

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA – PPGEEL

GABRIEL LEZAN NITZ

CONTROLE CHAVEADO COM CRITÉRIO H-INFINITO APLICADO NO
ACIONAMENTO DE MOTOR BLAC PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS
SENOIDAIS

JOINVILLE

2026

GABRIEL LEZAN NITZ

**CONTROLE CHAVEADO COM CRITÉRIO H-INFINITO APLICADO NO
ACIONAMENTO DE MOTOR BLAC PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS
SENOIDAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuó

JOINVILLE

2026

Nitz, Gabriel Lezan

Controle chaveado com critério H–infinito aplicado no acionamento de motor BLAC para seguimento de referências senoidais / Gabriel Lezan Nitz. – Joinville, 2026.

103 p.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós–Graduação em Engenharia Elétrica, Joinville, 2026.

1. Controle chaveado. 2. Controle H–infinito. 3. Motor BLAC. 4. Inversor trifásico. 5. Seguimento senoidal. I. Dezuo, Tiago Jackson May. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós–Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

GABRIEL LEZAN NITZ

**CONTROLE CHAVEADO COM CRITÉRIO H-INFINITO APLICADO NO
ACIONAMENTO DE MOTOR BLAC PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS
SENODAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuó

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Tiago Jackson May Dezuó
Udesc (Orientador/Presidente)

Membros:

Dr. Ademir Nied
Udesc

Dr. César Cataldo Scharlau
UFSC

Joinville, 09 de junho de 2026

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo apoio ao longo desta trajetória. Em especial, aos meus pais, pelo incentivo constante, e à minha noiva, pelo companheirismo e pela compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador, agradeço pela orientação, pela confiança e pelas valiosas contribuições para esta pesquisa.

Agradeço à Universidade do Estado de Santa Catarina, pela formação e pela estrutura oferecida para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que dedicarem seu tempo à leitura desta dissertação.

“É uma coisa perigosa, sair pela porta. Você pisa
na estrada, e se não controlar seus pés, não há
como saber para onde pode ser levado.”
(J. R. R. Tolkien)

RESUMO

Esta dissertação propõe uma estratégia de controle chaveado com critério $\mathcal{H}_\infty$ para o acionamento de um motor BLAC alimentado por inversor trifásico, com foco no seguimento de referências senoidais. O trabalho parte da modelagem do conjunto inversor–motor em coordenadas $\alpha\beta$ e da formulação da dinâmica do erro de rastreamento, preservando explicitamente a natureza chaveada do conversor e evitando o uso de modelos médios. Com base nesse modelo, desenvolve-se uma lei de chaveamento do tipo *arg max* sintetizada por desigualdades matriciais lineares, construída a partir de uma função de Lyapunov definida como o máximo de funções auxiliares associadas aos modos do inversor. A formulação incorpora o critério $\mathcal{H}_\infty$ para atenuação da influência de termos exógenos periódicos sobre a dinâmica do erro, empregando o Procedimento–S, o lema de Finsler e uma representação politópica das condições de operação. A arquitetura de controle adotada combina uma malha interna de corrente, governada pela lei de chaveamento projetada, e uma malha externa de velocidade responsável pela geração das referências senoidais. Os resultados de simulação mostram que a estratégia proposta mantém estabilidade em malha fechada, promove seguimento satisfatório das referências de velocidade, corrente e torque e apresenta comportamento consistente para diferentes plantas de motor. Nos ensaios de robustez, o sistema permaneceu operante diante de degrau de torque de carga e de redução de 20% na constante de força contraeletromotriz, preservando a estabilidade e a funcionalidade do acionamento mesmo sob essas condições não nominais. Conclui-se que a abordagem proposta constitui uma alternativa tecnicamente consistente para o controle de acionamentos BLAC, contribuindo para o uso de leis de chaveamento do tipo *arg max* com desempenho robusto em sistemas inversor–motor.

Palavras-chave: Controle chaveado. Controle H–infinito. Motor BLAC. Inversor trifásico. Seguimento senoidal.

ABSTRACT

This dissertation proposes a switched control strategy with an $\mathcal{H}_\infty$ criterion for the drive of a BLAC motor fed by a three-phase inverter, focusing on sinusoidal reference tracking. The work starts from the $\alpha\beta$ modeling of the inverter–motor set and from the formulation of the tracking error dynamics, explicitly preserving the switched nature of the converter and avoiding the use of averaged models. Based on this model, an *arg max* switching law synthesized through linear matrix inequalities is developed from a Lyapunov function defined as the maximum of auxiliary functions associated with the inverter modes. The formulation incorporates the $\mathcal{H}_\infty$ criterion to attenuate the influence of periodic exogenous terms on the error dynamics, employing the S–procedure, Finsler’s lemma, and a polytopic representation of the operating conditions. The adopted control architecture combines an inner current loop governed by the designed switching law and an outer speed loop responsible for generating the sinusoidal references. Simulation results show that the proposed strategy maintains closed-loop stability, provides satisfactory tracking of speed, current, and torque references, and exhibits consistent behavior for different motor plants. In the robustness tests, the system remained operative under a load torque step and a 20% reduction in the back-EMF constant, preserving the stability and functionality of the drive under these non-nominal operating conditions. It is concluded that the proposed approach constitutes a technically consistent alternative for the control of BLAC drives, contributing to the use of *arg max* switching laws with robust performance in inverter–motor systems.

Keywords: Switched control. H–infinity control. BLAC motor. Three-phase inverter. Sinusoidal tracking.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação das trajetórias em sistemas chaveados.	30
Figura 2 – Duas funções de Lyapunov para um sistema chaveado. Curvas contínuas correspondem a v_1 e tracejadas a v_2	34
Figura 3 – Força contraeletromotriz induzida em uma máquina síncrona.	46
Figura 4 – Regiões típicas de operação em acionamentos com controle de velocidade. .	47
Figura 5 – Diagrama de blocos de um PMSM com controle vetorial.	50
Figura 6 – Diagrama de blocos de um PMSM com controle direto de torque.	51
Figura 7 – Diagrama de blocos de um PMSM com controle preditivo.	52
Figura 8 – Representação do sistema inversor-motor BLAC.	54
Figura 9 – Diagrama de blocos da arquitetura de controle proposta para o sistema. . .	73
Figura 10 – Resposta da velocidade mecânica a um degrau de referência para os motores 1 e 2. São apresentadas a velocidade mecânica ω_m e sua referência ω_m^*	83
Figura 11 – Resposta da velocidade mecânica a um perfil de referência composto por degrau inicial e rampa para os motores 1 e 2. São apresentadas a velocidade mecânica ω_m e sua referência ω_m^*	85
Figura 12 – Seguimento das correntes de referência no referencial estacionário $\alpha\beta$ para os motores 1 e 2. São apresentadas as correntes i_α e i_β e suas respectivas referências.	86
Figura 13 – Resposta do torque eletromagnético para os motores 1 e 2 sob o perfil de velocidade composto por degrau inicial e rampa. São apresentados o torque eletromagnético T_e e sua referência T_e^*	87
Figura 14 – Evolução temporal do modo ativo do inversor para os motores 1 e 2 sob o perfil de velocidade composto por degrau inicial e rampa. À direita, apresenta-se uma ampliação da sequência de comutação.	88
Figura 15 – Trajetória das correntes no plano (i_α, i_β) para os motores 1 e 2 durante o seguimento senoidal em regime transitório e permanente.	89
Figura 16 – Trajetória do erro no plano $(e_{i_\alpha}, e_{i_\beta})$ e regiões de operação associadas à lei de chaveamento para os motores 1 e 2.	90
Figura 17 – Resposta do motor 1 a um degrau positivo de 20% no torque de carga aplicado em $t = 1$ s, com referência de velocidade constante.	92
Figura 18 – Perfil temporal da constante de FCEM normalizada K_e utilizado para simular desmagnetização parcial dos ímãs permanentes no motor 1.	94
Figura 19 – Resposta do motor 1 sob redução progressiva da constante de FCEM, utilizada para representar desmagnetização parcial dos ímãs permanentes.	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Modos de operação ativos do inversor trifásico e tensões de fase.	55
Tabela 2	– Parâmetros dos motores considerados na síntese e na simulação.	77
Tabela 3	– Parâmetros comuns da síntese LMI e da simulação.	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BLAC	<i>Brushless Alternating Current</i>
BLDC	<i>Brushless Direct Current</i>
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
CCS–MPC	<i>Continuous Control Set Model Predictive Control</i>
DFIG	<i>Doubly Fed Induction Generator</i>
DTC	<i>Direct Torque Control</i>
FCEM	Força Contraeletromotriz
FCS–MPC	<i>Finite Control Set Model Predictive Control</i>
FOC	<i>Field Oriented Control</i>
LIT	Linear Invariante no Tempo
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
MPPT	<i>Maximum Power Point Tracking</i>
PI	Proporcional–Integral
PMSM	<i>Permanent Magnet Synchronous Motor</i>
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SeDuMi	<i>Self–Dual–Minimization</i>
SVM	<i>Space Vector Modulation</i>
YALMIP	<i>Yet Another LMI Parser</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Multiplicador escalar do Procedimento–S
α_i	Coefficiente de combinação convexa do politopo de incerteza
α_p	Fator de parametrização do ganho proporcional da malha externa
α_T	Fator de suavização do filtro aplicado à referência de torque
$\bar{\theta}$	Vetor de pesos convexos associado ao equilíbrio
$\bar{\theta}_i$	Peso convexo do modo i no equilíbrio
$\Delta\theta$	Varição do vetor de pesos convexos em relação ao equilíbrio
δ	Ângulo entre os vetores de fluxo do estator e do rotor
ε	Erro relativo máximo admissível em regime permanente
ε_{PSD}	Tolerância numérica de semidefinição positiva adotada nas LMIs
γ	Limitante superior do ganho $\mathcal{H}_\infty$
Γ	Matriz global do critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$
Γ_0	Forma básica da matriz de desempenho $\mathcal{H}_\infty$
Θ	<i>Simplex</i> de combinações convexas admissíveis
θ	Vetor de pesos convexos dos modos ativos
θ_e	Posição angular elétrica do rotor
θ_i	Peso convexo associado ao modo i
$\vartheta(\Theta)$	Conjunto de vértices admissíveis do <i>simplex</i> Θ
λ	Escalar de combinação convexa
ω_e	Velocidade angular elétrica
$\omega_{e,\max}$	Limite superior da velocidade elétrica no politopo de síntese
$\omega_{e,\min}$	Limite inferior da velocidade elétrica no politopo de síntese
ω_m	Velocidade angular mecânica do rotor
ω_m^*	Referência de velocidade angular mecânica
$\omega_{m,\max}$	Limite superior da velocidade mecânica considerado na síntese
$\omega_{m,\min}$	Limite inferior da velocidade mecânica considerado na síntese
ω_s	Velocidade angular síncrona
Ω_m	Conjunto discreto de velocidades mecânicas extremas do politopo
Φ	Matriz de relaxamento introduzida pelo Procedimento–S
Ψ	Matriz associada à condição de decrescimento da função de Lyapunov

ψ_f	Fluxo magnético associado aos ímãs do rotor
ψ_s	Fluxo magnético estatórico
σ	Lei de chaveamento ou modo ativo
ξ	Vetor de estado estendido da formulação LMI
ζ	Vetor aumentado auxiliar
$\mathcal{H}_\infty$	Cr�terio de desempenho robusto H–infinito
$\mathcal{M}$	Conjunto de modos de operação
$\mathcal{P}$	Politopo de operação adotado na síntese LMI
$\mathcal{V}$	Conjunto de vértices associados às variáveis trigonométricas do politopo
A	Matriz dinâmica de estado
A_0	Base do núcleo do operador linear de restrição
A_i	Matriz dinâmica associada ao modo i
B	Matriz de entrada de controle
$B(\omega_e)$	Matriz equivalente do termo harmônico na dinâmica do erro
B_v	Coefficiente de atrito viscoso
B_w	Matriz de entrada de perturbação exógena
B_z	Matriz de acoplamento do vetor periódico exógeno
C_a	Matriz constante de restrições lineares
$C_b(\theta)$	Matriz afim de restrições lineares
C_z	Matriz de saída de desempenho
D	Matriz diagonal de normalização da entrada
D_w	Matriz de transmissão direta da perturbação
D_z	Matriz de transmissão direta da entrada de controle
E_f	Força eletromotriz interna do rotor
E_i	Matriz de saída de desempenho do modo i
G	Matriz simétrica positiva definida de ponderação do critério $\mathcal{H}_\infty$
I_2	Matriz identidade de ordem 2
I_m	Matriz identidade de ordem m
I_n	Matriz identidade de ordem n
I_{n_z}	Matriz identidade de ordem n_z
I_p	Amplitude da corrente de referência senoidal

I_{sat}	Limite de saturação das correntes
J	Momento de inércia do rotor
K	Ganho de realimentação de estados
K_e	Constante de força contraeletromotriz
K_p	Ganho proporcional da malha externa de velocidade
K_t	Constante de torque do motor
L	Indutância equivalente de fase
L_d	Indutância no eixo direto
L_F	Matriz auxiliar do lema de Finsler
L_q	Indutância no eixo em quadratura
L_s	Indutância estatórica
M	Vetor de soma unitária associado à restrição convexa
N	Operador linear de restrição convexa
N_p	Número de polos da máquina
N_t	Número total de passos da simulação discreta
P	Matriz de Lyapunov
$\bar{P}$	Combinação convexa das matrizes P_i
P_e	Potência eletromagnética ativa
P_i	Matriz da função auxiliar de Lyapunov do modo i
$P_{\max}$	Limite superior imposto à matriz de Lyapunov na otimização
Q	Base ortogonal do espaço nulo de N
R	Resistência elétrica de fase
S_i	Vetor auxiliar afim da função de Lyapunov
S_k	Estado de comutação da chave k do inversor
T	Matriz auxiliar da função de Lyapunov
T_{11}	Submatriz ativa de T associada aos estados elétricos
T_e	Torque eletromagnético
$T_{e,\max}$	Torque eletromagnético máximo admissível
T_L	Torque de carga
$T_{\max}$	Limite auxiliar imposto à submatriz T_{11}
T_{sim}	Tempo total de simulação

$V(x)$	Função candidata de Lyapunov
$V(e)$	Função candidata de Lyapunov em coordenadas de erro
$V_{\sigma(t)}$	Trecho ativo da função composta
V_a, V_b, V_c	Tensões de fase do estator
V_{cc}	Tensão do barramento CC
V_s	Tensão de fase do estator
$V_{\alpha,i}, V_{\beta,i}$	Tensões aplicadas no referencial $\alpha\beta$ no modo i
$W(\omega_e)$	Matriz geradora da dinâmica rotacional do vetor periódico
Y	Variável auxiliar da síntese $\mathcal{H}_\infty$
Z_e	Matriz de geração da corrente de referência
$\bar{Z}_e$	Matriz estendida de geração da referência no espaço de estados
$Z_{\max}$	Valor máximo adotado para a matriz de referência no politopo
b	Matriz de entrada normalizada
b_{phys}	Matriz física de entrada do sistema
b_i	Coluna i da matriz de entrada normalizada
$base_dwell$	Tempo mínimo de permanência entre comutações sucessivas
c	Cosseno da posição elétrica do rotor
d	Vetor de perturbação associado ao torque de carga
d_j	Fator de normalização associado à coluna j da matriz b_{phys}
dt	Passo de integração numérica
e	Vetor de erro de seguimento
e_0	Condição inicial do erro
e_a, e_b, e_c	Forças contraeletromotrizes das fases
e_∞	Erro de regime permanente da malha de velocidade
e_ω	Erro de velocidade mecânica
e_x	Força contraeletromotriz da fase x
$f(x)$	Campo vetorial do sistema
f_a, f_b, f_c	Grandezas trifásicas genéricas em coordenadas naturais
f_α, f_β	Componentes no referencial estacionário $\alpha\beta$
f_e	Frequência elétrica de alimentação
i_a, i_b, i_c	Correntes de fase do estator

i_α, i_β	Correntes no referencial estacionário $\alpha\beta$
i_α^*, i_β^*	Correntes de referência no referencial estacionário $\alpha\beta$
i_d, i_q	Correntes nos eixos direto e em quadratura
i_d^*, i_q^*	Correntes de referência nos eixos direto e em quadratura
$i_{q,\max}$	Limite máximo admissível da corrente de quadratura
k_i	Termo afim da dinâmica do erro no modo i
m	Número de modos de operação
$margin$	Margem de histerese da lógica de chaveamento
n	Dimensão do vetor de estado
n_s	Velocidade síncrona
n_z	Dimensão do vetor periódico exógeno
p	Número de pares de polos
r	Número de vértices do politopo de incerteza
s	Seno da posição elétrica do rotor
s_T	Escalar auxiliar limitante da norma de T_{11}
u	Vetor de comandos dos modos de chaveamento do inversor
u_j	Vetor de tensão aplicado pelo inversor no modo j
v_i	Função auxiliar de Lyapunov associada ao modo i
w	Sinal de perturbação exógena
x	Vetor de estado
x_0	Condição inicial do vetor de estado
x^*	Vetor de estado de referência
$\bar{x}$	Ponto de equilíbrio de referência
y	Vetor de variáveis de desempenho
z	Vetor periódico exógeno associado à posição elétrica
z^*	Vetor periódico no ponto de equilíbrio nominal
z_e	Saída de desempenho em coordenadas de erro

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	OBJETIVOS	19
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2	CONTROLE CHAVEADO	21
2.1	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	22
2.1.1	Definição de LMI	22
2.1.2	Propriedade de convexidade	23
2.1.3	Tratamento de incertezas	23
2.1.4	Artifícios utilizados em LMIs	24
2.2	MODELAGEM DE SISTEMAS CHAVEADOS	28
2.2.1	Sistemas lineares e afins	28
2.2.2	Modos deslizantes	29
2.2.3	Equilíbrios possíveis	30
2.3	ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS	31
2.3.1	Critério de estabilidade de Lyapunov	32
2.3.2	Estabilidade sob chaveamento restrito e funções múltiplas	33
2.4	LEI DE CHAVEAMENTO PARA SUBSISTEMAS AFINS	34
2.4.1	Tipos de leis de chaveamento	35
2.4.2	Função candidata	36
2.5	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	39
2.5.1	Custo garantido	39
2.5.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$	40
2.6	APLICAÇÕES DE CONTROLE CHAVEADO NA LITERATURA	41
3	MOTORES ELÉTRICOS	43
3.1	MOTOR SÍNCRONO	43
3.2	ACIONAMENTO DO MOTOR SÍNCRONO	46
3.3	CONTROLE DO MOTOR SÍNCRONO	48
3.3.1	Controle vetorial	48
3.3.2	Controle direto de torque	49
3.3.3	Controle preditivo	51
3.3.4	Controle chaveado	53
3.4	MODELAGEM DO SISTEMA	54
3.4.1	Equacionamento elétrico	54
3.4.2	Equacionamento mecânico	56
3.4.3	Representação em espaço de estados	56

4	PROJETO DA LEI DE CHAVEAMENTO	58
4.1	CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA	58
4.1.1	Modelo do sinal de referência	60
4.1.2	Formulação do erro dinâmico	61
4.2	FUNÇÃO DE LYAPUNOV E LEI DE CHAVEAMENTO	62
4.2.1	Função de Lyapunov candidata	62
4.2.2	Estrutura da matriz T	63
4.2.3	Lei de chaveamento	64
4.3	CONDIÇÃO DE POSITIVIDADE DA FUNÇÃO DE LYAPUNOV	64
4.4	CONDIÇÃO DE DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO DE LYAPUNOV	66
4.5	CONDIÇÃO DE RELAXAMENTO	68
4.6	CRITÉRIO DE ATENUAÇÃO DE DISTÚRBIO $\mathcal{H}_\infty$	69
4.7	FORMULAÇÃO FINAL DO PROBLEMA LMI	71
4.8	ARQUITETURA DE CONTROLE	72
4.8.1	Estrutura geral da arquitetura	72
4.8.2	Controlador proporcional da malha externa	74
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	76
5.1	IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE	76
5.1.1	Parâmetros do sistema	76
5.1.2	Procedimento computacional de síntese e simulação	78
5.2	ANÁLISE DE DESEMPENHO	82
5.3	AVALIAÇÃO DE ROBUSTEZ	91
5.3.1	Variação do torque de carga	91
5.3.2	Variação paramétrica da planta	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

Os acionamentos elétricos baseados em máquinas síncronas de ímãs permanentes têm assumido papel de destaque em aplicações que exigem elevada densidade de torque, boa eficiência energética e resposta dinâmica rápida. Essas características explicam a presença crescente dessas máquinas em sistemas de tração, robótica e outras aplicações de alto desempenho. Ao mesmo tempo, a obtenção de alto desempenho dinâmico não é um problema trivial, pois a dinâmica da máquina é não linear e sensível a incertezas paramétricas, variações de carga e perturbações externas (Ullah; Guzinski; Mirza, 2022).

Nos acionamentos por inversor de frequência, o problema de controle não envolve apenas a dinâmica eletromecânica do motor, mas também a seleção do modo de comutação do conversor em cada instante. Na prática, isso significa que o sistema evolui sob diferentes dinâmicas associadas aos estados admissíveis das chaves semicondutoras. Sob essa perspectiva, o conjunto inversor–máquina pode ser interpretado de forma natural no contexto de sistemas chaveados, isto é, sistemas compostos por vários subsistemas e por uma regra responsável por selecionar o modo ativo ao longo do tempo (Liberzon, 2003).

Essa formulação é particularmente importante em eletrônica de potência, onde sistemas chaveados afins aparecem com frequência em modelos de conversores e acionamentos elétricos (Deaecto; Geromel, 2017). A presença do termo afim torna o problema de controle mais delicado do que no caso puramente linear, pois o objetivo deixa de ser, em geral, a estabilização da origem e passa a envolver a determinação de pontos atratores compatíveis com os equilíbrios alcançáveis do sistema (Costanzo, 2022). Em muitos casos, o equilíbrio de interesse não coincide com o equilíbrio de nenhum subsistema isolado, o que ajuda a explicar por que a estabilização costuma estar associada a frequências elevadas de chaveamento e à ocorrência de modos deslizantes. Do ponto de vista prático, esse aspecto é relevante porque comutação excessiva implica perdas adicionais e pode tornar a implementação menos atrativa (Deaecto; Geromel, 2017).

No caso específico de máquinas síncronas acionadas por inversor trifásico, resultados recentes mostram que o problema de controle pode ser tratado diretamente no âmbito de sistemas chaveados, sem depender necessariamente de estruturas clássicas baseadas em referenciais auxiliares. Nessa linha, já foram propostas formulações baseadas em funções de Lyapunov não quadráticas e leis de chaveamento dependentes do estado para regular a dinâmica da máquina a partir de seu modelo original (Egidio et al., 2019). Posteriormente, esse enfoque foi estendido para problemas de seguimento de trajetória, com condições de projeto formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para garantir rastreamento assintótico com custo garantido (Egidio et al., 2022). Em um contexto mais amplo, também já se mostrou que aplicações em engenharia elétrica, incluindo máquinas síncronas, conduzem naturalmente a problemas de rastreamento em sistemas chaveados com dinâmica periódica em função da posição angular, o que amplia a complexidade do projeto de controle (Costanzo, 2022).

Apesar desses avanços, a literatura mais próxima das aplicações em eletrônica de potência e conversores tem se concentrado predominantemente em estratégias de chaveamento do tipo *arg min*, especialmente em problemas nos quais se busca explorar de forma explícita a natureza não linear e variante no tempo dos sistemas chaveados. Nesses trabalhos, aparecem com destaque aspectos práticos como a variação da frequência de comutação com o ponto de operação e a necessidade de robustez frente a mudanças de equilíbrio (Silva; Deaecto; Barros, 2022). Por outro lado, formulações do tipo *arg max* já foram desenvolvidas para sistemas chaveados afins em um contexto mais geral, com leis de chaveamento obtidas a partir de funções auxiliares e condições de síntese expressas por LMIs (Trofino et al., 2009). Ainda assim, sua exploração no problema específico do acionamento de motor síncrono de corrente alternada sem escovas (BLAC, do inglês *Brushless Alternating Current*) por inversor trifásico, com seguimento de referências senoidais e incorporação explícita de desempenho robusto, permanece menos consolidada na literatura. É nesse recorte que se insere a presente dissertação.

A incorporação de um critério $\mathcal{H}_\infty$ é pertinente nesse contexto porque a robustez frente a perturbações e incertezas permanece como uma exigência central no controle de motor síncrono e de acionamentos correlatos (Tahami et al., 2024). A literatura mostra que técnicas $\mathcal{H}_\infty$ vêm sendo empregadas justamente para limitar a influência de distúrbios sobre o desempenho do sistema e melhorar a robustez da malha de controle. Ainda assim, grande parte dessas abordagens permanece vinculada a arquiteturas convencionais, em especial às estruturas em cascata associadas ao controle vetorial (Ullah; Guzinski; Mirza, 2022). Isso abre espaço para investigar uma formulação alternativa na qual a própria comutação do inversor seja utilizada como mecanismo de controle, articulada com uma síntese via LMIs e com uma medida explícita de atenuação de distúrbios.

Diante desse cenário, esta dissertação insere-se na interface entre sistemas chaveados, controle robusto e acionamentos elétricos, tendo como foco o projeto de uma lei de chaveamento com critério $\mathcal{H}_\infty$ aplicada ao acionamento de motor BLAC para seguimento de referências senoidais. A proposta busca explorar diretamente a natureza chaveada do inversor, evitando o tratamento por modelo médio e preservando, no problema de síntese, a estrutura física que efetivamente governa o acionamento. Com isso, pretende-se avançar na análise e no projeto de uma estratégia capaz de combinar estabilidade, desempenho de rastreamento e robustez de forma coerente com as limitações práticas do sistema.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral desta dissertação é desenvolver uma lei de chaveamento com critério $\mathcal{H}_\infty$, sintetizada por meio de desigualdades matriciais lineares, para o acionamento de um motor BLAC alimentado por inversor trifásico, visando o seguimento de referências senoidais com estabilidade e robustez frente a perturbações.

Como objetivos específicos, busca-se estudar os fundamentos teóricos de sistemas chave-

ados e do controle robusto aplicados ao problema considerado, modelar o sistema inversor–motor BLAC em uma forma adequada à síntese do controlador, formular a dinâmica do erro de rastreamento para referências senoidais, derivar condições de síntese em termos de LMIs para uma lei de chaveamento do tipo *arg max*, estruturar a arquitetura de controle correspondente e validar a estratégia proposta por meio de simulações, com análise de desempenho e robustez.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

A organização dos capítulos desta dissertação é apresentada a seguir:

- Capítulo 2: apresenta os fundamentos de controle chaveado utilizados no trabalho. Inicialmente, são discutidas as desigualdades matriciais lineares e artifícios matemáticos importantes para sua aplicação. Em seguida, são abordadas a modelagem de sistemas chaveados, a análise de estabilidade, as leis de chaveamento e a formulação de critérios de desempenho, com destaque para custo garantido e controle $\mathcal{H}_\infty$.
- Capítulo 3: apresenta os fundamentos relacionados aos motores elétricos necessários ao desenvolvimento da dissertação. São discutidos o motor síncrono, seu acionamento e as principais estratégias de controle. Ao final, é desenvolvida a modelagem do sistema inversor–motor BLAC, incluindo o equacionamento elétrico, o equacionamento mecânico e sua representação em espaço de estados.
- Capítulo 4: desenvolve o projeto da lei de chaveamento proposta. São apresentados a caracterização do sistema, o modelo do sinal de referência e a formulação da dinâmica do erro. Na sequência, são estabelecidos a função candidata de Lyapunov, a lei de chaveamento, as condições de positividade e decrescimento, o relaxamento empregado e a incorporação do critério $\mathcal{H}_\infty$, culminando na formulação final do problema e na arquitetura de controle adotada.
- Capítulo 5: apresenta os resultados e discussões. Inicialmente, são descritos os parâmetros do sistema e o procedimento computacional de síntese e simulação. Em seguida, são analisados os resultados de desempenho do controlador proposto e sua robustez frente a variações de torque de carga e de parâmetros da planta.
- Capítulo 6: apresenta as considerações finais da dissertação, destacando as principais contribuições do trabalho, suas limitações e possíveis direções para trabalhos futuros.

2 CONTROLE CHAVEADO

A teoria de controle moderno fundamenta-se na utilização de modelos matemáticos capazes de descrever, de forma adequada, o comportamento dinâmico de sistemas físicos, permitindo a análise de estabilidade e o projeto de controladores com requisitos de desempenho. Historicamente, grande parte dessa teoria foi desenvolvida no contexto de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT), nos quais as leis de controle são contínuas e diferenciáveis, e as ferramentas analíticas apresentam elevada maturidade. No entanto, diversas aplicações de interesse prático, como eletrônica de potência, robótica e sistemas automotivos, não se enquadram estritamente nesse formato, uma vez que seu comportamento dinâmico é caracterizado pela alternância entre diferentes regimes de operação, acionados por eventos discretos. Sistemas dessa natureza, nos quais coexistem dinâmicas contínuas e mecanismos de comutação, são usualmente denominados sistemas chaveados (Liberzon, 2003).

Os sistemas chaveados constituem uma classe particular de sistemas híbridos, nos quais fenômenos contínuos e discretos interagem de maneira estruturada. Nesse cenário, o controle chaveado surge como uma abordagem apropriada para tratar modelos cuja estabilidade e desempenho dependem diretamente da sequência e das condições de comutação entre modos dinâmicos distintos. Cada modo é descrito por um conjunto próprio de equações diferenciais, enquanto a lei de chaveamento define, a cada instante, qual subsistema governa a evolução dos estados. Portanto, o desafio central do projeto de controle consiste em estabelecer regras de comutação que garantam estabilidade global e desempenho satisfatório, mesmo na presença de descontinuidades nas trajetórias do sistema (Liberzon, 2003).

Do ponto de vista prático, o controle chaveado abrange desde estratégias simples, baseadas em decisões discretas do tipo liga–desliga, até formulações mais elaboradas aplicadas a sistemas lineares por partes. Nestes casos, recorre-se ao uso de múltiplas funções de Lyapunov e à imposição de condições convexas formuladas por meio de desigualdades matriciais lineares (Johansson, 2002). A incorporação dessas ferramentas possibilitou o desenvolvimento de procedimentos sistemáticos de síntese de leis de chaveamento que asseguram estabilidade e desempenho, explorando a convexidade do domínio de projeto e os recursos computacionais associados à resolução de LMIs.

Além de seu interesse teórico, o controle chaveado apresenta relevância em aplicações industriais, em especial nos sistemas de conversão de energia elétrica, como inversores e conversores CC–CC. Nesses sistemas, dispositivos semicondutores operam alternando entre estados condutivos e bloqueados, o que impõe uma dinâmica intrinsecamente híbrida. A análise e o projeto de tais sistemas apoiam-se nos princípios clássicos da teoria de controle (Ogata, 2010), estendidos de forma consistente para acomodar os efeitos da comutação. Nesse contexto, a formulação chaveada surge como um desdobramento natural da teoria, e sua análise por meio de funções de Lyapunov e condições LMI fornece um arcabouço rigoroso para a garantia de estabilidade e demais requisitos (Liberzon, 2003).

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos que dão suporte à formulação e à análise de controladores chaveados adotada neste trabalho. Inicialmente, são discutidas as LMIs, enfatizando seu papel como ferramenta de representação convexa de restrições de estabilidade e desempenho, bem como os principais artifícios matemáticos associados à sua utilização. Em seguida, desenvolve-se a modelagem de sistemas chaveados, contemplando sistemas lineares e afins, a ocorrência de modos deslizantes e a caracterização de equilíbrios possíveis. Na sequência, são apresentados critérios de estabilidade aplicáveis a sistemas com múltiplos modos, juntamente com as condições que asseguram a convergência do estado sob comutação. Posteriormente, aborda-se o projeto da lei de chaveamento para subsistemas afins, definindo-se a estratégia responsável pela seleção dinâmica dos modos de operação. Por fim, formula-se o problema de otimização associado à síntese do controle, incorporando critérios de desempenho e restrições convexas que visam garantir a robustez e a eficiência do sistema.

2.1 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Grande parte dos sistemas dinâmicos de interesse na engenharia de controle apresenta comportamento multivariável, o que conduz naturalmente à representação de suas equações diferenciais em forma matricial. Assim, propriedades fundamentais de sistemas de controle passam a ser descritas por meio de desigualdades envolvendo matrizes simétricas. Esse fato motiva a utilização das LMIs como ferramenta central de análise.

O uso de LMIs permite a formulação, de forma unificada, de diversos problemas clássicos como a verificação de estabilidade, o projeto de controladores robustos e a otimização de critérios de desempenho. A principal vantagem dessa abordagem reside na possibilidade de expressar restrições matriciais em um formato convexo, o que assegura a existência de soluções globais e viabiliza o uso de métodos numéricos para sua resolução (Boyd et al., 1994).

A consolidação das LMIs no contexto da engenharia de controle está diretamente associada ao desenvolvimento dos métodos de pontos interiores para otimização convexa, introduzidos por Nesterov e Nemirovskii (1994). Esses métodos tornaram possível a resolução eficiente de problemas de programação semidefinida com complexidade polinomial, permitindo a aplicação prática de técnicas baseadas em LMIs mesmo em sistemas de grande dimensão. Como consequência, diversas ferramentas computacionais passaram a ser amplamente adotadas pela comunidade, destacando-se o *LMI Control Toolbox* (Gahinet et al., 1995) e o *YALMIP* (Löfberg, 2004), que estabeleceram as LMIs como uma linguagem padrão para a análise e a síntese de sistemas de controle multivariáveis.

2.1.1 Definição de LMI

A forma geral de uma LMI é apresentada na expressão (1). Nela, $F_0, F_1, \dots, F_m$ são matrizes reais simétricas de mesma dimensão, e $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ é o vetor de variáveis de decisão (Boyd et al., 1994).

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1)$$

Diz-se que a expressão (2) constitui uma LMI quando $F(x)$ depende de forma afim das variáveis x_i e é simétrica para todo x . A notação vista em (2) indica que a matriz é definida negativa, ou seja, todos os seus autovalores são estritamente menores que zero.

$$F(x) < 0 \quad (2)$$

O conjunto de soluções que satisfazem a desigualdade (2) é definido pela equação (3). Esse conjunto é de grande importância em otimização convexa, pois sua estrutura preserva propriedades matemáticas desejáveis que permitem o uso de algoritmos eficientes para verificação e síntese de controladores.

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^m : F(x) < 0\} \quad (3)$$

2.1.2 Propriedade de convexidade

Uma das propriedades mais importantes das LMIs é a convexidade do conjunto de soluções viáveis. Essa característica garante que o problema de verificar ou otimizar sob restrições LMI pode ser resolvido de maneira eficiente por métodos de otimização convexa (Boyd et al., 1994).

Considere novamente o conjunto $\mathcal{X}$ definido em (3). Mostra-se que $\mathcal{X}$ é convexo, isto é, se x_1 e x_2 satisfazem $F(x_1) < 0$ e $F(x_2) < 0$, então qualquer combinação convexa $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, com $0 \leq \lambda \leq 1$, também satisfaz a desigualdade. De fato, pela afinidade de $F(x)$, obtém-se (4).

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \quad (4)$$

Como $F(x_1)$ e $F(x_2)$ são ambas matrizes definidas negativas, e a combinação convexa de duas matrizes definidas negativas é também definida negativa, conclui-se que $F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < 0$. Logo, $\mathcal{X}$ é um conjunto convexo.

A convexidade das LMIs é fundamental porque garante que qualquer problema de otimização envolvendo uma função objetivo convexa e restrições LMI possui solução global e pode ser resolvido por algoritmos polinomiais. Essa propriedade distingue as LMIs de outras formas de restrição não lineares e é a base para a ampla utilização dessas formulações em controle e otimização (Boyd et al., 1994).

2.1.3 Tratamento de incertezas

Em sistemas reais, é raro que os parâmetros do modelo sejam conhecidos com exatidão ou permaneçam constantes ao longo do tempo. Incertezas desse tipo podem estar associadas a

imprecisões de modelagem, variações físicas inerentes ao processo, envelhecimento de componentes ou mudanças nas condições de operação. Nesse contexto, a teoria das LMIs oferece uma estrutura conveniente para o tratamento de incertezas paramétricas, ao possibilitar a formulação de condições de estabilidade e desempenho que se mantêm válidas mesmo na presença de perturbações em torno de valores nominais (Trofino et al., 2015).

O sistema linear incerto pode ser representado pelo modelo dinâmico dado na equação (5).

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) \quad (5)$$

Nessa expressão, $A(\rho)$ é uma matriz que depende de um vetor de parâmetros incertos $\rho = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p]^\top$. Assume-se que esses parâmetros pertencem a um conjunto convexo e limitado, de modo que o sistema possa ser descrito por uma combinação convexa de modelos conhecidos, conforme indicado na equação (6).

$$A(\rho) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\rho) A_i, \quad \alpha_i(\rho) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(\rho) = 1 \quad (6)$$

O conjunto de matrizes $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ representa os vértices do politopo de incerteza, de modo que o comportamento do sistema incerto pode ser descrito como uma combinação convexa desses modelos. Nesse contexto, a análise via LMIs consiste na verificação de condições matriciais que devem ser satisfeitas em todos os vértices do politopo, como na busca de uma matriz simétrica definida positiva $P = P^\top > 0$ que satisfaça a desigualdade apresentada na condição (7).

$$A_i^\top P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

O atendimento simultâneo dessa condição em todos os vértices implica que a propriedade de interesse é preservada para qualquer combinação convexa $A(\rho)$ pertencente ao politopo definido em (6). Essa formulação é muito utilizada porque mantém o problema no domínio das LMIs, garantindo convexidade e permitindo o uso de métodos de otimização eficientes. Assim, a análise de sistemas incertos se reduz à verificação de um número finito de condições matriciais, sem a necessidade de explorar continuamente todo o espaço de variação dos parâmetros (Trofino et al., 2015).

2.1.4 Artíficos utilizados em LMIs

Problemas de controle formulados no contexto de LMIs frequentemente envolvem restrições não lineares ou termos que inviabilizam a aplicação direta de *solvers* de otimização convexa. Essas dificuldades surgem, em geral, da interação entre variáveis de decisão e parâmetros do sistema, ou da própria estrutura dos critérios de estabilidade e desempenho considerados. Para contornar tais limitações, recorre-se a diversos artifícios matemáticos cujo objetivo é reformular expressões não lineares em condições lineares equivalentes ou, quando isso não é possível, em

aproximações menos conservadoras que preservem a estrutura LMI do problema (Trofino et al., 2015).

Essas transformações desempenham papel essencial na obtenção de condições de estabilidade e desempenho computacionalmente tratáveis. Entre os artifícios mais empregados na literatura destacam-se o complemento de Schur, o Procedimento-S e o lema de Finsler, cada um associado a um tipo específico de estrutura algébrica e hipótese de análise. Nas seções seguintes, apresentam-se esses artifícios, discutindo-se suas formas canônicas e os contextos em que são aplicados na análise e no projeto de controladores baseados em LMIs.

2.1.4.1 Complemento de Schur

O complemento de Schur estabelece uma relação fundamental entre as propriedades de positividade de uma matriz particionada e as de seus sub-blocos, sendo amplamente empregado para reescrever desigualdades matriciais em formatos mais convenientes no contexto de LMIs (Gallier, 2011). Essa ferramenta, originalmente introduzida por Schur (1917), tornou-se um elemento central em diversas áreas da matemática aplicada, com aplicações diretas em controle, otimização e teoria de sistemas.

Considere a matriz simétrica particionada apresentada em (8), com blocos de dimensões compatíveis e C inversível.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}, \quad M = M^\top \quad (8)$$

O complemento de Schur de C em M é definido em (9).

$$S = A - BC^{-1}B^\top \quad (9)$$

A equivalência central utilizada em aplicações afirma que as condições em (10) são logicamente equivalentes (Gallier, 2011).

$$M > 0 \iff (C > 0 \text{ e } A - BC^{-1}B^\top > 0) \quad (10)$$

O mesmo raciocínio também se aplica ao caso negativo, em que todas as desigualdades são invertidas. Esses resultados permitem eliminar inversas explícitas em desigualdades matriciais e reescrever expressões originalmente não lineares em formas lineares no espaço das variáveis de decisão, preservando a convexidade da formulação.

No contexto das LMIs, essa equivalência é amplamente explorada para substituir expressões do tipo $T_s - R_s^\top H_s^{-1} R_s > 0$ pela forma blocada apresentada em (11), eliminando a dependência não linear associada à inversa de H_s . Essa reformulação é particularmente relevante em problemas de controle, nos quais termos quadráticos e inversas de matrizes surgem de maneira natural nos critérios de estabilidade e desempenho. Em vista disso, o complemento de

Schur fornece um procedimento sistemático para obter condições equivalentes expressas como LMIs, compatíveis com métodos de otimização semidefinida (Gallier, 2011).

$$\begin{bmatrix} T_s & R_s^\top \\ R_s & H_s \end{bmatrix} > 0. \quad (11)$$

Além das aplicações teóricas, o complemento de Schur também pode ser utilizado para impor restrições de norma em variáveis de projeto, como na limitação da magnitude de matrizes auxiliares em problemas de síntese LMI. Essa equivalência permite expressar condições do tipo $\|X\|_2 \leq \gamma$ como LMIs lineares em X e γ , o que é especialmente útil para regularização de soluções e melhoria do condicionamento numérico em problemas de controle (Boyd et al., 1994).

2.1.4.2 Procedimento–S

O Procedimento–S (ou *S-procedure*) é um resultado clássico da teoria de desigualdades quadráticas que permite converter uma implicação entre funções quadráticas em uma condição linear envolvendo multiplicadores escalares não negativos (Boyd; Vandenberghe, 2004). Essa ferramenta pode ser utilizada em controle e otimização convexa para reduzir o conservadorismo de condições de estabilidade ou desempenho formuladas por LMIs.

Considere duas formas quadráticas genéricas $F_1(\xi)$ e $F_2(\xi)$, definidas conforme a equação (12).

$$F_i(\xi) = \xi^\top Q_i \xi + 2q_i^\top \xi + r_i, \quad i \in \{1, 2\} \quad (12)$$

Deseja-se verificar se a implicação quadrática mostrada em (13) é verdadeira para todo vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$$F_1(\xi) \geq 0 \Rightarrow F_2(\xi) \geq 0 \quad (13)$$

De acordo com o Procedimento–S, essa implicação é satisfeita se existir um escalar não negativo α que torne verdadeira a relação apresentada em (14).

$$F_2(\xi) - \alpha F_1(\xi) \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (14)$$

Essa condição é suficiente em geral e necessária quando $F_1(\xi)$ é estritamente factível (Boyd; Vandenberghe, 2004). Assim, este artifício permite substituir implicações quadráticas não lineares por condições lineares de viabilidade, preservando a convexidade da formulação.

Em síntese, o Procedimento–S introduz uma desigualdade auxiliar ponderada por um multiplicador escalar α , resultando em uma condição relaxada expressa de forma genérica por (15).

$$M_a + \alpha N_a < 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (15)$$

Nessa formulação, M_a representa a desigualdade principal, enquanto N_a corresponde a uma restrição auxiliar cuja validade é assegurada pelo modelo. O multiplicador α é definido pelo projetista como parâmetro de ajuste do relaxamento, sendo que valores muito pequenos podem não reduzir suficientemente o conservadorismo, enquanto valores muito elevados podem tornar o termo de relaxação dominante e dificultar novamente a factibilidade. Dessa forma, o Procedimento-S fornece um meio sistemático de equilibrar rigor e flexibilidade em formulações baseadas em LMIs, sem comprometer a convexidade do problema (Trofino et al., 2015).

2.1.4.3 Lema de Finsler

O resultado conhecido como lema de Finsler tem origem no trabalho de Finsler (1937), no contexto da teoria de formas quadráticas. Na literatura moderna de controle, esse resultado é usualmente apresentado em formulações matriciais equivalentes, adequadas ao tratamento de restrições lineares e à obtenção de condições LMI (Boyd et al., 1994).

Considere uma forma quadrática definida por uma matriz simétrica $Q_F = Q_F^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um conjunto de restrições lineares representadas por $Ax = 0$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Deseja-se verificar se a desigualdade apresentada na expressão (16) é satisfeita.

$$x^\top Q_F x < 0, \quad \forall x \neq 0 \text{ tal que } Ax = 0 \quad (16)$$

De acordo com o lema de Finsler, essa condição pode ser expressa por formulações equivalentes envolvendo multiplicadores matriciais ou, alternativamente, por uma projeção sobre o subespaço nulo do operador que define a restrição linear (Trofino et al., 2015).

O lema também pode ser expresso de forma projetada sobre o subespaço nulo de A . Seja A_0 uma base que satisfaz $AA_0 = 0$. Nesse caso, a condição restrita $x^\top Q_F x < 0$ sujeita a $Ax = 0$ é equivalente à desigualdade apresentada em (17), escrita no espaço reduzido definido por A_0 .

$$A_0^\top Q_F A_0 < 0 \quad (17)$$

A expressão (17) estabelece a equivalência entre uma desigualdade quadrática restrita e uma condição matricial escrita diretamente no subespaço admissível. Dessa forma, a restrição linear é incorporada de maneira implícita, o que torna essa formulação particularmente conveniente em problemas de análise e síntese baseados em LMIs (Trofino et al., 2015).

Em controle, o lema de Finsler é empregado no tratamento de restrições estruturais e de dependências lineares entre variáveis de projeto, sendo particularmente útil em problemas envolvendo sistemas incertos, politópicos ou chaveados. Sua aplicação permite reescrever desigualdades associadas à estabilidade ou ao desempenho em subespaços específicos, reduzindo a dimensão efetiva das condições analisadas e preservando a tratabilidade numérica do problema (Trofino et al., 2015). Dessa forma, o resultado complementa o Procedimento-S no tratamento de implicações envolvendo igualdades lineares, constituindo um artifício matemático importante na formulação de condições LMI em controle moderno.

2.2 MODELAGEM DE SISTEMAS CHAVEADOS

A modelagem de sistemas chaveados fornece uma descrição formal de processos cujo comportamento alterna entre diferentes dinâmicas contínuas ao longo do tempo. Nessa abordagem, o sistema é representado por um conjunto finito de subsistemas, juntamente com uma lei de chaveamento que determina, a cada instante, qual dinâmica governa a evolução do estado (Liberzon, 2003). Cada subsistema é descrito por uma equação diferencial contínua, enquanto a lei de chaveamento introduz a componente discreta responsável pela transição entre os modos de operação, caracterizando a natureza híbrida do modelo (DeCarlo et al., 2000).

A formulação matemática parte do princípio de que o vetor de estado contínuo é comum a todos os modos e evolui de acordo com a equação (18), em que $\sigma(t)$ representa o modo ativo no dado instante.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \quad (18)$$

Essa estrutura abrange sistemas lineares, afins ou não lineares sujeitos a comutação, permitindo a representação unificada de uma ampla classe de processos físicos e de controle, como conversores de potência e sistemas com lógica embarcada. Uma modelagem adequada é fundamental para o desenvolvimento de métodos de análise e síntese baseados em LMIs, assegurando que as propriedades relevantes de estabilidade e desempenho sejam corretamente capturadas (Liberzon, 2003).

Os tópicos seguintes aprofundam a modelagem dos sistemas chaveados, abordando as representações lineares e afins, os modos deslizantes que surgem nas transições de comutação e os diferentes equilíbrios que podem ocorrer nessas estruturas dinâmicas.

2.2.1 Sistemas lineares e afins

O modelo linear chaveado é o ponto de partida para a descrição das diferentes dinâmicas contínuas associadas aos modos de operação. Cada subsistema é representado pela equação (19), onde $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o índice $i \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ identifica o modo ativo (Hespanha, 2004).

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (19)$$

Nesse modelo, a lei de chaveamento $\sigma(t)$ seleciona, a cada instante, uma das matrizes A_i , definindo assim o comportamento dinâmico do sistema. A origem é o ponto de equilíbrio comum a todos os modos, e a estabilidade global depende da propriedade conjunta das matrizes envolvidas.

Em muitos sistemas físicos, entretanto, cada modo apresenta também um termo constante que desloca o ponto de equilíbrio, originando o modelo afim apresentado em (20).

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + b_{\sigma(t)} \quad (20)$$

Nessa formulação, $b_i \in \mathbb{R}^n$ representa um vetor de entrada associado ao modo i . Enquanto o sistema linear possui equilíbrio fixo na origem, o sistema afim admite equilíbrios distintos para cada modo, o que reflete o comportamento de diversos sistemas chaveados reais, como conversores de potência e processos mecânicos com atrito ou compensação de torque.

A diferença estrutural entre os modelos linear e afim reflete-se diretamente na análise e no projeto de controladores. A presença do termo constante b_i no modelo afim introduz uma componente adicional nas funções auxiliares empregadas em formulações baseadas em LMIs, conferindo maior flexibilidade à definição das superfícies de chaveamento. Enquanto, no caso linear, essas superfícies são necessariamente planas, no modelo afim elas podem assumir formas elípticas ou hiperbólicas, o que amplia o conjunto de soluções admissíveis e aumenta a capacidade de adaptação do controle (Trofino et al., 2015).

De modo geral, a modelagem linear fornece uma aproximação adequada quando os pontos de equilíbrio dos diferentes modos coincidem e a operação ocorre em torno da origem. Por outro lado, o modelo afim mostra-se mais apropriado em situações nas quais há deslocamentos entre os regimes de operação dos modos distintos.

2.2.2 Modos deslizantes

Em sistemas chaveados com comutação dependente do estado, pode ocorrer uma situação em que o comportamento global do sistema não coincide com a dinâmica de nenhum dos modos individuais, mas resulta da interação entre eles. Esse fenômeno manifesta-se quando os campos vetoriais dos subsistemas, em ambos os lados de uma superfície de chaveamento, apontam em direção a essa superfície, fazendo com que a trajetória contínua alcance a região de comutação e passe a evoluir de forma tangencial sobre ela, caracterizando o chamado modo deslizante (Trofino et al., 2015).

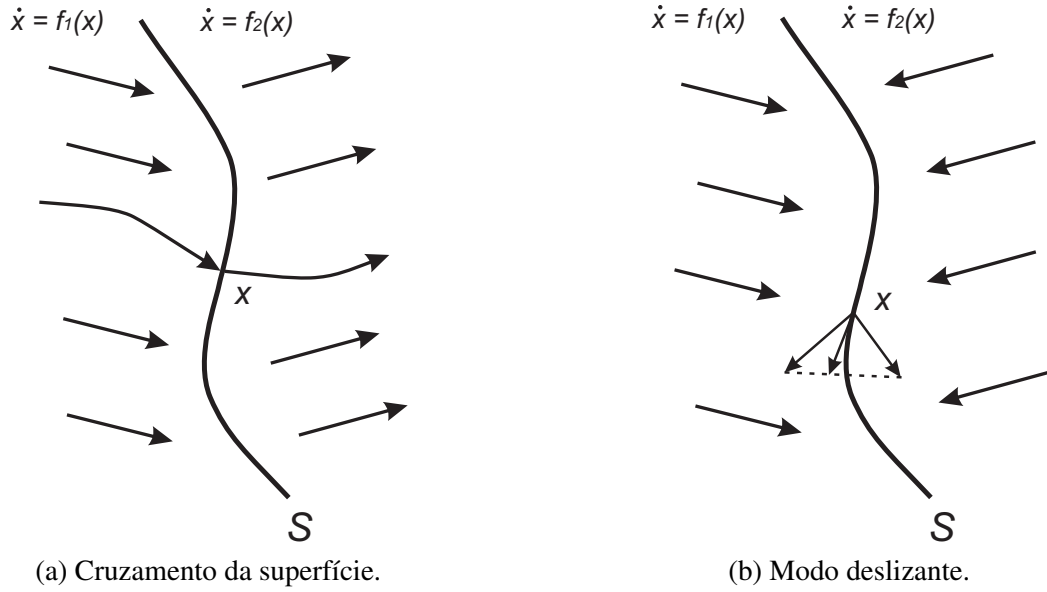
Nessa condição, a dinâmica do sistema pode ser descrita por uma combinação convexa dos campos vetoriais associados aos subsistemas adjacentes, refletindo o equilíbrio imposto pela lógica de comutação. Essa descrição efetiva do movimento ao longo da superfície de chaveamento é formalizada pela equação (21), a qual fornece um modelo contínuo equivalente para a análise do comportamento do sistema em regime de deslizamento (Trofino et al., 2015).

$$\dot{x}(t) = f_\theta(x) = \theta(x)f_1(x) + [1 - \theta(x)]f_2(x), \quad \theta(x) \in [0, 1] \quad (21)$$

Esse efeito é ilustrado na Figura 1, que evidencia o campo vetorial tangente à superfície de comutação. Do ponto de vista físico, o modo deslizante pode ser interpretado como uma comutação infinitamente rápida (*chattering*), em que o sistema alterna continuamente entre os modos ativos. Embora esse comportamento não seja desejável em aplicações práticas, devido ao desgaste e às limitações de comutação dos dispositivos, ele representa de forma ideal a dinâmica média que ocorre em altas frequências de chaveamento (Liberzon, 2003).

A formulação apresentada pode ser generalizada para o caso de m modos de operação.

Figura 1 – Representação das trajetórias em sistemas chaveados.



Fonte: Adaptado de Scharlau (2013).

Nesse contexto, a dinâmica de um sistema chaveado, com ou sem modos deslizantes, é descrita pela inclusão diferencial dada na equação (22) no sentido de Filippov para campos vetoriais descontínuos, em que cada modo contribui de forma ponderada por um coeficiente $\theta_i(x)$ pertencente ao conjunto convexo Θ (Trofino et al., 2015).

$$\dot{x} = f_{\theta}(x) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x) f_i(x), \quad \theta \in \Theta \quad (22)$$

O conjunto Θ , definido pela equação (23), corresponde a um *simplex* que contém todas as combinações convexas admissíveis dos campos vetoriais dos subsistemas.

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\} \quad (23)$$

Essa representação permite descrever, de forma unificada, tanto o regime de operação normal, em que apenas um modo está ativo, quanto os modos deslizantes, nos quais a trajetória é governada por uma combinação convexa dos campos vetoriais associados a diferentes modos de operação.

2.2.3 Equilíbrios possíveis

Em sistemas chaveados afins, a presença do termo constante b_i em cada modo implica que os pontos de equilíbrio não estejam, em geral, localizados na origem. Quando ocorre a comutação entre diferentes modos, o equilíbrio global do sistema pode emergir em uma região intermediária do espaço de estados, resultante da combinação convexa das dinâmicas associadas a cada subsistema (Liberzon, 2003).

Considerando o modelo afim em malha fechada descrito pela equação (24), a dinâmica pode ser expressa pela soma ponderada dos campos vetoriais de cada subsistema.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m \theta_i(x) (A_i x + b_i), \quad \theta \in \Theta \quad (24)$$

O sistema encontra-se em equilíbrio quando o vetor de estado permanece constante, i.e., quando $\dot{x} = 0$. Nessas condições, o equilíbrio não é determinado por um único modo, mas pela combinação convexa das dinâmicas associadas aos modos ativos. Assim, existe um ponto $\bar{x}$ de equilíbrio possível se houver um vetor $\bar{\theta} \in \Theta$ que satisfaça a condição apresentada na equação (25).

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (A_i \bar{x} + b_i) = 0 \quad (25)$$

O vetor $\bar{\theta}$ representa a proporção de tempo em que cada modo permanece ativo em torno do equilíbrio. Em sistemas controlados por modulação por largura de pulso (PWM, do inglês *Pulse Width Modulation*), essa proporção pode ser interpretada diretamente como o ciclo de trabalho (*duty cycle*) necessário para garantir o equilíbrio médio do sistema (Trofino et al., 2015). De forma mais geral, a condição expressa em (25) caracteriza o conjunto de pontos de equilíbrio admissíveis, o qual pode assumir a forma de um ponto isolado, de uma linha ou mesmo de uma região contínua no espaço de estados, dependendo das propriedades dos subsistemas e da lei de chaveamento adotada (Liberzon, 2003).

2.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS

A análise de estabilidade constitui o ponto de partida para o projeto e a avaliação de sistemas de controle. Em termos gerais, a estabilidade está associada à capacidade do sistema de retornar ao equilíbrio após a ocorrência de pequenas perturbações, assegurando um comportamento previsível e limitado ao longo do tempo. Entre as diferentes noções de estabilidade empregadas na teoria de controle, destacam-se a estabilidade assintótica e a estabilidade exponencial, ambas formalmente definidas a partir do conceito de funções de Lyapunov (Trofino et al., 2015).

No caso de sistemas LIT, o critério de Lyapunov fornece uma condição necessária e suficiente para a estabilidade, baseada na existência de uma função escalar positiva cuja derivada temporal seja negativa ao longo das trajetórias do sistema. Além de constituir uma prova de estabilidade, esse critério permite a formulação de condições matriciais lineares, utilizadas tanto na verificação quanto na síntese de controladores.

Para sistemas chaveados, a análise de estabilidade torna-se mais complexa, uma vez que o comportamento dinâmico global depende não apenas das propriedades individuais de cada subsistema, mas também da lei de chaveamento responsável pelas transições entre os modos de operação. Nessa classe de sistemas, é possível que subsistemas individualmente estáveis resultem

em uma dinâmica global instável devido à comutação, assim como pode ocorrer estabilidade global mesmo quando alguns modos são localmente instáveis, desde que o chaveamento satisfaça determinadas restrições (Trofino et al., 2015).

Dessa forma, o estudo da estabilidade em sistemas chaveados exige extensões do critério clássico de Lyapunov. Uma possibilidade consiste na utilização de uma função de Lyapunov comum a todos os modos, o que garante estabilidade sob qualquer chaveamento admissível, porém frequentemente conduz a condições excessivamente conservadoras. Como alternativa, empregam-se funções de Lyapunov múltiplas, nas quais cada subsistema é associado a uma função auxiliar própria, e a estabilidade global é inferida a partir da interação entre essas funções (Liberzon, 2003). Essa estratégia permite descrever de maneira mais precisa os efeitos da comutação e reduzir o conservadorismo das condições de estabilidade, sendo particularmente adequada para sistemas afins e para estruturas em que o chaveamento influencia diretamente a posição do equilíbrio.

2.3.1 Critério de estabilidade de Lyapunov

Para formalizar o conceito de estabilidade utilizado nas discussões anteriores, recorre-se ao critério clássico de Lyapunov, que estabelece condições matemáticas para caracterizar o comportamento das trajetórias em torno de um ponto de equilíbrio. A formulação proposta por Lyapunov, em 1892, generaliza princípios mecânicos baseados em energia e permite avaliar a estabilidade de um sistema sem a necessidade de resolver explicitamente suas equações diferenciais (Sastry, 1999).

Considere o sistema dinâmico não linear descrito pela equação (26), em que $f(x)$ é localmente Lipschitz¹ em uma vizinhança da origem e admite um ponto de equilíbrio em $x = 0$.

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (26)$$

A análise de estabilidade é baseada na escolha de uma função escalar $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denominada função de Lyapunov, que desempenha o papel de uma “energia generalizada” associada ao estado do sistema. A definição formal é apresentada em (27), onde se exige que V seja continuamente diferenciável e positiva definida em torno da origem (Khalil, 2002).

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0 \quad (27)$$

A segunda condição fundamental é que a derivada de V ao longo das trajetórias do sistema seja não positiva. Usando a regra da cadeia, essa derivada assume a forma indicada em (28).

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)^\top f(x) \quad (28)$$

¹ Uma função f é localmente Lipschitz se, em cada ponto, existe um entorno no qual $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ para algum $L > 0$. Essa propriedade garante existência e unicidade de soluções das equações diferenciais (Khalil, 2002).

Se a derivada satisfizer a condição expressa em (29), então o equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov.

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (29)$$

Além disso, se $\dot{V}(x)$ for estritamente negativa para todo $x \neq 0$, conforme (30), o sistema é assintoticamente estável.

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (30)$$

As condições (27)–(30) constituem o critério fundamental de Lyapunov. No caso especial de sistemas lineares, a escolha de funções quadráticas do tipo $V(x) = x^\top P x$, com $P = P^\top > 0$, conduz às condições matriciais da forma apresentada em (31), que caracterizam totalmente a estabilidade exponencial (Khalil, 2002).

$$A^\top P + PA < 0 \quad (31)$$

Portanto, o critério de Lyapunov permite verificar estabilidade sem a necessidade de soluções explícitas para $x(t)$, e fornece uma base rigorosa para extensão a situações mais complexas, como sistemas politópicos, não lineares ou sujeitos a chaveamento. Nesta dissertação, esse critério será adaptado para a formulação com funções múltiplas, utilizada no projeto do controle chaveado apresentado no Capítulo 4.

2.3.2 Estabilidade sob chaveamento restrito e funções múltiplas

A análise de estabilidade em sistemas chaveados pode tornar-se excessivamente conservadora quando se impõe a existência de uma função de Lyapunov comum a todos os modos. Em situações nas quais os subsistemas apresentam dinâmicas significativamente distintas, como diferentes taxas de dissipação ou pontos de equilíbrio deslocados, uma única função dificilmente descreve de forma adequada a evolução global do sistema. Como alternativa menos restritiva, emprega-se o conceito de funções múltiplas de Lyapunov, no qual cada modo é associado a uma função auxiliar própria, permitindo representar com maior fidelidade os mecanismos de dissipação de energia de cada dinâmica individual (Liberzon, 2003).

Considere um conjunto de modos $i \in \mathcal{M}$, cada um associado a uma função auxiliar de Lyapunov da forma indicada na equação (32), em que $P_i = P_i^\top > 0$ é a matriz correspondente ao modo i .

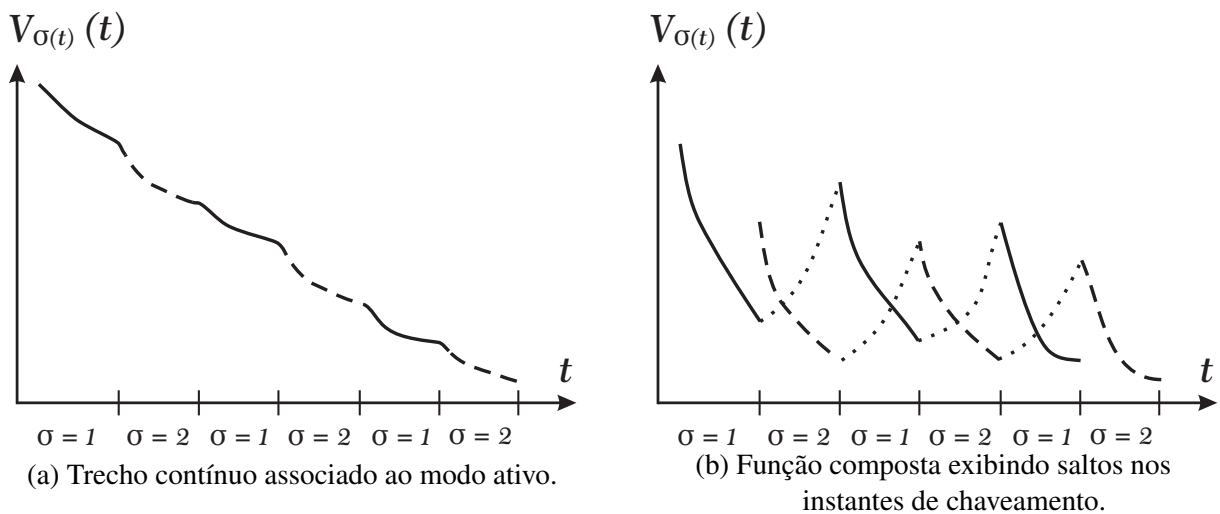
$$v_i(x) = x^\top P_i x \quad (32)$$

Enquanto o sistema permanece em um modo específico, a função auxiliar correspondente decresce continuamente, de modo que o trecho ativo da função composta, representado pelo valor mostrado na equação (33), apresenta comportamento monotônico durante esse intervalo.

$$V_{\sigma(t)}(x) = v_{\sigma(t)}(x) \quad (33)$$

Quando ocorre um chaveamento, a função ativa passa de v_i para v_j , e essa transição pode introduzir saltos na função composta, como ilustrado na Figura 2. Esses saltos não impedem a estabilidade global desde que diminuam ao longo do tempo e que os valores avaliados nos instantes de comutação formem uma sequência decrescente. Assim, mesmo que a função composta não seja contínua, a dissipação inerente a cada modo e a redução progressiva desses saltos garantem a convergência do estado para a origem (Liberzon, 2003).

Figura 2 – Duas funções de Lyapunov para um sistema chaveado. Curvas contínuas correspondem a v_1 e tracejadas a v_2 .



Fonte: Adaptado de Liberzon (2003).

A estabilidade sob chaveamento restrito é obtida quando cada função auxiliar decresce ao longo da dinâmica do modo correspondente e quando a sequência de valores assumidos pela função composta, nos instantes de comutação, permanece limitada e estritamente decrescente. Nessas condições, a energia global associada ao sistema reduz-se a cada troca de modo, conduzindo o estado ao equilíbrio mesmo que as funções auxiliares, quando avaliadas individualmente, apresentem descontinuidades nos instantes de transição (Liberzon, 2003).

No contexto desta dissertação, essa abordagem mostra-se particularmente adequada, uma vez que a função candidata adotada no projeto é definida a partir do máximo entre funções auxiliares quadrático-afins. Essa estrutura facilita o tratamento de sistemas chaveados afins e preserva a interpretação energética da função de Lyapunov, assegurando que o comportamento global do sistema permaneça estável mesmo na presença de comutações frequentes.

2.4 LEI DE CHAVEAMENTO PARA SUBSISTEMAS AFINS

Em sistemas chaveados, a lei de chaveamento é responsável pela lógica que seleciona o subsistema ativo a cada instante, influenciando diretamente o comportamento global da dinâmica

em malha fechada. Mesmo quando os modos individuais apresentam propriedades favoráveis, a estabilidade do sistema completo depende da forma como ocorre a comutação entre eles. No caso de subsistemas afins, a presença de termos constantes desloca o equilíbrio e exige que a estratégia de chaveamento seja projetada de modo consistente com o objetivo de convergência do erro para um ponto desejado. Assim, a lei de chaveamento passa a integrar o próprio mecanismo de controle, sendo construída com base em critérios energéticos associados a funções auxiliares de Lyapunov e em condições que assegurem dissipação ao longo das trajetórias do sistema (Dezuo, 2014).

2.4.1 Tipos de leis de chaveamento

A literatura apresenta diferentes estruturas de leis de chaveamento para estabilização de sistemas chaveados, particularmente no contexto de subsistemas lineares ou afins. No caso de leis dependentes do estado, o critério de seleção do modo ativo pode ser definido a partir da comparação entre funções auxiliares de Lyapunov avaliadas ao longo da trajetória do sistema.

Uma primeira classe de leis de chaveamento baseia-se na seleção do modo que minimiza uma família de funções auxiliares quadráticas. Considera-se um conjunto de funções do tipo $v_i(x) = x^\top P_i x$, com $P_i > 0$, e define-se a lei de chaveamento conforme a equação (34). Essa estratégia explora diretamente a interpretação energética das funções auxiliares, ativando o subsistema associado ao menor valor instantâneo da função de Lyapunov (Geromel; Colaneri, 2006).

$$\sigma(x(t)) := \arg \min_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(x(t))\}, \quad v_i(x(t)) = x^\top P_i x \quad (34)$$

Uma segunda classe consiste na seleção do modo associado ao maior valor entre as funções auxiliares. Nesse caso, a lei de chaveamento assume a forma apresentada na equação (35) (Ji et al., 2006).

$$\sigma(x(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(x(t))\}, \quad v_i(x(t)) = x^\top P_i x \quad (35)$$

Embora menos intuitiva sob o ponto de vista energético, essa formulação permite explorar propriedades estruturais da dinâmica afim e viabiliza condições de estabilidade menos conservadoras quando combinada com técnicas de múltiplas funções de Lyapunov (Ji et al., 2006).

Uma terceira abordagem consiste em selecionar o subsistema cuja função auxiliar apresenta a maior taxa de decrescimento ao longo da dinâmica. Nesse caso, o critério de chaveamento é construído a partir da derivada temporal das funções auxiliares, conduzindo à lei apresentada na equação (36) (Bolzern; Spinelli, 2004).

$$\sigma(x(t)) := \arg \min_{i \in \mathcal{M}} \{\dot{v}_i(x(t))\}, \quad v_i(x(t)) = x^\top (A_i^\top P + P A_i) x \quad (36)$$

Cada uma dessas abordagens possui vantagens e limitações. Enquanto as leis baseadas em mínimo e máximo atuam diretamente sobre o valor das funções auxiliares, a estratégia baseada na derivada explora explicitamente o mecanismo de dissipação da energia de Lyapunov. Neste trabalho, adota-se uma lei de chaveamento do tipo *arg max*, pois essa estrutura é compatível com a função candidata construída como o máximo entre funções auxiliares e permite explorar de forma direta as propriedades de decrescimento associadas ao modo ativo, mantendo o nível de conservadorismo sob controle.

2.4.2 Função candidata

Seguindo a abordagem proposta em Trofino et al. (2011), considera-se uma função de Lyapunov construída a partir de funções auxiliares quadrático-afins associadas a cada modo do sistema chaveado. Essa estrutura é adequada para subsistemas afins, pois permite incorporar explicitamente os termos constantes da dinâmica e tratar, de forma unificada, modos contínuos e possíveis modos deslizantes.

Seja o sistema de erro descrito pela equação (37), em que cada modo $i \in \mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$ possui dinâmica própria.

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i \quad (37)$$

Para cada modo, define-se uma função auxiliar conforme a equação (38), em que $P_i = P_i^\top$ e S_i são variáveis de decisão.

$$v_i(e) = e^\top P_i e + 2e^\top S_i \quad (38)$$

A função candidata global é então definida como o máximo entre as funções auxiliares, conforme a equação (39). Essa construção garante continuidade da função candidata e permite analisar estabilidade mesmo na presença de chaveamentos frequentes ou modos deslizantes.

$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} \quad (39)$$

2.4.2.1 Condição de positividade da função candidata

Para que a função candidata seja válida como função de Lyapunov, é necessário que seja positiva definida em relação ao erro e radialmente ilimitada. No contexto da estrutura adotada, essa propriedade pode ser assegurada impondo-se positividade sobre uma combinação convexa fixa das funções auxiliares associada ao ponto de equilíbrio.

Sejam coeficientes constantes $\bar{\theta}_i$ pertencentes ao *simplex* unitário, conforme definido na equação (40).

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i = 1, \quad \bar{\theta}_i \geq 0 \quad (40)$$

Esses coeficientes devem satisfazer a condição de equilíbrio dada pela equação (41).

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0 \quad (41)$$

Sob essas condições, a positividade é garantida se a combinação convexa apresentada em (42) for estritamente positiva para todo $e \neq 0$.

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e) > 0 \quad (42)$$

Substituindo a definição de $v_i(e)$ e utilizando a condição de equilíbrio, o termo linear é anulado no ponto de operação, restando apenas a parcela quadrática. Assim, a condição de positividade reduz-se à desigualdade matricial apresentada na expressão (43).

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i > 0 \quad (43)$$

Essa condição constitui a LMI responsável por garantir que a função candidata represente uma medida válida de energia do sistema (Trofino et al., 2011).

2.4.2.2 Condição de decrescimento da função candidata

A condição de decrescimento busca garantir que a função candidata diminua ao longo das trajetórias do sistema, incluindo regiões de comutação e eventuais modos deslizantes. Na abordagem de Trofino et al. (2011), isso é feito impondo que a derivada temporal do trecho ativo da função candidata seja negativa para toda combinação convexa admissível dos campos vetoriais, coerente com a representação de Filippov² para dinâmicas em superfícies de chaveamento.

A função candidata é definida como o máximo entre funções auxiliares, e pode ser representada por uma combinação convexa das funções dominantes no instante considerado, conforme a equação (44).

$$V(e) = \sum_{i=1}^m \theta_i(e) v_i(e) \quad (44)$$

A dinâmica do erro, incluindo a possibilidade de deslizamento, é modelada por uma inclusão diferencial em que o campo vetorial é uma combinação convexa dos subsistemas ativos, conforme a equação (45).

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e) (A_i e + k_i), \quad \theta(e) \in \Theta \quad (45)$$

O ponto $e = 0$ deve ser um equilíbrio da inclusão diferencial, o que exige a existência de um vetor de pesos constantes $\bar{\theta} \in \Theta$ que anule o termo afim no equilíbrio, como apresentado em (46).

² Na abordagem de Filippov, descontinuidades no campo vetorial são tratadas por meio de uma inclusão diferencial, permitindo representar o movimento deslizante por combinações convexas dos campos vetoriais adjacentes (Filippov, 1988).

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0, \quad \bar{\theta} \in \Theta \quad (46)$$

Para obter uma condição tratável, é possível construir a derivada temporal do trecho ativo $V(e) = \sum \theta_i v_i$ e reorganizá-la em uma desigualdade quadrática na variável aumentada que reúne e e constantes. Essa reorganização produz uma expressão matricial simétrica que depende de forma afim de θ e das variáveis de decisão $\{P_i, S_i\}$, resultando em uma condição conforme a expressão (47).

$$\zeta^\top \Psi(\theta) \zeta < 0 \quad (47)$$

A desigualdade (47) ainda não é diretamente uma LMI verificável, porque θ não é um parâmetro livre, ele pertence ao *simplex* e respeita restrições adicionais impostas pelo conjunto ativo associado à lei *arg max* (i.e., somente modos que maximizam v_i podem ter pesos não nulos durante a trajetória). Para incorporar essas restrições de forma algébrica, se introduzem anuladores lineares que codificam as igualdades do *simplex* e as relações entre θ e $\bar{\theta}$ na estrutura do problema.

As restrições lineares são reunidas em uma forma compacta usando uma matriz C_a (constante) e uma matriz $C_b(\theta)$ (afim em θ), cuja função é impor que determinadas combinações lineares sejam nulas, conforme a equação (48).

$$C_a \zeta = 0, \quad C_b(\theta) \zeta = 0 \quad (48)$$

Com isso, a condição de decrescimento passa a ser uma desigualdade quadrática restrita a um subespaço linear. Para eliminar explicitamente as restrições e obter uma condição puramente matricial, aplica-se o lema de Finsler. Em particular, tomando Q_a como uma base do núcleo de C_a , tem-se que toda variável admissível pode ser parametrizada no subespaço $\ker(C_a)^3$, levando à condição projetada sobre Q_a .

A formulação proposta em Trofino et al. (2011) resulta em uma LMI dependente de θ , mas agora expressa de modo que pode ser verificada nos vértices do conjunto admissível. Essa condição é escrita na condição (49), em que L_F é uma matriz auxiliar introduzida pelo lema de Finsler para acomodar a restrição $C_b(\theta) \zeta = 0$.

$$Q_a^\top \left(\Psi(\theta) + L_F C_b(\theta) + C_b(\theta)^\top L_F^\top \right) Q_a < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (49)$$

A condição (49) é uma LMI politópica, pois $\Psi(\theta)$ e $C_b(\theta)$ dependem de forma afim de θ . Assim, sua verificação pode ser reduzida a um número finito de testes nos vértices do politopo $\vartheta(\Theta)$. A factibilidade simultânea dessas desigualdades fornece uma condição suficiente para que $V(e)$ seja estritamente decrescente ao longo das trajetórias da inclusão diferencial, assegurando estabilidade assintótica global do sistema sob a lei de chaveamento *arg max* adotada (Trofino et al., 2011).

³ A notação $\ker(C_a)$ denota o núcleo de C_a , i.e., o conjunto de vetores z tais que $C_a z = 0$.

2.5 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A estabilização assintótica do sistema chaveado não é suficiente em muitas aplicações práticas. Além de garantir convergência do erro, é desejável impor requisitos quantitativos de desempenho, como limitação da energia acumulada da saída ou atenuação de perturbações externas. Esses requisitos conduzem naturalmente à formulação de problemas de otimização associados à lei de chaveamento.

Neste contexto, a estabilidade passa a atuar como restrição estrutural do problema, enquanto o desempenho é incorporado por meio de um funcional a ser minimizado ou limitado. Duas abordagens nesse cenário são a formulação de custo garantido, baseada na energia acumulada da saída de desempenho, e o controle do tipo $\mathcal{H}_\infty$, voltado à atenuação de distúrbios.

2.5.1 Custo garantido

Seja um sistema chaveado composto por m subsistemas afins, cuja dinâmica pode ser descrita pela equação (50). Nessa representação, $z(t)$ corresponde à saída associada ao desempenho do sistema (Scharlau, 2013).

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad z(t) = E_i x(t), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\} \quad (50)$$

Ao introduzir o erro de seguimento em relação a uma referência constante $\bar{x}$, define-se $e(t) = x(t) - \bar{x}$. A dinâmica do erro e a saída de desempenho associada passam então a ser descritas conforme a equação (51), onde $k_i = b_i + A_i \bar{x}$.

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i, \quad z_e(t) = E_i e(t) \quad (51)$$

Sob uma lei de chaveamento dependente do estado, a evolução do erro pode ser modelada como uma combinação convexa dos campos vetoriais associados aos modos ativos. Essa representação, fundamentada na noção de inclusão diferencial, é apresentada na equação (52).

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) (A_i e(t) + k_i), \quad z_e(t) = \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) E_i e(t), \quad \theta(e(t)) \in \Theta \quad (52)$$

O desempenho com custo garantido é caracterizado pela energia acumulada da saída de desempenho ao longo do tempo. Para uma condição inicial $e(0) = e_0$, define-se o funcional de custo conforme a equação (53).

$$J_c(e_0) = \min_{\sigma(e(t))} \int_0^\infty z_e^\top(t) z_e(t) dt \quad (53)$$

O problema de projeto consiste em determinar uma lei de chaveamento e uma função candidata de Lyapunov tais que o sistema seja globalmente assintoticamente estável e que o valor de $J(e_0)$ seja limitado superiormente por uma constante mínima admissível. Essa formulação

conduz a um problema de otimização sujeito a restrições matriciais lineares, no qual o limitante superior do custo passa a integrar explicitamente as variáveis de decisão do problema (Scharlau, 2013).

2.5.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema linear representa o maior ganho que o sistema pode oferecer a um sinal de perturbação, independentemente da frequência de excitação. Essa noção está associada ao pico máximo da resposta em frequência e fornece uma medida direta da amplificação máxima entre a entrada exógena e a saída de desempenho (Burl, 1999).

Para um sistema linear descrito por (54), a norma $\mathcal{H}_\infty$ corresponde ao maior valor singular da matriz de transferência $H_{wz}(s)$ ao longo do eixo imaginário. No domínio do tempo, essa definição pode ser expressa como a razão suprema entre as energias da saída e da entrada, caracterizando o pior caso de amplificação de perturbações (Burl, 1999).

$$\dot{x} = Ax + B_w w, \quad z = C_z x + D_w w \quad (54)$$

Na prática de projeto, em vez de determinar exatamente a norma $\mathcal{H}_\infty$, busca-se um limitante superior $\gamma > 0$ tal que o ganho do sistema seja estritamente menor que esse valor. Essa formulação conduz ao chamado problema $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo, no qual se impõe a desigualdade energética apresentada em (55).

$$\int_0^\infty z^\top(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^\top(t)w(t)dt \quad (55)$$

Uma maneira sistemática de garantir a condição (55) consiste na construção de uma função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^\top P x$, com $P = P^\top > 0$, cuja derivada ao longo das trajetórias satisfaça uma desigualdade dissipativa apropriada. Essa condição pode ser escrita como em (56), a qual, integrada no tempo sob condições iniciais nulas, implica diretamente (55).

$$\dot{V}(x) + z^\top z - \gamma^2 w^\top w < 0 \quad (56)$$

Substituindo a dinâmica do sistema em (56), obtém-se uma condição matricial que pode ser reescrita na forma de uma LMI. Esse resultado é conhecido como *Bounded Real Lemma* e estabelece uma condição necessária e suficiente para que a norma $\mathcal{H}_\infty$ seja limitada por γ (Boyd et al., 1994). Dessa forma, a verificação do desempenho $\mathcal{H}_\infty$ pode ser tratada como um problema de factibilidade LMI.

No contexto de síntese por realimentação de estados, considera-se o sistema apresentado em (57). Em malha fechada, a dinâmica passa a depender de $(A + BK)$ e $(C_z + D_z K)$. A partir da mudança de variável padrão $Y = KQ$, com $Q = P^{-1}$, o problema de minimizar o ganho $\mathcal{H}_\infty$ pode ser formulado como um problema convexo de otimização envolvendo as variáveis Q , Y e γ , sujeito a uma LMI estruturada (Burl, 1999).

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_w w, \quad z = C_z x + D_z u + D_w w, \quad u = Kx \quad (57)$$

A solução desse problema fornece simultaneamente o ganho de realimentação $K = YQ^{-1}$ e o menor limitante superior γ que satisfaz a desigualdade dissipativa. Assim, o controle $\mathcal{H}_\infty$ pode ser interpretado como um problema de otimização convexa cujo objetivo é minimizar o pior ganho admissível entre a perturbação e a saída de desempenho.

Na presente dissertação, essa formulação é usada como referência conceitual para o caso chaveado desenvolvido no Capítulo 4. Em vez de um ganho contínuo de realimentação, a síntese busca uma lei de chaveamento que limita a energia propagada do vetor periódico z , tratado como sinal exógeno estruturado, para o vetor de desempenho y . Formulações de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas chaveados e incertos podem ser encontradas, por exemplo, em Ji et al. (2006) e Zhao, Xie e Zhang (2008).

2.6 APLICAÇÕES DE CONTROLE CHAVEADO NA LITERATURA

A teoria de sistemas chaveados é amplamente aplicada em problemas de engenharia com múltiplos modos operacionais. Nesse contexto, o uso de funções de Lyapunov e LMIs tem se consolidado como uma abordagem sistemática para integrar requisitos de estabilidade e desempenho, permitindo a síntese de leis de chaveamento capazes de lidar com elevada complexidade estrutural e incertezas paramétricas.

Um marco relevante nessa linha é a tese de doutorado de Scharlau (2013), na qual é desenvolvida uma metodologia sistemática para análise e síntese de leis de chaveamento para sistemas chaveados afins baseada em funções de Lyapunov do tipo *max*. As condições de projeto são formuladas como LMIs e garantem estabilidade global e assintótica mesmo na presença de modos deslizantes. Destaca-se como contribuição central o fato de que as condições propostas não exigem explicitamente a existência de uma combinação convexa Hurwitz estável das matrizes dos subsistemas para assegurar estabilidade do sistema chaveado, diferentemente de abordagens clássicas. A metodologia é posteriormente estendida para incorporar critérios de desempenho, incluindo custo garantido e atenuação de distúrbios. A validação é realizada em aplicações típicas de eletrônica de potência, como o controle de motores de indução acionados por inversores e o controle de aerogeradores de indução conectados à rede elétrica, com ênfase em sistemas baseados em Geradores de Indução de Dupla Alimentação (DFIG), evidenciando a aplicabilidade prática da formulação.

Na sequência, a tese de Dezuio (2014) aprofunda e amplia esse arcabouço metodológico, direcionando-o a aplicações em geração fotovoltaica. O autor desenvolve inicialmente uma técnica de projeto para sistemas chaveados com campos vetoriais afins, baseada em funções auxiliares quadráticas e leis de chaveamento do tipo *arg max*, garantindo estabilidade mesmo na ocorrência de modos deslizantes. A abordagem é então estendida para sistemas chaveados não lineares com não linearidades limitadas em setor e parâmetros incertos, conferindo robustez

frente a variações típicas de condições ambientais em arranjos fotovoltaicos. Além das condições de estabilidade, são incorporados requisitos de desempenho, como rastreamento do ponto de máxima potência (MPPT) e robustez paramétrica. A tese ainda propõe condições LMI para análise de estabilidade de sistemas seccionalmente afins, inclusive quando o ponto de equilíbrio se encontra na fronteira entre regiões, consolidando uma estrutura unificada para análise e síntese.

No âmbito de sistemas com dinâmica periódica, a dissertação de mestrado de Costanzo (2022) investiga o problema de rastreamento de trajetória em uma classe de sistemas chaveados θ -periódicos, nos quais as matrizes dinâmicas variam periodicamente com um parâmetro $\theta(t)$, que pode ser exógeno ou dependente do estado. Essa característica torna o sistema intrinsecamente não linear e aproxima o modelo de aplicações como máquinas síncronas de ímã permanente. O autor propõe duas regras de comutação: uma orientada a desempenho via custo garantido e outra incorporando ação integral para lidar com incertezas de modelagem, sendo que a presença do integrador conduz a matrizes dinâmicas singulares e aumenta a complexidade do projeto. As condições são formuladas em termos de LMIs e validadas em estudos de caso envolvendo um conversor trifásico e uma máquina síncrona. Em termos estruturais, a lei de chaveamento adotada baseia-se predominantemente em regras do tipo *arg min* associadas à minimização de expressões relacionadas à derivada da função candidata. Essa escolha difere da abordagem desenvolvida na presente dissertação, na qual a comutação é definida por uma regra do tipo *arg max* e a função candidata global é construída como o envelope superior entre funções auxiliares, resultando em uma estrutura distinta de síntese e análise.

Além desses trabalhos acadêmicos, diversas aplicações específicas em conversores reforçam a maturidade da abordagem. Em Deaecto et al. (2010), uma metodologia de projeto para sistemas afins chaveados é aplicada a conversores CC-CC (*buck*, *boost* e *buck-boost*), assegurando estabilidade global e custo garantido por meio de uma lei de chaveamento dependente do estado. Em Egidio, Deaecto e Barros (2020), uma estratégia de controle chaveado é proposta para um conversor trifásico CA-CC, garantindo rastreamento assintótico de correntes senoidais e regulação da tensão contínua com fator de potência unitário, utilizando funções de Lyapunov dependentes do ângulo elétrico e condições formuladas em LMIs. Já em Fiorio, Dezuo e Novaes (2021), o controle chaveado é aplicado a um conversor *totem-pole bridgeless*, explorando explicitamente a estrutura híbrida do sistema para assegurar estabilidade global e desempenho dinâmico adequado. Em conjunto, esses resultados evidenciam que o controle chaveado baseado em Lyapunov e LMIs constitui uma ferramenta consolidada em eletrônica de potência e sistemas eletromecânicos, estabelecendo o contexto técnico no qual se insere a abordagem proposta nesta dissertação.

3 MOTORES ELÉTRICOS

Os motores elétricos ocupam posição central nos sistemas modernos de conversão eletromecânica de energia, com presença ampla em processos industriais, edificações, sistemas de transporte e aplicações agrícolas. Essa relevância não é apenas tecnológica, mas também energética. Segundo a IEA 4E Electric Motor Systems Platform (EMSA) (2025), os sistemas acionados por motores elétricos consumiram, em 2023, 13 462 TWh, o que correspondeu a 53% do consumo global de eletricidade. No período de 2015 a 2023, esse consumo apresentou crescimento de 26%, superior ao crescimento da demanda elétrica global no mesmo intervalo. No setor industrial, em particular, os sistemas motrizes responderam por 72% do consumo de eletricidade, evidenciando que o estudo dessas máquinas é relevante para aplicações de acionamento, eficiência energética e desempenho dinâmico (IEA 4E Electric Motor Systems Platform (EMSA), 2025).

Do ponto de vista de classificação, as máquinas elétricas podem ser agrupadas, de forma ampla, em máquinas de corrente contínua (CC) e máquinas de corrente alternada (CA). Entre estas últimas, destacam-se os motores de indução, também chamados assíncronos, e os motores síncronos. Nas máquinas CC, a comutação eletromecânica permite obter conjugado a partir da interação entre o campo magnético e a corrente de armadura. Nos motores de indução, o conjugado é produzido pela interação entre o campo girante do estator e as correntes induzidas no rotor, o que implica operação com escorregamento. Já nos motores síncronos, o campo do rotor permanece acoplado ao campo girante do estator, operando em sincronismo com a frequência elétrica de alimentação (Umans, 2014).

Nesse contexto, o motor BLAC considerado nesta dissertação insere-se na classe dos motores síncronos de ímãs permanentes (PMSM, do inglês *Permanent Magnet Synchronous Motor*). Por essa razão, as próximas seções concentram-se nos fundamentos do motor síncrono, em seu acionamento e nas principais estratégias de controle associadas a essa classe de máquina, preparando a formulação do modelo utilizado no desenvolvimento da lei de chaveamento proposta.

3.1 MOTOR SÍNCRONO

As máquinas síncronas constituem uma classe importante de máquinas elétricas rotativas. Sua característica essencial é o acoplamento magnético entre o campo do rotor e o campo girante produzido pelo estator. Em regime permanente, esse acoplamento impõe que o rotor opere em sincronismo com a frequência elétrica aplicada, distinguindo essa classe das máquinas de indução, nas quais a produção de conjugado está associada à existência de escorregamento (Umans, 2014).

Na configuração clássica, o enrolamento de armadura trifásico é disposto no estator, enquanto o sistema de excitação é colocado no rotor. Essa disposição simplifica o isolamento do circuito principal, facilita a conexão elétrica da armadura e evita que a potência principal

seja conduzida por contatos deslizantes. Nas máquinas síncronas convencionais, a excitação rotórica é usualmente fornecida em corrente contínua, por meio de escovas e anéis coletores ou por sistemas de excitação sem escovas. Em outras topologias, o enrolamento de campo pode ser substituído por ímãs permanentes, originando as máquinas síncronas de ímã permanente (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

Do ponto de vista construtivo, as máquinas síncronas podem apresentar rotor de polos salientes ou rotor de polos lisos. Em geral, rotores de polos salientes são mais associados a baixas rotações e maior número de polos, enquanto rotores cilíndricos são empregados em aplicações de maior velocidade. Essa distinção geométrica afeta a distribuição do entreferro e as indutâncias vistas pelo estator. No caso não saliente, admite-se igualdade entre as indutâncias dos eixos direto L_d e em quadratura L_q , o que simplifica a descrição do comportamento eletromagnético da máquina (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

O princípio de funcionamento baseia-se na interação entre a onda girante de força magnetomotriz produzida pelas correntes polifásicas do estator e o campo magnético estabelecido no rotor pela excitação. Enquanto o rotor permanece magneticamente acoplado ao campo girante do estator, a máquina opera em sincronismo e desenvolve conjugado eletromagnético. Quando esse acoplamento é perdido, a condição de operação síncrona deixa de existir (Umans, 2014).

Uma relação fundamental para a caracterização dessa classe de máquina é a velocidade síncrona, que depende da frequência elétrica de alimentação e do número de polos. Na equação (58), n_s é a velocidade síncrona em rpm, f_e é a frequência elétrica em Hz e N_p é o número de polos da máquina. Essa expressão evidencia que, para uma frequência fixa, a velocidade mecânica de regime permanente é determinada pela estrutura polar da máquina (Umans, 2014).

$$n_s = \frac{120f_e}{N_p} \quad (58)$$

Também é conveniente relacionar a velocidade angular elétrica ω_e à velocidade angular mecânica ω_m do rotor. Essa relação é dada pelo número de pares de polos p . A equação (59) mostra que a velocidade elétrica é proporcional à velocidade mecânica do rotor. Essa relação é central na modelagem e na análise de máquinas síncronas, pois conecta diretamente a dinâmica mecânica do rotor às grandezas elétricas observadas no estator (Umans, 2014).

$$\omega_e = p \omega_m, \quad p = \frac{N_p}{2} \quad (59)$$

Em regime permanente, a transferência de potência da máquina síncrona pode ser descrita em função do ângulo de carga δ . Para a máquina não saliente, i.e., para $L_d = L_q$, a equação de ângulo de carga reduz-se a uma dependência senoidal simples, conforme apresentado na equação (60), onde P_e representa a potência ativa desenvolvida pela máquina em regime permanente, V_s é a tensão de fase do estator, E_f é a força eletromotriz interna associada ao campo do rotor e ω_s é a velocidade angular síncrona (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

$$P_e = 3 \frac{V_s E_f}{\omega_s L_d} \sin \delta \quad (60)$$

Essa expressão mostra que a transferência de potência eletromagnética depende diretamente do deslocamento angular entre os campos do estator e do rotor, o que fornece uma interpretação física importante da operação síncrona (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

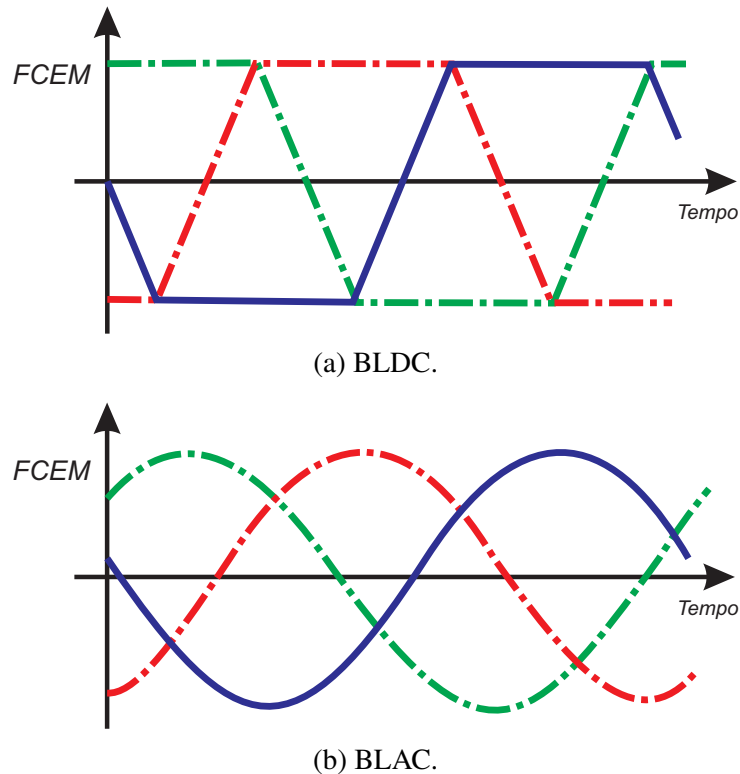
Entre as variantes de maior interesse em acionamentos modernos está o PMSM. Nele, o fluxo rotórico é estabelecido pelos ímãs, eliminando perdas no circuito de excitação e favorecendo elevados níveis de eficiência. Em contrapartida, o fluxo do rotor deixa de ser diretamente ajustável por corrente de campo. Além disso, a forma construtiva do rotor, incluindo o uso de ímãs superficiais ou internos, influencia as indutâncias, a capacidade de produção de conjugado e a resposta dinâmica do acionamento (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

No contexto dos acionamentos brushless, distinguem-se os motores BLDC (*Brushless Direct Current*) e BLAC (*Brushless Alternating Current*), ambos pertencentes à classe das máquinas síncronas de ímã permanente com comutação eletrônica. A principal diferença entre eles, do ponto de vista do modelo elétrico, está na forma da força contraeletromotriz (FCEM). No BLDC, a FCEM é tipicamente trapezoidal e o acionamento costuma empregar correntes quase retangulares. No BLAC, a FCEM é aproximadamente senoidal, o que o torna mais adequado ao uso de correntes senoidais (Sakunthala; Kiranmayi; Mandadi, 2017).

Essa distinção é relevante para a formulação apresentada neste capítulo. A Figura 3 ilustra as formas típicas da força contraeletromotriz nos casos BLDC e BLAC, destacando o caráter trapezoidal do primeiro e senoidal do segundo. Como a modelagem e as estratégias de controle a serem discutidas adiante envolvem o seguimento de referências senoidais de corrente, o motor BLAC fornece o enquadramento mais natural para o desenvolvimento adotado nas próximas seções.

As relações apresentadas em (58), (59) e (60) sintetizam os aspectos fundamentais da operação síncrona em regime permanente. Entretanto, para análise dinâmica, acionamento por conversores eletrônicos e projeto de controle, torna-se necessário empregar modelos mais detalhados. Quando as equações da máquina são escritas em variáveis naturais, parte das indutâncias depende da posição do rotor, fazendo com que os coeficientes do modelo se tornem variantes no tempo. Por essa razão, a literatura recorre a mudanças de variáveis e a referenciais em rotação, que conduzem a representações mais adequadas para análise e controle (Krause; Wasynczuk; Sudhoff, 2002).

Figura 3 – Força contraeletromotriz induzida em uma máquina síncrona.



Fonte: Adaptado de Sakunthala, Kiranmayi e Mandadi (2017).

3.2 ACIONAMENTO DO MOTOR SÍNCRONO

O acionamento de motores síncronos pode ser realizado por alimentação direta em rede de frequência constante ou por conversores estáticos de frequência variável. Essa escolha interfere nas condições de partida, na faixa de velocidade disponível e no grau de controle sobre corrente, torque e potência. Em aplicações convencionais, a alimentação diretamente pela rede ainda é empregada quando se deseja operação próxima da velocidade síncrona nominal, com exigência limitada de variação de velocidade. Em acionamentos modernos, porém, especialmente em máquinas síncronas de ímã permanente, o uso de inversores passou a ocupar posição central, pois oferece maior flexibilidade operacional e melhor desempenho dinâmico (Umans, 2014).

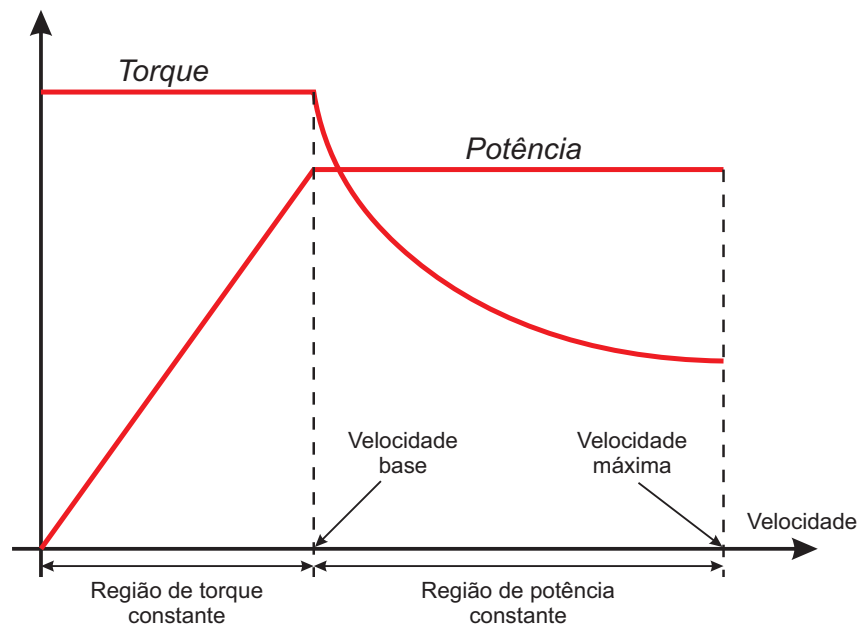
Na alimentação direta pela rede, o motor síncrono apresenta uma limitação importante: não produz conjugado de partida intrínseco, uma vez que o conjugado eletromagnético útil somente se estabelece em sincronismo com o campo girante do estator. Por isso, sua partida requer dispositivos auxiliares. Uma solução clássica consiste no uso de enrolamento amortecedor no rotor, geralmente em forma de gaiola, permitindo que a máquina acelere inicialmente como uma máquina assíncrona. Quando a velocidade se aproxima da síncrona, aplica-se a excitação em corrente contínua ao rotor e ocorre o travamento magnético com o campo girante do estator (Umans, 2014).

O enrolamento amortecedor também contribui para a estabilidade da operação síncrona em máquinas alimentadas diretamente pela rede. Em tais condições, ele participa da produção de

conjungado de partida e do amortecimento de oscilações eletromecânicas. Em acionamentos vetoriais alimentados por conversores, por outro lado, a máquina pode operar sem esse enrolamento, e sua presença pode até ser indesejável, em razão do aquecimento associado aos harmônicos de comutação produzidos pelo inversor (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

A faixa de operação de um acionamento elétrico com controle de velocidade é usualmente descrita por duas regiões principais, conforme indicado na Figura 4. Até a velocidade base, o acionamento opera em região de torque aproximadamente constante. Acima desse ponto, a operação passa à região de potência aproximadamente constante, na qual o torque tende a decrescer com o aumento da velocidade. Essa característica decorre, em geral, das limitações de tensão do conversor e das condições de enfraquecimento de fluxo impostas ao acionamento.

Figura 4 – Regiões típicas de operação em acionamentos com controle de velocidade.



Fonte: Adaptado de Zeraoulia, Benbouzid e Diallo (2006).

Em contraste com a alimentação em frequência fixa, o acionamento por inversor permite sintetizar tensões trifásicas com amplitude e frequência controláveis. Isso elimina a dependência de mecanismos auxiliares de partida e possibilita a aceleração da máquina desde baixas velocidades sob ação direta do conversor. Em motores síncronos acionados por frequência variável, a operação torna-se mais flexível, tanto em regime transitório quanto em regime permanente. Esse aspecto é particularmente relevante em máquinas síncronas de ímã permanente de pequeno e médio porte, nas quais a comutação dos enrolamentos estatóricos é integralmente determinada pela eletrônica de potência (Umans, 2014).

Nos acionamentos modernos de PMSM, a estrutura típica compreende um barramento em corrente contínua, um inversor trifásico e uma estratégia de controle responsável pela definição das tensões ou dos estados de comutação aplicados ao estator. Entre as estratégias de controle mais difundidas para regulação de velocidade destacam-se o controle vetorial e o controle

direto de torque, sendo frequente a adoção de estruturas em cascata com uma malha externa de velocidade e malhas internas de corrente (Ullah; Guzinski; Mirza, 2022).

Essa arquitetura amplia significativamente as possibilidades de operação do acionamento. Além de controlar a velocidade, ela permite regular as correntes estatóricas, impor formas de onda compatíveis com a força contraeletromotriz da máquina e melhorar a resposta de conjugado. Em motores BLAC, cuja FCEM é aproximadamente senoidal, o inversor trifásico mostra-se particularmente adequado, pois viabiliza a síntese de tensões compatíveis com referências senoidais de corrente e com estratégias de controle formuladas em referenciais convenientes para a análise dinâmica (Ullah; Guzinski; Mirza, 2022).

Sob o ponto de vista funcional, o inversor não atua apenas como interface de potência. Sua presença altera diretamente a forma de operação da máquina, amplia a faixa de velocidades acessível e modifica a relação entre a fonte elétrica e a dinâmica eletromecânica do conjunto. Por esse motivo, em acionamentos síncronos contemporâneos, máquina, conversor e estratégia de controle devem ser tratados como partes de um sistema integrado, cujo desempenho depende da interação entre esses três elementos (Pyrhönen; Jokinen; Hrabovcova, 2008).

3.3 CONTROLE DO MOTOR SÍNCRONO

O controle de motores elétricos ocupa papel central nos acionamentos modernos, pois o desempenho do sistema depende da interação entre a máquina, o conversor estático e a estratégia de controle. Em acionamentos alimentados por inversores, a técnica de controle define como tensão, corrente, fluxo e torque são regulados, influenciando a resposta transitória, a precisão de velocidade, a eficiência energética e a qualidade das grandezas elétricas. Nesse contexto, a evolução da eletrônica de potência ampliou as possibilidades de controle, viabilizando estratégias com diferentes níveis de complexidade (Bose, 2002).

Entre as abordagens mais tradicionais, o controle escalar se destaca pela simplicidade de implementação, sendo usualmente baseado na imposição da razão entre tensão e frequência para manter o fluxo magnético em níveis adequados. Embora essa estratégia seja suficiente em aplicações com menor exigência dinâmica, sua capacidade de regular de forma precisa as variáveis eletromagnéticas da máquina é limitada, especialmente em regimes transitórios e em situações que demandam resposta rápida de torque (Bose, 2002). Por essa razão, os acionamentos síncronos modernos recorrem com frequência a técnicas mais elaboradas, como o controle vetorial, o controle direto de torque, o controle preditivo e o controle chaveado, que serão discutidos em seguida.

3.3.1 Controle vetorial

O controle vetorial, ou controle por orientação de campo (FOC, do inglês *Field Oriented Control*), baseia-se na descrição das grandezas elétricas da máquina em um referencial girante sincronizado com um vetor de fluxo tomado como referência. Nesse arranjo, as correntes

estatísticas são projetadas em duas componentes ortogonais, i_d e i_q . Em termos físicos, essa mudança de coordenadas permite relacionar a componente de eixo direto ao fluxo e a de quadratura à produção de torque, aproximando o comportamento do acionamento CA à lógica de controle de máquinas CC. Com isso, o problema deixa de ser formulado diretamente sobre variáveis trifásicas acopladas e passa a ser tratado em coordenadas mais adequadas ao projeto do controle (Novotny; Lipo, 1996).

A ideia central do método é regular, de forma coordenada, a amplitude e a orientação dos vetores de corrente ou de tensão, preservando a relação angular necessária entre o campo do rotor e a excitação do estator. Em máquinas síncronas, essa formulação é particularmente conveniente, pois a posição do campo rotórico decorre diretamente da posição elétrica do rotor. Isso permite definir referências independentes para i_d e i_q , favorecendo operação em torque constante, enfraquecimento de campo e desempenho dinâmico superior ao do controle escalar. No caso de motores BLAC com ímãs superficiais, é usual adotar $i_d^* = 0$ em ampla faixa de operação, de modo que a regulação de torque recaia principalmente sobre i_q , em concordância com a FCEM aproximadamente senoidal da máquina (Novotny; Lipo, 1996).

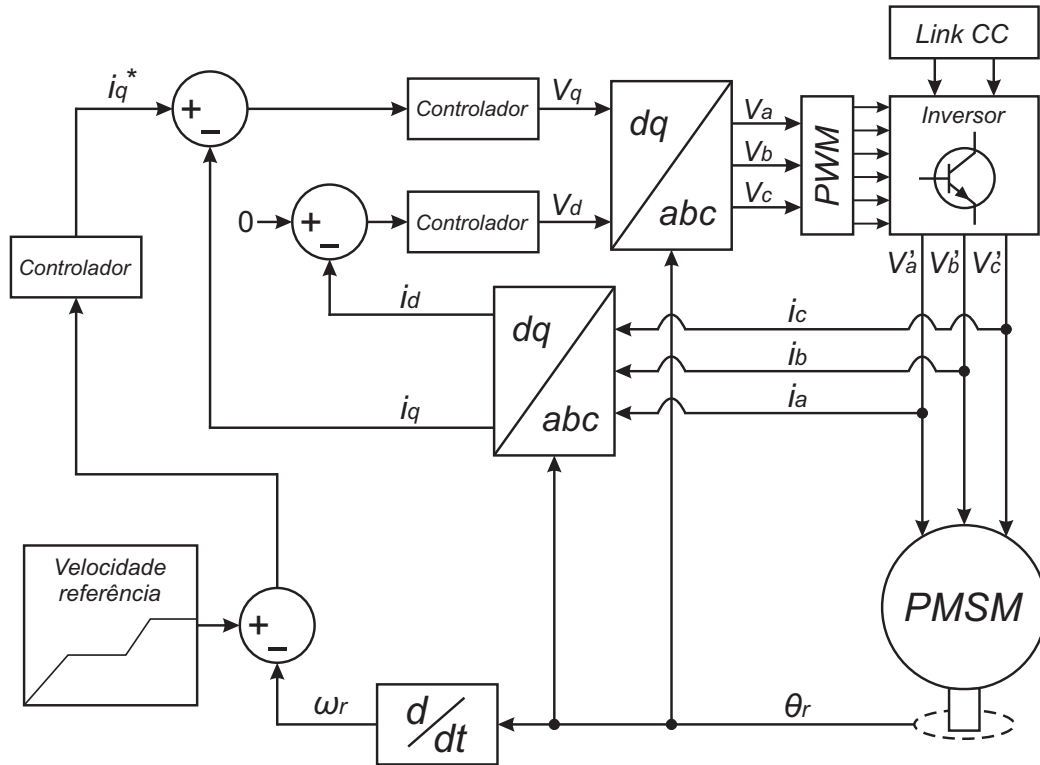
A Figura 5 apresenta uma estrutura típica de controle vetorial para um PMSM. Nela, a malha externa de velocidade fornece a referência i_q^* , enquanto duas malhas internas no referencial dq geram os comandos V_d e V_q . Também aparece a imposição de referência nula no eixo direto, configuração compatível com a operação usual de PMSM de ímãs superficiais. As transformações entre os referenciais abc e dq , combinadas com a medição ou estimação da posição elétrica do rotor, viabilizam o desacoplamento em coordenadas síncronas, já o modulador PWM e o inversor trifásico sintetizam as tensões aplicadas ao estator. Embora existam diferentes arranjos de controle vetorial, com distintas estratégias de estimação de fluxo, compensação de acoplamentos e regulação de corrente, a organização em cascata com malha externa de velocidade e malhas internas de corrente permanece como a estrutura mais difundida em acionamentos de alto desempenho (Novotny; Lipo, 1996).

3.3.2 Controle direto de torque

O controle direto de torque (DTC, do inglês *Direct Torque Control*) baseia-se na seleção direta dos vetores de tensão do inversor a partir dos erros de torque eletromagnético e de fluxo estatístico, dispensando, em sua forma clássica, as malhas internas de corrente e o modulador PWM. Com isso, a cadeia de controle entre a referência e o estado de chaveamento torna-se mais curta, o que favorece resposta dinâmica elevada. Em acionamentos com motores síncronos de ímãs permanentes, essa estratégia é especialmente atraente em aplicações que exigem rápida variação de torque, embora usualmente implique maior ondulação de torque e fluxo quando comparada ao controle vetorial (Zhong et al., 1997).

A base física do método pode ser interpretada pelo ângulo δ entre o fluxo estatístico e o fluxo do rotor. Para PMSM sem saliência acentuada, mantendo-se aproximadamente constante o módulo do fluxo estatístico, o torque cresce com o aumento desse ângulo. Essa relação pode

Figura 5 – Diagrama de blocos de um PMSM com controle vetorial.



Fonte: Adaptado de Andrich (2013).

ser escrita como na equação (61), em que p é o número de pares de polos, L_s é a indutância estatórica, $|\psi_s|$ é o módulo do fluxo estatórico, $|\psi_f|$ é o módulo do fluxo associado aos ímãs do rotor e δ é o ângulo entre esses dois vetores de fluxo. Assim, a ação de controle consiste em acelerar ou desacelerar a rotação do vetor de fluxo do estator por meio da escolha instantânea do vetor de tensão aplicado pelo inversor. Em máquinas salientes, soma-se ainda a parcela de torque de relutância, de modo que a referência de fluxo também passa a influenciar a linearidade da característica torque-ângulo (Zhong et al., 1997).

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{p}{L_s} |\psi_s| |\psi_f| \sin \delta \quad (61)$$

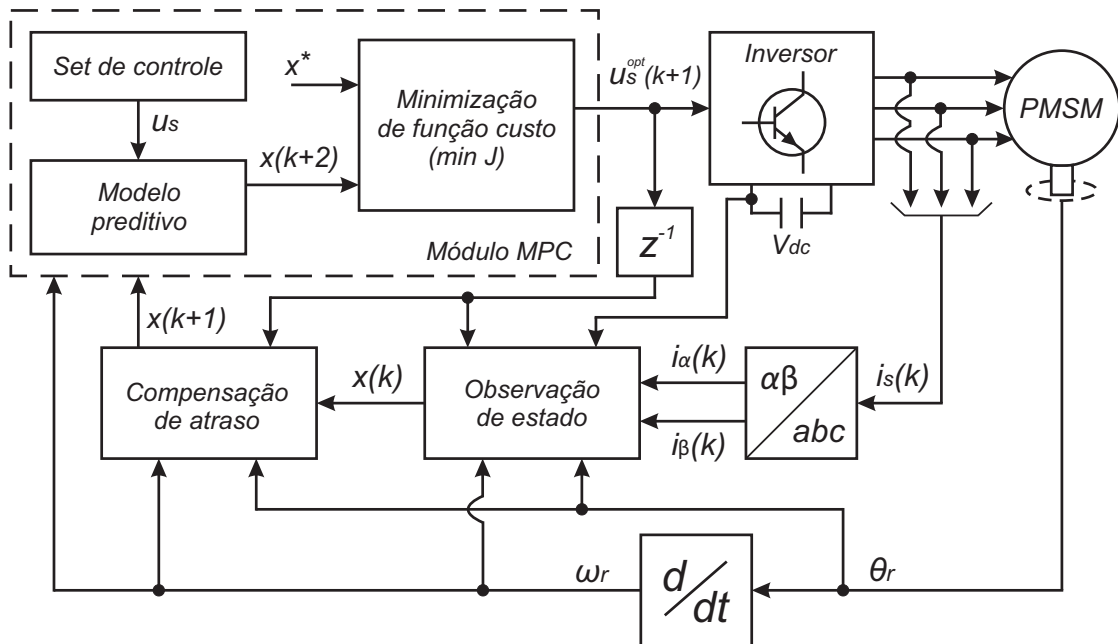
A Figura 6 apresenta uma arquitetura típica de DTC aplicada a um PMSM. Nessa configuração, a malha externa de velocidade fornece a referência de torque, enquanto o fluxo estatórico e o torque estimados são comparados com seus respectivos valores de referência por comparadores com histerese. A partir das correntes medidas e do estado de comutação do inversor, calculam-se as componentes do fluxo em eixos estacionários e identifica-se o setor angular do vetor de fluxo. Essas informações alimentam uma tabela de comutação que seleciona diretamente o próximo vetor de tensão do inversor. Essa organização evidencia a principal particularidade do método: a tensão estatórica não é gerada por referências contínuas seguidas de modulação, mas pela escolha direta do estado de chaveamento mais adequado ao erro instantâneo do sistema. Na estrutura mostrada, o sensor de posição permanece associado à inicialização e à

o critério que orienta o algoritmo na seleção da ação de controle mais adequada a cada instante (Geyer, 2017).

Nos acionamentos CA, duas formulações são particularmente recorrentes. Na abordagem *finite control set model predictive control* (FCS-MPC), a entrada de controle pertence a um conjunto discreto de estados de chaveamento do inversor, de modo que o algoritmo escolhe diretamente o vetor de tensão a ser aplicado, sem o uso de modulador. Já na *continuous control set model predictive control* (CCS-MPC), a entrada é tratada como contínua e o sinal calculado é posteriormente sintetizado por uma técnica de modulação. Em geral, a FCS-MPC apresenta estrutura mais direta e elevada rapidez dinâmica, enquanto a CCS-MPC tende a oferecer melhor desempenho em regime permanente e frequência de chaveamento fixa, ao custo de maior esforço computacional (Li; Meng; Shi, 2024).

A Figura 7 mostra uma arquitetura típica de MPC para acionamentos de motores CA. Nela, o modelo preditivo recebe o conjunto de ações admissíveis e, com base no estado estimado da máquina, calcula as trajetórias futuras associadas a cada candidata. Em seguida, o bloco de minimização da função custo seleciona a ação de controle a ser aplicada ao inversor. A presença explícita do *control set* e da escolha direta do estado de chaveamento caracteriza uma estrutura próxima do FCS-MPC. O diagrama também evidencia dois elementos práticos relevantes: a observação de estados, necessária para alimentar o modelo com variáveis não diretamente medidas, e a compensação de atraso, empregada para reduzir os efeitos do processamento digital e da atuação do conversor (Li; Meng; Shi, 2024).

Figura 7 – Diagrama de blocos de um PMSM com controle preditivo.



Fonte: Adaptado de Li, Meng e Shi (2024).

Em motores síncronos, o interesse pelo controle preditivo decorre da possibilidade de

considerar, em uma única estrutura, o acoplamento entre variáveis elétricas, as restrições do inversor e diferentes critérios de desempenho. Por outro lado, sua aplicação prática depende de um modelo suficientemente representativo e de capacidade computacional compatível com o período de amostragem, o que motivou o desenvolvimento de variantes voltadas à redução de ondulações, à simplificação algorítmica e ao aumento de robustez (Li; Meng; Shi, 2024).

3.3.4 Controle chaveado

O termo controle chaveado não designa uma única técnica de controle, mas uma classe mais ampla de abordagens em que a ação de controle envolve a comutação entre modos, subsistemas ou leis de atuação distintas. No contexto de sistemas dinâmicos, essa formulação é usualmente associada a modelos híbridos ou a sistemas com eventos discretos, nos quais a evolução contínua do estado é acompanhada pela seleção, a cada instante, de uma dinâmica ativa (Liberzon, 2003). Como os fundamentos teóricos, as classificações e algumas aplicações de sistemas chaveados já foram discutidos no Capítulo 2, interessa aqui apenas situar o emprego dessa estratégia no acionamento de motores síncronos, em particular no caso de PMSM.

Em acionamentos elétricos, a ideia de comutação pode aparecer sob diferentes perspectivas. Em um sentido mais amplo, ela inclui estratégias em que a ação do inversor é definida diretamente a partir da escolha de estados discretos de chaveamento. Nesse grupo, enquadram-se, por exemplo, abordagens baseadas em tabelas de comutação e também o controle por modos deslizantes (SMC, do inglês *Sliding Mode Control*). Este último constitui uma classe particular de controle descontínuo ou de estrutura variável, na qual a lei de controle alterna entre estruturas distintas com o objetivo de forçar a trajetória a atingir e permanecer sobre uma superfície de deslizamento. Embora compartilhe com o controle chaveado a presença de descontinuidades e a seleção entre ações discretas, o SMC possui formulação própria e é frequentemente acompanhado por problemas práticos como *chattering* (Wu et al., 2022).

No caso específico de máquinas síncronas de ímã permanente, a maior parte das estratégias consagradas, como o controle vetorial e o controle direto de torque, é formulada a partir de referenciais auxiliares e da síntese de tensões médias ou da seleção direta de vetores de tensão. Em contraste, uma linha menos usual consiste em tratar o conjunto inversor-máquina explicitamente como um sistema chaveado, no qual cada configuração do inversor define um modo dinâmico distinto e a lei de chaveamento passa a ser objeto direto de projeto. Nessa perspectiva, a literatura mostra que o acionamento PMSM pode ser modelado como um sistema chaveado não linear ou afim, permitindo a síntese de leis de chaveamento dependentes do estado com garantias formais de estabilidade (Egidio et al., 2019).

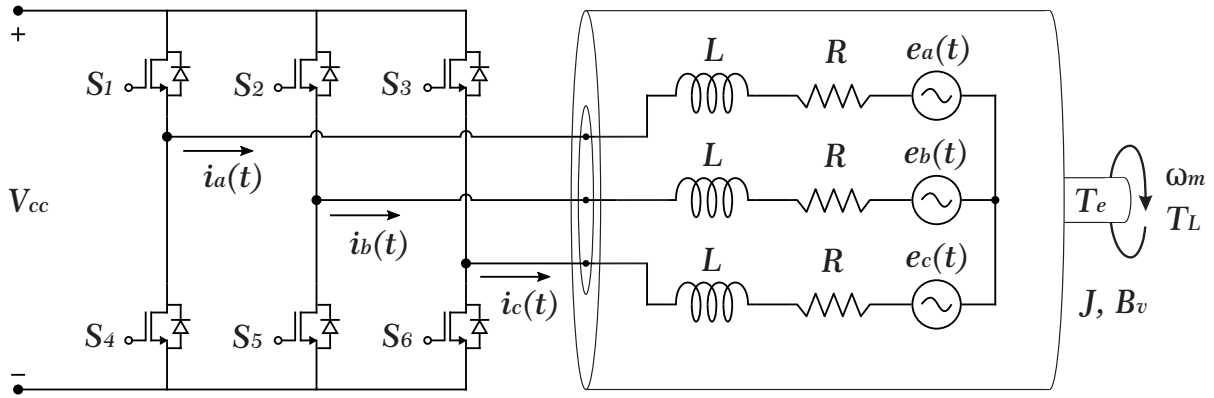
A abordagem adotada nesta dissertação aplica o controle chaveado diretamente ao acionamento do motor por meio da seleção, em tempo real, do modo de operação do inversor. Trata-se de uma estratégia de chaveamento dependente do estado, formulada com base na teoria de sistemas chaveados e na síntese de uma lei de chaveamento por critérios de estabilidade de Lyapunov. Diferentemente do controle por modos deslizantes, não se busca impor delibe-

radamente uma superfície de deslizamento. Ainda assim, modos deslizantes podem surgir nas fronteiras de chaveamento e, nesse caso, devem ser compatíveis com a estabilidade do sistema em malha fechada.

3.4 MODELAGEM DO SISTEMA

Esta seção apresenta a modelagem completa do sistema chaveado composto por um inversor trifásico de dois níveis acionando um motor BLAC, ilustrado na Figura 8. O objetivo é descrever a dinâmica elétrica e mecânica do conjunto inversor-máquina, obtendo um modelo em espaço de estados apropriado para o desenvolvimento da lei de chaveamento no Capítulo 4. Por simplicidade de notação, a dependência temporal explícita das variáveis será omitida sempre que não houver risco de ambiguidade.

Figura 8 – Representação do sistema inversor-motor BLAC.



Fonte: Adaptado de Patel e Chandwani (2021).

A modelagem parte do equacionamento elétrico das fases do estator, incluindo a representação das tensões induzidas e do efeito das chaves do inversor, e em seguida aborda o equacionamento mecânico do rotor. Por fim, o modelo completo é expresso em coordenadas $\alpha\beta$ por meio da transformada de Clarke, resultando em uma forma compacta e adequada à formulação matricial utilizada na síntese por LMIs.

3.4.1 Equacionamento elétrico

Cada fase do estator do motor BLAC é modelada como uma associação série de uma resistência R , uma indutância L e uma fonte de FCEM e_x , onde $x \in \{a, b, c\}$. Nesse modelo, R representa a resistência ôhmica do enrolamento de fase, L representa a indutância equivalente de fase, e e_x representa a tensão interna induzida pela rotação do rotor (Umans, 2014). Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões para cada fase, obtêm-se as equações (63)–(65).

$$V_a = Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (63)$$

$$V_b = Ri_b + L \frac{di_b}{dt} + e_b \quad (64)$$

$$V_c = Ri_c + L \frac{di_c}{dt} + e_c \quad (65)$$

Como o estator é conectado em estrela e o sistema trifásico é considerado balanceado, as correntes satisfazem a condição de soma nula conforme a equação (66).

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (66)$$

A força contraeletromotriz e_x de cada fase depende da posição elétrica θ_e do rotor e é proporcional à velocidade angular elétrica ω_e , sendo expressa pelas equações (67)–(69), em que K_e é a constante de FCEM.

$$e_a = K_e \omega_e \sin(\theta_e) \quad (67)$$

$$e_b = K_e \omega_e \sin\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (68)$$

$$e_c = K_e \omega_e \sin\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (69)$$

As tensões de fase V_a , V_b e V_c são determinadas pelos estados de comutação das chaves do inversor. Considerando um inversor trifásico de dois níveis alimentado por uma tensão de barramento contínuo V_{cc} , cada braço do inversor pode assumir o valor $S_k \in \{0, 1\}$, com $k \in \{1, 2, 3\}$, representando o estado inferior (0) ou superior (1) da respectiva chave. A Tabela 1 apresenta as seis combinações ativas de comutação do inversor e as respectivas tensões de fase em relação ao ponto neutro. Os vetores nulos não são considerados na síntese do controle.

Tabela 1 – Modos de operação ativos do inversor trifásico e tensões de fase.

Modo σ	S_1	S_2	S_3	V_a	V_b	V_c
1	1	0	0	$\frac{2}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$
2	1	1	0	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{2}{3}V_{cc}$
3	0	1	0	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{2}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$
4	0	1	1	$-\frac{2}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$
5	0	0	1	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{2}{3}V_{cc}$
6	1	0	1	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{2}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$

Fonte: Adaptado de Scalabrin (2016 apud Agnolo, 2019).

3.4.2 Equacionamento mecânico

A parte mecânica do sistema descreve a interação entre o torque eletromagnético produzido pela máquina e o torque de carga aplicado ao eixo. A equação dinâmica do movimento rotacional é dada por (70), em que J é o momento de inércia do rotor, B_v é o coeficiente de atrito viscoso, T_e é o torque eletromagnético, T_L é o torque de carga e ω_m representa a velocidade angular mecânica do rotor.

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_e - B_v \omega_m - T_L \quad (70)$$

O torque eletromagnético T_e gerado pelo campo magnético rotativo é função das correntes de fase e da posição elétrica do rotor, sendo definido em coordenadas abc pela equação (71), onde p é o número de pares de polos e $\omega_e = p \omega_m$.

$$T_e = \frac{p}{\omega_e} (e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c) \quad (71)$$

Substituindo (67)–(69) em (71), obtém-se a equação (72).

$$T_e = \frac{3}{2} p K_e \left(i_a \sin \theta_e + i_b \sin \left(\theta_e - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left(\theta_e + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \quad (72)$$

3.4.3 Representação em espaço de estados

A partir do equacionamento elétrico das três fases, é possível reduzir o sistema trifásico a duas variáveis independentes por meio da transformada de Clarke. Essa transformação projeta o sistema em um plano ortogonal $\alpha\beta$, eliminando a redundância decorrente da soma nula das correntes trifásicas e simplificando a análise do comportamento dinâmico do motor.

A transformada de Clarke é definida pela equação (73), que converte as variáveis trifásicas (f_a, f_b, f_c) em componentes bidimensionais ortogonais (f_α, f_β) no referencial estacionário. Essa mudança de base corresponde a uma projeção das grandezas trifásicas sobre eixos defasados de 90° , permitindo representar o comportamento elétrico em um plano reduzido sem perda de informação essencial (O'Rourke et al., 2019).

$$\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \quad (73)$$

Essa formulação, apresentada originalmente por Clarke (1971), deriva dos conceitos de componentes simétricos e constitui a base para diversas técnicas modernas de modelagem e controle de sistemas trifásicos.

Aplicando a equação (73) às tensões, correntes e forças contraeletromotrizes do sistema, obtém-se o modelo reduzido no referencial $\alpha\beta$. Esse modelo descreve o comportamento elétrico

e mecânico acoplado do conjunto inversor–motor BLAC, sendo expresso em espaço de estados conforme a equação (74).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_e}{L} \cos \theta_e \\ 0 & -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \sin \theta_e \\ \frac{3pK_e}{2J} \sin \theta_e & -\frac{3pK_e}{2J} \cos \theta_e & -\frac{B_v}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\alpha,i} \\ V_{\beta,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} T_L \quad (74)$$

Na equação (74), o vetor de estados é definido por $x = [i_\alpha \ i_\beta \ \omega_m]^\top$, e as entradas correspondem às tensões $V_{\alpha,i}$ e $V_{\beta,i}$ aplicadas pelo inversor em cada modo de operação $i \in \{1, \dots, 6\}$.

O modelo em coordenadas $\alpha\beta$ dado por (74) é matematicamente equivalente ao sistema trifásico original, porém com uma estrutura de menor dimensão. Além disso, essa forma é particularmente adequada para o desenvolvimento das condições de estabilidade e desempenho via LMIs, que serão apresentadas no Capítulo 4.

4 PROJETO DA LEI DE CHAVEAMENTO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento completo do projeto da lei de chaveamento baseada em LMIs, aplicada ao controle de um inversor trifásico alimentando um motor BLAC. O objetivo é formular, a partir do modelo matemático do sistema, uma estratégia de comutação capaz de garantir estabilidade global e atenuação de distúrbios, assegurando o rastreamento adequado das correntes de referência senoidais e o desempenho dinâmico desejado. Por simplicidade de notação, a dependência temporal explícita das variáveis será omitida sempre que não houver risco de ambiguidade.

Inicialmente, realiza-se a caracterização do sistema em coordenadas $\alpha\beta$, estabelecendo-se as relações entre os estados elétricos, a dinâmica do rotor e o vetor periódico de referência. Em seguida, é proposta uma função de Lyapunov candidata, a partir da qual são derivadas as condições necessárias de estabilidade. Essas condições são expressas em forma matricial e posteriormente reformuladas como restrições lineares no domínio das LMIs, possibilitando sua resolução por métodos numéricos de otimização convexa.

Com o objetivo de reduzir o conservadorismo associado às condições de estabilidade, introduz-se o Procedimento-S, que permite relaxar a desigualdade de decrescimento da função de Lyapunov. Na sequência, o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é incorporado à formulação, possibilitando a limitação explícita do efeito de distúrbios exógenos sobre as variáveis de erro e o vetor de chaveamento. Adicionalmente, aplica-se o lema de Finsler para projetar as restrições no subespaço factível, assegurando a convexidade da formulação final.

Por fim, as condições obtidas são reunidas em uma estrutura unificada de síntese baseada em LMIs, da qual são extraídas as matrizes de projeto do controlador. A solução desse problema fornece a lei de chaveamento resultante, capaz de garantir estabilidade robusta e rejeição efetiva de perturbações no acionamento do motor BLAC, mantendo o seguimento adequado das referências senoidais. Uma arquitetura de controle para aplicação da lei de chaveamento projetada é proposta ao final do capítulo.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA

O projeto da lei de chaveamento parte da formulação do modelo dinâmico completo do inversor trifásico com motor BLAC, conforme desenvolvido no Capítulo 3. No referido capítulo, a equação (74) descreve a dinâmica do sistema em coordenadas $\alpha\beta$, incluindo a influência direta da FCEM e o acoplamento entre as variáveis elétricas e mecânicas do motor.

Para viabilizar o projeto de controle baseado em LMIs, é necessário reestruturar o modelo de modo a remover o termo da FCEM da matriz de estados. Essa modificação permite representar a contribuição periódica associada ao campo girante como um distúrbio harmônico externo, facilitando a aplicação do critério $\mathcal{H}_\infty$ e o desenvolvimento das condições de estabilidade de Lyapunov. A partir da equação (74), o sistema é reorganizado na forma compacta mostrada em (75).

$$\dot{x} = A(s, c)x + b_{\text{phys}}u + B_z W(\omega_e)z + d \quad (75)$$

Na equação (75), o vetor de estados $x = [i_\alpha \ i_\beta \ \omega_m]^\top$ mantém a mesma definição introduzida anteriormente. As variáveis $s := \sin \theta_e$ e $c := \cos \theta_e$ descrevem a dependência da planta em relação à posição elétrica do rotor, enquanto $u \in \{0, 1\}^m$ representa o vetor de comandos das chaves do inversor, sendo $m = 6$ o número de modos de operação possíveis. Em cada instante, u é um vetor unitário canônico, i.e., $\sum_{j=1}^m u_j = 1$, de modo que apenas uma das seis colunas de b_{phys} é selecionada. O vetor $d = [0 \ 0 \ -T_L/J]^\top$ permanece inalterado, representando o torque de carga.

O vetor periódico z representa uma projeção unitária da posição elétrica do rotor no plano $\alpha\beta$ e é tratado, na formulação do controle, como um sinal exógeno estruturado associado à dinâmica rotacional. Sua definição é dada pela equação (76).

$$z := \begin{bmatrix} \cos \theta_e \\ \sin \theta_e \end{bmatrix} \quad (76)$$

A matriz $A(s, c)$ representa a dinâmica contínua do sistema, cuja estrutura é afim nas variáveis de estado, porém dependente de forma não linear da posição elétrica do rotor por meio dos termos $\sin \theta_e$ e $\cos \theta_e$. Essa dependência paramétrica reflete o acoplamento entre as componentes elétricas e mecânicas do motor, e sua forma explícita é apresentada na equação (77).

$$A(s, c) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & 0 \\ -\frac{K_t}{J}s & \frac{K_t}{J}c & -\frac{B_v}{J} \end{bmatrix} \quad (77)$$

A matriz b_{phys} modela a ação das tensões aplicadas pelo inversor sobre as correntes do estator e é derivada diretamente dos vetores de tensão ativos definidos no Capítulo 3. Sua forma matricial é mostrada na equação (78).

$$b_{\text{phys}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3L}U \\ 0_{1 \times m} \end{bmatrix} \quad (78)$$

A matriz U agrupa os vetores de tensão no plano $\alpha\beta$, conforme a equação (79).

$$U = \begin{bmatrix} V_{cc} & 0 & -V_{cc} & -V_{cc} & 0 & V_{cc} \\ 0 & V_{cc} & V_{cc} & 0 & -V_{cc} & -V_{cc} \end{bmatrix} \quad (79)$$

O termo $B_z W(\omega_e)z$ em (75) representa a contribuição periódica associada à FCEM, tratada como distúrbio harmônico. Essa separação permite analisar a influência do vetor periódico z de forma explícita, sem comprometer a linearidade da formulação. As matrizes correspondentes são apresentadas em (80) e (81).

$$B_z = \begin{bmatrix} \frac{K_e}{L} & 0 \\ 0 & \frac{K_e}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$W(\omega_e) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e \\ \omega_e & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

Para melhorar o condicionamento numérico do problema de otimização, adota-se a normalização da matriz de entrada b_{phys} , conforme a equação (82).

$$b = b_{\text{phys}} D^{-1}, \quad D = \text{diag}(\|b_{\text{phys}}(:, 1)\|, \dots, \|b_{\text{phys}}(:, m)\|) \quad (82)$$

Como D é diagonal, constante e inversível, essa operação apenas reescala as colunas de b_{phys} , sem alterar o subespaço gerado pelos vetores de entrada. Assim, a normalização não modifica a dinâmica física admissível do sistema, mas apenas a parametrização da ação de controle, sendo empregada apenas para melhorar o condicionamento numérico da síntese.

4.1.1 Modelo do sinal de referência

O objetivo do controle é garantir o rastreamento senoidal das correntes estatóricas, assegurando o torque exigido e relacionado à referência de velocidade. A amplitude da corrente de referência I_p deve ser definida a partir da relação de torque necessária para acionar o motor no ponto de operação correspondente à velocidade desejada e ao torque de carga.

O vetor periódico z segue a dinâmica rotacional dada por (83).

$$\dot{z} = W(\omega_e)z, \quad z^\top z = 1 \quad (83)$$

Dessa forma, o vetor de correntes de referência $i^* = [i_\alpha^* \ i_\beta^*]^\top$ é definido pela relação linear apresentada na Equação (84).

$$i^* = Z_e z \quad (84)$$

A matriz Z_e , que relaciona as componentes da corrente de referência com o vetor periódico, é exibida na Equação (85). Com base nisso, obtém-se $i_\alpha^* = I_p \sin \theta_e$ e $i_\beta^* = -I_p \cos \theta_e$, garantindo defasagem de 90° entre as componentes α e β .

$$Z_e = I_p \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

O vetor de estados de referência x^* é então definido por (86), cuja derivada temporal é dada por (87), considerando a referência de velocidade mecânica ω_m^* aproximadamente constante durante um período de comutação.

$$x^* = \begin{bmatrix} i^* \\ \omega_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_e z \\ \omega_m^* \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\frac{d}{dt}x^* = \begin{bmatrix} Z_e \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_e W(\omega_e)z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

4.1.2 Formulação do erro dinâmico

O vetor de erro de rastreamento é definido pela diferença entre o estado real do motor e o estado de referência, conforme a equação (88).

$$e = x - x^* \quad (88)$$

Para descrever a evolução temporal do erro no espaço de estados completo ($\mathbb{R}^3$), define-se a matriz estendida $\bar{Z}_e \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ na equação (89), a qual incorpora a referência de corrente ao vetor de estados, mantendo nula a componente oscilatória para a velocidade mecânica.

$$\bar{Z}_e = \begin{bmatrix} Z_e \\ 0_{1 \times 2} \end{bmatrix} \quad (89)$$

A dinâmica do erro é obtida subtraindo-se a derivada da referência (87) da dinâmica geral do sistema (75). Substituindo $x = e + x^*$ e agrupando os termos, a evolução do erro é dada por (90).

$$\dot{e} = A(s, c)e + B(\omega_e)z + b\theta + d \quad (90)$$

Nesta formulação, a matriz $B(\omega_e)$ é definida por (91).

$$B(\omega_e) = A(s, c)\bar{Z}_e + (B_z - \bar{Z}_e)W(\omega_e) \quad (91)$$

O vetor de controle θ representa a combinação convexa dos modos de operação do inversor, pertencente ao conjunto *simplex* Θ apresentado em (92).

$$\Theta = \left\{ \theta \in [0, 1]^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1 \right\} \quad (92)$$

O equilíbrio periódico nominal do sistema ocorre quando $e = 0$, assim como a sua derivada. Sob essa condição, assume-se que existe uma combinação convexa média de modos $\bar{\theta}(z) \in \Theta$ capaz de compensar o torque de carga d e o distúrbio harmônico $B(\omega_e)z$, satisfazendo a relação de equilíbrio apresentada em (93).

$$B(\omega_e)z + b\bar{\theta} + d = 0 \quad (93)$$

Ao subtrair a condição de equilíbrio (93) da dinâmica completa (90) e definir a variação de controle $\Delta\theta = \theta - \bar{\theta}$, o termo $B(\omega_e)z$ é anulado pela ação de controle nominal. A dinâmica de erro para a síntese do controlador é então expressa de forma exata por (94).

$$\dot{e} = A(s, c)e + b\Delta\theta \quad (94)$$

A equação (94) constitui a base para a formulação das condições de estabilidade. Embora o termo harmônico tenha sido anulado na dinâmica do erro, sua derivada $\dot{z} = W(\omega_e)z$ permanece acoplada à variação da função de Lyapunov.

4.2 FUNÇÃO DE LYAPUNOV E LEI DE CHAVEAMENTO

A análise de estabilidade do sistema chaveado baseia-se na formulação de uma função de Lyapunov que garanta convergência global do erro de rastreamento, mesmo sob chaveamento entre modos discretos. A partir do modelo reduzido apresentado na equação (94), busca-se determinar uma função escalar $V(e, z)$ que satisfaça as condições clássicas de positividade e decrescimento, de forma a assegurar a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada.

4.2.1 Função de Lyapunov candidata

Para cada modo de operação $i \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$, define-se uma função auxiliar $v_i(e, z)$ conforme a equação (95), em que $P = P^\top$ é uma matriz simétrica positiva definida e T é uma matriz de dimensão compatível, ambas a serem determinadas por meio das LMIs. O vetor b_i representa a contribuição do i -ésimo vetor de tensão do inversor, conforme definido na tabela de modos de operação do sistema.

$$v_i(e, z) = e^\top P e + 2e^\top T(Bz + b_i) \quad (95)$$

A equação (95) é composta por dois termos: o primeiro, $e^\top P e$, associado à energia do erro, e o segundo, $2e^\top T(Bz + b_i)$, responsável por capturar o efeito dos termos afins presentes na dinâmica do sistema chaveado. Essa estrutura quadrático-afim é inspirada na formulação proposta por Trofino et al. (2011), na qual funções auxiliares da forma $v_i(x) = x^\top P_i x + 2x^\top S_i$ são empregadas para sistemas chaveados afins. Nesta dissertação, a adaptação dessa estrutura considera explicitamente o termo periódico Bz associado à dinâmica rotacional do motor, incorporando-o ao termo afim juntamente com b_i .

A função de Lyapunov candidata é construída como o máximo entre as funções auxiliares definidas em (95). A definição é apresentada na equação (96).

$$V(e, z) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, z)\} \quad (96)$$

A escolha da operação de máximo assegura que $V(e, z)$ seja contínua e diferenciável por partes, mesmo em regiões de chaveamento entre modos distintos. Além disso, a função candidata

(96) satisfaz a condição de continuidade global, uma vez que, no instante de chaveamento, duas funções auxiliares v_i e v_j possuem o mesmo valor.

Para que $V(e, z)$ seja uma função de Lyapunov válida, deve ser positiva definida em relação ao vetor de erro e , conforme estabelecido na relação (97).

$$V(e, z) > 0, \quad \forall e \neq 0 \quad (97)$$

Além disso, sua derivada temporal deve ser estritamente negativa ao longo das trajetórias do sistema, segundo a relação (98).

$$\dot{V}(e, z) < 0, \quad \forall e \neq 0 \quad (98)$$

As condições (97) e (98) serão posteriormente convertidas em LMIs equivalentes, permitindo a síntese da lei de chaveamento.

4.2.2 Estrutura da matriz T

A matriz auxiliar T , introduzida na formulação das funções $v_i(e, z)$, aparece nos termos cruzados da função de Lyapunov candidata e influencia diretamente o acoplamento entre as variáveis elétricas e os modos de chaveamento. Considerando que apenas as correntes do estator são atuadas pelo inversor, é conveniente restringir a ação de T apenas aos estados elétricos, mantendo nulas as componentes associadas à dinâmica mecânica. A estrutura adotada é apresentada na equação (99).

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (99)$$

A forma em blocos de (99) reduz o número de variáveis de decisão e melhora o condicionamento numérico do problema de otimização. Essa configuração evita acoplamentos desnecessários entre os subsistemas elétrico e mecânico, mantendo o problema linear e bem condicionado.

Para impedir o escalonamento não limitado de T_{11} durante a síntese LMI, introduz-se um escalar auxiliar s_T que impõe uma restrição sobre sua norma espectral. Essa limitação é expressa pela LMI apresentada em (100).

$$\begin{bmatrix} s_T I_2 & T_{11} \\ T_{11}^\top & s_T I_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (100)$$

Pelo complemento de Schur, a restrição (100) é equivalente à condição de norma dada por (101).

$$\|T_{11}\|_2 \leq s_T \quad (101)$$

Na implementação prática, o parâmetro s_T pode ser limitado a um intervalo pré-definido ou incluído como variável de decisão no problema de otimização, atuando como fator de regularização da solução.

Quando T_{11} é imposta como simétrica, a desigualdade matricial (100) se reduz à forma escalar apresentada em (102).

$$-s_T I \leq T_{11} \leq s_T I \quad (102)$$

A forma estruturada de (99), combinada à regularização definida por (100), proporciona uma escolha numericamente estável e fisicamente coerente para a matriz T . Essa configuração garante consistência entre os vértices do politopo considerados na síntese LMI e contribui para o desempenho robusto do controle chaveado.

4.2.3 Lei de chaveamento

A lei de chaveamento $\sigma(e, z)$ é definida de modo a ativar, a cada instante, o modo de operação que maximiza o valor da função auxiliar $v_i(e, z)$. Essa lei é expressa pela equação (103).

$$\sigma(e, z) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, z)\} \quad (103)$$

A equação (103) estabelece que o modo ativo é aquele que fornece o maior valor da função auxiliar no instante considerado. Em termos físicos, essa escolha corresponde à seleção da topologia do inversor que produz a ação de controle mais favorável à redução da energia associada ao erro e .

A aplicação da lei (103) garante que, para cada ponto (e, z) do espaço de estados, apenas um modo i é ativo, assegurando a natureza determinística do chaveamento. Além disso, no limite das regiões de fronteira entre modos, duas funções auxiliares assumem o mesmo valor, de modo que o chaveamento ocorre de forma contínua na variável $V(e, z)$, preservando a estabilidade do sistema mesmo com modos deslizantes.

A função de Lyapunov definida em (96) pode ser interpretada geometricamente como o envelope superior das funções quadráticas $v_i(e, z)$. Cada função v_i define uma superfície parabólica no espaço de estados, e o conjunto dessas superfícies gera uma região convexa de estabilidade. O operador “máximo” seleciona, a cada instante, a superfície ativa que representa o modo corrente de operação do sistema.

4.3 CONDIÇÃO DE POSITIVIDADE DA FUNÇÃO DE LYAPUNOV

A primeira condição para que a função candidata $V(e, z)$, definida na equação (96), seja de fato uma função de Lyapunov válida é que ela seja positiva definida em relação ao vetor de erro e . Essa propriedade assegura que a energia armazenada no sistema seja sempre positiva e nula apenas no equilíbrio, o que implica estabilidade no sentido de Lyapunov.

A função candidata $V(e, z)$ é construída como o máximo entre as funções auxiliares $v_i(e, z)$ definidas na equação (95). No entanto, para facilitar o tratamento analítico, pode-se expressar o máximo como uma combinação convexa particular entre as funções auxiliares, conforme a equação (104), em que $\theta_i(e, z)$ é o conjunto de pesos convexos associados ao modo de operação ativo, pertencentes ao conjunto Θ definido pela equação (92).

$$V(e, z) = \sum_{i=1}^m \theta_i v_i(e, z) \quad (104)$$

Ressalta-se que a representação em (104) não implica igualdade global entre o operador máximo de (96) e uma combinação convexa arbitrária. Ela é introduzida como artifício analítico para tratar de forma contínua as transições em fronteiras de chaveamento e eventuais modos deslizantes. Fora das fronteiras, o funcionamento nominal seleciona um único modo, de modo que $\theta \in \{e_1, \dots, e_m\}$ quase sempre. Nas fronteiras de chaveamento, porém, podem ocorrer combinações convexas admissíveis, com $\theta_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$, coerentes com a interpretação de Filippov para dinâmicas descontínuas. Dessa forma, a forma convexa é usada como ferramenta de análise para obter condições suficientes em LMI, sem exigir que um único modo seja dominante em todos os instantes.

Deve-se observar que, para cada instante de tempo, apenas um modo é dominante, o que implica que um dos elementos θ_i assume valor igual a um e os demais são nulos. Entretanto, a expressão convexa da equação (104) é útil para análise de estabilidade, pois permite descrever de forma contínua o comportamento do sistema durante os chaveamentos e modos deslizantes.

A função $V(e, z)$ é dita positiva definida se, para todo $e \neq 0$, o seu valor for estritamente positivo, isto é, se existir uma matriz P tal que a condição (105) seja verdade.

$$v_i(e, z) = e^\top P e + 2e^\top T(Bz + b_i) > 0, \quad \forall e \neq 0 \quad (105)$$

A condição (105) garante que cada função auxiliar $v_i(e, z)$ é positiva para qualquer estado diferente do equilíbrio. No entanto, impor essa condição individualmente a todos os modos pode introduzir conservadorismo desnecessário, uma vez que a positividade da função candidata $V(e, z)$ depende apenas do modo ativo no instante de chaveamento.

Para reduzir esse conservadorismo, considera-se a condição de positividade sobre uma combinação convexa fixa dos modos de operação, associada ao ponto de equilíbrio periódico do sistema. Assim, define-se o conjunto de pesos $\bar{\theta}_i$ correspondente à combinação convexa no equilíbrio, conforme descrito em (106).

$$\bar{\theta}_i = \theta_i(e = 0, z), \quad \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i = 1, \quad \bar{\theta}_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (106)$$

Sob essa definição, a positividade da função candidata pode ser garantida se a combinação convexa das funções auxiliares for positiva, conforme a condição (107).

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e, z) > 0 \quad (107)$$

Substituindo a expressão de $v_i(e, z)$ dada em (95) na condição (107), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i \left(e^\top P e + 2e^\top T (Bz + b_i) \right) > 0 \quad (108)$$

Considerando o ponto de operação nominal do sistema, a combinação convexa dos termos afins associada ao equilíbrio $\bar{\theta}$ deve ser nula para garantir a convergência do erro para a origem, resultando na condição de estacionariedade apresentada em (109), onde z^* denota a orientação nominal do vetor periódico no ponto de operação considerado (i.e., a condição é imposta localmente no equilíbrio periódico).

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (Bz^* + b_i) = 0 \quad (109)$$

Substituindo a relação (109) em (108), observa-se que o termo linear em e se anula, restando apenas a parcela quadrática. Assim, a condição de positividade da função de Lyapunov pode ser reescrita conforme a condição (110).

$$e^\top P e > 0, \quad \forall e \neq 0 \quad (110)$$

A condição (110) é satisfeita se, e somente se, a matriz P for positiva definida, como indicado em (111).

$$P = P^\top > 0 \quad (111)$$

A desigualdade (111) constitui, portanto, a condição LMI de positividade da função de Lyapunov. Essa condição é necessária para garantir que a função $V(e, z)$ represente uma medida válida de energia do sistema, e será utilizada como restrição estrutural em todas as formulações subsequentes de projeto.

Geometricamente, a desigualdade (110) define superfícies elipsoidais centradas na origem do espaço de estados. Cada superfície representa um nível constante de energia de Lyapunov, e o conjunto dessas elipses aninhadas forma uma região de estabilidade local. Durante o chaveamento, o estado do sistema permanece dentro dessas superfícies, assegurando que a energia total decresça ao longo do tempo.

4.4 CONDIÇÃO DE DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO DE LYAPUNOV

A segunda condição fundamental para que a função $V(e, z)$, definida na equação (96), seja uma função de Lyapunov válida é o seu decrescimento ao longo das trajetórias do sistema. Essa propriedade garante que a energia associada ao erro de rastreamento diminua continuamente, assegurando a estabilidade do sistema sob a lei de chaveamento.

A derivada temporal de cada função auxiliar $v_i(e, z)$, definida em (95), é obtida pela regra da cadeia, resultando em (112).

$$\dot{v}_i = \dot{e}^\top P e + e^\top P \dot{e} + 2\dot{e}^\top T(Bz + b_i) + 2e^\top T(B\dot{z} + \dot{b}_i) \quad (112)$$

Considerando que b_i é um vetor constante ($\dot{b}_i = 0$) e que o vetor periódico z obedece à dinâmica $\dot{z} = Wz$, a expressão simplifica-se. Assume-se que a variação temporal da matriz B é lenta comparada à dinâmica das correntes ($\dot{B} \approx 0$). Substituindo esses termos, obtém-se (113).

$$\dot{v}_i = \dot{e}^\top P e + e^\top P \dot{e} + 2\dot{e}^\top T(Bz + b_i) + 2e^\top TBWz \quad (113)$$

Conforme demonstrado no equacionamento do erro, a dinâmica reduzida considera que a ação de controle nominal compensa o distúrbio harmônico, resultando em $\dot{e} = Ae + b\Delta\theta$. Substituindo esta dinâmica em (113) e utilizando as propriedades de anulação no ponto de equilíbrio, a expressão expandida para $\dot{v}_i$ torna-se a equação (114).

$$\dot{v}_i = e^\top (A^\top P + PA)e + 2e^\top Pb\Delta\theta + 2\Delta\theta^\top b^\top Tb\Delta\theta + 2e^\top TBWz \quad (114)$$

Para a formulação de LMIs, a condição de decrescimento global é expressa pela combinação convexa ponderada das derivadas em (115).

$$\sum_{i=1}^m \theta_i \dot{v}_i < 0 \quad (115)$$

Ao agrupar os termos quadráticos e bilineares em relação ao vetor de estado estendido $\xi = [e^\top \ \Delta\theta^\top \ z^\top]^\top$, a condição (115) assume a forma matricial compacta em (116).

$$\xi^\top \Psi \xi < 0 \quad (116)$$

A matriz Ψ consolida os acoplamentos da dinâmica e da derivada do sinal exógeno, resultando na estrutura simétrica definida em (117).

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^\top P + PA & Pb + A^\top Tb & TBW \\ (Pb + A^\top Tb)^\top & b^\top (T + T^\top) b & 0 \\ (TBW)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (117)$$

A condição de decrescimento expressa em (116) será satisfeita se a matriz Ψ for negativa definida, conforme a expressão (118).

$$\Psi < 0 \quad (118)$$

A expressão (118) constitui, portanto, a forma LMI inicial para verificação do decrescimento da função de Lyapunov. Contudo, essa condição é tipicamente conservadora, pois considera que o decrescimento deve ocorrer para qualquer combinação convexa dos modos de operação, mesmo para aquelas que fisicamente não ocorrem no chaveamento. Por esse motivo,

serão introduzidos mecanismos de relaxamento que permitem reduzir o conservadorismo da condição (118).

A matriz Ψ reflete o fato de que o controlador deve garantir a estabilidade do erro enquanto lida com a variação temporal inerente ao vetor de referência z através do termo de acoplamento TBW .

4.5 CONDIÇÃO DE RELAXAMENTO

A condição de decrescimento da função de Lyapunov, expressa pela desigualdade matricial (118), é suficiente para garantir a estabilidade do sistema chaveado. Entretanto, conforme já mencionado, essa condição apresenta alto grau de conservadorismo, uma vez que impõe a negatividade da matriz Ψ para todas as combinações convexas dos modos de operação. Para reduzir esse conservadorismo e ampliar o conjunto de soluções factíveis, é aplicada uma técnica de relaxamento baseada no Procedimento-S.

Sabe-se que a função candidata $V(e, z)$ é construída a partir do máximo entre as funções auxiliares $v_i(e, z)$, conforme a equação (96). Em consequência, sua variação temporal é sempre maior ou igual à variação associada à combinação convexa no equilíbrio. Essa relação é expressa pela desigualdade (119).

$$V(e, z) - \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e, z) \geq 0 \quad (119)$$

A desigualdade (119) é sempre verdadeira e positiva semidefinida, pois o máximo das funções auxiliares é, por definição, superior a qualquer combinação convexa delas. Essa propriedade permite introduzir uma variável escalar de relaxamento α , conforme a técnica do Procedimento-S, para ponderar a influência dessa desigualdade no conjunto das LMIs de estabilidade.

Expandindo as funções auxiliares $v_i(e, z)$ conforme (95) e substituindo em (119), obtém-se a expressão apresentada na condição (120).

$$\sum_{i=1}^m \theta_i v_i(e, z) - \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i v_i(e, z) \geq 0 \quad (120)$$

Ao subtrair as somas convexas, o termo quadrático $e^\top P e$ anula-se. Considerando a relação de estacionariedade no equilíbrio (109), a diferença restante foca na variação do controle $\Delta\theta = \theta - \bar{\theta}$. Assim, a desigualdade de positividade pode ser reescrita de forma compacta, conforme a expressão (121), em que Φ é a matriz simétrica definida na equação (122).

$$\xi^\top \Phi \xi \geq 0 \quad (121)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & Tb & 0 \\ b^\top T^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (122)$$

A desigualdade (121) descreve uma restrição quadrática que é sempre verdadeira para o sistema considerado e, portanto, pode ser incorporada à condição de estabilidade sem alterar sua validade. No entanto, é possível ponderar sua contribuição ao problema de otimização por meio de um escalar positivo α , resultando na forma relaxada apresentada na condição (123).

$$\xi^\top (\Psi + \alpha\Phi) \xi < 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (123)$$

A expressão (123) corresponde à versão relaxada da condição de decrescimento (118), obtida via Procedimento–S. O parâmetro α atua como um grau de liberdade adicional no problema de síntese, permitindo ao projetista ajustar a influência da desigualdade auxiliar na busca de uma solução factível.

O escalar α da condição (123) pondera o quanto da desigualdade (121) é incorporado à restrição principal de estabilidade. Valores elevados de α tornam o problema menos conservador, ampliando a região de soluções possíveis, mas podem reduzir a precisão na aproximação do comportamento real do sistema. Por outro lado, valores muito pequenos tornam o relaxamento ineficaz, aproximando o problema original mais restritivo.

Fisicamente, o termo $\alpha\Phi$ representa a contribuição da energia de chaveamento sobre a variação da função de Lyapunov. Essa contribuição é nula em condições ideais de comutação suave, mas passa a ter papel relevante na presença de modos deslizantes ou comutações rápidas, que ocorrem no caso do acionamento do motor com inversor. Assim, o relaxamento introduzido pelo Procedimento–S permite considerar, de forma implícita, esses efeitos de alta frequência no projeto do controlador.

4.6 CRITÉRIO DE ATENUAÇÃO DE DISTÚRBIO $\mathcal{H}_\infty$

A formulação apresentada até este ponto garante a estabilidade assintótica do sistema chaveado na ausência de perturbações externas. Entretanto, em aplicações práticas, o sistema está sujeito a perturbações periódicas e incertezas associadas à dinâmica do vetor z . Para garantir robustez frente a essas variações, adota-se o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, que permite limitar o ganho de energia do distúrbio sobre as variáveis de interesse.

O vetor periódico z descrito pela equação (83) pode ser interpretado como um sinal exógeno que influencia o erro e e o vetor de comutação $\Delta\theta$. Variações em z representam, portanto, distúrbios de natureza harmônica que afetam o comportamento transitório e o desempenho do rastreamento. O objetivo do projeto é atenuar o impacto desses distúrbios, garantindo que a energia total propagada para as variáveis de desempenho seja limitada por um nível especificado $\gamma > 0$.

O critério $\mathcal{H}_\infty$ impõe que a razão entre a energia do vetor de saída e a energia do vetor de distúrbio permaneça abaixo de um limite, conforme estabelecido em (124).

$$\|y\|_2^2 - \gamma \|z\|_2^2 < 0 \quad (124)$$

Na expressão (124), y representa o vetor de variáveis de desempenho e z o vetor de distúrbios. No presente caso, considera-se que o desempenho do sistema está relacionado ao erro de rastreamento e e à variação de chaveamento $\Delta\theta$, de modo que o vetor y é definido conforme a equação (125).

$$y = \begin{bmatrix} e \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (125)$$

Define-se a desigualdade quadrática de desempenho apresentada na condição (126).

$$e^\top e + (\Delta\theta)^\top \Delta\theta - \gamma z^\top z < 0 \quad (126)$$

A desigualdade (126) expressa que a energia combinada das variáveis e e $\Delta\theta$ deve ser inferior à energia do distúrbio z , ponderada por γ . Essa relação pode ser representada de forma matricial, conforme a condição (127), em que ξ é o vetor de estados estendido e Γ_0 é a matriz simétrica especificada em (128).

$$\xi^\top \Gamma_0 \xi < 0 \quad (127)$$

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} \quad (128)$$

Na equação (128), I_n e I_m representam as matrizes identidade de dimensões compatíveis com os vetores e e $\Delta\theta$, respectivamente, enquanto I_{n_z} é a matriz identidade associada ao vetor z . O termo $-\gamma I_{n_z}$ impõe a penalização energética sobre o distúrbio externo.

No entanto, para melhorar o condicionamento numérico e reduzir o conservadorismo na síntese das LMIs, pode-se empregar uma forma mais geral de Γ_0 , substituindo os blocos identidade por uma matriz simétrica positiva definida de decisão $G > 0$, conforme apresentado em (129). Esta reformulação preserva a interpretação de γ como o limite de desempenho, ao mesmo tempo em que introduz graus adicionais de liberdade.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad G \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)} \quad (129)$$

A incorporação do critério $\mathcal{H}_\infty$ ao problema de estabilidade é realizada pela soma matricial das condições obtidas anteriormente. Assim, combinando as condições (123) e (127), obtém-se a desigualdade global de dissipação mostrada em (130).

$$\xi^\top (\Psi + \alpha \Phi + \Gamma) \xi < 0 \quad (130)$$

A condição (130) garante simultaneamente a estabilidade e a atenuação de distúrbios. O parâmetro γ atua como uma variável de desempenho, a ser minimizada durante o processo de síntese LMI.

Para reduzir ainda mais o conservadorismo da condição (130), utiliza-se o lema de Finsler. Este resultado permite projetar a desigualdade sobre o subespaço nulo do operador linear que representa as restrições do sistema. Seja o operador N definido pela equação (131), em que $M = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ é o vetor que impõe a condição de soma unitária dos pesos convexas ($\sum \Delta \theta_i = 0$). Seja também Q uma base do espaço nulo de N , tal que $NQ = 0$.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & M & 0 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Aplicando o lema de Finsler à desigualdade (130), obtém-se a forma reduzida da condição de desempenho, apresentada em (132).

$$Q^\top (\Psi + \alpha \Phi + \Gamma) Q < 0 \quad (132)$$

A desigualdade (132) representa a forma final do critério de estabilidade e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema chaveado. A projeção pelo lema de Finsler elimina redundâncias associadas às restrições convexas, reduzindo o conservadorismo sem comprometer a validade das condições de estabilidade.

4.7 FORMULAÇÃO FINAL DO PROBLEMA LMI

Esta seção apresenta um resumo da formulação de síntese desenvolvida, reunindo em uma única estrutura matricial as condições de estabilidade, relaxamento e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ do sistema chaveado. São mostradas as expressões finais das LMIs e a forma geral do problema de otimização convexa empregado na implementação numérica.

Sejam as matrizes Ψ , Φ e Γ , definidas respectivamente nas equações (117), (122) e (129), reproduzidas a seguir para conveniência e consistência dimensional.

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^\top P + PA & Pb + A^\top T b & TBW \\ (Pb + A^\top T b)^\top & b^\top (T + T^\top) b & 0 \\ (TBW)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (133)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & Tb & 0 \\ b^\top T^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} \quad (135)$$

As variáveis de decisão são as matrizes T , $P = P^\top > 0$ e $G = G^\top > 0$, além dos escalares $\alpha \geq 0$, $\gamma > 0$ e s_T . O termo Ψ representa a condição de decrescimento da função de Lyapunov (considerando a perturbação estruturada z), Φ corresponde ao relaxamento introduzido pelo Procedimento-S, e Γ expressa o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$.

A condição global de estabilidade e desempenho do sistema chaveado é obtida pela combinação dessas matrizes, resultando na condição LMI apresentada em (136), onde Q é uma base ortogonal do espaço nulo do operador N , definido em (131). A projeção $Q^\top(\cdot)Q$ é resultado da aplicação do lema de Finsler, que reduz o conservadorismo da formulação ao eliminar redundâncias lineares associadas à restrição do *simplex* de controle.

$$Q^\top(\Psi + \alpha\Phi + \Gamma)Q < 0, \quad P > 0 \quad (136)$$

A condição (136) constitui a desigualdade principal do projeto da lei de chaveamento. Seu atendimento garante simultaneamente: (i) positividade da função de Lyapunov $V(e, z)$; (ii) decrescimento da energia associada ao erro; e (iii) robustez frente a distúrbios exógenos.

A formulação (136) é tratada de forma politópica, avaliando-se a viabilidade das LMIs em todos os vértices do politopo de operação $\mathcal{P}$, definido em (137).

$$\mathcal{P} = \{(\omega_e, s, c, Z_e) : \omega_e \in \{\omega_{e,\min}, \omega_{e,\max}\}, s \in \{-1, 1\}, c \in \{-1, 1\}, Z_e \in \{0, Z_{\max}\}\} \quad (137)$$

O problema de otimização convexa associado à síntese LMI pode ser resolvido por métodos de ponto interior empregando o pacote *YALMIP* e *solvers* como *SeDuMi* ou *SDPT3*. O atendimento da condição (136) em todos os vértices do politopo $\mathcal{P}$ garante a existência de uma função de Lyapunov comum e de uma lei de chaveamento capaz de assegurar estabilidade global e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema inversor-motor BLAC.

4.8 ARQUITETURA DE CONTROLE

Com a lei de chaveamento definida, se faz necessário estabelecer uma arquitetura de controle para a aplicação dessa estratégia no acionamento do motor BLAC.

4.8.1 Estrutura geral da arquitetura

A estrutura de controle proposta é concebida de modo a incorporar a lei de chaveamento sintetizada por LMIs, assegurando as condições de estabilidade e desempenho obtidas na etapa de projeto. Para tal, adota-se uma organização hierárquica em duas malhas acopladas: uma malha interna de corrente, na qual atua diretamente o controlador chaveado, e uma malha externa de velocidade, responsável por gerar as referências senoidais de corrente a partir da referência de velocidade. Essa configuração garante que a lei de chaveamento opere sobre as variáveis de estado elétricas em um ponto de operação estabelecido pela dinâmica mecânica, mantendo o

e não contribui para o torque eletromagnético. Já a corrente em quadratura i_q é a responsável pela produção de torque e é ajustada de acordo com o valor desejado de T_e^* . As correntes de referência no referencial síncrono são, portanto, definidas conforme a equação (138).

$$i_d^* = 0, \quad i_q^* = \frac{T_e^*}{K_t}. \quad (138)$$

Nessa formulação, K_t representa a constante de torque do motor. As correntes de referência no plano síncrono (i_d^*, i_q^*) são então convertidas para o referencial estacionário (i_α^*, i_β^*) por meio da relação inversa da transformada de Park, apresentada na equação (139) (O'Rourke et al., 2019). O resultado são correntes senoidais defasadas de 90° adequadas à aplicação da lei de chaveamento projetada.

$$\begin{bmatrix} i_\alpha^* \\ i_\beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^* \\ i_q^* \end{bmatrix} \quad (139)$$

Na malha interna, as variáveis de corrente e velocidade medidas compõem o vetor de estado x cujo erro de rastreamento é definido por $e = x - x^*$. A dinâmica em malha fechada é então governada pela lei de chaveamento projetada via LMIs.

Em cada instante de tempo, são avaliadas as funções auxiliares v_i , e o modo ativo é determinado pela lei de chaveamento, selecionando o vetor de tensão que proporciona o maior decréscimo da função de Lyapunov. Um *dwell time*¹ e uma margem de histerese são empregados para limitar a frequência de chaveamento e mitigar o fenômeno de *chattering*.

O sinal de modo σ comanda o estágio de potência do inversor trifásico, que aplica ao estator do motor o vetor de tensão correspondente. O motor BLAC atua como planta controlada, fornecendo as grandezas medidas i_α , i_β e ω_m que realimentam as malhas de controle.

4.8.2 Controlador proporcional da malha externa

A malha externa da arquitetura de controle é responsável por gerar a referência de torque eletromagnético a partir do erro entre a velocidade desejada e a velocidade do rotor. Nesta etapa, adotou-se um controlador proporcional, com o objetivo de simplificar o ajuste de ganhos pelo usuário. Essa estrutura pode ser empregada em acionamentos elétricos industriais quando associada a malhas internas rápidas.

O torque eletromagnético de referência é calculado a partir do erro de velocidade e de uma compensação do torque de carga, conforme a regra de controle apresentada na equação (140).

$$T_e^* = T_L + K_p(\omega^* - \omega) \quad (140)$$

A dinâmica mecânica do motor segue o modelo apresentado anteriormente na equação (70). Considerando que a malha de corrente possui dinâmica significativamente mais rápida

¹ Tempo mínimo de permanência em um modo antes de permitir nova comutação.

que a dinâmica mecânica, pode-se assumir que o torque eletromagnético aplicado segue aproximadamente o torque de referência, isto é, $T_e \approx T_e^*$. Substituindo a regra de controle na dinâmica mecânica obtém-se a dinâmica em malha fechada mostrada na equação (141).

$$J\dot{\omega} = K_p(\omega^* - \omega) - B_v\omega \quad (141)$$

A partir dessa relação pode-se determinar o erro de regime permanente da velocidade. Considerando regime estacionário, i.e., $\dot{\omega} = 0$, obtém-se a expressão apresentada em (142).

$$e_\infty = \omega^* - \omega = \frac{B_v}{K_p + B_v} \omega^* \quad (142)$$

Essa expressão mostra que, para um controlador proporcional puro, o erro estacionário depende diretamente da razão entre o coeficiente de atrito viscoso e o ganho proporcional. Assim, valores pequenos de K_p resultam em erro significativo de seguimento da velocidade de referência.

Para limitar o erro relativo de regime permanente a um valor máximo admissível ε , impõe-se a condição apresentada em (143).

$$\frac{e_\infty}{\omega^*} = \frac{B_v}{K_p + B_v} \leq \varepsilon \quad (143)$$

Isolando o ganho proporcional nessa relação obtém-se o limite mínimo apresentado na expressão (144).

$$K_p \geq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} B_v \quad (144)$$

Impondo erro relativo inferior a 1%, obtém-se aproximadamente $K_p \geq 100B_v$. A partir dessa análise teórica, define-se uma parametrização simples para o ganho proporcional, apresentada na equação (145), com o objetivo de fornecer ao usuário uma orientação prática para o ajuste do ganho da malha externa.

$$K_p = \alpha_p B_v \quad (145)$$

O fator α_p deve ser escolhido dentro do intervalo apresentado em (146).

$$100 \leq \alpha_p \leq 1000 \quad (146)$$

Essa parametrização estabelece uma faixa de ganhos diretamente relacionada ao coeficiente de atrito viscoso do sistema, permitindo reduzir o erro de regime permanente de forma sistemática. Dessa forma, o usuário pode selecionar o valor de K_p dentro do intervalo proposto conforme o compromisso desejado entre suavidade de resposta e precisão no seguimento da velocidade de referência.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta a implementação computacional do controlador chaveado com critério $\mathcal{H}_\infty$ desenvolvido no Capítulo 4 e discute os resultados obtidos em simulação para o acionamento inversor–motor BLAC. São detalhados os parâmetros adotados e os procedimentos numéricos empregados na síntese via LMIs e na simulação em malha fechada, permitindo avaliar o desempenho de seguimento, o comportamento do chaveamento e a robustez da estratégia nas condições de operação consideradas.

5.1 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE

A implementação computacional do controlador requer a definição dos parâmetros da planta, bem como dos valores utilizados na formulação das LMIs e na simulação do sistema em malha fechada. Nesta etapa são apresentados os parâmetros dos motores considerados e os valores adotados no procedimentos numéricos de síntese e validação do método proposto.

5.1.1 Parâmetros do sistema

Com o objetivo de avaliar a arquitetura de controle proposta e a lei de chaveamento sintetizada em diferentes plantas, foram considerados dois motores BLAC com parâmetros obtidos da literatura. Essa escolha permite verificar a funcionalidade do método em casos com características eletromecânicas distintas, mantendo-se a mesma estrutura de síntese e de simulação.

A Tabela 2 apresenta os parâmetros dos motores utilizados na construção do modelo politópico e na simulação dinâmica em malha fechada. Esses parâmetros são empregados nas etapas de modelagem do sistema inversor–motor BLAC e na integração numérica da dinâmica em malha fechada, em particular na formação das matrizes do modelo dependentes do ângulo elétrico $A(c, s)$, no mapeamento da FCEM representado por B_z , na definição dos vetores de tensão disponíveis no inversor trifásico e no cálculo da constante de torque K_t .

Os parâmetros numéricos comuns à síntese LMI, à geração das referências e à simulação discreta são apresentados na Tabela 3. Esses valores são utilizados nas etapas de formulação do problema de otimização, geração das correntes de referência, implementação da lógica de chaveamento e integração numérica da dinâmica do sistema. Como os casos utilizam a mesma arquitetura de controle, esses parâmetros foram mantidos fixos, variando-se apenas os parâmetros da planta. A exceção é o ganho proporcional da malha de velocidade, definido como $K_p = 500B_v$, de modo a preservar a mesma regra de ajuste para todos os motores.

O parâmetro $base_dwell = 100$ foi adotado, com $dt = 10^{-6}$ s, para impor um intervalo mínimo de $100\mu s$ entre comutações sucessivas e, assim, limitar a frequência máxima de chaveamento a aproximadamente 10kHz. Esse valor reduz comutação excessiva e torna a simulação mais compatível com restrições práticas do estágio de potência. A frequência efetiva de chavea-

Tabela 2 – Parâmetros dos motores considerados na síntese e na simulação.

Parâmetro	Símbolo	Motor 1	Motor 2
Tensão do barramento CC	V_{cc} [V]	120 [†]	700
Resistência do estator	R [Ω]	0,50	0,1379
Indutância equivalente	L [mH]	4,5	19,43
Constante de FCEM	K_e [V s/rad]	0,038	0,42675
Número de pares de polos	p	5	3
Momento de inércia	J [kg m ²]	$6,0 \times 10^{-4\ddagger}$	$1,0 \times 10^{-2}$
Coeficiente de atrito viscoso	B_v [N m s/rad]	$5,0 \times 10^{-4\ddagger}$	$5,0 \times 10^{-3\ddagger}$
Torque de carga	T_L [N m]	5	29
Constante de torque	K_t [N m/A]	0,285	1,920
Torque eletromagnético máximo	$T_{e,max}$ [N m]	7 [†]	40 [†]
Referência bibliográfica	–	(Jin et al., 2023)	(Liu et al., 2020)

[†] Parâmetro estimado ou adotado para simulação.

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Parâmetros comuns da síntese LMI e da simulação.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Limite inferior de velocidade mecânica	$\omega_{m,min}$ [rad/s]	-300
Limite superior de velocidade mecânica	$\omega_{m,max}$ [rad/s]	300
Parâmetro de relaxação	α	1
Tolerância numérica das LMIs	ϵ_{PSD}	10^{-5}
Limite superior imposto a P	P_{max}	50
Limite auxiliar de T_{11}	T_{max}	10
Ganho proporcional da malha de velocidade	K_p	$500 B_v$
Fator do filtro de torque	α_T	0,95
Tempo mínimo de permanência	$base_dwell$ [amostras]	100
Margem de histerese	$margin$	10^{-6}
Limite de saturação de corrente	I_{sat} [A]	100
Passo de integração	dt [s]	10^{-6}
Tempo total de simulação	T_{sim} [s]	2
Parser de modelagem	–	<i>YALMIP</i>
Solver de otimização	–	<i>SeDuMi</i>

Fonte: Próprio autor.

mento, entretanto, permanece variável, pois a troca de modo depende da lei de chaveamento e da margem de histerese.

Nos casos em que a referência bibliográfica original apresenta indutâncias em eixos d e q , adota-se a indutância equivalente $L = (L_d + L_q)/2$, em concordância com o modelo considerado nesta dissertação. Além disso, a constante de torque é calculada por $K_t = \frac{3}{2}pK_e$, conforme

empregado nos algoritmos de construção do modelo e de geração das referências. Dessa forma, os parâmetros apresentados estabelecem a base numérica utilizada em toda a etapa de síntese e validação do controlador proposto.

5.1.2 Procedimento computacional de síntese e simulação

A implementação numérica do método proposto é organizada em uma sequência estruturada de etapas que reproduzem, em ambiente computacional, o procedimento teórico apresentado no Capítulo 4. O objetivo dessa etapa é permitir a obtenção das matrizes de síntese por meio de LMIs, bem como a validação do controlador chaveado em simulação dinâmica do sistema inversor–motor BLAC.

O procedimento completo é dividido em cinco etapas principais: construção do modelo politópico utilizado na síntese; resolução do problema de otimização LMI; geração das referências de corrente a partir da referência de velocidade; implementação da lei de chaveamento baseada na função de Lyapunov; e simulação discreta do sistema em malha fechada. Cada uma dessas etapas é descrita a seguir por meio de pseudocódigos, apresentados de forma a facilitar a reprodução do método.

Inicialmente, constrói-se o modelo politópico utilizado na formulação da síntese. Essa etapa consiste na definição das matrizes do sistema e na determinação dos vértices que caracterizam o domínio de operação considerado. Em particular, são definidos os vetores de entrada correspondentes aos seis modos ativos do inversor trifásico, bem como suas versões normalizadas utilizadas na formulação da lei de chaveamento. Em seguida, são determinados os vértices associados às variáveis que caracterizam a não linearidade do modelo, incluindo os termos dependentes do ângulo elétrico do rotor, representados pelas variáveis $s = \sin \theta_e$ e $c = \cos \theta_e$, e os limites da velocidade elétrica. Também são definidos os vértices associados ao termo de referência Z , relacionado ao torque eletromagnético máximo considerado na síntese. O resultado dessa etapa é o conjunto de matrizes que definem o politopo de operação empregado na formulação das LMIs. O procedimento correspondente é apresentado no Algoritmo 1.

Uma vez definidos os vértices do modelo politópico, procede-se à síntese das matrizes de ganho do controlador por meio da resolução do problema de otimização convexa associado à formulação LMI apresentada no Capítulo 4. Nessa etapa são declaradas as variáveis de decisão do problema, incluindo a matriz de Lyapunov P , a matriz auxiliar T , e as variáveis associadas ao critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Para cada combinação de vértices do politopo, são construídas as matrizes Ψ e Φ , que representam respectivamente a condição de decrescimento da função de Lyapunov e o termo de relaxamento introduzido pelo Procedimento-S. Em seguida, essas matrizes são combinadas com o termo de desempenho Γ e projetadas no subespaço definido pelo operador Q , conforme estabelecido pelo lema de Finsler. A viabilidade das desigualdades matriciais resultantes é verificada em todos os vértices do politopo, garantindo a existência de uma função de Lyapunov comum para o sistema chaveado. O problema é então resolvido por meio de um *solver* de programação semidefinida, obtendo-se as matrizes P e T que definem a lei

Algoritmo 1 – Construção do modelo politópico do sistema

```

1: dados  $(R, L, K_e, p, J, B_v), V_{cc}$ , limites  $(\omega_{m,\min}, \omega_{m,\max}, T_{e,\max})$ 
2: função CONSTROIPOLOPOS( $R, L, K_e, p, J, B_v, V_{cc}, \omega_{m,\min}, \omega_{m,\max}, T_{e,\max}$ )
3:    $K_t \leftarrow \frac{3}{2} p K_e$ 
4:   Definir vetores de tensão do inversor  $u_j \in \mathbb{R}^2$  para  $j = 1 \dots 6$ 
5:   para  $j \leftarrow 1$  até 6 faça
6:      $b_{phys}(1:2, j) \leftarrow \frac{2}{3L} u_j, \quad b_{phys}(3, j) \leftarrow 0$ 
7:      $d_j \leftarrow \max(10^{-9}, \|b_{phys}(:, j)\|)$ 
8:      $b(:, j) \leftarrow b_{phys}(:, j)/d_j$ 
9:    $\mathcal{V} \leftarrow \{(c, s) : c \in \{-1, 1\}, s \in \{-1, 1\}\}$ 
10:  para todo  $(c, s) \in \mathcal{V}$  faça
11:     $A(c, s) \leftarrow \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & -R/L & 0 \\ -(K_t/J)s & +(K_t/J)c & -B_v/J \end{bmatrix}$ 
12:    Armazenar  $A(c, s)$  em  $\{A_v\}$ 
13:   $\Omega_m \leftarrow \{\omega_{m,\min}, \omega_{m,\max}\}$ 
14:  para todo  $\omega_m \in \Omega_m$  faça
15:     $\omega_e \leftarrow p \omega_m$ 
16:     $W(\omega_e) \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e \\ \omega_e & 0 \end{bmatrix}$ 
17:    Armazenar  $W(\omega_e)$  em  $\{W_k\}$ 
18:   $B_z \leftarrow \begin{bmatrix} (K_e/L)I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
19:   $I_{set} \leftarrow \{0, T_{e,\max}/K_t\}$ 
20:  para todo  $I \in I_{set}$  faça
21:     $Z \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
22:    Armazenar  $Z$  em  $\{Z_\ell\}$ 
23:  retorna  $\{A_v\}, \{W_k\}, \{Z_\ell\}, B_z, b_{phys}, b, d, K_t$ 

```

de chaveamento. Essa etapa é descrita no Algoritmo 2.

Com as matrizes do controlador determinadas, passa-se à implementação da arquitetura de controle descrita no Capítulo 4. A primeira etapa dessa arquitetura corresponde à geração das referências de corrente a partir da referência de velocidade mecânica do motor. O erro entre a velocidade de referência ω_m^* e a velocidade medida ω_m é processado pelo controlador responsável por gerar o torque eletromagnético de referência. Esse torque é combinado com um termo de compensação associado ao torque de carga e pode ser filtrado por um elemento de primeira ordem, cuja função é limitar variações abruptas na referência. A partir do torque desejado, calcula-se a corrente de referência no eixo de quadratura i_q^* , mantendo-se a corrente de eixo direto nula, conforme a estratégia clássica de controle vetorial para motores BLAC. Finalmente, as correntes de referência são transformadas para o referencial estacionário ($\alpha\beta$) por meio da transformada inversa de Park, utilizando o vetor de orientação $z = [\cos \theta_e, \sin \theta_e]^\top$.

Algoritmo 2 – Síntese LMI por vértices para obtenção de P e T

```

1: dados  $\{A_v\}, \{W_k\}, \{Z_\ell\}, B_z, b, \alpha, \varepsilon_{PSD}$ 
2: função SINTESELMI( $\{A_v\}, \{W_k\}, \{Z_\ell\}, B_z, b, \alpha, \varepsilon_{PSD}$ )
3:   Declarar variáveis:  $P = P^\top > 0, T = \text{diag}(T_{11}, 0), G = G^\top > 0, \gamma \geq 0$ 
4:    $Q \leftarrow \text{null}([0 \ 1 \ 0])$ 
5:    $\Gamma \leftarrow \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$ 
6:   para todo  $A \in \{A_v\}, W \in \{W_k\}, Z \in \{Z_\ell\}$  faça
7:      $B \leftarrow AZ + (B_z - Z)W$ 
8:      $\Psi \leftarrow \begin{bmatrix} A^\top P + PA & Pb + A^\top Tb & TB \\ b^\top P + b^\top T^\top A & b^\top (T + T^\top)b & 0 \\ B^\top T^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
9:      $\Phi \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & Tb & 0 \\ b^\top T^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
10:    Impor  $Q^\top (\Psi + \alpha \Phi + \Gamma + \Gamma^\top) Q \leq \varepsilon_{PSD} I$ 
11:    Minimizar  $\gamma$  sujeito às LMIs (solver SeDuMi)
12:    retorna  $P^*, T^*$ 

```

O procedimento computacional correspondente é apresentado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3 – Geração das referências $\omega_m^* \rightarrow T_e^* \rightarrow i_{\alpha\beta}^*$

```

1: dados  $T_L, K_p, T_{e,\max}, K_t, i_{q,\max}, \alpha_T$ 
2: função GERAREFERENCIAS( $\omega_m^*, \omega_m, z, T_e^*$ )
3:    $e_\omega \leftarrow \omega_m^* - \omega_m$ 
4:    $T_{e,d} \leftarrow \text{sat}(T_L + K_p e_\omega, \pm T_{e,\max})$ 
5:    $T_e^* \leftarrow \alpha_T T_e^* + (1 - \alpha_T) T_{e,d}$ 
6:    $i_q^* \leftarrow \text{sat}(T_e^* / K_t, \pm i_{q,\max})$ 
7:    $i_d^* \leftarrow 0$ 
8:    $c \leftarrow z_1, s \leftarrow z_2$ 
9:    $i_\alpha^* \leftarrow i_d^* c - i_q^* s$ 
10:   $i_\beta^* \leftarrow i_d^* s + i_q^* c$ 
11:  retorna  $i_\alpha^*, i_\beta^*, T_e^*$ 

```

A partir das correntes de referência obtidas, calcula-se o erro de rastreamento do sistema e aplica-se a lei de chaveamento projetada via LMIs. Em cada instante de amostragem, são avaliadas as funções auxiliares v_i , associadas a cada vetor de tensão disponível no inversor e à energia generalizada de cada modo de operação. O modo ativo é então selecionado segundo o critério *arg max*, isto é, ativa-se o modo associado ao maior valor entre essas funções. Como a função de Lyapunov candidata é definida a partir do máximo das funções auxiliares, essa escolha equivale a atuar sobre o ramo de maior energia instantânea, favorecendo sua dissipação e conduzindo o sistema em direção ao equilíbrio. Para evitar comutações excessivas e reduzir o fenômeno de *chattering*, a implementação incorpora duas estratégias adicionais: um *dwell*

time e uma margem de histerese na comparação entre os valores das funções auxiliares. Essas medidas limitam a frequência de chaveamento e contribuem para um comportamento mais suave do sistema em malha fechada. A implementação dessa lógica de seleção de modos é apresentada no Algoritmo 4.

Algoritmo 4 – Lei de chaveamento (*arg max* com *dwell time*)

```

1: dados  $T, \{b_{phys}(:, j)\}, \{d_j\}, base\_dwell, margin$ 
2: função SELECIONAMODO( $e, \sigma_{old}, dwell\_ctr$ )
3:   para  $j \leftarrow 1$  até 6 faça
4:      $v_j \leftarrow \frac{2}{d_j} e^\top (T b_{phys}(:, j))$ 
5:    $j_{best} \leftarrow \arg \max_j v_j$ 
6:   se  $dwell\_ctr \geq base\_dwell$  então
7:     se  $j_{best} \neq \sigma_{old}$  e  $v_{j_{best}} - v_{\sigma_{old}} > margin$  então
8:        $\sigma \leftarrow j_{best}, dwell\_ctr \leftarrow 0$ 
9:     senão
10:       $\sigma \leftarrow \sigma_{old}$ 
11:   senão
12:      $\sigma \leftarrow \sigma_{old}$ 
13:    $dwell\_ctr \leftarrow dwell\_ctr + 1$ 
14:   retorna  $\sigma, dwell\_ctr$ 

```

Por fim, realiza-se a simulação dinâmica do sistema chaveado em tempo discreto. O modelo utilizado corresponde à dinâmica não linear do conjunto inversor–motor BLAC descrita anteriormente, integrada numericamente por meio do método de Euler explícito. Em cada passo de simulação são executadas as seguintes operações: atualização das referências de corrente a partir da referência de velocidade, cálculo do erro de rastreamento, seleção do modo ativo do inversor pela lei de chaveamento e integração das equações diferenciais do sistema. A evolução do vetor z , que representa a orientação elétrica do rotor, é obtida por meio da dinâmica $\dot{z} = W(\omega_e)z$, sendo a velocidade elétrica calculada a partir da velocidade mecânica por meio da relação $\omega_e = p \omega_m$. Após cada passo de integração, o vetor z é normalizado para preservar sua interpretação geométrica como vetor unitário associado ao ângulo elétrico do rotor. O procedimento completo de simulação em malha fechada é apresentado no Algoritmo 5.

A sequência de algoritmos apresentada fornece um roteiro completo para a implementação do método proposto, desde a construção do modelo politópico até a validação do controlador em simulação. Dessa forma, o procedimento computacional reproduz fielmente as etapas teóricas do projeto, permitindo a obtenção das matrizes de síntese e a verificação do desempenho do sistema chaveado em diferentes condições de operação.

Algoritmo 5 – Simulação discreta do sistema chaveado

```

1: dados  $dt, T_{sim}, p, R, L, J, B_v, K_t, B_z, T_L, I_{sat}, \{b_{phys}(:, j)\}$ 
2: função SIMULASISTEMA( $x[0], z[0], \omega_m^*[k]$ )
3:    $N_t \leftarrow T_{sim}/dt$ 
4:    $\sigma_{old} \leftarrow 1, dwell\_ctr \leftarrow base\_dwell$ 
5:    $T_e^* \leftarrow 0$ 
6:   para  $k \leftarrow 0$  até  $N_t - 1$  faça
7:      $c \leftarrow z_1[k], s \leftarrow z_2[k]$ 
8:      $\omega_m \leftarrow x_3[k], \omega_e \leftarrow p \omega_m$ 
9:      $(i_\alpha^*, i_\beta^*, T_e^*) \leftarrow GERAREFERENCIAS(\omega_m^*[k], \omega_m, z[k], T_e^*)$ 
10:     $e \leftarrow [x_1[k] - i_\alpha^*, x_2[k] - i_\beta^*, x_3[k] - \omega_m^*[k]]^\top$ 
11:     $(\sigma, dwell\_ctr) \leftarrow SELECIONAMODO(e, \sigma_{old}, dwell\_ctr)$ 
12:     $\sigma_{old} \leftarrow \sigma$ 
13:     $u \leftarrow b_{phys}(:, \sigma)$ 
14:     $A \leftarrow \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & -R/L & 0 \\ -(K_t/J)s & +(K_t/J)c & -B_v/J \end{bmatrix}$ 
15:     $W \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e \\ \omega_e & 0 \end{bmatrix}$ 
16:     $\dot{x} \leftarrow Ax[k] + u + B_z W z[k] + [0, 0, -T_L/J]^\top$ 
17:     $\dot{z} \leftarrow W z[k]$ 
18:     $x[k+1] \leftarrow x[k] + dt \dot{x}$ 
19:     $z[k+1] \leftarrow z[k] + dt \dot{z}$ 
20:     $z[k+1] \leftarrow z[k+1] / \max(1, \|z[k+1]\|)$ 
21:     $x_1[k+1] \leftarrow \text{sat}(x_1[k+1], \pm I_{sat}), \quad x_2[k+1] \leftarrow \text{sat}(x_2[k+1], \pm I_{sat})$ 
22:  retorna  $\{x[k]\}, \{z[k]\}, \{\sigma[k]\}$ 

```

5.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO

Esta seção discute o comportamento dinâmico do sistema inversor–motor BLAC em malha fechada a partir dos resultados de simulação obtidos para os motores 1 e 2. A análise é conduzida com foco no seguimento da referência de velocidade, no rastreamento senoidal das correntes no referencial estacionário $\alpha\beta$, na resposta do torque eletromagnético e no padrão de chaveamento imposto pela lei de controle. Em conjunto, essas respostas permitem avaliar não apenas a estabilidade e a qualidade do seguimento, mas também os desdobramentos físicos da estratégia proposta sobre o estágio de potência e sobre a dinâmica eletromecânica do acionamento.

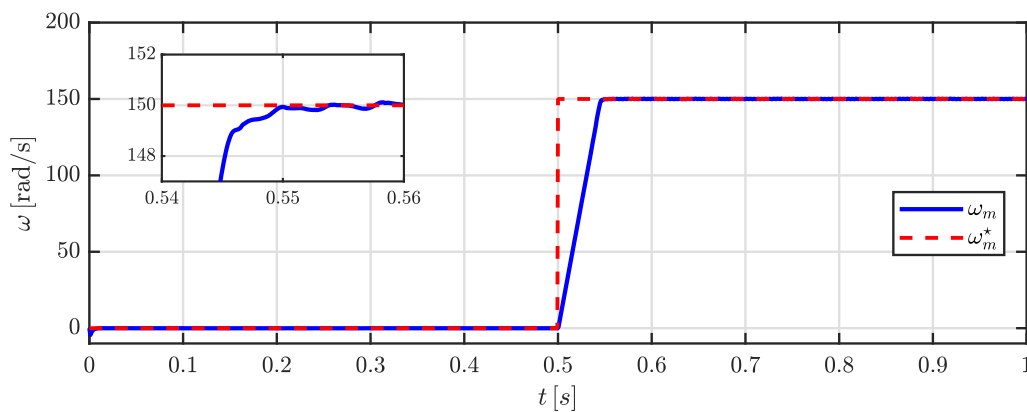
A referência máxima de velocidade considerada nos ensaios corresponde a 150 rad/s, isto é, aproximadamente 1432 rpm. No caso do perfil em rampa, a velocidade parte de 20 rad/s, aproximadamente 191 rpm, permanecendo inicialmente em um patamar baixo antes da aceleração até o valor final. A inclusão do ensaio com degrau foi mantida por se tratar de uma excitação clássica em sistemas de controle, útil para evidenciar tempo de resposta, sobressinal e amortecimento. Entretanto, como o objetivo principal da dissertação é o seguimento de referências senoidais em

operação variável, os resultados subsequentes são discutidos principalmente com base no perfil contendo degrau inicial seguido de rampa de velocidade.

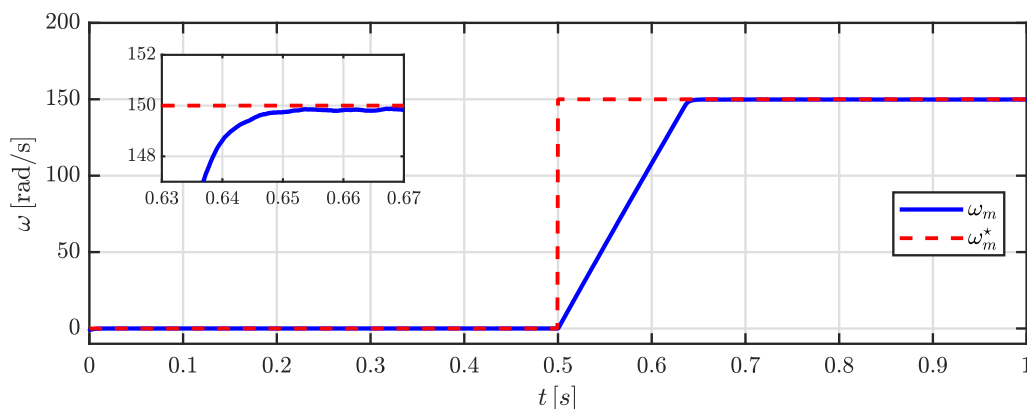
A Figura 10 apresenta a resposta da velocidade mecânica para uma referência em degrau. Em ambos os motores observa-se uma evolução praticamente linear da velocidade até a proximidade do valor de regime, com sobressinal desprezível. Esse comportamento é coerente com a estrutura da malha externa adotada, pois diante de um erro elevado de velocidade, o torque de referência tende inicialmente à saturação, fazendo com que a aceleração mecânica se aproxime de um valor quase constante. Como a dinâmica mecânica é descrita por $J\dot{\omega}_m = T_e - B_v\omega_m - T_L$, uma aceleração aproximadamente constante resulta, de forma direta, em uma rampa quase retilínea para a velocidade. O caráter quase linear da resposta não deve, portanto, ser interpretado como limitação do método, mas como consequência natural da combinação entre saturação do torque de referência e integração mecânica da máquina.

Figura 10 – Resposta da velocidade mecânica a um degrau de referência para os motores 1 e 2.

São apresentadas a velocidade mecânica ω_m e sua referência ω_m^* .



(a) Motor 1.



(b) Motor 2.

Fonte: Próprio autor.

Ainda na Figura 10, nota-se que o motor 2 exige um intervalo maior para atingir a referência quando comparado ao motor 1. Essa diferença é fisicamente consistente com os parâmetros das plantas. Embora o motor 2 disponha de maior torque máximo, ele também

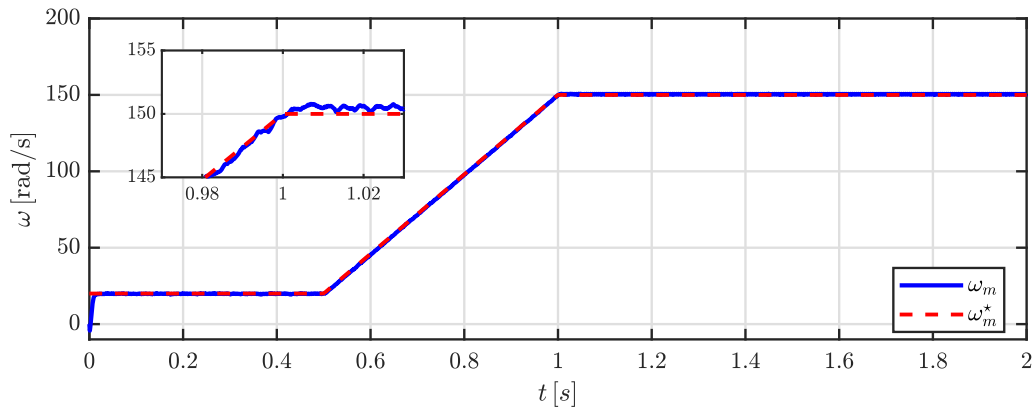
opera com torque de carga substancialmente maior e, principalmente, com momento de inércia muito superior. Em uma análise simplificada da fase inicial, a aceleração disponível pode ser aproximada por $(T_{e,\max} - T_L)/J$, o que conduz a um valor significativamente mais alto para o motor 1. Isso explica por que o motor 1 acelera mais rapidamente, enquanto o motor 2 apresenta uma resposta mais lenta, porém mais suave. Além disso, o motor 2 possui maior constante de tempo elétrica, o que contribui para atenuar componentes de alta frequência e torna sua resposta visualmente menos ruidosa.

A Figura 11 mostra a resposta da velocidade para o perfil composto por um pequeno degrau inicial e, em seguida, uma rampa até 150 rad/s. Observa-se que ambos os motores acompanham adequadamente a referência, com pequeno atraso nas transições e sem perda de estabilidade durante a aceleração. Esse resultado é compatível com a arquitetura adotada, na qual a malha externa proporcional gera a referência de torque a partir do erro de velocidade, incorpora uma compensação *feedforward* do torque de carga e ainda aplica um filtro de primeira ordem à variável T_e^* . Em consequência, a resposta da velocidade não é idealmente coincidente com a referência em rampa, pois existe um compromisso deliberado entre rapidez, suavização da ação de controle e limitação de oscilações de alta frequência. Como não há ação integral na malha de velocidade, um erro estacionário teórico não nulo é esperado, porém, com a escolha $K_p = 500 B_v$, esse erro torna-se muito pequeno, o que é coerente com a proximidade observada entre ω_m e ω_m^* em regime.

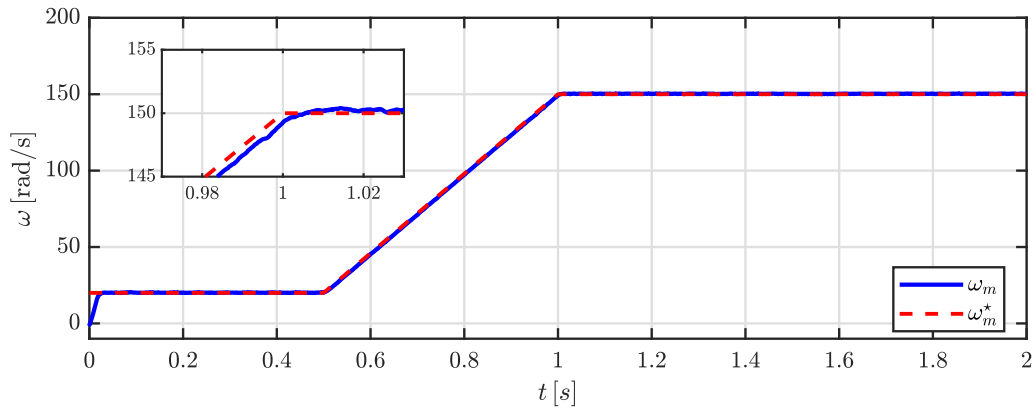
A Figura 12 apresenta as correntes i_α e i_β e suas respectivas referências. A escolha do referencial $\alpha\beta$ é particularmente apropriada neste trabalho, pois a síntese da lei de chaveamento e a formulação do erro dinâmico foram desenvolvidas nesse espaço de estados. Como a transformação de Clarke preserva a equivalência energética no subespaço trifásico balanceado, o bom seguimento em $\alpha\beta$ implica, sob as hipóteses adotadas, um comportamento trifásico equivalente em abc . Em outras palavras, não se trata de uma visualização arbitrária, o desempenho mostrado nesse referencial está diretamente ligado à variável efetivamente utilizada pelo controlador.

Os resultados da Figura 12 são centrais para a dissertação, pois mostram que a lei de chaveamento é capaz de impor o seguimento de referências senoidais mesmo sem o uso de moduladores PWM convencionais. As correntes medidas acompanham suas referências com boa aderência, permanecendo apenas uma ondulação de alta frequência ao redor do sinal desejado, típica de estratégias de chaveamento direto no estágio de potência. Também se observa que a frequência das correntes cresce ao longo da simulação, como consequência direta do aumento da velocidade elétrica do rotor, enquanto a amplitude varia conforme a exigência de torque da malha externa. Além disso, para uma mesma rotação mecânica, o motor 1 apresenta frequências de corrente mais elevadas que o motor 2, o que se explica pelo maior número de pares de polos. Como a velocidade elétrica satisfaz $\omega_e = p \omega_m$, o motor 1, com $p = 5$, opera com frequência elétrica superior à do motor 2, com $p = 3$, para o mesmo valor de ω_m . O pico no primeiro ciclo está associado ao transitório inicial de estabelecimento do torque e do ciclo periódico de corrente. Após essa fase, o sistema converge para um regime de oscilação bem definido, em que

Figura 11 – Resposta da velocidade mecânica a um perfil de referência composto por degrau inicial e rampa para os motores 1 e 2. São apresentadas a velocidade mecânica ω_m e sua referência ω_m^* .



(a) Motor 1.



(b) Motor 2.

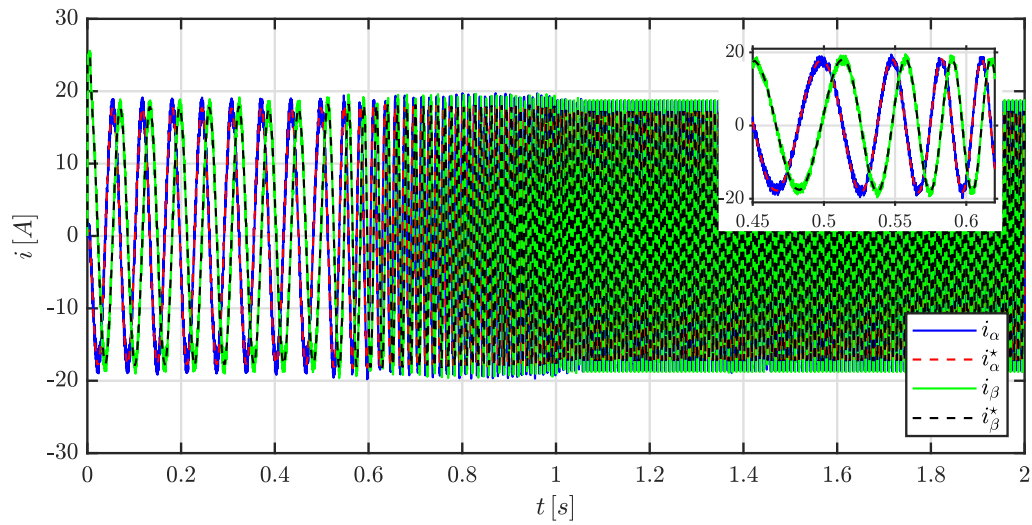
Fonte: Próprio autor.

as correntes permanecem limitadas e próximas de suas referências.

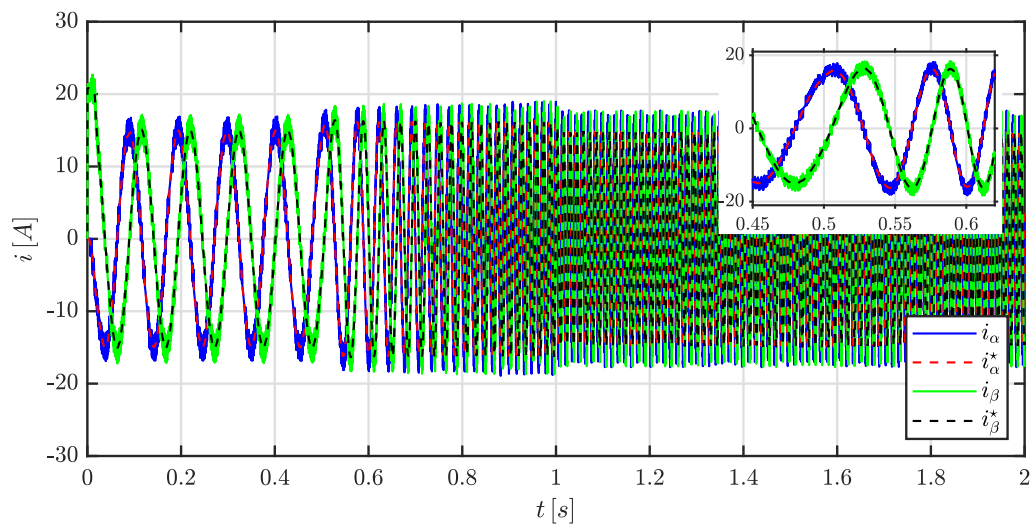
A Figura 13 apresenta o torque eletromagnético e sua referência. O valor médio do torque acompanha adequadamente T_e^* , confirmando a coerência entre a malha de velocidade, a geração de correntes de referência e a ação do controlador chaveado. O pico inicial é esperado, pois no instante de partida o acionamento precisa simultaneamente vencer o torque resistente, acelerar o rotor e estabelecer o regime periódico das correntes. Em regime, permanece uma ondulação significativa de torque ao redor do valor médio. Esse comportamento é compatível com a própria natureza do controle por chaveamento direto, no qual as tensões aplicadas ao estator pertencem a um conjunto finito de vetores e, por isso, a corrente e o torque não permanecem estritamente contínuos mesmo quando o seguimento médio é adequado.

Do ponto de vista físico, é importante distinguir o torque eletromagnético instantâneo do efeito mecânico efetivamente percebido na velocidade do eixo. Pela dinâmica rotacional da máquina, a inércia do conjunto rotor-carga atua como filtro passa-baixas entre o torque eletromagnético pulsante e a velocidade mecânica. Assim, parte relevante da ondulação de alta

Figura 12 – Seguimento das correntes de referência no referencial estacionário $\alpha\beta$ para os motores 1 e 2. São apresentadas as correntes i_α e i_β e suas respectivas referências.



(a) Motor 1.



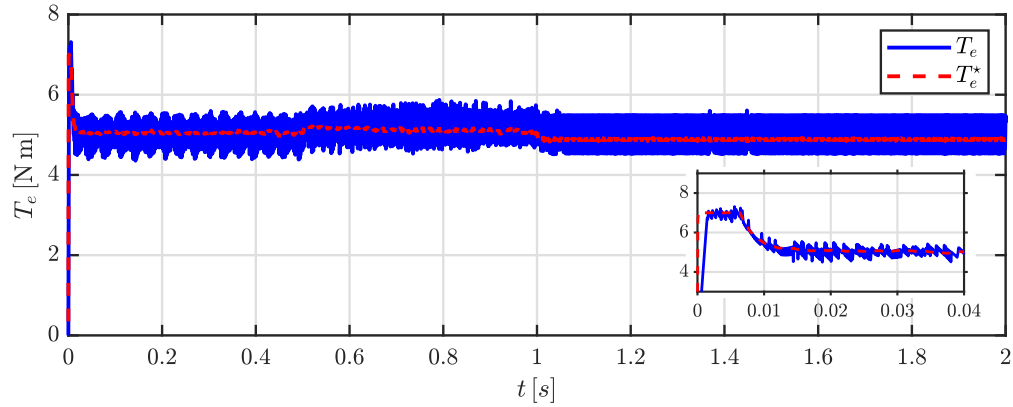
(b) Motor 2.

Fonte: Próprio autor.

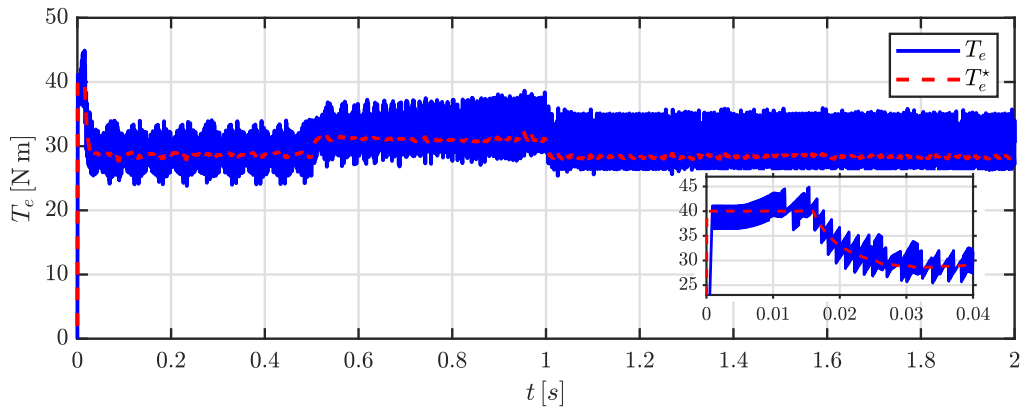
frequência observada em T_e é absorvida pelo armazenamento de energia cinética e não se traduz diretamente em ondulação proporcional de velocidade. Essa interpretação é particularmente importante para o motor 2, no qual os níveis absolutos de torque são mais elevados, mas a velocidade permanece visualmente mais suave devido à maior inércia. Em aplicações reais, esse aspecto deve ser considerado em conjunto com a sensibilidade da carga mecânica e o *ripple* de torque, vibração torsional e ruído acústico.

A Figura 14 mostra a evolução temporal do modo ativo do inversor. Cada valor inteiro de $\sigma(t)$ corresponde a um dos seis vetores ativos de tensão disponíveis no inversor trifásico de dois níveis. O aspecto preenchido da imagem no intervalo completo de simulação apenas reflete a alta taxa de atualização do chaveamento e, por isso, a janela ampliada é a visualização realmente

Figura 13 – Resposta do torque eletromagnético para os motores 1 e 2 sob o perfil de velocidade composto por degrau inicial e rampa. São apresentados o torque eletromagnético T_e e sua referência T_e^* .



(a) Motor 1.



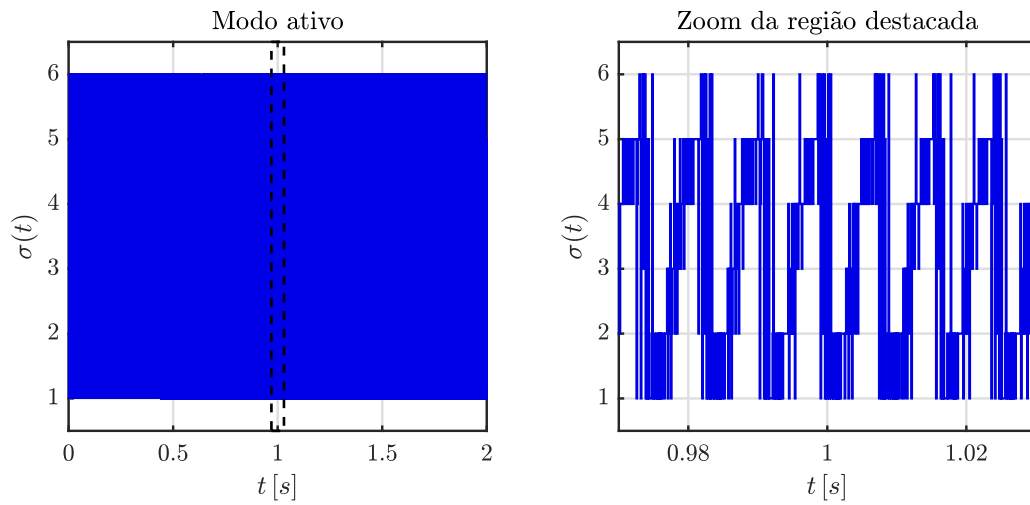
(b) Motor 2.

Fonte: Próprio autor.

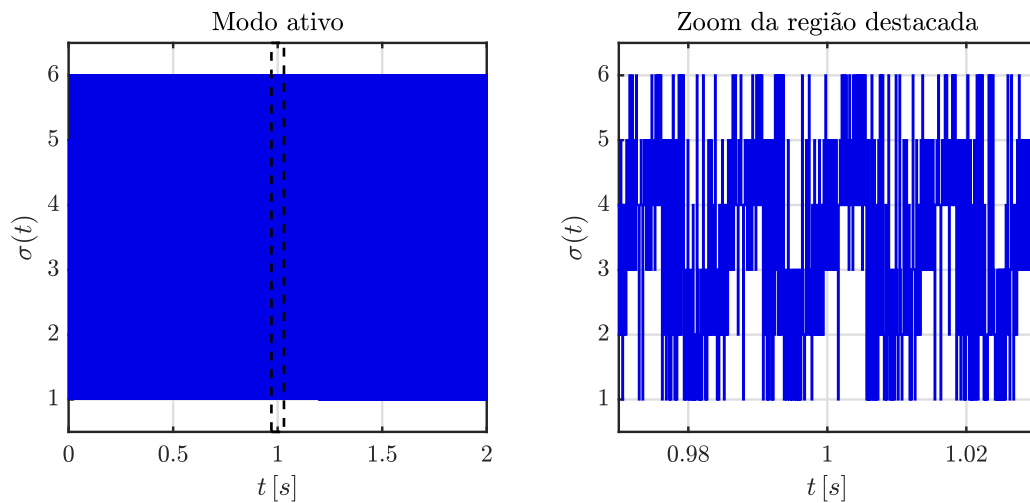
informativa. Nela, observa-se uma alternância rápida entre diferentes modos, com um padrão aproximadamente periódico, porém não rigidamente regular como em técnicas baseadas em portadora fixa. Isso ocorre porque o modo ativo não é imposto por uma modulação externa, mas pela própria lei de chaveamento, que seleciona em cada instante o vetor de tensão mais favorável à redução da função de Lyapunov candidata.

Esse ponto merece destaque do ponto de vista de eletrônica de potência. Como a lógica de comutação é do tipo *arg max*, o chaveamento é orientado pelo erro de rastreamento e pela geometria das superfícies de decisão, e não por uma sequência previamente programada como em PWM senoidal ou *space vector modulation* (SVM). O *dwell time* introduzido na implementação limita a frequência máxima de comutação, mas não impõe uma frequência fixa. Com $dt = 10^{-6}$ s e $base_dwell = 100$, o menor intervalo possível entre duas mudanças de modo é de 100 μ s, o que corresponde a um teto de aproximadamente 10 kHz. Contudo, se o critério de chaveamento indicar a permanência no mesmo modo, nenhuma nova comutação física ocorre, de modo que a frequência efetiva de chaveamento é variável e inferior a esse limite. Essa característica tende a

Figura 14 – Evolução temporal do modo ativo do inversor para os motores 1 e 2 sob o perfil de velocidade composto por degrau inicial e rampa. À direita, apresenta-se uma ampliação da sequência de comutação.



(a) Motor 1.



(b) Motor 2.

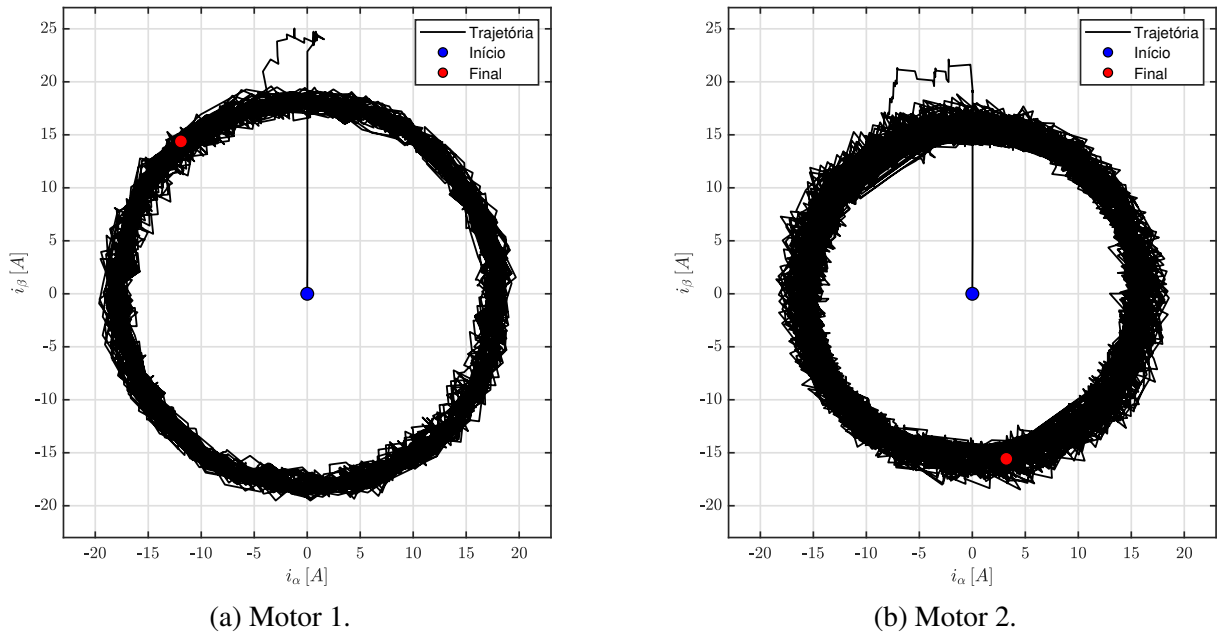
Fonte: Próprio autor.

produzir distribuição não uniforme do número de comutações entre os semicondutores, o que pode levar a assimetrias de perdas entre braços do inversor, aspecto relevante para o projeto.

A Figura 15 apresenta a trajetória das correntes no plano de estados (i_α, i_β) . Após partir da origem, a trajetória exibe um transitório inicial mais pronunciado, seguido da convergência para um ciclo limite aproximadamente circular. Esse resultado é exatamente o comportamento esperado quando o objetivo de controle não é estabilizar um ponto de equilíbrio constante, mas seguir uma referência senoidal periódica. Nesse caso, o atrator em malha fechada deixa de ser um ponto e passa a ser uma órbita fechada. O raio desse ciclo limite está diretamente relacionado à amplitude da corrente requerida para produzir o torque desejado. Isso também explica a diferença entre os motores, pois apesar de o motor 2 operar com torque muito superior, sua constante de torque também é muito maior, de modo que a corrente necessária em regime não cresce

na mesma proporção. Já o motor 1, com menor constante de torque, exige uma amplitude de corrente relativamente mais alta, o que se reflete em uma órbita de maior raio no plano $\alpha\beta$. Além disso, o ponto final exibido em cada trajetória corresponde ao estado do sistema no instante final da simulação, em $t = 2$ s.

Figura 15 – Trajetória das correntes no plano (i_α, i_β) para os motores 1 e 2 durante o seguimento senoidal em regime transitório e permanente.



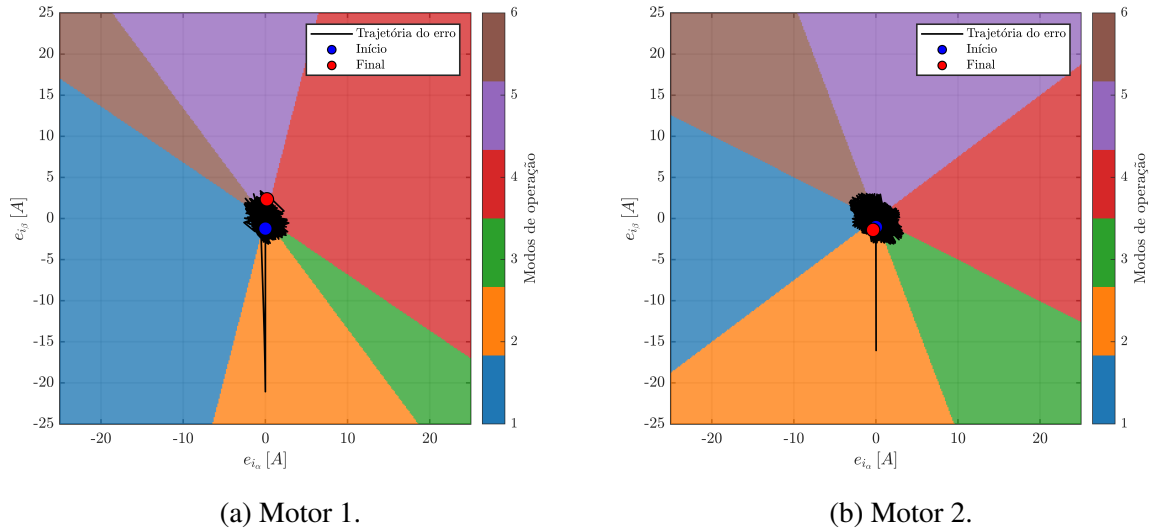
Fonte: Próprio autor.

A forma aproximadamente circular da trajetória na Figura 15 também possui interpretação física relevante. Como as referências de corrente são senoidais, ortogonais e com mesma amplitude em α e β , a trajetória ideal no plano é um círculo. Uma elipse surgiria caso houvesse desequilíbrio entre as amplitudes das componentes, erro sistemático de fase, assimetria de parâmetros, saturações diferentes entre eixos ou perturbações trifásicas que rompessem a simetria assumida pela modelagem (Gubarevych et al., 2023). O fato de as trajetórias permanecerem próximas de circunferências reforça que o seguimento senoidal foi preservado de forma coerente com a formulação do problema.

Por fim, a Figura 16 apresenta a trajetória do erro de corrente sobreposta às regiões de decisão da lei de chaveamento. Trata-se de um resultado especialmente elucidativo, porque mostra geometricamente como o controlador opera. Como a lei de chaveamento é definida pela maximização de funções auxiliares associadas aos modos do inversor, o espaço do erro é particionado em regiões nas quais um determinado modo tende a ser o mais favorável. A trajetória parte de um erro inicial mais elevado, atravessa regiões distintas durante o transitório e, depois, passa a circundar a vizinhança da origem, o que é compatível com a operação em torno de erro pequeno durante o seguimento da referência senoidal.

As fronteiras observadas na Figura 16 possuem caráter aproximadamente radial, convergindo para a origem, o que é coerente com uma lei de chaveamento dependente do erro. Quando

Figura 16 – Trajetória do erro no plano $(e_{i_\alpha}, e_{i_\beta})$ e regiões de operação associadas à lei de chaveamento para os motores 1 e 2.



Fonte: Próprio autor.

a trajetória do erro cruza uma dessas fronteiras, a dinâmica instantânea aplicada ao sistema é alterada pelo acionamento de outro vetor de tensão. Em uma formulação ideal, a permanência exata sobre a fronteira caracterizaria um modo deslizante. Na implementação prática, contudo, a presença de *dwell time* e histerese evita comutações infinitamente rápidas, fazendo com que a trajetória permaneça em torno das fronteiras sem aderência idealizada. Também é relevante notar que a partição do espaço do erro não é igual para os dois motores. No motor 2, as regiões são visualmente mais uniformes, enquanto no motor 1 algumas regiões aparecem mais estreitas. Isso decorre do fato de que as superfícies de decisão dependem das matrizes sintetizadas para a planta e dos vetores de entrada do inversor normalizados. Como os parâmetros elétricos, mecânicos e de atuação diferem entre os motores, a geometria resultante da lei de chaveamento também se altera. Em termos práticos, regiões menores significam que aquele modo tende a ser ativado em uma faixa mais restrita do espaço de erro.

Em síntese, os resultados mostram que a estratégia proposta foi capaz de estabilizar o acionamento e garantir bom seguimento das referências senoidais de corrente para duas plantas com características distintas. As respostas de velocidade apresentaram baixo sobressinal e pequeno erro de regime, as correntes acompanharam satisfatoriamente suas referências em $\alpha\beta$, o torque eletromagnético manteve valor médio compatível com a demanda mecânica e a lei de chaveamento operou de forma coerente com a formulação em LMIs. Esses resultados indicam que o controle chaveado com critério $\mathcal{H}_\infty$ é adequado ao acionamento de motores BLAC com seguimento de referências senoidais.

5.3 AVALIAÇÃO DE ROBUSTEZ

Esta seção apresenta uma avaliação complementar da robustez do controle proposto, considerando apenas o motor 1 e uma referência de velocidade constante de 150 rad/s. São analisados dois cenários: uma variação abrupta do torque de carga e uma redução da constante de força contraeletromotriz K_e , adotada como modelo de desmagnetização parcial dos ímãs permanentes.

No caso da variação de carga, a malha externa utiliza compensação *feedforward* do torque resistente, de modo que o ensaio representa uma mudança de condição operacional com carga conhecida ou estimada. Já no caso da variação de K_e , essa incerteza não foi incluída explicitamente no politopo da síntese LMI. Assim, os resultados devem ser interpretados como evidência de robustez prática a uma variação paramétrica moderada, e não como garantia formal de robustez em relação a K_e .

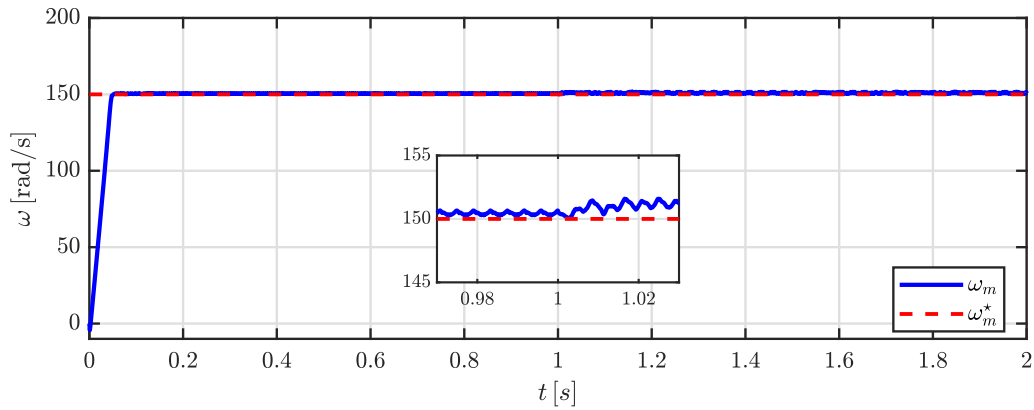
5.3.1 Variação do torque de carga

Em aplicações reais, o torque resistente aplicado ao eixo pode variar significativamente conforme a natureza da carga mecânica. Dependendo do processo acionado, essa carga pode apresentar comportamento aproximadamente constante, linear, parabólico, hiperbólico ou pulsante. Para avaliar a sensibilidade do sistema proposto a esse tipo de variação, aplicou-se um degrau positivo de 20% no torque de carga T_L no instante $t = 1$ s, mantendo-se constante a referência de velocidade em 150 rad/s. A Figura 17 apresenta a resposta da velocidade mecânica, das correntes no referencial $\alpha\beta$ e do torque eletromagnético para esse cenário.

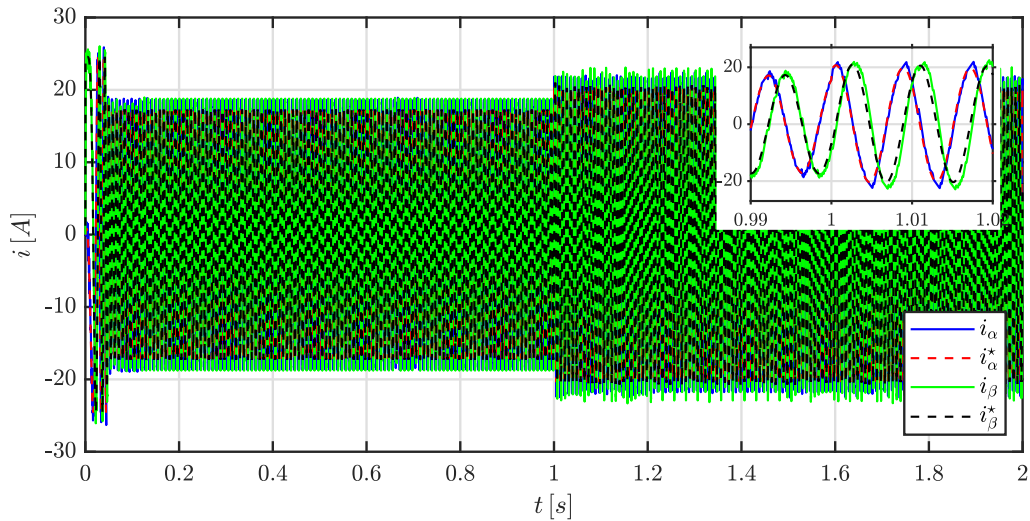
A resposta da velocidade, mostrada na Figura 17(a), indica que o efeito do aumento de carga sobre a variável mecânica é pequeno. A rotação permanece muito próxima da referência mesmo após a aplicação do degrau, com apenas uma leve alteração em seu valor médio. Esse comportamento é coerente com a arquitetura de controle adotada. Como a malha externa utiliza um termo *feedforward* associado ao torque de carga e uma ação proporcional sobre o erro de velocidade, a maior parte da variação de carga é compensada diretamente, cabendo ao termo proporcional apenas corrigir o desvio residual. Além disso, o filtro de primeira ordem aplicado à referência de torque evita mudanças abruptas na ação de controle. Em consequência, a regulação de velocidade permanece eficaz. Ainda assim, como a malha externa é puramente proporcional, não há imposição teórica de erro nulo em regime para perturbações ou incertezas persistentes. Assim, a pequena mudança observada após $t = 1$ s é compatível com a ausência de ação integral.

A Figura 17(b) mostra que a frequência das correntes permanece praticamente inalterada após a variação de carga, o que é esperado, já que a velocidade mecânica e, portanto, a velocidade elétrica do rotor sofrem apenas pequena perturbação. Em contrapartida, observa-se aumento claro da amplitude das correntes após o degrau de torque. Esse resultado tem interpretação física direta. Como a máquina precisa produzir maior torque eletromagnético para equilibrar a nova carga mecânica, a malha externa eleva a referência de torque e, consequentemente, a

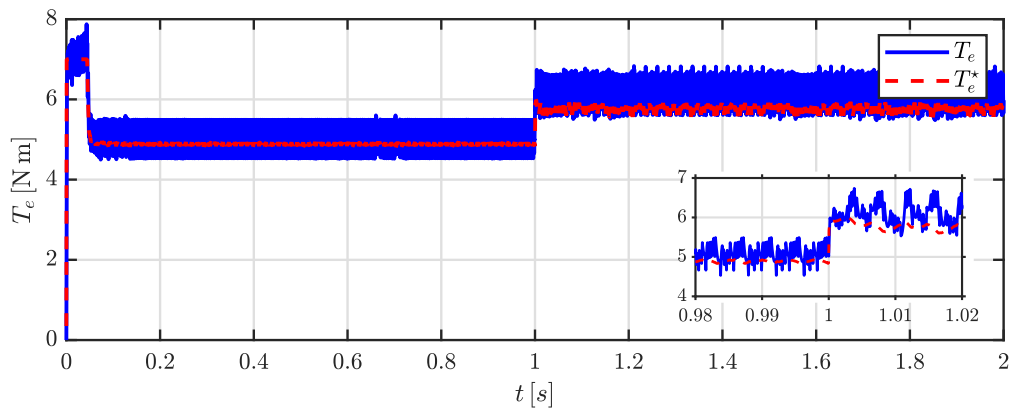
Figura 17 – Resposta do motor 1 a um degrau positivo de 20% no torque de carga aplicado em $t = 1$ s, com referência de velocidade constante.



(a) Velocidade mecânica ω_m e sua referência ω_m^* .



(b) Correntes i_α e i_β e suas respectivas referências.



(c) Torque eletromagnético T_e e sua referência T_e^* .

Fonte: Próprio autor.

amplitude da corrente de eixo de quadratura equivalente. No referencial estacionário $\alpha\beta$, essa exigência aparece como aumento da amplitude das correntes senoidais de referência e das

correntes efetivamente rastreadas. Assim, o controlador preserva a regulação de velocidade deslocando o ponto de operação elétrico do sistema para um novo nível de corrente compatível com a maior demanda mecânica.

A resposta do torque eletromagnético, apresentada na Figura 17(c), confirma essa interpretação. O valor médio de T_e aumenta no instante da variação de carga e se estabelece em um novo patamar coerente com o acréscimo de 20% em T_L . Como o torque nominal de carga do motor 1 é 5 Nm, o novo valor esperado é próximo de 6 Nm, o que está de acordo com o comportamento observado. Também se nota uma mudança no padrão da ondulação de alta frequência após o degrau. Isso decorre do fato de que o aumento da amplitude de corrente modifica a trajetória do erro e, por consequência, altera a sequência de modos selecionados pela lei de chaveamento. Em um controlador por chaveamento direto, a ondulação instantânea de torque depende não apenas da carga, mas também do ponto de operação elétrico e da distribuição temporal dos vetores de tensão aplicados pelo inversor. Mesmo assim, o valor médio do torque acompanha adequadamente a nova exigência da carga, mostrando que o sistema permanece estável e funcional após a perturbação.

Em síntese, os resultados indicam que o controlador mantém a regulação da velocidade com boa qualidade diante de um aumento abrupto do torque resistente, ao custo de um aumento esperado da amplitude de corrente e do torque eletromagnético médio. Para o ensaio considerado, a dinâmica mostra que a estratégia proposta é capaz de se readaptar rapidamente a uma nova condição de carga sem perda de estabilidade ou degradação significativa da variável mecânica principal.

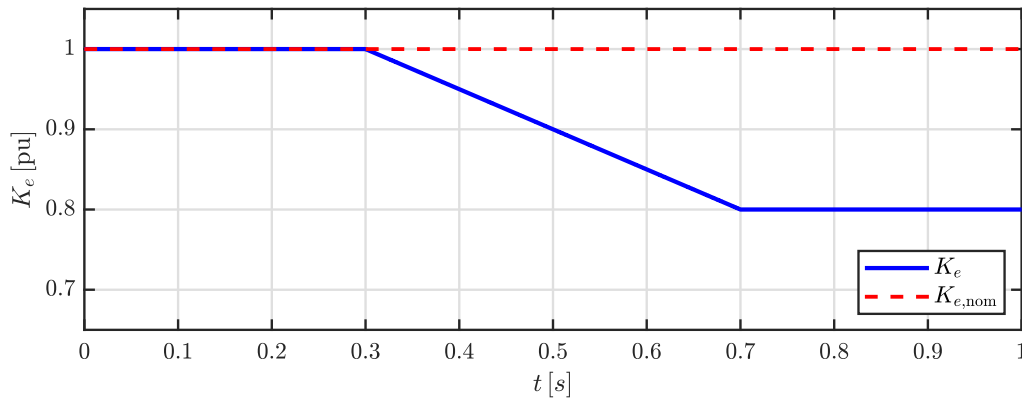
5.3.2 Variação paramétrica da planta

A constante K_e representa, no modelo adotado, a constante de FCEM da máquina e está diretamente associada ao fluxo magnético produzido pelos ímãs permanentes. No contexto de motores síncronos de ímãs permanentes, uma redução de K_e equivale, do ponto de vista eletromagnético, a uma redução do fluxo do ímã. Assim, a diminuição desse parâmetro pode ser usada como modelo simplificado de desmagnetização parcial. Esse fenômeno pode estar associado, por exemplo, a elevação excessiva de temperatura, envelhecimento do material magnético ou exposição do rotor a campos desmagnetizantes suficientemente intensos, como pode ocorrer em condições severas de operação (Faiz; Mazaheri-Tehrani, 2017).

Nesta subseção, considera-se uma redução gradual de K_e até 0,8 pu, conforme o perfil mostrado na Figura 18. O parâmetro permanece nominal até $t = 0,3$ s, decresce linearmente até $t = 0,7$ s e, a partir desse instante, mantém-se constante em 80% do valor nominal. Essa variação paramétrica não foi explicitamente incorporada ao problema de síntese por meio de um politopo em K_e . Portanto, o objetivo aqui é verificar se o controlador conserva desempenho satisfatório mesmo na presença dessa alteração não modelada na etapa de projeto.

A resposta da velocidade mecânica na Figura 19(a) mostra que o sistema preserva a regulação mesmo com a redução progressiva de K_e , embora se observe uma pequena queda na

Figura 18 – Perfil temporal da constante de FCEM normalizada K_e utilizado para simular desmagnetização parcial dos ímãs permanentes no motor 1.



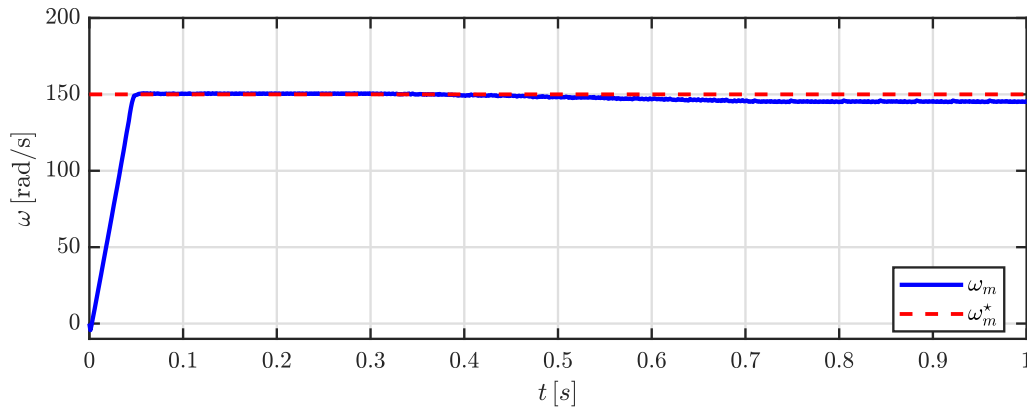
Fonte: Próprio autor.

velocidade média após o início da perda de fluxo. Esse comportamento é fisicamente consistente. Como K_e diminui, também diminui a capacidade da máquina de converter corrente em torque para uma mesma condição elétrica, já que, no modelo empregado, $K_t = \frac{3}{2}pK_e$. Em consequência, para manter o mesmo torque de carga, o acionamento passa a exigir maior corrente. A malha externa reage a essa perda de capacidade eletromagnética por meio do aumento do erro de velocidade e, portanto, da elevação da referência de torque. No entanto, como a ação de velocidade é proporcional, a geração desse torque adicional depende da existência de um erro residual, o que explica a pequena redução de velocidade observada em regime.

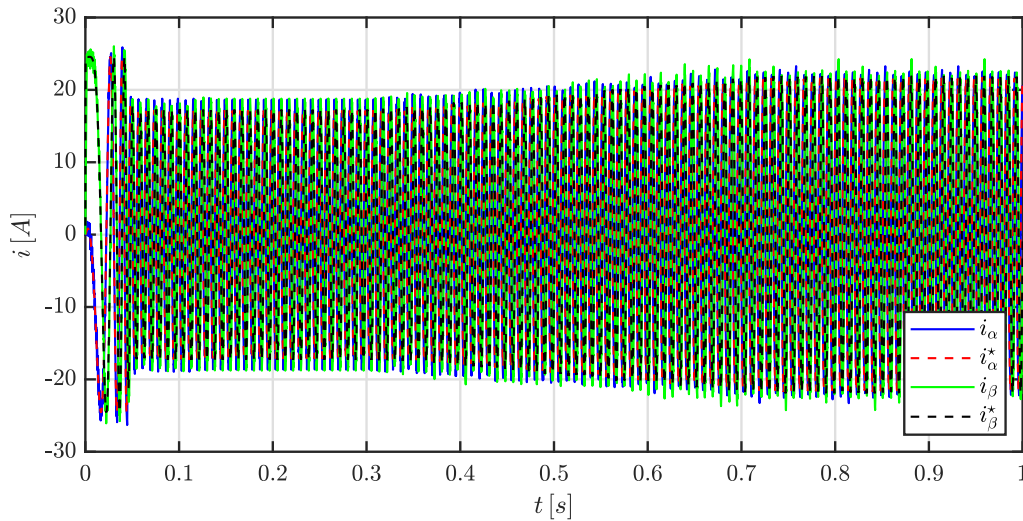
A Figura 19(b) evidencia de forma clara o principal efeito elétrico da redução de K_e . À medida que o parâmetro diminui, a amplitude das correntes aumenta progressivamente, enquanto a frequência permanece aproximadamente constante associada à velocidade do rotor. Esse resultado faz sentido físico, visto que, em máquinas síncronas de ímãs permanentes, a redução do fluxo do rotor implica menor torque por ampère. Em termos simplificados, se $T_e \approx K_t i_q$ e K_t diminui junto com K_e , então a corrente de quadratura necessária para produzir um mesmo torque deve aumentar. No referencial $\alpha\beta$, isso aparece como ampliação do raio da trajetória de corrente e, no domínio do tempo, como aumento da amplitude das componentes i_α e i_β . Portanto, a elevação da corrente observada não é um efeito anômalo do controlador, mas a resposta esperada de um acionamento que tenta manter a capacidade de produção de torque diante de uma redução do fluxo magnético disponível.

A Figura 19(c) complementa essa interpretação. Observa-se que a referência de torque T_e^* cresce gradualmente durante a redução de K_e , enquanto o torque eletromagnético efetivo permanece com valor médio aproximadamente constante e compatível com o torque resistente aplicado ao eixo. Isso também é coerente com a estrutura do controle. Como a redução de K_e provoca uma tendência de queda na velocidade, o erro $\omega_m^* - \omega_m$ torna-se positivo, levando a malha proporcional externa a aumentar T_e^* . Além disso, como a geração da corrente de referência

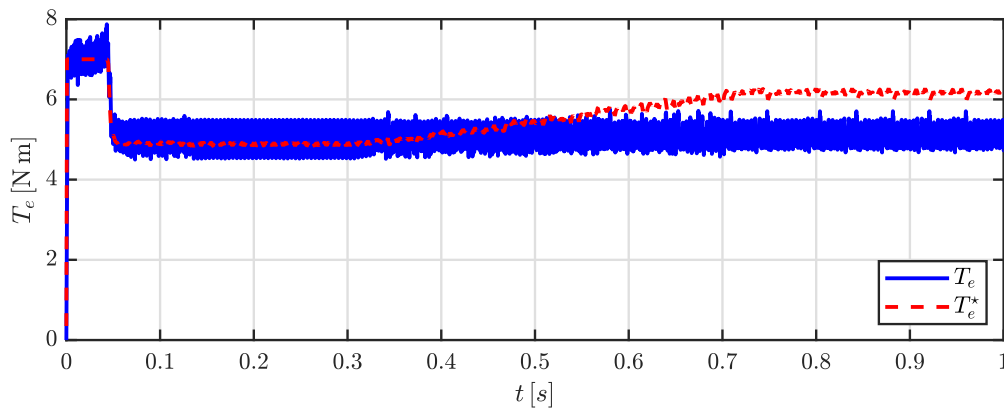
Figura 19 – Resposta do motor 1 sob redução progressiva da constante de FCEM, utilizada para representar desmagnetização parcial dos ímãs permanentes.



(a) Velocidade mecânica ω_m e sua referência ω_m^* .



(b) Correntes i_α e i_β e suas respectivas referências.



(c) Torque eletromagnético T_e e sua referência T_e^* .

Fonte: Próprio autor.

foi parametrizada com base no valor nominal de K_t , a diminuição efetiva da constante de torque torna a corrente inicialmente comandada insuficiente para reproduzir, na máquina degradada, o

mesmo torque que seria obtido na condição nominal. Assim, o sistema precisa elevar a referência de torque até atingir um novo equilíbrio. O fato de o valor médio do torque eletromagnético real se manter próximo ao torque de carga mostra que o aumento de corrente consegue compensar, ao menos parcialmente, a perda de fluxo dos ímãs.

Sob a ótica de robustez, esse resultado é relevante. Embora a incerteza em K_e não tenha sido incluída formalmente na síntese LMI, o sistema permanece estável e continua operando com seguimento aceitável da velocidade e das correntes, mesmo após uma redução de 20% na constante de FCEM. Em contrapartida, essa robustez vem acompanhada de um custo físico claro, que é o aumento da corrente exigida para sustentar o mesmo torque. Em uma aplicação real, isso significaria maiores perdas Joule, maior solicitação térmica do estator e possível redução da margem operacional do inversor e da máquina. Portanto, o ensaio mostra que o controlador proposto possui tolerância prática a uma desmagnetização moderada, mas também evidencia que a degradação magnética afeta diretamente a eficiência eletromecânica do acionamento.

Assim, os resultados mostram que o controle permanece operante sob redução de K_e , mesmo sem essa variação ter sido incorporada à síntese LMI. Isso indica uma robustez prática da estratégia proposta frente a uma degradação moderada do fluxo magnético da máquina. Cabe observar, contudo, que variações paramétricas desse tipo podem ser incorporadas formalmente ao projeto por meio de uma modelagem politópica adicional. Em contrapartida, essa extensão tende a aumentar o conservadorismo da formulação e o número de restrições do problema, o que pode dificultar ou até inviabilizar a obtenção de solução numérica pelo *solver*.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação abordou o problema de controle do acionamento inversor–motor BLAC no contexto de sistemas chaveados, com foco no seguimento de referências senoidais e na incorporação de robustez por meio de um critério $\mathcal{H}_\infty$. A proposta central consistiu no desenvolvimento de uma lei de chaveamento do tipo *arg max*, sintetizada via LMIs, preservando na formulação a estrutura física chaveada do inversor e evitando o uso de modelos médios.

Os objetivos estabelecidos na introdução foram atingidos. Foram estudados os fundamentos de sistemas chaveados, LMIs e controle robusto necessários à formulação do problema. A partir disso, foi construída a modelagem do sistema inversor–motor BLAC em coordenadas $\alpha\beta$, bem como a dinâmica do erro de rastreamento para referências senoidais. Com base nesse modelo, foi desenvolvido o projeto da lei de chaveamento, principal resultado desta dissertação.

A lei proposta resulta de uma construção sistemática baseada em uma função de Lyapunov definida como o máximo de funções auxiliares associadas aos modos do inversor. A incorporação do termo afim ligado à dinâmica periódica, juntamente com o uso do Procedimento–S e do lema de Finsler, permitiu converter as condições de estabilidade e desempenho em LMIs. A solução desse problema fornece diretamente as matrizes que definem a lei de chaveamento, estabelecendo uma regra de comutação dependente do estado, capaz de selecionar, a cada instante, o modo mais favorável à redução da energia do erro. Essa construção evidencia o mérito da abordagem, ao conectar de forma direta a teoria de sistemas chaveados à implementação física do inversor.

Outro aspecto relevante da solução proposta está na arquitetura de controle adotada. A malha interna é determinada pela lei de chaveamento sintetizada, enquanto a malha externa de velocidade combina um termo proporcional, compensação do torque de carga e filtragem de primeira ordem. Do ponto de vista de sintonia, a estrutura permanece simples, pois o principal parâmetro de ajuste é o ganho proporcional associado à dinâmica mecânica, para o qual foi indicada uma faixa de valores em função do coeficiente de atrito viscoso. Além disso, a arquitetura pode acomodar outras estratégias na malha externa, como controladores PI, sem alterar a lei de chaveamento projetada.

Os resultados mostraram que a estratégia proposta foi capaz de manter estabilidade em malha fechada e promover seguimento satisfatório das referências consideradas. As respostas de velocidade apresentaram bom acompanhamento para perfis em degrau e em rampa, enquanto as correntes no referencial $\alpha\beta$ exibiram comportamento senoidal coerente com a formulação teórica. A resposta do torque eletromagnético acompanhou adequadamente a ação da malha externa, com ondulações compatíveis com a operação por chaveamento direto. Destaca-se também que a validação foi conduzida com diferentes motores, com parâmetros eletromecânicos distintos, o que evidencia a capacidade da metodologia de operar sobre diferentes plantas mantendo a mesma estrutura de controle.

No que diz respeito à robustez, o uso do critério $\mathcal{H}_\infty$ mostrou-se adequado, pois permitiu tratar explicitamente a influência de termos exógenos periódicos associados à dinâmica do rotor

como perturbações estruturadas no problema de síntese. Com isso, a lei de chaveamento foi projetada não apenas para garantir estabilidade, mas também para limitar o efeito desses termos sobre a dinâmica do erro. Os ensaios de simulação confirmaram essa característica, evidenciando capacidade de readaptação frente a variações de torque de carga e manutenção da operação mesmo sob variações paramétricas não modeladas, como a redução de K_e . Nesse caso, a robustez se manifesta na preservação do funcionamento e do seguimento, ainda que acompanhada por maior esforço de corrente.

Algumas características da abordagem adotada merecem destaque quanto à implementação. A frequência de chaveamento é variável, refletindo a lógica da lei de comutação baseada em Lyapunov, e foi controlada por mecanismos como tempo mínimo de permanência e histerese. Além disso, a validação foi conduzida em ambiente de simulação, considerando um modelo contínuo do sistema inversor–motor. Tais aspectos não constituem limitações do método, mas particularidades da formulação adotada, que preserva a natureza chaveada do problema e abre espaço para investigações futuras em ambiente experimental.

Como continuidade natural deste trabalho, destacam-se a validação experimental da estratégia em bancada e a incorporação explícita de incertezas paramétricas na síntese, por exemplo por meio de extensões politópicas envolvendo parâmetros como K_e , resistência e indutância. Também é relevante investigar o compromisso entre desempenho dinâmico e frequência de chaveamento, bem como comparar de forma sistemática a abordagem proposta com estratégias clássicas de acionamento, como controle vetorial, DTC e controle preditivo. Adicionalmente, pode-se explorar a inclusão de outros critérios de robustez na formulação LMI, ampliando a capacidade do método de lidar com incertezas estruturadas e variações operacionais mais amplas, além de investigar a incorporação formal de restrições de *dwell time* nas condições LMI para conectar a garantia teórica de estabilidade aos limites práticos de frequência de chaveamento.

De forma geral, os desenvolvimentos apresentados indicam que a lei de chaveamento proposta constitui uma alternativa tecnicamente consistente para o controle de acionamentos BLAC. Ao explorar diretamente a natureza chaveada do inversor e integrar, de forma coerente, estabilidade, desempenho e robustez em uma única formulação, o trabalho contribui para o avanço das abordagens baseadas em sistemas chaveados aplicadas a acionamentos elétricos. Em particular, ajuda a suprir a lacuna identificada na literatura quanto ao uso de estratégias do tipo *arg max* no controle de acionamentos inversor–motor BLAC com seguimento de referências senoidais e incorporação explícita de um critério $\mathcal{H}_\infty$.

REFERÊNCIAS

- AGNOLO, S. F. D. **Acionamento do motor síncrono de imãs permanentes (MSIP) através de algoritmos de controle preditivo baseado em modelo (MPC)**. 118 p. Monografia (TCC) — Udesc, 2019. Citado na página 55.
- ANDRICH, Roberto. **Desenvolvimento de uma plataforma para avaliação de desempenho de estratégias de acionamento de motores usados em produtos da linha branca**. Dissertação (Mestrado) — Udesc, 2013. Citado na página 50.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a non-equilibrium point. In: **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. Boston, MA, USA: [s.n.], 2004. p. 3890–3895. Citado na página 35.
- BOSE, Bimal K. **Modern Power Electronics and AC Drives**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 2002. ISBN 0-13-016743-6. Citado na página 48.
- BOYD, Stephen et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). Citado 5 vezes nas páginas 22, 23, 26, 27 e 40.
- BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven. **Convex Optimization**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 26.
- BURL, John B. **Linear Optimal Control: H₂ and H_∞ Methods**. [S.l.]: Addison-Wesley Longman, 1999. Citado na página 40.
- CLARKE, Edith. **Circuit Analysis of A-C Power Systems: Symmetrical and Related Components**. New York: John Wiley & Sons, 1971. v. 1. Citado na página 56.
- COSTANZO, Lucas De Cunto. **Control of θ -periodic switched systems with application in electrical engineering**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica – Área de Mecatrônica) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, Brasil, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 42.
- DEAECTO, Grace S.; GEROMEL, José C. Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 8, p. 4058–4065, 2017. Citado na página 18.
- DEAECTO, G. S. et al. Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. **IET Control Theory & Applications**, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010. Citado na página 42.
- DECARLO, Raymond A. et al. Perspectives and results on stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000. Citado na página 28.
- DEZUO, Tiago Jackson May. **Design of Switching Strategies with Applications in Photovoltaic Energy Generation**. Tese (Tese (Doutorado em Engenharia de Automação e Sistemas)) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 41.
- EGIDIO, Lucas N.; DEAECTO, Grace S.; BARROS, Tarcio A. S. Switched control of a three-phase ac–dc power converter. In: **IFAC-PapersOnLine**. [S.l.: s.n.], 2020. v. 53, n. 2, p. 6471–6476. Citado na página 42.

EGIDIO, Lucas N. et al. A nonlinear switched control strategy for permanent magnet synchronous machines. In: **Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 53.

EGIDIO, Lucas N. et al. Trajectory tracking for a class of switched nonlinear systems: Application to pmsm. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 44, p. 101164, 2022. Citado na página 18.

FAIZ, Jawad; MAZAHARI-TEHRANI, Ehsan. Demagnetization modeling and fault diagnosing techniques in permanent magnet machines under stationary and nonstationary conditions: An overview. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 53, n. 3, p. 2772–2785, 2017. Citado na página 93.

FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides**: Control systems. Dordrecht: Springer, 1988. v. 18. (Mathematics and Its Applications, v. 18). Citado na página 37.

FINSLER, Paul. Über das vorkommen definiter und semidefiniter formen in scharen quadratischer formen. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 9, p. 188–192, 1937. Citado na página 27.

FIORIO, Luan Vinícius; DEZUO, Tiago Jackson May; NOVAES, Yales Rômulo de. Switched control applied to a totem-pole bridgeless rectifier for power factor correction. **arXiv preprint arXiv:2110.09996**, 2021. Citado na página 42.

GAHINET, Pascal et al. **LMI Control Toolbox for use with MATLAB**. Natick, MA, 1995. Citado na página 22.

GALLIER, Jean. **Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering**. 2nd. ed. New York: Springer, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006. Citado na página 35.

GEYER, Tobias. **Model Predictive Control of High Power Converters and Industrial Drives**. Chichester: John Wiley & Sons, 2017. ISBN 9781119010883. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.

GUBAREVYCH, O. et al. Use of park’s vector method for monitoring the rotor condition of an induction motor as a part of the built-in diagnostic system of electric drives of transport. **Energies**, v. 16, n. 13, p. 5109, 2023. Citado na página 89.

HESPANHA, João Pedro. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle’s invariance principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 4, p. 470–482, 2004. Citado na página 28.

IEA 4E Electric Motor Systems Platform (EMSA). **Electric motor systems: why are they important?** [S.l.], 2025. Citado na página 43.

Jl, Zhijian et al. Robust H_∞ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple lyapunov functions approach. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, ASME, v. 128, n. 4, p. 700–708, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 41.

JIN, Luhan et al. Optimization-based maximum-torque fault-tolerant control of dual three-phase pmsm drives under open-phase fault. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 38, n. 3, p. 3653–3667, 2023. Citado na página 77.

JOHANSSON, Mikael. **Piecewise Linear Control Systems: A Computational Approach**. [S.l.]: Springer, 2002. Citado na página 21.

KHALIL, Hassan K. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

KRAUSE, Paul C.; WASYNCHUK, Oleg; SUDHOFF, Scott D. **Analysis of Electric Machinery and Drive Systems**. 2. ed. New York: Wiley-IEEE Press, 2002. Citado na página 45.

LI, Chen; MENG, Qinghui; SHI, Tingna. A review on model predictive control strategies for ac motor drives. **IET Electric Power Applications**, v. 18, n. 11, p. 1584–1604, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

LIBERZON, Daniel. **Switching in Systems and Control**. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 10 vezes nas páginas 18, 21, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 e 53.

LIU, Xiaodong et al. Fixed switching frequency predictive control for pmsm drives with guaranteed control dynamics. In: **IEEE 9th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC-ECCE Asia)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 3033–3038. Citado na página 77.

LÖFBERG, Johan. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. **Proceedings of the CACSD Conference**, Taipei, Taiwan, p. 284–289, 2004. Citado na página 22.

NESTEROV, Yurii; NEMIROVSKII, Arkadi. **Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming**. [S.l.]: SIAM, 1994. v. 13. (Studies in Applied Mathematics, v. 13). Citado na página 22.

NOVOTNY, Donald W.; LIPO, Thomas A. **Vector Control and Dynamics of AC Drives**. Oxford: Oxford University Press, 1996. ISBN 0-19-856439-2. Citado na página 49.

OGATA, Katsuhiko. **Modern Control Engineering**. 5th. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. Citado na página 21.

O'ROURKE, Colm J. et al. A geometric interpretation of reference frames and transformations: dq0, clarke, and park. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, v. 34, n. 4, p. 2070–2083, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 74.

PARK, R. H. Two-reaction theory of synchronous machines—generalized method of analysis—part i. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 48, n. 3, p. 716–727, 1929. Citado na página 73.

PATEL, Hetal; CHANDWANI, Hina. Simulation and experimental validation of hysteresis current control technique for speed control of brushless dc motor. In: IOP PUBLISHING. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**. [S.l.], 2021. v. 1045, n. 1, p. 012030. Citado na página 54.

PYRHÖNEN, Juha; JOKINEN, Tapani; HRABOVCOVA, Valeria. **Design of Rotating Electrical Machines**. Chichester: John Wiley & Sons, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 44, 45, 47 e 48.

SAKUNTHALA, S; KIRANMAYI, R; MANDADI, P Nagaraju. A study on industrial motor drives: Comparison and applications of pmsm and bldc motor drives. In: IEEE. **2017 International Conference on Energy, Communication, Data Analytics and Soft Computing (ICECDS)**. [S.l.], 2017. p. 537–540. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

SASTRY, Shankar. Lyapunov stability theory. In: **Nonlinear systems: analysis, stability, and control**. [S.l.]: Springer, 1999. p. 182–234. Citado na página 32.

SCALABRIN, Camila Rossi. **Estudo do gerador síncrono de ímãs permanentes para o uso em geração eólica**. Monografia (Monografia) — Udesc, Joinville, 2016. Citado na página 55.

SCHARLAU, César Cataldo. **Controle de sistemas chaveados e aplicações**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 30, 39, 40 e 41.

SCHUR, Issai. Über potenzreihen, die im innern des einheitskreises beschränkt sind. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 147, p. 205–232, 1917. Citado na página 25.

SILVA, Julio Alves Mesquita da; DEAECTO, Grace Silva; BARROS, Tarcio Andre dos Santos. Analysis and design aspects of min-type switching control strategies for synchronous buck–boost converter. **Energies**, v. 15, n. 7, p. 2302, 2022. Citado na página 19.

TAHAMI, Hamed et al. A robust $\mathcal{H}_\infty$ -based state feedback control of permanent magnet synchronous motor drives using adaptive fuzzy sliding mode observers. **Actuators**, v. 13, n. 8, p. 307, 2024. Citado na página 19.

TROFINO, Alexandre et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 54, n. 9, p. 2215–2222, 2009. Citado na página 19.

TROFINO, Alexandre et al. **Controle Robusto**. 2015. Apostila. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. Citado 7 vezes nas páginas 24, 25, 27, 29, 30, 31 e 32.

TROFINO, Alexandre et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: IEEE. **Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)**. Orlando, FL, USA, 2011. p. 5406–5411. Citado 4 vezes nas páginas 36, 37, 38 e 62.

ULLAH, Kifayat; GUZINSKI, Jaroslaw; MIRZA, Adeel Feroz. Critical review on robust speed control techniques for permanent magnet synchronous motor (pmsm) speed regulation. **Energies**, v. 15, n. 3, p. 1235, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 48.

UMANS, Stephen D. **Máquinas elétricas de Fitzgerald e Kingsley**. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 43, 44, 46, 47 e 54.

WU, Ligang et al. Sliding mode control in power converters and drives: A review. **IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica**, v. 9, n. 3, p. 392–406, 2022. Citado na página 53.

ZERAOUlia, Mounir; BENBOUZID, Mohamed El Hachemi; DIALLO, Demba. Electric motor drive selection issues for hev propulsion systems: A comparative study. **IEEE Transactions on Vehicular technology**, IEEE, v. 55, n. 6, p. 1756–1764, 2006. Citado na página 47.

ZHAO, Xudong; XIE, Lihua; ZHANG, Cishen. On stability, L_2 -gain and H_∞ control for switched systems. **Automatica**, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 1223–1230, 2008. Citado na página 41.

ZHONG, L. et al. Analysis of direct torque control in permanent magnet synchronous motor drives. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 12, n. 3, p. 528–536, maio 1997. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

ZHONG, L. et al. A direct torque controller for permanent magnet synchronous motor drives. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, v. 14, n. 3, p. 637–642, set. 1999. Citado na página 51.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Tiago Jackson May Dezuo, professor do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação intitulada **“Controle chaveado com critério H-infinito aplicado no acionamento de motor BLAC para seguimento de referências senoidais”** de autoria do acadêmico Gabriel Lezan Nitz.

Joinville, 13 de julho de 2026.

Assinatura digital do orientador:

Tiago Jackson May Dezuo