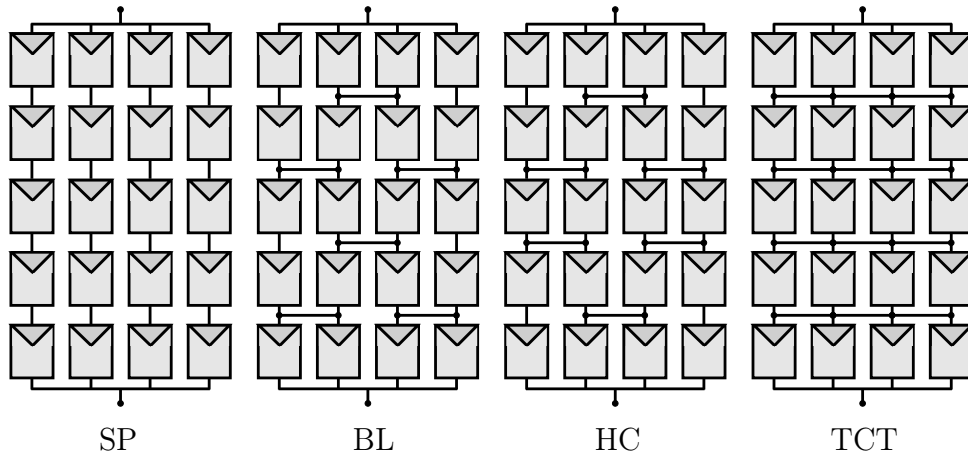
- T - Temperatura da célula, em Kelvin;
- P_{sun} - Intensidade de irradiação solar recebida, em W/m².

É possível perceber pela Equação (4.1) que I_{cel} ou V_{cel} não podem ser isolados em função das demais variáveis. Logo, é necessário calcular seus valores empregando métodos numéricos para a realização de simulações. Para isso, é possível obter o valor de I_{cel} para cada valor de V_{cel} , ou de forma análoga, obter o valor de V_{cel} para cada valor de I_{cel} , levando em consideração os parâmetros das células e os valores de temperatura e irradiação. Uma possível saída é utilizar o método de Newton-Raphson para encontrar a solução desta equação. Esse método é preferido por apresentar uma convergência em

poucas interações e também por já ser utilizado em outros trabalhos envolvendo sistemas fotovoltaicos (DEZUO, 2014).

Utilizando as células fotovoltaicas, inúmeras formas de interconexão são possíveis para formar um módulo. Alguns exemplos são as conexões *Series Parallel* (SP), *Bridge Link* (BL), *Honey Comb* (HC) e *Total Cross Tied* (TCT), como apresentado na Figura 5. A forma de conexão em um painel é muito importante, pois faz com que o mesmo possa apresentar respostas muito distintas quando sob efeito de condições não uniformes (VIJAYALEKSHMY; IYER, 2014).

Figura 5 – Topologias típicas de arranjos fotovoltaicos.



Fonte: Adaptado de Vijayalekshmy e Iyer (2014).

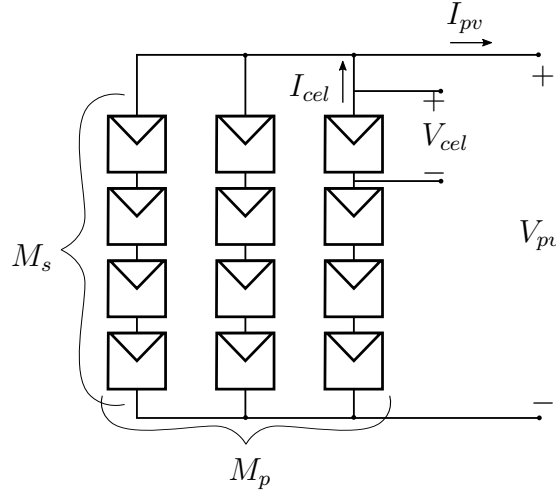
Vale ressaltar que, em condições uniformes de temperatura e irradiação, é possível obter uma equação que descreva o comportamento do módulo diretamente a partir da equação de uma célula. Apenas algumas constantes devem ser incluídas, levando em consideração a quantidade de células em série e em paralelo, como mostrado na Figura 6. Esta dissertação tratará a partir deste ponto conexões o tipo SP como exemplo.

Na Figura 6, tem-se que a corrente I_{pv} é a soma das correntes I_{cel} de cada conjunto de células conectadas em paralelo. Já a tensão V_{pv} é a soma da tensão V_{cel} das células conectadas em série. Como em condições uniformes de temperatura e irradiação a tensão divide-se igualmente por todas as células, a corrente produzida por cada célula nessa tensão é a mesma. Logo, a tensão V_{pv} é obtida pela multiplicação da tensão da célula V_{cel} pelo número de painéis conectados em série (M_s) (considerando módulos compostos apenas por células conectadas em série, o termo N_s aparece na equação). A corrente I_{pv} , por sua vez, é a multiplicação de I_{cel} com o número de *strings* em paralelo (M_p).

$$V_{cel} = \frac{V_{pv}}{M_s N_s} \quad (4.5)$$

$$I_{cel} = \frac{I_{pv}}{M_p} \quad (4.6)$$

Figura 6 – Modelagem de um painel fotovoltaico sob condições uniformes.



Fonte: Próprio autor.

Onde:

- V_{pv} - Tensão do arranjo;
- I_{pv} - Corrente do arranjo;
- N_s - Número de células em série no módulo;
- M_s - Número de módulos em série;
- M_p - Número de *strings* em paralelo.

As Equações (4.5) e (4.6) podem ser substituídas na Equação (4.1) para se obter a Equação (4.7), que descreve o comportamento do arranjo de módulos sob condições uniformes.

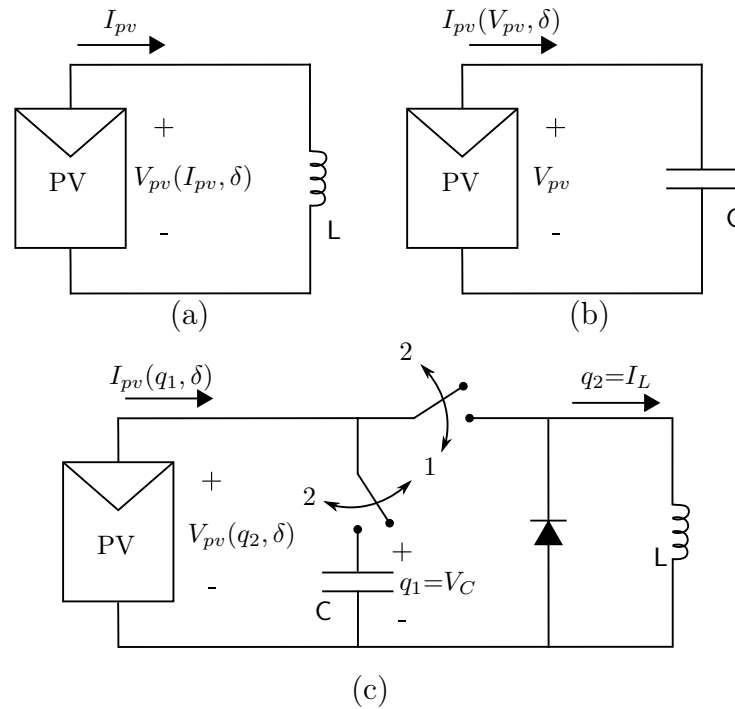
$$I_{ph} - \left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) \frac{I_{pv}}{M_p} - \frac{V_{pv}}{R_p M_s N_s} - I_r \left(\exp \left(\frac{\epsilon}{\eta k T} \left(\frac{V_{pv}}{M_s N_s} + \frac{R_s I_{pv}}{M_p} \right) \right) - 1 \right) = 0 \quad (4.7)$$

É necessário salientar que um arranjo fotovoltaico pode ser modelado como uma fonte de corrente controlada por tensão $I_{pv}(V_{pv}, \delta)$ ou, alternativamente, como uma fonte de tensão controlada por corrente $V_{pv}(I_{pv}, \delta)$, onde δ representa os valores não conhecidos de temperatura (T) e irradiação (P_{sun}).

O que determina se o arranjo fotovoltaico é representado como uma fonte de tensão controlada por corrente ou uma fonte de corrente controlada por tensão depende do circuito ao qual o painel está conectado. A Figura 7(a) mostra um exemplo em que um indutor determina que o atual I_{pv} seja um estado do sistema e, portanto, V_{pv} é a função não linear que representa o arranjo. O segundo caso é mostrado na Figura 7(b). Outro ponto

interessante é representado pela Figura 7(c), em que o mesmo painel fotovoltaico pode ser representado por duas funções não lineares ($I_{pv}(V_{pv}, \delta)$ e $V_{pv}(I_{pv}, \delta)$). Observe que, com ambas as chaves na posição 1, o circuito da Figura 7(c) se resume ao da Figura 7(a), e na posição 2 se resume ao da Figura 7(b).

Figura 7 – Exemplos de topologias de circuitos e suas respectivas variáveis do sistema: (a) Arranjo conectado a um indutor L; (b) Arranjo conectado a um capacitor C; (c) Arranjo conectado com um circuito misto.



Fonte: Próprio autor.

4.2 CURVAS CARACTERÍSTICAS

A partir da Equação (4.7), levando em consideração a irradiação e temperatura distribuídas uniformemente sobre o módulo, pode-se traçar a curva I - V característica de um painel, apresentada na Figura 8.

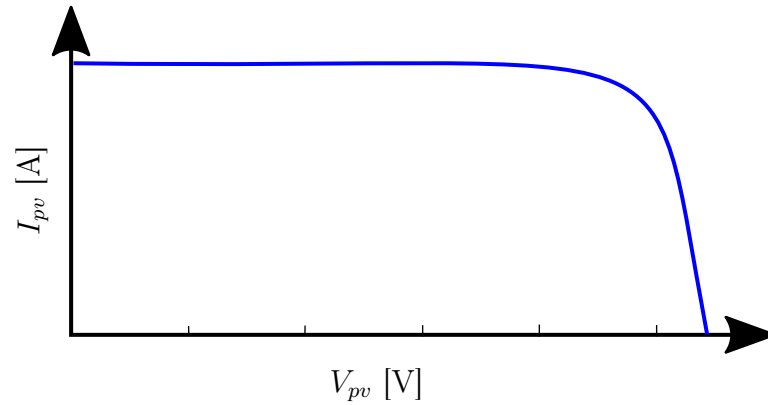
A curva de potência gerada pelo módulo é obtida através da multiplicação da tensão V_{pv} pela corrente I_{pv} do módulo e é apresentada na Figura 9. Para o caso de distribuição uniforme de temperatura e irradiação, pode-se observar que existe apenas um ponto de máximo, sendo esse o máximo global.

A curva I - V de um painel sob condições distintas de irradiação e temperatura (distribuídas uniformemente) pode apresentar uma grande variação, como mostra-se nas Figuras 10 e 11.

Para casos uniformes de irradiação e temperatura, algumas técnicas de MPPT¹ (Rastreador de Máximo Ponto de Potência) utilizadas são de implementação simples e

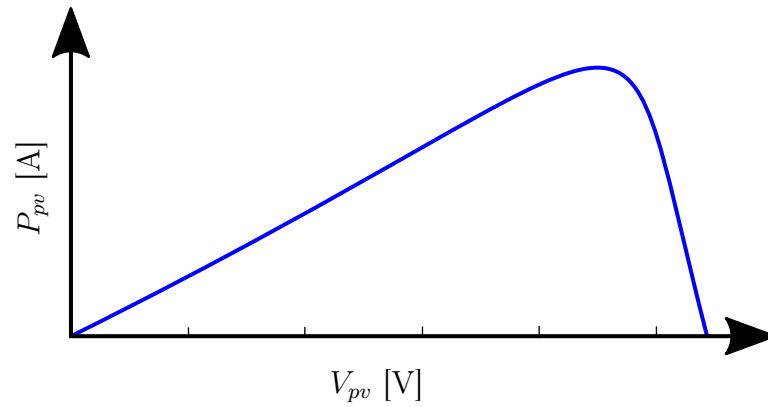
¹ Do inglês: *Maximum Power Point Tracking*.

Figura 8 – Curva característica I - V sob condições uniformes.



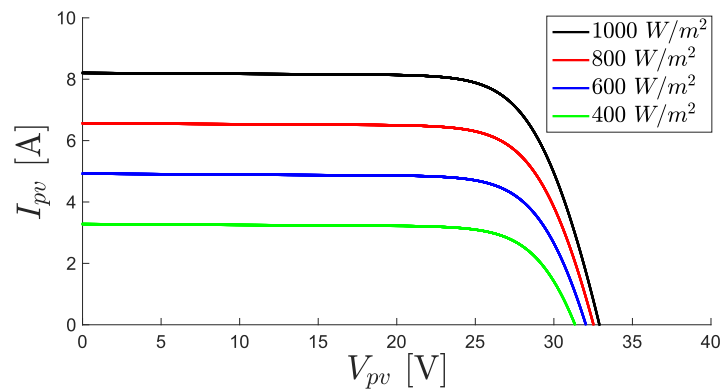
Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

Figura 9 – Curva característica P - V sob condições uniformes.



Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

Figura 10 – Curva característica I - V com temperatura de 25 °C e variação na irradiação.

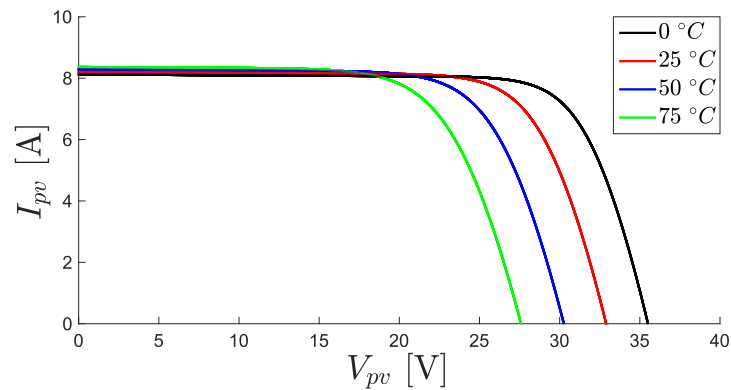


Fonte: Próprio autor.

demonstram-se muito eficientes. Algumas técnicas como a de tensão de circuito aberto fracionária (SOUALMIA; CHENNI, 2016) não requerem medições para sua aplicação, porém, não garantem que o MPP² (Máximo Ponto de Potência) seja alcançado. Outra

² Do inglês: *Maximum Power Point*.

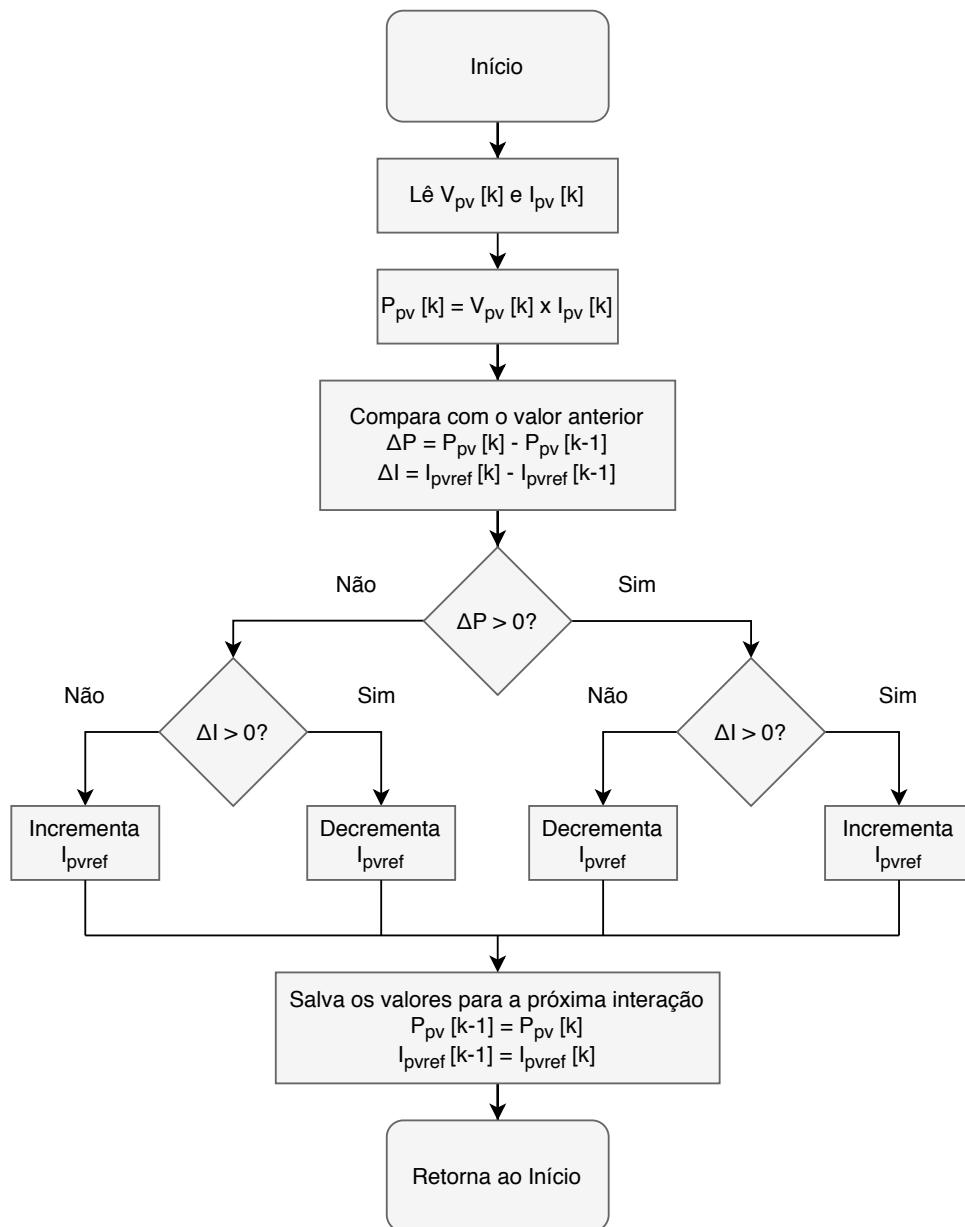
Figura 11 – Curva característica I - V com irradiação de 1000 W/m^2 e variação na temperatura.



Fonte: Próprio autor.

técnica amplamente utilizada é conhecida como Perturba & Observa (P&O), que é uma adaptação da técnica apresentada por Armstrong e Hurley (2004), onde passos de corrente I_{pvref} são aplicados resultando em uma variação na tensão V_{pv} . Multiplica-se a tensão e a corrente atualizadas e compara-se com os valores de corrente e potência anteriores. A corrente I_{pvref} aumenta até que a potência diminua, e quando isso ocorre, a corrente passa a diminuir, como mostra o fluxograma da Figura 12. Como existe apenas um ponto de máximo, o algoritmo fica oscilando em torno desse ponto, variando os passos de corrente para mais e para menos em torno do ponto de maior potência.

Figura 12 – Fluxograma MPPT P&O convencional.



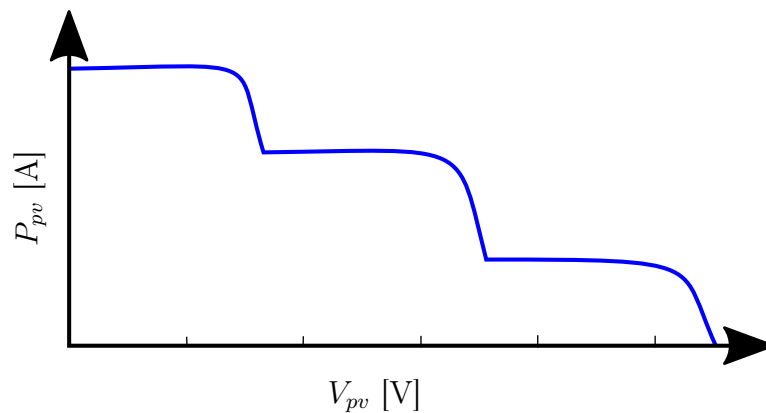
Fonte: Próprio autor.

4.3 SISTEMAS FOTOVOLTAICOS SOB CONDIÇÕES NÃO UNIFORMES

Sabe-se que o sombreamento de módulos e painéis ocasiona a redução da potência de saída de um sistema fotovoltaico. O sombreamento parcial, por sua vez, além de causar uma redução na potência gerada, pode acabar danificando os próprios painéis fotovoltaicos se estes não estiverem preparados para isso. Uma sombra cobrindo um grupo de células irá reduzir a produção de energia por duas razões: pelo aumento das perdas de energia nas células mais sombreadas, que podem passar a atuar como cargas consumidoras de energia e pela redução da energia fornecida pela célula devido à menor irradiação recebida (LOPES, 2013).

Quando condições não uniformes ocorrem, as curvas $I-V$ e $P-V$ do arranjo fotovoltaico acabam por perder algumas de suas características, como mostrado nas Figuras 13 e 14. Maiores informações sobre a modelagem de um arranjo fotovoltaico sob condições não uniformes podem ser encontradas em Lunardi (2017). Uma destas características é o surgimento de picos locais de máxima potência, que se não forem tratados de maneira adequada, podem fazer com que o algoritmo responsável pelo MPPT fique preso a um máximo local, fazendo com que uma parcela da energia disponível não seja captada.

Figura 13 – Curva característica $I-V$ sob condições não uniformes.

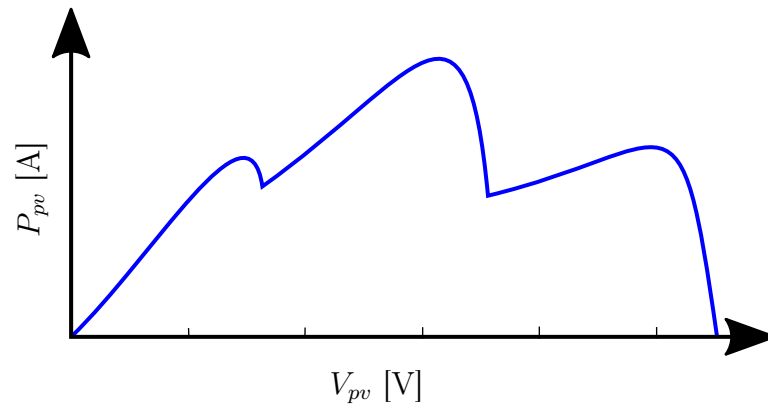


Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

Quando submetido a variações não uniformes, o algoritmo de MPPT exibido na Figura 12 não apresenta garantia de que o ponto de operação alcançado seja o máximo global e não um máximo local. Buscando contornar esse problema, é possível utilizar um algoritmo de fácil implementação e que apresenta uma garantia de convergência para o máximo global. A Figura 15 apresenta um algoritmo de MPPT global capaz de resolver os casos de múltiplos máximos. Mais informações sobre esse algoritmo podem ser encontradas em Lunardi (2017).

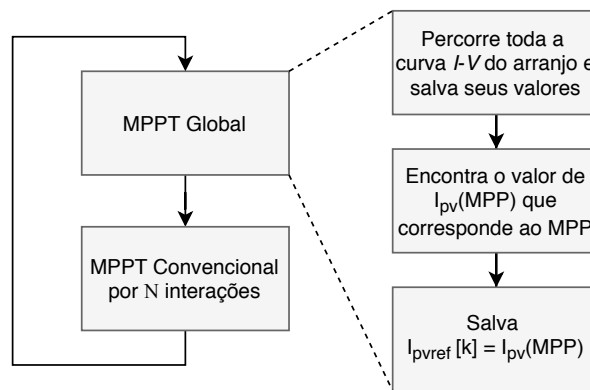
Em resumo, o algoritmo apresentado na Figura 15 percorre toda a curva $I-V$ do arranjo salvando os valores de tensão e corrente respectivos. Após esses dados obtidos é possível encontrar a localização do máximo global da curva, sendo então o valor da corrente

Figura 14 – Curva característica P - V sob condições não uniformes.



Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

Figura 15 – Fluxograma MPPT global.



Fonte: Próprio autor.

I_{pv} correspondente ao de MPP definido como referência para o MPPT P&O convencional, que dessa maneira passa a trabalhar no máximo global. O MPPT Global é utilizado de tempos em tempos apenas para garantir que o MPPT P&O não passe a trabalhar em um máximo local em caso de variações paramétricas.

4.4 SISTEMAS FOTOVOLTAICOS LIMITADOS POR SETORES

Conhecendo as características do sistema fotovoltaico apresentado na Seção 4.2, é possível observar algumas peculiaridades.

Como visto na Subseção 2.4.1, se para qualquer ponto da curva I - V existirem funções que abranjam a curva toda, estas podem ser consideradas como funções limitantes dessa curva. Para isso, pode-se sugerir retas cujas inclinações sempre englobem toda a curva I - V .

Para encontrar os setores que englobam a não linearidade do sistema (curva I - V), pode-se olhar para a derivada da curva I - V . Para isso, é necessário derivar a Equação (4.7) em função da tensão V_{pv} e encontrar os casos extremos desta derivada.

O procedimento completo da derivada da Equação (4.7) é apresentado no Apêndice B e chega-se a equação:

$$\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = -\frac{M_p}{M_s N_s} \left(\frac{1 + R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})}{R_p + R_s(1 + R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}))} \right) \quad (4.8)$$

$$= -\frac{M_p}{N_s M_s \left(R_s + \frac{R_p}{1 + R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})} \right)}, \quad (4.9)$$

onde:

$$f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}) = I_r \frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \exp \left(\frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \left(\frac{V_{pv}}{M_s N_s} + \frac{R_s I_{pv}}{M_p} \right) \right). \quad (4.10)$$

Para obter os setores que limitam essa função é necessário relembrar que um painel fotovoltaico sempre trabalha com V_{pv} e I_{pv} positivos, o que é sempre verdade se existem diodos de *bypass* e de bloqueio instalados para impedir que o painel consuma potência. É possível notar que a função apresentada na Equação (4.10) é sempre positiva, independente dos valores de $(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})$. Com isso, obtêm-se os valores da derivada menos negativa (u_u) e da mais negativa (l_u), para o caso de variações uniformes, através dos limites:

$$u_u = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = -\frac{M_p}{M_s N_s (R_s + R_p)} \quad (4.11)$$

$$l_u = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = -\frac{M_p}{M_s N_s R_s}. \quad (4.12)$$

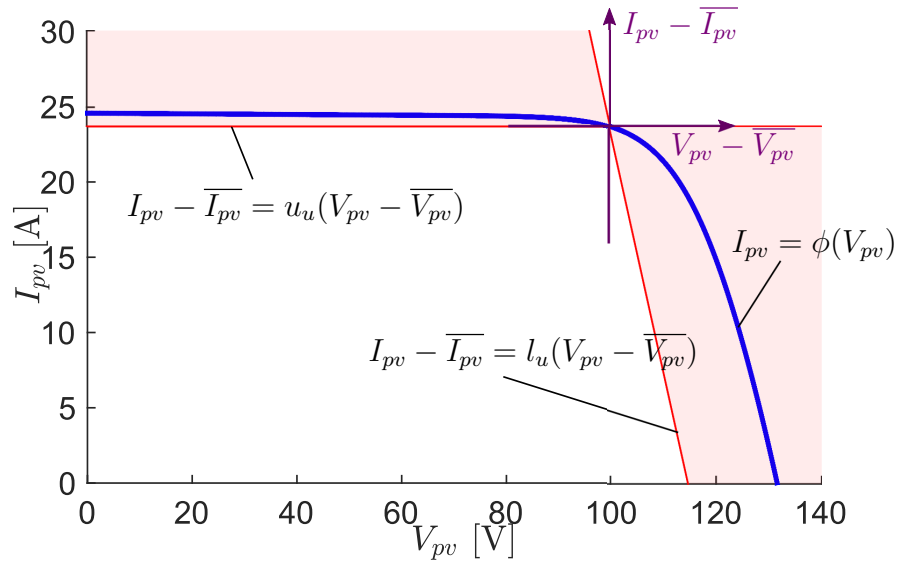
Qualquer ponto da curva I - V é abrangido pelos setores delimitados pela inclinação das retas $[l_u, u_u]$, apresentadas nas Equações (4.11) e (4.12), desde que o sistema apresente distribuições uniformes de temperatura e irradiação.

A Figura 16 apresenta um exemplo de uma curva I - V , para o arranjo fotovoltaico da Figura 6 ($M_s = 4$ e $M_p = 3$) e com módulos cujos parâmetros são apresentados na Tabela 1, sendo a curva delimitada pelas retas cujas inclinações provêm das Equações (4.11) e (4.12).

Entretanto, quando um arranjo fotovoltaico se encontra sob condições não uniformes de temperatura e radiação, as curvas passam a apresentar um comportamento distinto do mostrado na Figura 8, e com isso as Equações (4.11) e (4.12) podem não limitar a curva I - V , tal como apresentado na Figura 17. Nesse caso, é necessário um estudo que busque novos setores que consigam delimitar a curva I - V sujeita a condições não uniformes de temperatura e irradiação.

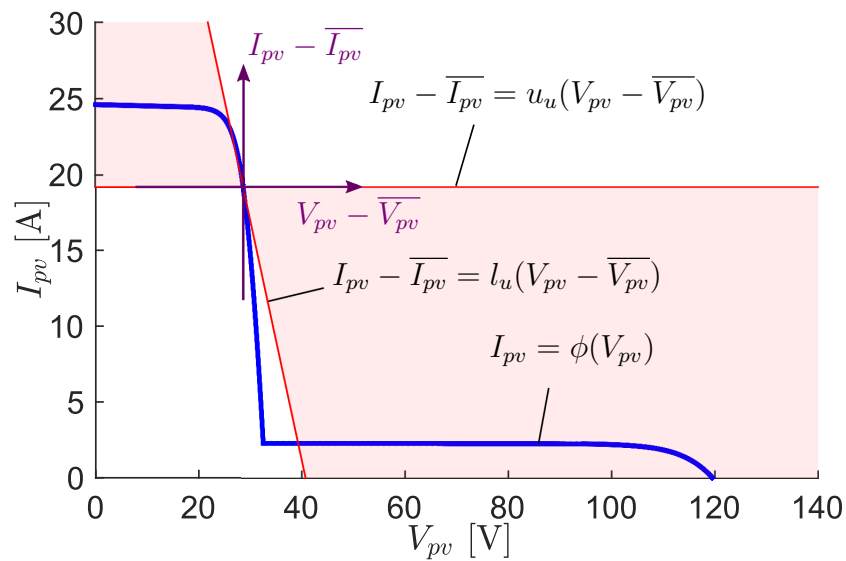
Em Dezuio, Lunardi e Trofino (2017), são abordados casos não uniformes de um sistema fotovoltaico, buscando encontrar os setores que abrangem as curvas I - V sob essas condições.

Figura 16 – Curva I - V de um sistema fotovoltaico sob condições uniformes limitado por setores.



Fonte: Próprio autor.

Figura 17 – Curva I - V de um sistema fotovoltaico sob condições não uniformes limitado por setores para o caso uniforme.



Fonte: Próprio autor.

Em resumo, a análise é feita sabendo que a variação de corrente total I_{pv} é igual à soma da variação das correntes de cada *string*. De forma análoga, a variação de tensão V_{pv} é dividida em todas as células que estão conectadas em série.

A derivada menos negativa (u) ocorre quando a variação de corrente apresenta o menor valor em módulo, ou seja, quando apenas uma *string* se encontra parcialmente sem sombreamento (em outras palavras: $M_p = 1$). Além disso, é necessário que a variação de

tensão seja a maior valor possível, sendo que isso ocorre quando todos os módulos em série desta *string* estão sem sombreamento (ou seja M_s não se altera).

Do mesmo modo, a derivada mais negativa (l) ocorre quando a variação de corrente apresenta o maior valor em módulo, ou seja, quando o maior número de *strings* contém módulos que não estão completamente sombreados (em outras palavras: M_p não se altera). Além disso, é necessário que a variação de tensão seja o menor valor possível. Pode-se notar que este caso ocorre quando o menor número de módulos em série da *string* está sem sombreamento (ou seja, $M_s = 1$).

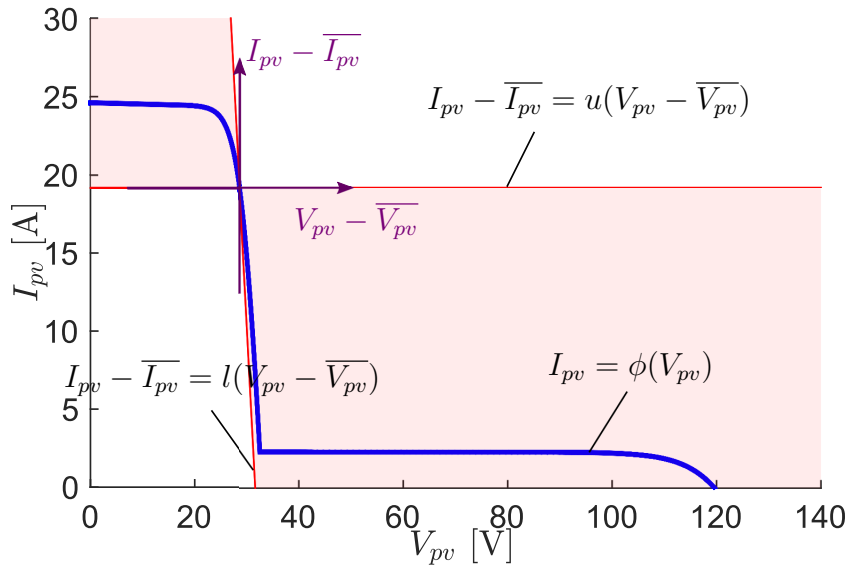
Desse modo, substituindo-se $M_p = 1$ na Equação (4.11) e $M_s = 1$ na Equação (4.12), obtém-se respectivamente, as Equações (4.13) e (4.14) para os limites que irão abranger toda a curva, independente do sombreamento.

$$u = \lim_{f \rightarrow 0} \left. \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} \right|_{M_p=1} = -\frac{1}{M_s N_s (R_s + R_p)} \quad (4.13)$$

$$l = \lim_{f \rightarrow \infty} \left. \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} \right|_{M_s=1} = -\frac{M_p}{N_s R_s} \quad (4.14)$$

Pode-se perceber, então, que os piores casos de derivada dependem do modo de sombreamento, da quantidade de módulos conectados em série (M_s) e do número de *strings* em paralelo (M_p).

Figura 18 – Curva I - V de um sistema fotovoltaico sob condições não uniformes limitado por setores para o caso não uniforme.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 18 apresenta o mesmo sistema da Figura 16 sob condições não uniformes de temperatura e irradiação, porém com as inclinações das retas que a limitam sendo

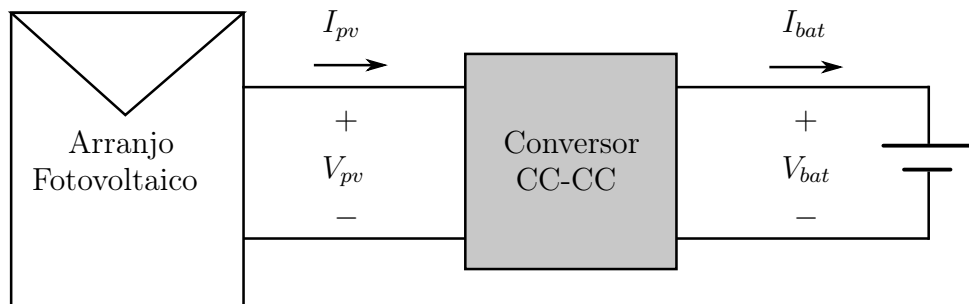
dadas pelas Equações (4.13) e (4.14). Esses limites são robustos o suficiente para limitarem a curva $I-V$, independente das condições não uniformes de radiação e temperatura, como apresentado em Dezuo, Lunardi e Trofino (2017).

4.5 CONVERSORES CC-CC

Quando se busca a maior eficiência possível de um sistema fotovoltaico, é necessário que seja possível alterar a tensão do arranjo. Porém, se o painel for conectado diretamente à carga (como ocorre em uma bateria), sua tensão de operação não pode ser modificada. Assim, surge a necessidade de um conversor de Corrente Contínua (CC-CC), para que a tensão do painel possa ser ajustada, aumentando assim seu rendimento.

Os conversores CC-CC são sistemas formados por semicondutores de potência operando como interruptores e por elementos passivos, que têm a função de controlar o fluxo de energia entre a sua entrada e a sua saída. Isso está apresentado na Figura 19, para o caso do controle de um módulo fotovoltaico com bateria, onde um conversor pode variar a tensão do painel V_{pv} e manter a tensão da bateria V_{bat} constante.

Figura 19 – Conexão de um conversor CC-CC.



Fonte: Adaptado de Coelho, Concer e Martins (2009).

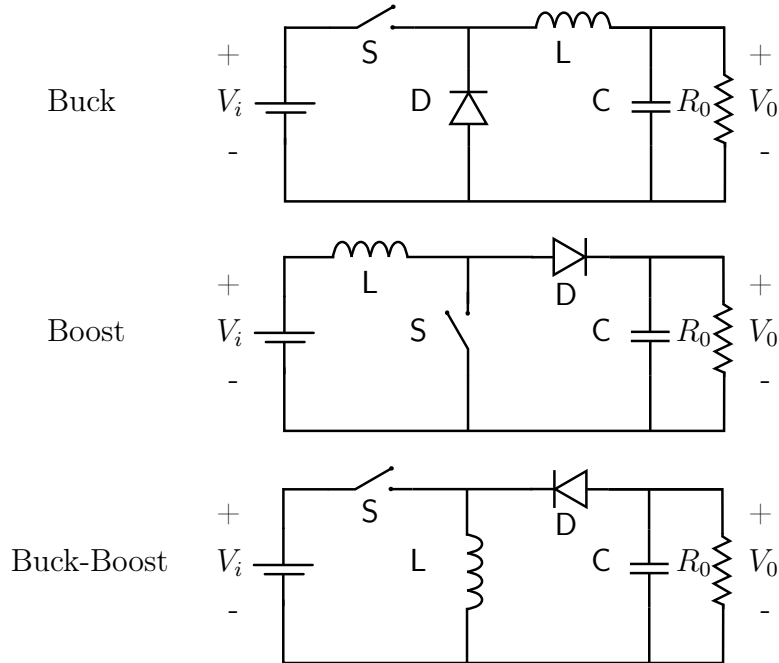
A escolha do conversor é influenciada por diversos fatores, dentre eles a relação entrada/saída de tensões possíveis. Quando se deseja trabalhar com tensões de saída V_{bat} menores que a tensão de entrada V_{pv} , um conversor possível para ser utilizado é o *Buck*, que é um abaixador de tensão. Para se trabalhar com tensões de saída V_{bat} mais elevadas que a tensão de entrada V_{pv} , um conversor possível para ser utilizado é o *Boost*, que é um elevador de tensão. Porém, quando se deseja trabalhar com tensões de saída V_{bat} , que podem variar tanto para tensões maiores quanto menores que as da entrada V_{pv} , um conversor possível para ser utilizado é o *Buck-Boost*, que pode trabalhar tanto como um elevador quanto como um abaixador de tensão.

Cada conversor anteriormente citado apresenta uma topologia distinta, como mostra a Figura 20. Porém, basicamente, eles utilizam os mesmos componentes³: um capacitor

³ Embora existam diversos outros conversores de estruturas mais complexas e com diferenças de operação que vão além da conversão entre níveis de tensão, mesmo sendo possível, tratar estes casos não é o escopo deste trabalho.

(C), um indutor (L), um diodo (D) e uma chave (S), esta sendo responsável pelo controle do sistema. Circuitos que apresentam chaves para o controle de sua saída são conhecidos como sistemas chaveados.

Figura 20 – Topologias de conversores CC-CC.



Fonte: Próprio autor.

Os conversores são uma ótima alternativa para o controle da geração fotovoltaica, por possibilitarem a variação da tensão em seus terminais, a fim de buscar o ponto de operação de maior potência que pode ser fornecida pelo painel.

5 APLICAÇÃO EM SISTEMAS FOTOVOLTAICOS

Conforme apresentado no Capítulo 3, a técnica proposta nessa dissertação apresenta diversas vantagens, como a possibilidade de escolher a saída da função não linear como variável de estado, garantindo sua estabilidade.

Uma das possíveis aplicações que satisfazem os requisitos é apresentada no Capítulo 4, onde é mostrado que a curva I - V de um arranjo fotovoltaico é limitada por setores.

5.1 CARACTERÍSTICAS BASE PARA AS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Utilizou-se o *solver* SeDuMi com a interface Yalmip (LÖFBERG, 2004) para resolver as LMIs, e a simulação do sistema chaveado foi feita no software Matlab, na plataforma do Simulink.

Utilizou-se o arranjo fotovoltaico, como apresentado na Figura 21, com nove módulos KC200GT da Kyocera, cujos parâmetros são os apresentados na Tabela 1, (arranjados com $M_p = 3$, $M_s = 3$) conectados a um conversor *Boost* com tensão de saída fixa, conforme mostrado na Figura 22. Os parâmetros do conversor são apresentados na Tabela 2.

Tabela 1 – Parâmetros do painel KC200GT.

Parâmetro	Valor
V_{oc}	32.9V
I_{sc}	8.21A
γ	$3.18 \times 10^{-3} \text{ A}/^\circ\text{C}$
η	1.2
R_s	$5 \times 10^{-3} \Omega$
R_p	7Ω
N_s	54

Fonte: Adaptado de Casaro (2009).

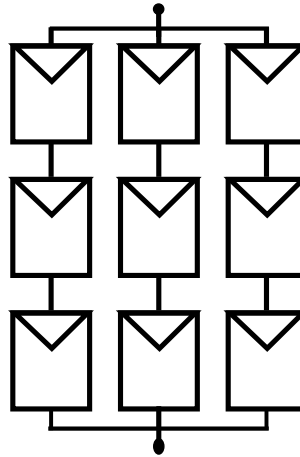
Tabela 2 – Parâmetros do conversor Boost.

Parâmetro	Valor
L	$50mH$
R	$10m\Omega$
C	$1\mu F$
V_{dc}	$350V$

Fonte: Adaptado de Dezuo (2014).

A seguir, considerou-se o arranjo fotovoltaico conectado à tensão de saída fixa através de duas topologias diferentes de conversor. Esse exemplo tem como aplicação sistemas *off-grid* ou sistemas conectados à rede com uma tensão constante no barramento CC. No

Figura 21 – Arranjo fotovoltaico simulado.



Fonte: Próprio autor.

primeiro exemplo, adaptado de Dezu, Lunardi e Trofino (2017), o arranjo fotovoltaico é modelado como uma fonte de tensão conectada a uma topologia *Boost* sem capacitor de entrada, onde é medida apenas a função não linear (a medição do estado da representação original do sistema não é necessário para o controle). Também, nesse caso, o arranjo fotovoltaico é exposto apenas a condições uniformes de temperatura e irradiação. No segundo exemplo, adaptado de Dezu, Trofino e Scharlau (2014), um capacitor de entrada é adicionado à topologia e, portanto, o arranjo deve ser modelado como uma fonte de corrente. A complexidade adicional do último caso gera desafios na realização do MPPT, que foram contornados em Dezu, Trofino e Scharlau (2014), utilizando medição parcial do estado. Já no presente estudo, a mudança de variáveis através da transformação não linear permite resolver o problema sem recorrer à medição parcial, dando mais flexibilidade ao projeto de controle.

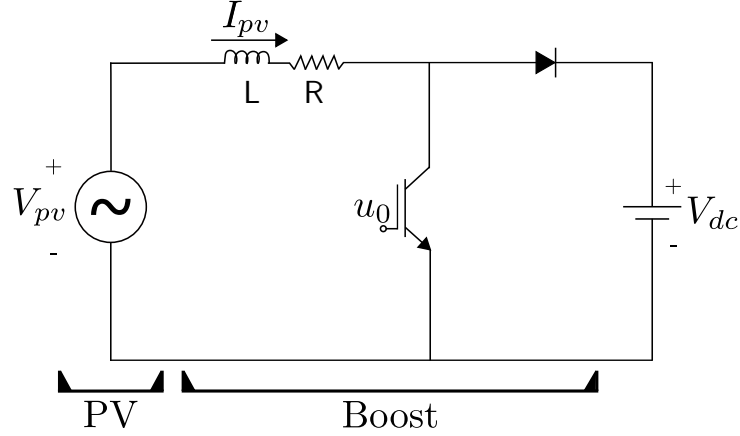
5.2 APLICAÇÃO DE UM ARRANJO FOTOVOLTAICO MODELADO COMO UMA FONTE DE TENSÃO

Exemplo 1. *Este exemplo foi pensado buscando mostrar uma das principais vantagens da técnica desenvolvida nesta dissertação, onde o sistema pode ser controlado utilizando apenas e unicamente sua saída não linear. Embora este sistema, especificamente, possui a possibilidade de medição das duas variáveis da equação não linear (tensão e corrente), fica a disposição do projetista a escolha desta variável. Porém, existem diversos outros sistemas, como em máquinas de relutância chaveada, onde esta escolha não é possível e conseguir fazer o controle utilizando a saída não linear é de extrema importância.*

Considera-se aqui um arranjo fotovoltaico, sob condições uniformes de temperatura e irradiação, conectado a um conversor *Boost*, com tensão de saída fixa, conforme mostrado na Figura 22. Essa topologia possui apenas um dispositivo de comutação (u_0) e, portanto,

é composta por dois subsistemas diferentes ($m = 2$), conforme definido na Tabela 3. Os parâmetros do circuito são apresentados na Tabela 2. O objetivo é seguir uma determinada referência $\bar{V}_{pv}$ (para a função não linear V_{pv}), mesmo sob variações de T e P_{sun} .

Figura 22 – Topologia do sistema fotovoltaico considerado no Exemplo 1.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Modos de operação do sistema chaveado.

$\sigma(e)$	u_0
1	Conduzindo
2	Não conduzindo

Considera-se como único estado $x(t) = I_L(t)$, onde $I_L(t)$ é a corrente que passa pela indutor L . Define-se a função não linear como $p(t) = V_{pv}(I_{pv}(t), \delta)$. Desse modo, $q(t) = Dx(t) = I_L(t)$ com $D = [1]$. A dinâmica do sistema pode ser representada como:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i p(t) + b_i \quad (5.1)$$

onde,

$$A_1 = A_2 = \left[-R/L \right], \quad B_1 = B_2 = \left[1/L \right], \quad (5.2)$$

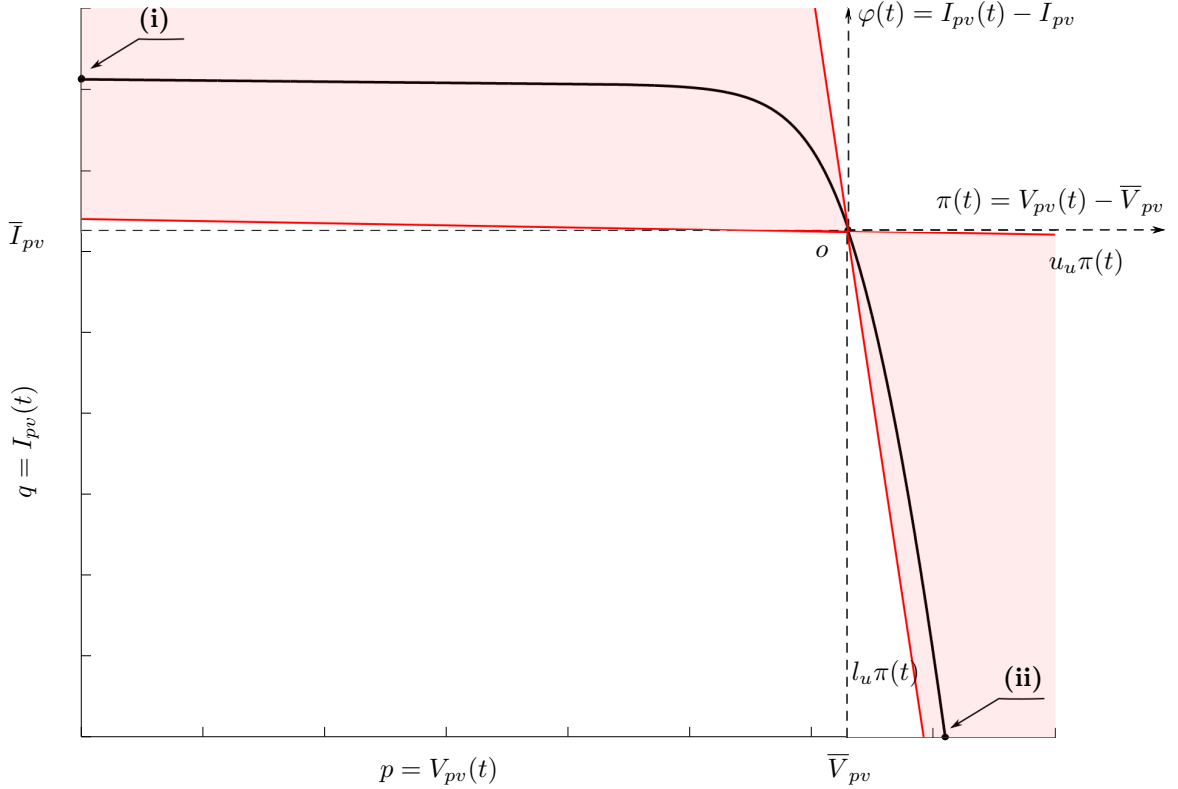
$$b_1 = \left[0 \right], \quad b_2 = \left[-V_{dc}/L \right]. \quad (5.3)$$

Maiores detalhes sobre a modelagem de dispositivos de eletrônica de potência podem ser encontrados em Mohan, Undeland e Robbins (2003).

Destaca-se que o desafio não está na dimensão do sistema, mas em garantir uma estabilidade robusta de um sistema altamente não linear e incerto. Também, busca-se controlar o sistema medindo a saída da função não linear e não o estado da representação original.

De acordo com a Equação (3.20), na representação do sistema apresentado na Equação (3.24), tem-se $\varphi = I_{pv}(\pi(t) + \bar{V}_{pv}, \delta) - \bar{I}_{pv}$, onde $\pi(t) = V_{pv}(t) - \bar{V}_{pv}$ e $\bar{I}_{pv} = I_{pv}(\bar{V}_{pv}, \delta)$. Observa-se que $\varphi(t) = 0$ para $\pi(t) = 0$, portanto, pode-se representar $\varphi(t)$ como uma função limitada por setores de $\pi(t)$.

Figura 23 – Exemplo da translação de uma curva característica I - V (em preto) e os setores limitantes (em vermelho).



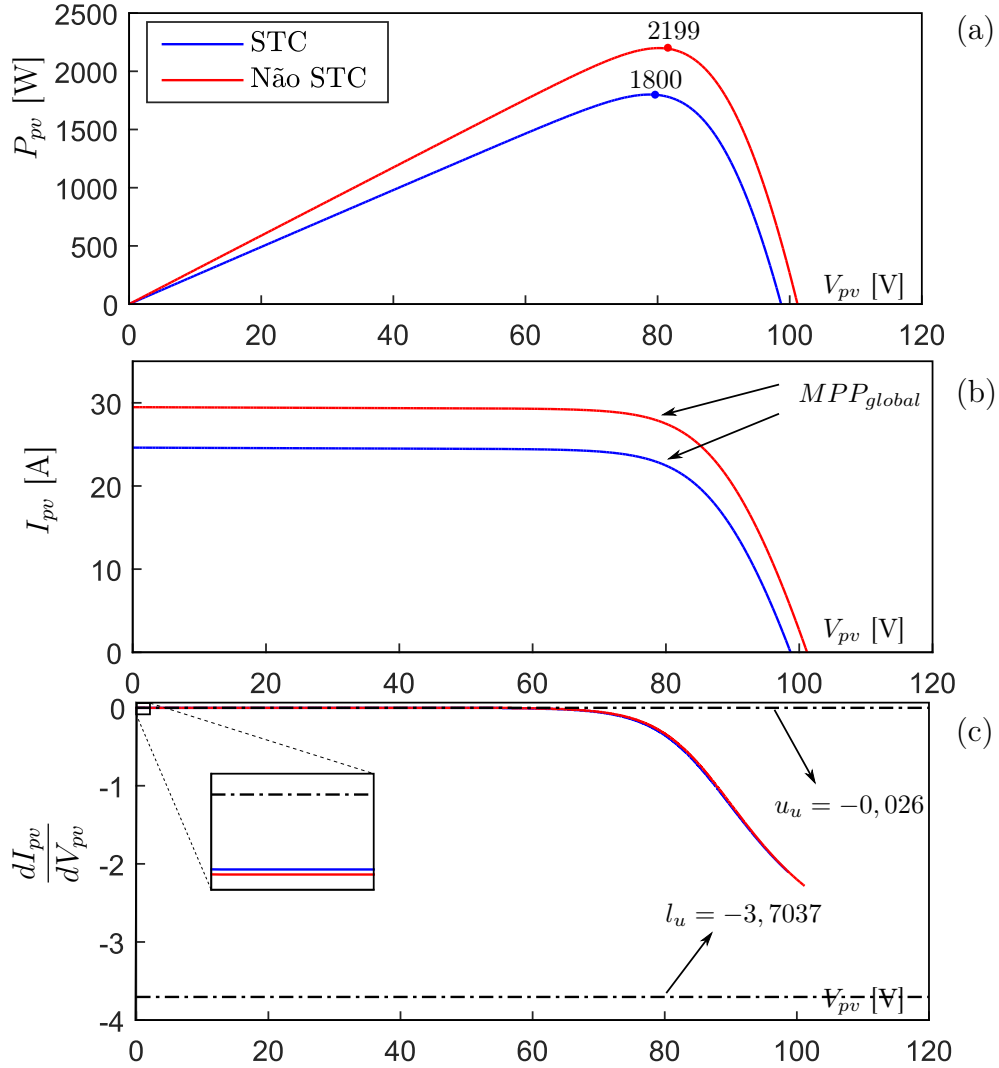
Fonte: Próprio autor.

A Figura 23 apresenta a curva característica I - V do arranjo para o caso uniforme. Também mostra o eixo da função limitada por setores φ como uma função de π para determinados valores de $(\bar{V}_{pv}, \bar{I}_{pv}, \delta)$, bem como as retas que delimitam os setores.

Considera-se os setores $[l_u, u_u] = [-3, 7037, -0, 0026]$, obtidos através das Equações (4.11) e (4.12). As curvas características P - V e I - V das duas situações distintas são mostradas na Figura 24(a) e na Figura 24(b), respectivamente. Já suas respectivas inclinações são mostradas na Figura 24(c). Observa-se que os limites do setor abrangem todos os valores de inclinação, conforme o esperado. Observa-se também que os limites do setor robustos (no pior cenário) são apenas ligeiramente maiores do que as inclinações que ocorrem nos casos apresentados, portanto, não se espera um acréscimo muito grande no conservadorismo das LMIs.

Observe na Equação (5.2) que $A_i \in \mathcal{A}$ e $B_i \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \mathcal{M}$, satisfazendo a Suposição 3. As LMIs do Corolário 3 são resolvidas com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Como resultado são obtidas as

Figura 24 – Figura (a) curva P - V característica sob STC e para $T = 20^\circ\text{C}$, $P_{sun} = 1200 \text{ W/m}^2$ (não STC). Figura (b) curva I - V característica sob STC e não STC. Figura (c) curva $\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}}$ e seus setores limitantes.



Fonte: Próprio autor.

matrizes P_i e S_i , $\forall i \in \mathcal{M}$, utilizadas na Equação (3.27).

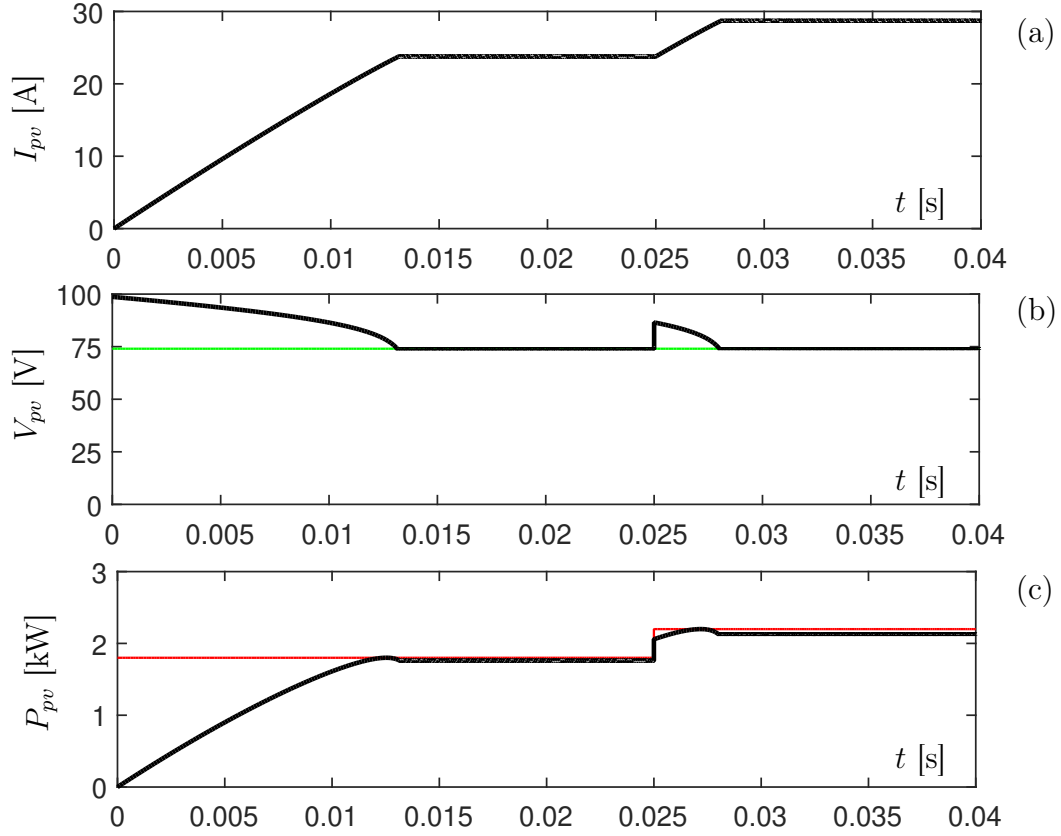
$$P_1 = P_2 = \left[3.4308 \times 10^{-5} \right], \quad (5.4)$$

$$S_1 = \left[1.0337 \times 10^{-2} \right], \quad S_2 = \left[-1.4249 \times 10^{-3} \right] \quad (5.5)$$

Busca-se realizar o rastreamento da referência constante $\bar{V}_{pv} = 0,75V_{oc}$. Esse valor é próximo do MPP, de acordo com a estratégia MPPT de tensão de circuito aberto fracionária (SOUALMIA; CHENNI, 2016) para STC. Esse método não requer nenhuma medição para executar o MPPT, no entanto, sua característica de malha aberta não garante que o MPP seja alcançado. Este método foi considerado aqui apenas para ilustrar

o caso de referência fixa e conhecida a priori.

Figura 25 – Figura (a) $I_{pv}(t)$. Figura (b) $V_{pv}(t)$ (curva em preto) e a referência $\bar{V}_{pv}$ (linha verde). Figura (c) $P_{pv} = V_{pv}(t) \cdot I_{pv}(t)$ (curva em preto) e o MPP para cada condição de T , P_{sun} (linha vermelha).



Fonte: Próprio autor.

A simulação é iniciada com STC uniforme e condição inicial igual a zero para o estado ($I_{pv}(t)$). Para testar a robustez da técnica em relação às variações uniformes em T e P_{sun} , esses parâmetros são alterados em $t = 0,025s$ para $20^\circ C$ e $1200 W/m^2$.

É possível observar que a técnica de fato leva o sistema à referência desejada, mesmo após as variações de T e P_{sun} , mostrando sua robustez. A Figura 25 mostra que $V_{pv}(t)$ converge para a sua referência dada $\bar{V}_{pv}$, e que $I_{pv}(t)$ converge para a sua referência desconhecida e incerta $\bar{I}_{pv}$. Isso ocorre devido à propriedade bijetiva da curva característica $I-V$.

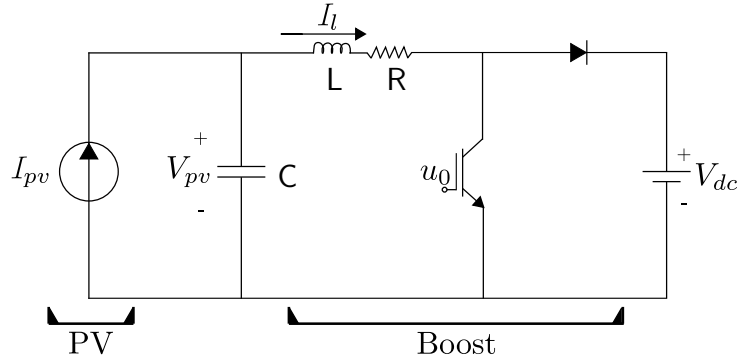
Outro ponto interessante a ser observado é o fato de que, na Figura 25(c), a curva de potência P_{pv} fica próxima ao MPP, porém sempre apresenta uma pequena discrepância, que fica mais evidente após a alteração dos parâmetros. Essa divergência já é esperada devido à técnica de MPPT de circuito aberto fracionária. $\square$

5.3 APLICAÇÃO DE UM ARRANJO FOTOVOLTAICO MODELADO COMO UMA FONTE DE CORRENTE

Exemplo 2. *Este exemplo foi pensado buscando mostrar a aplicação da técnica para um caso um pouco mais complexo, onde os estados do sistema original devem ser divididos em dois, um que depende da função não linear ($q(t)$) e outro que independe desta função ($z(t)$), com isso, é necessário a sua distinção utilizando as matrizes E e D . Também, neste exemplo a referência pode ser alterada ao decorrer do funcionamento do sistema e por este motivo os valores de $\bar{V}_{pv}(t)$ e $\bar{I}_{pv}(t)$ passam a depender do tempo.*

Considera-se aqui o arranjo fotovoltaico conectado a um conversor *Boost* com tensão de saída fixa, conforme mostrado na Figura 26. Essa topologia possui apenas um dispositivo de comutação (u_0) e, portanto, é composta por dois subsistemas diferentes ($m = 2$), conforme definidos pela Tabela 3. Os parâmetros do circuito são apresentados na Tabela 2. O objetivo é extrair a potência máxima do arranjo, mesmo com variações não uniformes de T e P_{sun} .

Figura 26 – Topologia do sistema PV considerado no Exemplo 2.



Fonte: Próprio autor.

Considera-se o vetor de estado $x(t) = [I_l(t) \ V_{pv}(t)]'$, onde $I_l(t)$ é a corrente que flui através do indutor L , e $V_{pv}(t)$ é a tensão no capacitor C . Define-se a função não linear $p(t) = I_{pv}(V_{pv}(t), \delta)$. Portanto, $q(t) = Dx(t) = V_{pv}(t)$ com $D = [0 \ 1]$. A dinâmica do sistema pode ser representada como na Equação (3.1), onde:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

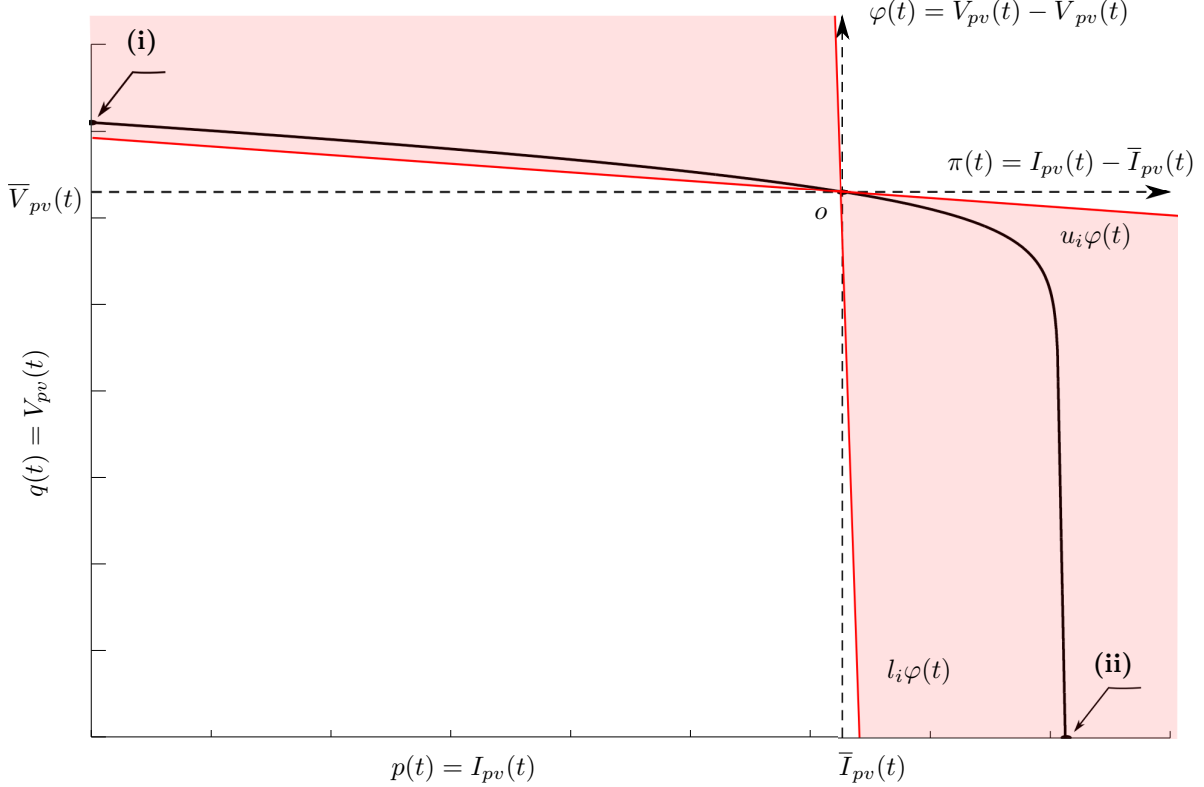
$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -V_{dc}/L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que os parâmetros do circuito são apresentados na Tabela 2.

De acordo com a Equação (3.20), na representação do sistema apresentado na Equação (3.24), tem-se $\varphi(t) = V_{pv}(\pi(t) + \bar{I}_{pv}(t), \delta) - \bar{V}_{pv}(t)$, onde $\pi(t) = I_{pv}(t) - \bar{I}_{pv}(t)$

e $\bar{V}_{pv}(t) = V_{pv}(\bar{I}_{pv}(t), \delta)$. Observa-se que $\varphi(t) = 0$ para $\pi(t) = 0$, portanto, pode-se representar $\varphi(t)$ como uma função limitada por setores de $\pi(t)$.

Figura 27 – Exemplo da translação de uma curva característica I - V (em preto) e os setores limitantes (em vermelho).



Fonte: Próprio autor.

A Figura 27 apresenta a curva característica I - V do arranjo para o caso uniforme. Também mostra-se o eixo da função limitada por setores $\varphi(t)$ como uma função de $\pi(t)$ para determinados valores de $(\bar{V}_{pv}(t), \bar{I}_{pv}(t), \delta)$, bem como as retas que delimitam os setores.

Manipulando as Equações (4.13) e (4.14), é possível obter os setores robustos a sombreamento parcial. É necessário compreender que as inclinações das retas que limitam os setores devem ser derivadas em função da corrente ($\frac{dV_{pv}}{dI_{pv}}$), e não mais da tensão ($\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}}$) como o apresentado pelas equações supracitadas, desta forma é necessária uma adaptação dessas equações.

Sabendo que:

$$\frac{dV_{pv}}{dI_{pv}} = \left(\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} \right)^{-1}, \quad (5.7)$$

é possível manipular as Equações (4.13) e (4.14) e encontrar os setores robustos ao sombreamento parcial. A inversão das equações faz com que o valor “ u ” da Equação (4.13), anteriormente a inclinação menos negativa, passe a ser a inclinação mais negativa. O mesmo ocorre com o valor “ l ” da Equação (4.13), que passa a ser a inclinação menos negativa, sendo anteriormente a mais negativa.

Dessa forma:

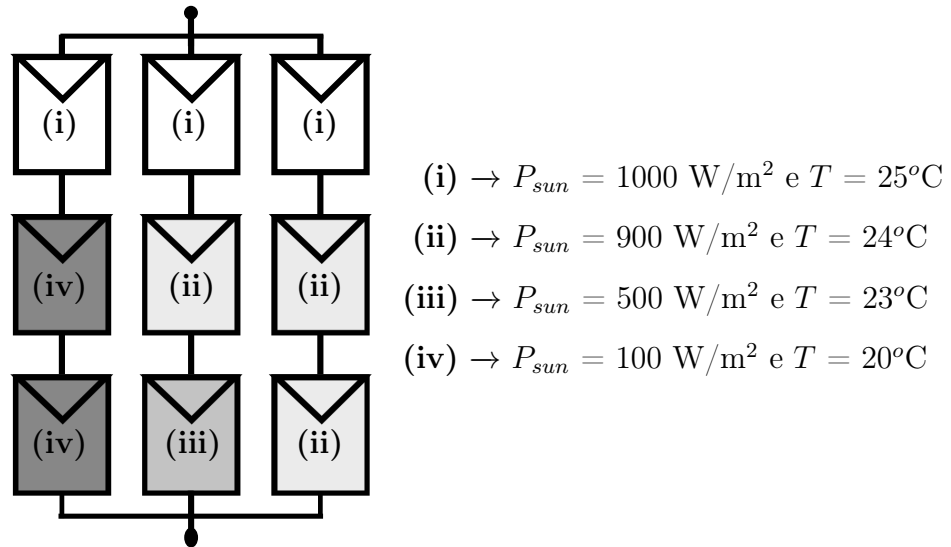
$$\frac{1}{u} = l_i, \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{l} = u_i. \quad (5.9)$$

Com isso, os setores limitantes da curva são $[l_i, u_i] = [-1134.8, -0.09]$, obtidos através das Equações (5.8) e (5.9).

As curvas características P - I e V - I para o caso do sombreamento parcial indicado na Figura 28 são apresentadas na Figura 29(a) e na Figura 29(b), juntamente com sua respectiva derivada na Figura 29(c). Observa-se que os setores abrangem todos os valores de inclinação, conforme o esperado. Observa-se também que, no pior caso, os limites robustos do setor são apenas ligeiramente maiores do que as inclinações que ocorrem nos casos apresentados, portanto, não se espera um acréscimo elevado do conservadorismo.

Figura 28 – Sombreamento parcial utilizado para simulação do Exemplo 2.



Fonte: Próprio autor.

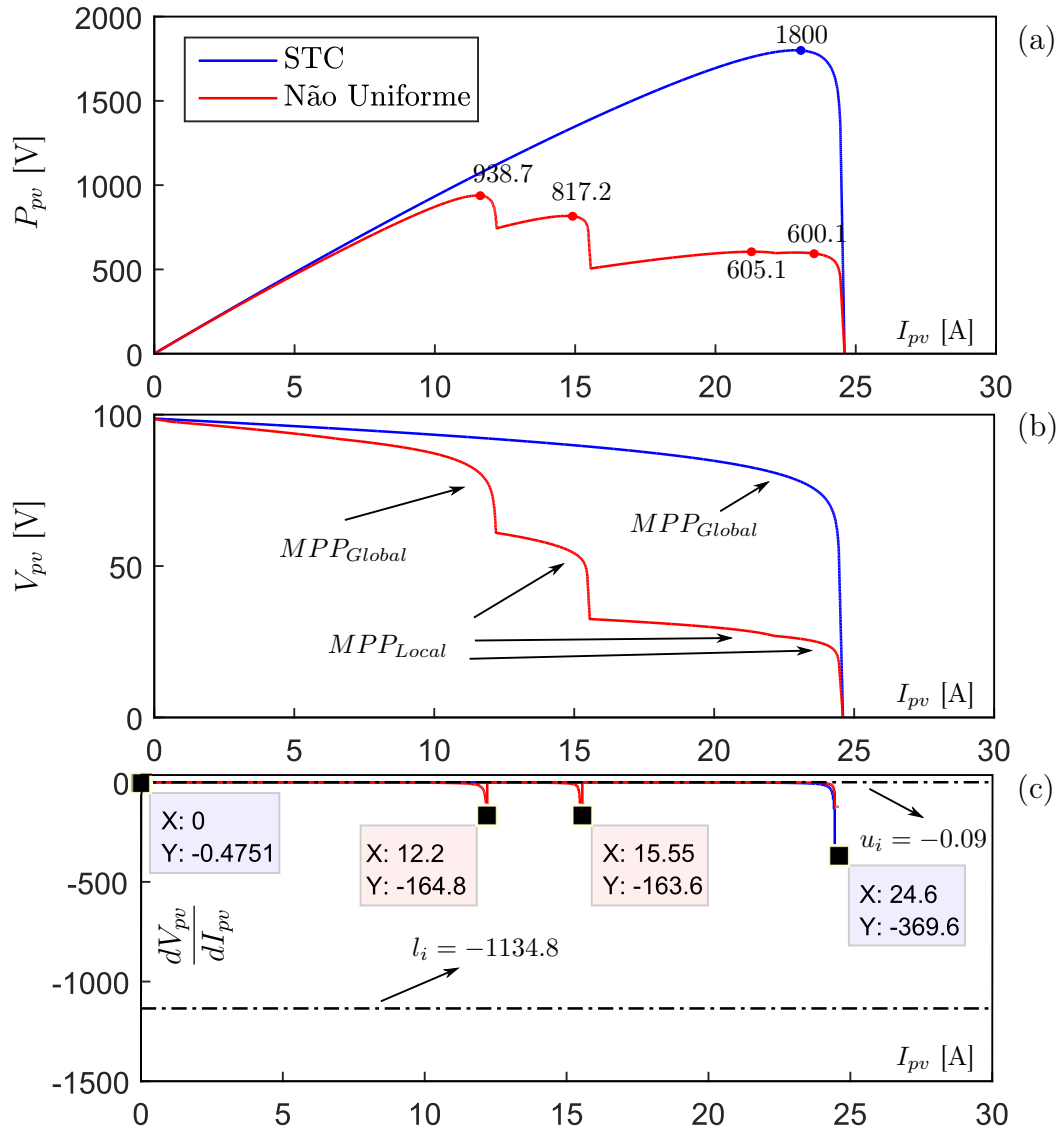
É possível observar na Equação (5.6) que $A_i \in \mathcal{A}$ e $B_i \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \mathcal{M}$, satisfazendo a Suposição 3. As LMIs do Corolário 3 são resolvidas considerando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, e como resultado são obtidas as matrizes P_i e S_i , $\forall i \in \mathcal{M}$, usadas para o cálculo da Equação (3.27).

$$P_1 = P_2 = \begin{bmatrix} 0.6318 & -0.0384 \\ -0.0384 & -0.0384 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad (5.10)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0.1131 \\ -0.0010 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -0.6923 \\ -0.0329 \end{bmatrix} \times 10^{-4}. \quad (5.11)$$

Nota-se que $\bar{\chi}(t) = [\bar{I}_{pv}(t) \quad \bar{I}_{pv}(t)]'$, e uma técnica de MPPT que gera referência para o estado $I_{pv}(t)$ é aplicada, com o objetivo de maximizar a potência extraída do arranjo fotovoltaico. A técnica utilizada é a chamada P&O, apresentada na Figura 15.

Figura 29 – Figura (a) P - I para STC e para o sistema não uniforme da Figura 28. Figura (b) V - I para STC e para o mesmo sistema não uniforme. Figura (c) $\frac{dV_{pv}}{dI_{pv}}$ e seus setores limitantes.



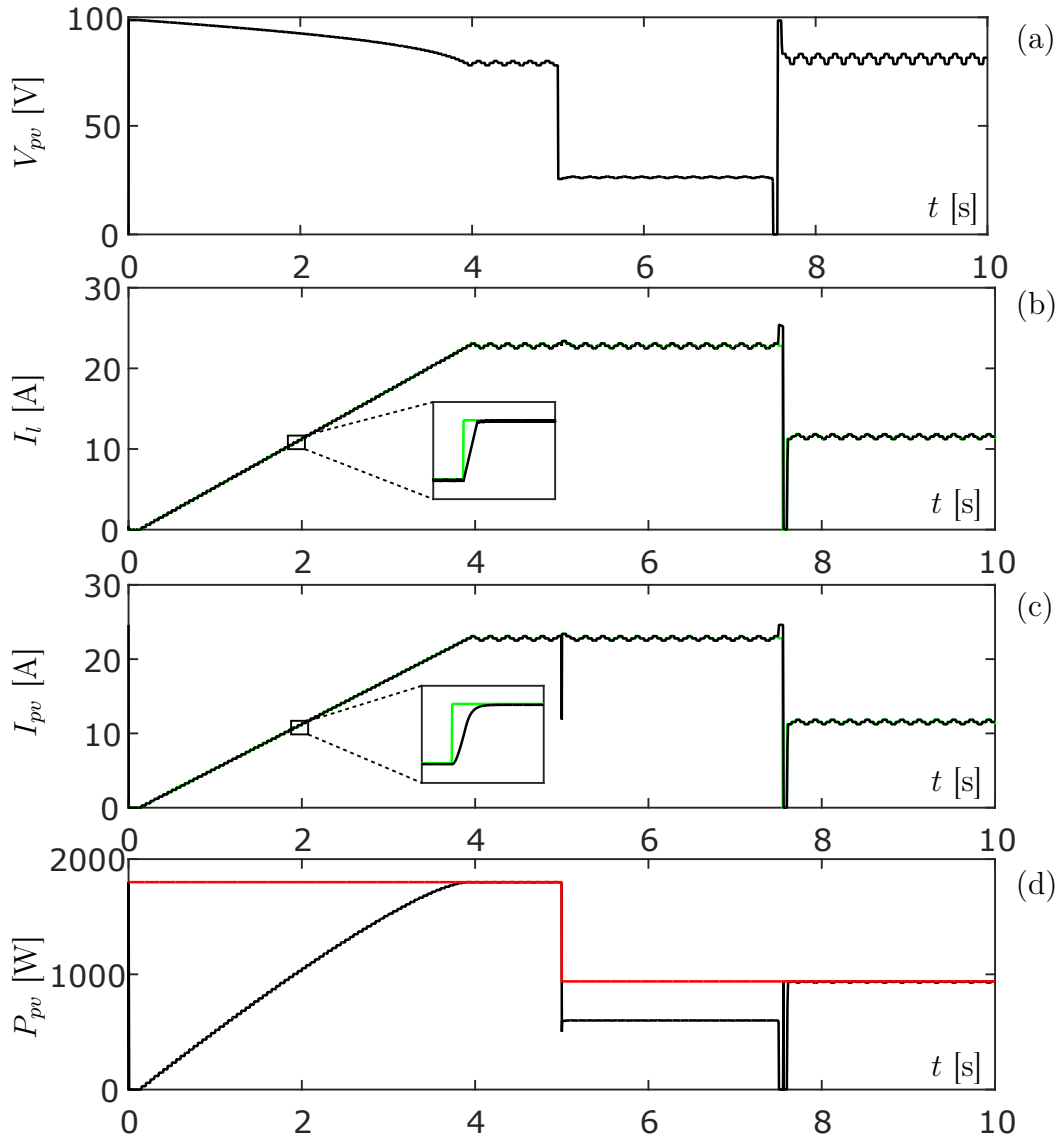
Fonte: Próprio autor.

O algoritmo gera alterações no valor de $\bar{I}_{pv}(t)$, com amplitude ΔI , para chegar o mais próximo possível do ponto de potência máxima, mesmo no caso de alteração não uniforme de T e P_{sun} . De acordo com o apresentado no Comentário 5, $\bar{I}_{pv}(t)$ pode ser alterada como uma função que varia lentamente e de forma gradual. A escolha de ΔI estabelece um compromisso entre a velocidade de convergência do algoritmo para o ponto de potência máxima e sua precisão. Nesse exemplo, considerou-se $\Delta I = 0.3A$.

A simulação é iniciada com uma distribuição uniforme STC e, em $t = 5s$, é alterada para a apresentada na Figura 28. Em $t = 7.5s$, ocorre a execução do algoritmo de MPPT global.

A Figura 30 mostra que tanto $I_L(t)$ quanto $I_{pv}(t)$ convergem para $\bar{I}_{pv}(t)$ (saída

Figura 30 – Figura (a) $V_{pv}(t)$ Figura (b) $I_L(t)$ e Figura (c) $I_{pv}(t)$ (curvas em preto) e suas referências $\bar{I}_{pv}(t)$ (linhas verdes). Figura (d) $P_{pv}(t) = V_{pv}(t)I_{pv}(t)$ (curva em preto) e o MPP global para cada condição de T , P_{sun} (linha vermelha).



Fonte: Próprio autor.

discretizada do algoritmo P&O). A Figura 30 também apresenta a potência extraída do arranjo fotovoltaico ($P_{pv}(t)$). É possível perceber que o MPP é alcançado mesmo com variações de T e P_{sun} , entretanto, para que o sistema encontre o MPP_{global} , é necessária a utilização do algoritmo apresentado na Figura 15. Claramente, pode ser feita uma convergência mais rápida do algoritmo P&O para o MPP utilizando uma condição inicial mais adequada para a referência $\bar{I}_{pv}(t)$. Porém, esse recurso não é utilizado para mostrar a convergência de uma ampla gama de equilíbrios.

Outra vantagem da transformação não linear para esse sistema é que ele requer apenas um algoritmo MPPT para gerar $\bar{I}_{pv}(t)$. Já para o controle baseado na representação original do sistema, o equilíbrio $\bar{x}(t) = [\bar{I}_{pv}(t) \ \bar{V}_{pv}(t)]'$ não pode ser gerado, por necessitar

de dois MPPTs independentes, devido ao acoplamento desconhecido entre os estados (DEZUO; TROFINO; SCHARLAU, 2014). O estudo de Dezuo, Trofino e Scharlau (2014) utiliza uma abordagem mais conservadora baseada em realimentação parcial do estado para contornar o problema. $\square$

Em ambos os exemplos apresentados observa-se que a técnica de controle é eficaz, levando-os a referência desejada utilizando a transformação não linear apresentada no Capítulo 3.

Embora a matemática apresentada no Capítulo 3 possa parecer um pouco complexa, após a obtenção das matrizes P_i e S_i , a aplicação da técnica de controle é extremamente simples, sendo necessário apenas encontrar qual v_i é a maior em cada instante de tempo e chavear o sistema nesta dinâmica.

De maneira geral, todo o cálculo complexo, para a solução das LMIs e encontrar as P_i e S_i , é feito de maneira *offline*. Sendo possível a aplicação desta técnica em sistemas cujo controlador tenha limitação de memória ou processamento.

6 CONCLUSÃO

A técnica para o projeto de leis de chaveamento proposta neste trabalho possui diversas propriedades interessantes, entre as quais está a possibilidade de tratar múltiplas não linearidades, tratar um sistema não linear sem aplicar técnicas de linearização ou algo do gênero, também, é aplicável em casos em que é mais viável medir a saída não linear do que o estado do sistema original. Outra vantagem notável é a possibilidade de tratar parâmetros incertos dentro das não linearidade, o que não se encontra facilmente na literatura. Também, em alguns casos, mais específicos, pode-se projetar a lei de chaveamento independente da referência, podendo essa ser modificada ao decorrer da aplicação, sem a necessidade de recalculas as matrizes P_i e S_i .

A lei de chaveamento apresentada no Capítulo 3 apresenta uma prova formal de estabilidade, fazendo com que sua aplicação seja possível em diversos sistemas que exijam esse formalismo. Técnicas que apresentam prova formal de estabilidade e tratam de sistemas não lineares incertos não são facilmente encontradas na literatura, ainda mais quando tratam de diversas não linearidades incertas em um mesmo sistema. Essa é uma das grandes vantagens da técnica proposta nessa dissertação, conseguir tratar diversas não linearidades incertas em um mesmo sistema tendo garantia de estabilidade.

Tratar diversas não linearidades é uma situação que aparece, por exemplo, em topologias de sistemas fotovoltaicos, nas quais vários módulos são acoplados por meio de vários conversores. Destaca-se, ainda, que a aplicação da técnica apresentada nesta dissertação, como mostrado no Capítulo 5, possibilita controlar o sistema usando medições de tensão ao invés de medições de corrente, o que é particularmente útil para sistemas de eletrônica de potência em que os estados são correntes e as não linearidades são tensões, principalmente porque os sensores de corrente tendem a ser mais caros e sensíveis do que os sensores de tensão.

Outra aplicação é quando a entrada e saída das não linearidades precisam ser medidas para uso nas técnicas de MPPT para otimização de energia. Nesse caso, o uso de técnicas de MPPT em conjunto com o projeto da lei de chaveamento proposto pode reduzir o número de sensores necessários para a implementação prática. Por trás de todas essas propriedades está o uso de uma transformação de estado em que as não linearidades aparecem como estados do sistema transformado. A técnica proposta apresenta outra grande vantagem por abranger casos não uniformes de temperatura e irradiação de um arranjo fotovoltaico.

Embora o formalismo matemático utilizado nas deduções e provas dos teoremas possam ser um pouco complexas, a aplicação da técnica proposta é simples, após a obtenção das matrizes P_i e S_i , tendo em vista que são necessárias apenas multiplicações e comparações simples. Com isso, o controle do sistema fica aplicável em casos onde existam limitações de memória e processamento do microcontrolador utilizado. Isso é de grande

valia para sistemas embarcados.

O método proposto pode ser estendido em várias direções, de modo a incluir requisitos de desempenho, como custo garantido e atenuação da norma H_∞ , por exemplo. O desenvolvimento de alternativas menos restritivas à Suposição 1 é um tópico atual de pesquisa, pois visa ampliar a classe de sistemas para os quais o método pode ser aplicado.

6.1 PUBLICAÇÕES RELACIONADAS

Algumas atividades realizadas anteriormente ao mestrado e que serviram como base para esta dissertação:

- T. Dezuo, H. Lunardi, e A. Trofino, “**Robust switching rule design for photovoltaic systems under non-uniform conditions**”. IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2017.

Resumo: Este artigo apresenta uma técnica para projetar leis de chaveamento que garantem a convergência do estado de sistemas fotovoltaicos (PV) para um ponto de operação desejado, mesmo em condições não uniformes. O método proposto considera uma lei de chaveamento usando a composição ‘max’ de funções auxiliares, os resultados são apresentados em termos de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e garantem uma estabilidade global assintótica do sistema em malha fechada mesmo se os modos de deslizamento ocorrerem em qualquer superfície de chaveamento. A característica não linear I-V dos módulos PV é tratada como uma função limitada por setores e um setor robusto que contém a não linearidade para qualquer condição não uniforme possível é apresentado. A aplicação do método é ilustrada através de um exemplo numérico de um sistema fotovoltaico sob sombreamento parcial e distribuição não uniforme de temperatura, onde o requisito importante de Rastreamento de Ponto de Potência Máxima (MPPT) global é alcançado.

As atividades realizadas ao decorrer do mestrado levaram a resultados que deram origem ao seguinte artigo já publicado:

- I. Squersato, H. Lunardi, e T. Dezuo, “**Algoritmo para simulação e análise de arranjos fotovoltaicos reconfiguráveis sob condições não uniformes**”. 14^o Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2019.

Resumo: Neste artigo é proposto um algoritmo capaz de simular sistemas fotovoltaicos sob condições não uniformes de operação. O algoritmo desenvolvido permite simular diversas topologias de ligação, como a Series Parallel (SP), a Total Cross Tied (TCT) e combinações mista entre estas, possuindo como variáveis de entrada os parâmetros dos módulos, as distribuições de temperatura e de irradiação e a forma de interconexão. Seu princípio de funcionamento é a redução do circuito do

arranjo para circuitos equivalentes menores, identificando a forma de conexão entre os módulos. O algoritmo tem aplicações interessantes, como analisar a máxima potência de um sistema e encontrar uma topologia que apresente maior robustez a variações paramétricas, especialmente para instalações inerentemente sujeitas a sombreamentos previstos. Os resultados obtidos são ilustrados através de um exemplo numérico, no qual se podem observar o comportamento de topologias variadas para diversas condições de distribuições não uniformes dos parâmetros de entrada.

Além disso, um artigo referente ao trabalho desenvolvido nessa dissertação, cujo tema é sobre transformações não lineares, encontra-se em fase de submissão a um periódico.

REFERÊNCIAS

- ANTSAKLIS, P. J. Special issue on hybrid systems: theory and applications a brief introduction to the theory and applications of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 88, n. 7, p. 879–887, July 2000. ISSN 0018-9219.
- ARMSTRONG, S.; HURLEY, W. G. Self-regulating maximum power point tracking for solar energy systems. In: **39th International Universities Power Engineering Conference**. Bristol, United Kingdom: [s.n.], 2004. v. 2, p. 604–609.
- BLAABJERG, F. et al. Power electronics - key technology for renewable energy systems. In: **2nd Power Electronics, Drive Systems and Technologies Conference**. Tehran, Iran: [s.n.], 2011. p. 445–466.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. Boston, USA: [s.n.], 2004. p. 3890–3895.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, USA: SIAM, 1994. v. 86.
- BRANICKY, M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 43, n. 4, p. 475–482, April 1998.
- CASARO, M. M. **Inversor trifásico de dois estágios modificado aplicado no processamento da energia solar fotovoltaica em sistemas conectados à rede elétrica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2009.
- COELHO, R. F.; CONGER, F.; MARTINS, D. C. A study of the basic DC-DC converters applied in maximum power point tracking. In: **Brazilian Power Electronics Conference**. Bonito, Brasil: [s.n.], 2009. p. 673–678.
- COUTINHO, D. F. et al. Linear H_∞ filter design for a class of uncertain nonlinear systems. **Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control**, p. 380–385, 2003.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. O. R. (Ed.). **Perspectives in Robust Control Design**. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 268). p. 241–257.
- DEAECTO, G. S. et al. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. **IET Control Theory & Applications**, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, July 2010.
- DECARLO, R. A. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000.
- DEZUO, T.; LUNARDI, H. C.; TROFINO, A. Robust switching rule design for photovoltaic systems under non-uniform conditions. In: **2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 2342–2347.

DEZUO, Tiago J. M. **Design of switching strategies with applications in photovoltaic energy generation**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2014.

DEZUO, T. J. M.; TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C. Switching rule design for sector-bounded nonlinear switched systems. In: **Proceedings of 19th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress**. Cape Town, South Africa: [s.n.], 2014. p. 4074–4079.

FERON, E. **Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback**. Center for Intelligent Control Systems, MIT Publication CICS-P 468, 1996.

FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides**. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.

GAO, Shigen et al. Neural adaptive control for uncertain nonlinear system with input saturation: State transformation based output feedback. **Neurocomputing**, v. 159, p. 117 – 125, 2015.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, SIAM, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.

HAIJAHMADI, Mohammad; SCHUTTER, Bart De; HELLENDORRN, Hans. Stabilization and robust H_∞ control for sector-bounded switched nonlinear systems. **Automatica**, v. 50, n. 10, p. 2726–2731, 2014.

HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle's invariance principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 4, p. 470–482, April 2004. ISSN 0018-9286.

HU, T.; MA, L.; LIN, Z. Stabilization of switched systems via composite quadratic functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 11, p. 2571–2585, 2008.

JARAMILLO-LOPEZ, F.; KENNE, G.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. Adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems: Application to photovoltaic control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 1, p. 393–398, Jan 2017.

JI, Zhijian; XIAOXIA, Guo; XIE, Guangming. Robust h_∞ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple lyapunov functions approach. **Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme - J DYN SYST MEAS CONTR**, v. 128, 09 2006.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

KING, C.; SHORTEN, R. A singularity test for the existence of common quadratic lyapunov functions for pairs of stable lti systems. In: **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 4, p. 3881–3884 vol.4.

LANTOS, Béla; MÁRTON, Lőrinc. **Nonlinear Control of Vehicles and Robots**. 1. ed. London: Springer-Verlag, 2011. (Advances in Industrial Control).

LASDON, L. S. **Optimization Theory for Large Systems**. New York, USA: Macmillan, 1970.

LAUB, A. J. **Matrix Analysis for Scientists & Engineers**. Philadelphia, USA: SIAM, 2005.

LIBERZON, D. **Switching in Systems and Control**. Boston, USA: Birkhäuser, 2003.

LIBERZON, D. Switched systems. In: _____. **Handbook of Networked and Embedded Control Systems**. USA: [s.n.], 2005. v. 1, p. 559–574.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a short survey of recent results. In: **Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control**. Limassol, Cyprus: [s.n.], 2005. p. 24–29.

LÖFBERG, J. Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **International Symposium on Computer Aided Control Systems Design**. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Yalmip home page <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>>.

LOPES, Ricardo Jorge Cabral. **Efeito do sombreamento nos painéis fotovoltaicos**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2013.

LUNARDI, H. C. **Controle de sistemas fotovoltaicos sob condições não uniformes**. Joinville - SC, Brasil, 2017.

MIGNONE, D.; FERRARI-TRECATE, G.; MORARI, M. Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems: an LMI approach. In: **Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control**. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. v. 1, p. 504–509.

MOHAN, N.; UNDELAND, T. M.; ROBBINS, W. P. **Power Electronics: Converters, Applications and Design**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.

OLALLA, C. et al. Robust lqr control for pwm converters: An lmi approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 7, p. 2548–2558, July 2009.

OLIVEIRA, Fernando Marcos de. **Rastreamento da máxima potência em arranjos fotovoltaicos sob efeito de sombreamento parcial baseado no método de otimização por enxame de partículas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, Brasil, 2015.

PETTERSSON, S. Synthesis of switched linear systems. In: **42nd IEEE Conference on Decision and Control**. Maui, USA: [s.n.], 2003. p. 5283–5288.

SCHARLAU, C. C. **Controle de Sistemas Chaveados e Aplicações**. Tese (Doutorado) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil, 2013.

SCHARLAU, C. C. et al. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. **Systems & Control Letters**, v. 68, p. 1–8, June 2014.

SENGER, G. A.; TROFINO, A. Switching rule design for a class of switched systems with uncertain equilibrium. In: **Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control**. Los Angeles, USA: [s.n.], 2014. p. 4667–4672.

SENGER, G. A.; TROFINO, A. Switching rule design for affine switched systems with guaranteed cost and uncertain equilibrium condition. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 61, n. 7, p. 1925–1930, July 2016.

SKAFIDAS, E. et al. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, v. 35, n. 4, p. 553–564, 1999.

SOUALMIA, A.; CHENNI, R. A survey of maximum peak power tracking techniques used in photovoltaic power systems. In: **IEEE 2016 Future Technologies Conference (FTC)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 430–443.

SUN, Z. Stabilizability and insensitivity of switched linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 7, p. 1133–1137, July 2004.

SUN, Z. Combined stabilizing strategies for switched linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 51, n. 4, p. 666–674, 2006.

TROFINO, A. et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. In: **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**. Shanghai, China: [s.n.], 2009.

TROFINO, A.; DEZUO, T. J. M. LMI stability conditions for uncertain rational nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 24, n. 18, p. 3124–3169, December 2014.

TROFINO, A. et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: **50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference**. Orlando, USA: [s.n.], 2011. p. 1183–1188.

TROFINO, A. et al. Switching rule design for affine switched systems with H_∞ performance. In: **51th IEEE Conference on Decision and Control**. Maui, USA: [s.n.], 2012. p. 1923–1928.

VIJAYALEKSHMY, B. G. R.; IYER, S. R. Estimation of power losses in photovoltaic array configurations under passing cloud conditions. In: **World Congress on Engineering**. London, U.K.: [s.n.], 2014. v. 1.

WICKS, M.; DECARLO, R. Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In: **Proceedings of the 1997 American Control Conference**. Albuquerque, USA: [s.n.], 1997. v. 3, p. 1709–1713.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: **Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. Lake Buena Vista, USA: [s.n.], 1994. v. 4, p. 3492–3497.

XU, X.; ZHAI, G.; HE, S. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 2, n. 1, p. 196–208, March 2008.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. **International Journal of Control**, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003.

ZHAO, Xiaomin; CHEN, Y. H.; ZHAO, Han. Robust approximate constraint-following control for autonomous vehicle platoon systems. **Asian Journal of Control**, v. 20, n. 4, p. 1611–1623, 2018.

APÊNDICE A – CONCEITOS PRELIMINARES

Nesse apêndice serão apresentadas algumas definições matemáticas úteis para essa dissertação. O objetivo é apresentar e relembrar o leitor de algumas propriedades, características e ferramentas utilizadas através de uma revisão sucinta sobre tópicos importantes. Os conteúdos abordados serão o Procedimento S, o Produto Kronecker, uma versão do Lema de Finsler, o Critério de Sylvester, as definições de Anuladores Lineares e Funções de Classe $\mathcal{K}$.

A.1 PROCEDIMENTO S

Essa técnica ficou conhecida como “*S-Procedure*” e permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Para reduzir o conservadorismo, a técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

Sejam $T_1, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas dadas e $F(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma função afim em g . Considere o seguinte problema: encontre g , se possível, tal que

$$\xi' F(g) \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0 \quad : \quad \xi T_i \xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{A.1})$$

É fácil perceber que se existem escalares τ_i , $i = 1, \dots, p$, e algum g tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (\text{A.2})$$

então (A.1) está satisfeita. Porém não é trivial mostrar que (A.1) e (A.2) são equivalentes para $p = 1$. Para mais detalhes e algumas variantes do Procedimento S, veja Boyd et al. (1994).

A.2 PRODUTO DE KRONECKER

A aplicação do produto Kronecker é útil para simplificar algumas notações que serão apresentadas no decorrer desta dissertação.

Definição 3 (Produto de Kronecker). *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Então o produto de Kronecker entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é definido como a matriz*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

□

A mesma definição é válida se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem matrizes de valor complexo. Para mais detalhes e propriedades do produto Kronecker, veja Laub (2005).

A.3 LEMA DE FINSLER

Este lema é útil pois permite que restrições de igualdade sejam inseridas em uma única desigualdade que pode ser resolvida via LMI.

Lema 5 (Lema de Finsler). *Seja $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz dada e C_0 uma base para o espaço nulo de C . Seja $F(g)$ uma função afim em $g \in \mathbb{R}^q$ com $F(g) = F'(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. As seguintes condições são equivalentes:*

$$(a) \exists g : \quad x' F(g) x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad Cx = 0, \quad x \neq 0;$$

$$(b) \exists g, L : \quad F(g) + LC + C' L' < 0, \quad L \in \mathbb{R}^{n \times m};$$

$$(c) \exists g : \quad C_0' F(g) C_0 < 0;$$

$$(d) \exists g, \alpha : \quad F(g) - \alpha C' C < 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

□

As relações possuem prova formal que podem ser encontradas em DE OLIVEIRA e Skelton (2001) e suas referências. Existem algumas variações do Lema de Finsler conhecidas por outros nomes, como Lema da Projeção e Lema da Eliminação de Variáveis.

A.4 ANULADOR LINEAR

Anuladores lineares são úteis quando utilizados juntamente com o Lema de Finsler para reduzir o conservadorismo de algumas LMIs.

Definição 4 (Anulador Linear). *Dada uma função vetorial $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$, uma função matricial $\aleph_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ será chamada de um Anulador Linear de $f(\cdot)$ se este satisfaz as duas seguintes condições **(i)** $\aleph_f(\cdot)$ é linear e **(ii)** $\aleph_f(h)f(h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^q$ de interesse. □*

É possível notar que a representação matricial do Anulador Linear não é única, podendo haver diversos anuladores para a mesma função vetorial.

Uma forma sistemática de construir um Anulador Linear é apresentada em Trofino e Dezu (2014), onde, seja o vetor $f(\cdot) : \mathbb{R}^c \mapsto \mathbb{R}^s$, uma matriz $\aleph_f(\cdot) : \mathbb{R}^c \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ chamada de *anulador de $f(\cdot)$* se $\aleph_f(h)f(h) = 0, \forall h \in \mathbb{R}^c$. Se $\aleph_f(\cdot)$ é uma função linear então é chamado de anulador linear.

$$\aleph_\theta(\theta) = \begin{bmatrix} Y_1(\theta) & Z_1(\theta) \\ \vdots & \vdots \\ Y_{(m-1)}(\theta) & Z_{(m-1)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde,

$$Z_i(\theta) = -\theta_i I_{(m-i)}, \quad i \geq 1, \quad Y_1(\theta) = \begin{bmatrix} z_2 & \cdots & z_m \end{bmatrix}' \quad (\text{A.5})$$

$$Y_i(\theta) = \begin{bmatrix} & z_{(i+1)} \\ 0_{(m-i) \times (i-1)} & \vdots \\ & z_m \end{bmatrix}, \quad i \geq 2. \quad (\text{A.6})$$

Exemplo 3. Um possível anulador linear para o vetor $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$, pode ser escrito como:

$$\aleph(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_1 & 0 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_3 & -\theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Pois, é fácil observar que $\aleph(\theta) \cdot \theta = 0$, $\forall \theta$. □

A.5 FUNÇÃO CLASSE $\mathcal{K}$

Na teoria de controle, muitas vezes é necessário verificar a estabilidade de um sistema não autônomo. Para essa análise, é necessário utilizar algumas funções especiais a fim de comparação. As funções da Classe $\mathcal{K}$ pertencem a essa família:

Definição 5 (Função Classe $\mathcal{K}$). *Uma função contínua $\beta : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$, esta pertence à classe $\mathcal{K}$ se for estritamente crescente e $\beta(0) = 0$. É dito que pertence à classe $\mathcal{K}_\infty$ se uma função Classe $\mathcal{K}$ satisfaça $\beta(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$ para $a = \infty$.* □

Para mais detalhes das funções de Classe $\mathcal{K}$, veja Khalil (2002).

A.6 FUNÇÃO LOCALMENTE LIPSCHITZ

Nessa dissertação uma função localmente Lipschitz é utilizada como critério de suavidade para definição de sistemas chaveados.

Definição 6 (Função localmente Lipschitz). *Uma função $f(x)$ é dita localmente Lipschitz no domínio $D \in \mathbb{R}^n$ se cada ponto de D possui uma vizinhança D_0 de forma que f satisfaça a condição Lipschitz ($\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$) para todos os pontos em D_0 com alguma constante Lipschitz $L_0 > 0$. O símbolo $\|x\|$ corresponde à Norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$.* □

Para mais detalhes e propriedades de funções localmente Lipschitz, veja Hespanha (2004).

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DOS LIMITES

O objetivo deste apêndice é apresentar uma dedução dos setores limitantes utilizados no Capítulo 4. O que se busca são os valores máximos e mínimos de $\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}}$, sem que esses dependam de parâmetros incertos.

Parte-se da Equação (4.1), reescrita a seguir por conveniência:

$$I_{ph} - \left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) \frac{I_{pv}}{M_p} - \frac{V_{pv}}{R_p M_s N_s} - I_r \left(\exp \left(\frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \left(\frac{V_{pv}}{M_s N_s} + \frac{R_s I_{pv}}{M_p} \right) \right) - 1 \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Deriva-se a Equação (B.1) em função de V_{pv} :

$$\begin{aligned} - \left(\left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) \frac{1}{M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} - \frac{1}{R_p M_s N_s} \\ - I_r \exp \left(\frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \left(\frac{V_{pv}}{M_s N_s} + \frac{R_s I_{pv}}{M_p} \right) \right) \frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \left(\frac{1}{M_s N_s} + \left(\frac{R_s}{M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Define-se:

$$f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}) = I_r \frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \exp \left(\frac{\epsilon}{\eta \kappa T} \left(\frac{V_{pv}}{M_s N_s} + \frac{R_s I_{pv}}{M_p} \right) \right) . \quad (\text{B.3})$$

Com isso:

$$- \left(\left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) \frac{1}{M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} - \frac{1}{R_p M_s N_s} - f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}) \left(\frac{1}{M_s N_s} + \left(\frac{R_s}{M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} \right) = 0 . \quad (\text{B.4})$$

Isola-se $\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}}$:

$$\begin{aligned} - \left(\left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) \frac{1}{M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} - \left(f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}) \frac{R_s}{M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = \\ = \frac{1}{R_p M_s N_s} + f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}) \left(\frac{1}{M_s N_s} \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Reescrevendo a equação e rearranjando os termos, tem-se:

$$- \left(\frac{R_p + R_s + R_s R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})}{R_p M_p} \right) \frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = \frac{1 + R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})}{R_p M_s N_s} , \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = - \frac{M_p}{M_s N_s} \left(\frac{1 + R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})}{R_p + R_s (1 + R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv}))} \right) , \quad (\text{B.7})$$

Obtém-se com isso uma equação simplificada para a derivada $\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}}$:

$$\frac{dI_{pv}}{dV_{pv}} = -\frac{M_p}{N_s M_s} \frac{1}{\left(R_s + \frac{R_p}{1+R_p f(T, P_{sun}, V_{pv}, I_{pv})} \right)} . \quad (\text{B.8})$$