

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – ENGENHARIA ELÉTRICA

DOUGLAS OHF

CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS COM REDUÇÃO DE CHATTERING
ATRAVÉS DE PROJETO

JOINVILLE

2026

DOUGLAS OHF

**CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS COM REDUÇÃO DE CHATTERING
ATRAVÉS DE PROJETO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo

JOINVILLE

2026

Para gerar a ficha catalográfica de teses e
dissertações acessar o link:
<https://www.udesc.br/bu/manuais/ficha>

Ohf, Douglas

Controle de sistemas chaveados com redução de chattering através de
projeto / Douglas Ohf. – Joinville, 2026.

80 p. : il.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuio.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina,
Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Joinville, 2026.

1. Sistemas chaveados. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Estabilidade prática. 4. Redução de *chattering*. 5. Projeto de lei de chaveamento. I. Jackson May Dezuio, Tiago. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

DOUGLAS OHF

**CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS COM REDUÇÃO DE CHATTERING
ATRAVÉS DE PROJETO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo

BANCA EXAMINADORA:

Tiago Jackson May Dezuo, Dr.
Udesc

Membros:

Uiliam Nelson Lendzion Tomaz Alves, Dr.
IFPR

César Manchein, Dr.
Udesc

Joinville, 10 de julho de 2026

A todos aqueles que buscam conhecimento!

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida.

À minha família, em especial à minha mãe Iliane, pelo apoio e motivação para que eu sempre seguisse meus sonhos, e à minha namorada Ketlin, por sempre me motivar a expandir os meus horizontes acadêmicos e intelectuais.

Ao Tiago, meu orientador desde antes do TCC e grande amigo.

Aos amigos Marcus, Luan e Gabriel, pelos bons momentos em nossas aventuras.

A mim mesmo, por ter chegado até aqui e não ter desistido apesar dos altos e baixos. Afinal, como diria Clóvis de Barros, “somos espectadores de nós mesmos”.

A Nidec - Embraco, por fomentar o desenvolvimento do conhecimento entre seus colaboradores.

À minha primeira professora, Angeli, que me ensinou a ler, mas também a buscar resolver os desafios da matemática.

À Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, e ao instituto TIM-OBMEP, pela bolsa que originalmente me ajudou imensamente durante a graduação.

A todos que simplesmente defendem o investimento público na ciência.

Ao *Gemini*, pelo auxílio para com scripts para formatação das figuras e como revisor de texto.

A você que está lendo minha dissertação!

“A imaginação é mais importante que o conhecimento. Pois o conhecimento é limitado, enquanto a imaginação abraça o mundo inteiro, estimulando o progresso, dando origem à evolução.” (Einstein, [1929])

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se um método para o projeto de leis de controle chaveado aplicadas a sistemas afins. A abordagem é modelada no domínio do tempo contínuo e implementada no tempo discreto por meio de um conjunto de funções do tipo *max*. Diferente das estratégias clássicas que buscam a convergência assintótica estrita para o equilíbrio, a técnica proposta direciona as trajetórias de estado para um conjunto invariante atrator nas proximidades do equilíbrio desejado, estabelecendo um compromisso entre o erro residual dos estados e a eficiência de comutação do sistema. Desse modo, o estudo fundamenta-se no conceito de estabilidade prática, em que a formulação proposta cria uma região de relaxação onde a função de Lyapunov não necessita decrescer monotonicamente, induzindo uma oscilação controlada em torno do ponto de operação. O problema de síntese é estruturado e resolvido matematicamente por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities* — LMIs) com o auxílio de ferramentas de otimização computacional. Por fim, o controlador proposto é validado via simulações numéricas com um motor de corrente contínua e um conversor *buck*. Posteriormente, são discutidos os perfis de decaimento da função de Lyapunov, a mitigação do fenômeno de *chattering* e a eficácia geral da metodologia.

Palavras-chave: Sistemas chaveados. Desigualdades matriciais lineares. Estabilidade prática. Redução de *chattering*. Projeto de lei de chaveamento.

ABSTRACT

This work presents a method for the design of switching rules applied to affine systems. The approach is modeled in the continuous-time domain and implemented in discrete-time by means of a set of *max*-type functions. Unlike classical strategies that pursue strict asymptotic convergence to the equilibrium, the proposed technique steers the state trajectories toward an attractor invariant set in the vicinity of the desired equilibrium, establishing an trade-off between the residual state error and the system's switching efficiency. Thereby, the study is grounded on the concept of practical stability, in which the proposed formulation creates a relaxation region where the Lyapunov function does not necessarily decrease monotonically, inducing a controlled oscillation around the operating point. The synthesis problem is structured and mathematically solved through Linear Matrix Inequalities (LMIs) with the aid of computational optimization tools. Finally, the proposed controller is validated via numerical simulations with a direct current (DC) motor and a *buck* converter. Subsequently, the decay profiles of the Lyapunov function, the mitigation of the chattering phenomenon, and the overall effectiveness of the methodology are discussed.

Keywords: Switched systems. Linear matrix inequalities (LMIs). Practical stability. Chattering reduction. Switching rule design.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.	28
Figura 2 – Modelo elétrico de um motor CC controlado por uma chave.	31
Figura 3 – Modelo de um conversor do tipo <i>buck</i> controlado por uma chave.	33
Figura 4 – Representação de incertezas δ em duas dimensões.	39
Figura 5 – Dinâmica dos estados no tempo.	45
Figura 6 – Valor das funções de Lyapunov dos diferentes modos no tempo.	46
Figura 7 – Modo ativo da lei de chaveamento no tempo.	46
Figura 8 – Retrato de fase do sistema.	47
Figura 9 – Trajetória temporal dos estados para o conversor <i>buck</i> .	49
Figura 10 – Evolução das funções de Lyapunov para o Exemplo 2.	50
Figura 11 – Modo ativo da lei de chaveamento robusta para o Exemplo 2.	50
Figura 12 – Retrato de fase e superfícies de comutação para o Exemplo 2.	51
Figura 13 – Resposta temporal das variáveis de estado com filtro <i>washout</i> .	53
Figura 14 – Função de Lyapunov ativa para o sistema com carga incerta.	54
Figura 15 – Comportamento da lei de chaveamento $\sigma(e(t)) = \arg \max_i \{v_i(e(t))\}$.	54
Figura 16 – Retrato de fase para o controle robusto com filtro <i>washout</i> .	55
Figura 17 – Representação de tangência descrita na Nota 4.	60
Figura 18 – Dinâmica dos estados no tempo.	62
Figura 19 – Valor das funções auxiliares de Lyapunov dos diferentes modos no tempo.	62
Figura 20 – Modo ativo da lei de chaveamento no tempo. (Nota: Por questões de limites de renderização, essa figura retrata o resultado da simulação com 100 kHz).	63
Figura 21 – Retrato de fase do sistema com vetores da direção de otimização.	63
Figura 22 – Valores da função de Lyapunov e sua derivada para o resultado 1.	64
Figura 23 – Estados do sistema em equilíbrio, e função de Lyapunov.	65
Figura 24 – Valor da função de Lyapunov e da variação de V para o resultado 2.	67
Figura 25 – Dinâmica dos estados no tempo.	68
Figura 26 – Valor dos estados e função de Lyapunov em regime.	68
Figura 27 – Detalhe da trajetória dos estados em regime em um diagrama de fase.	69
Figura 28 – Dinâmica dos estados no tempo.	71
Figura 29 – Valor dos estados e função de Lyapunov em regime.	71
Figura 30 – Detalhe da trajetória dos estados em regime em um diagrama de fase.	72
Figura 31 – Comportamento transiente do Resultado 4.	74
Figura 32 – Detalhe dos estados e valor da função de Lyapunov para o Resultado 4.	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Parâmetros do motor CC para o Exemplo 1.	44
Tabela 2	–	Parâmetros de simulação e projeto para o Exemplo 1.	44
Tabela 3	–	Parâmetros do conversor <i>buck</i> para o Exemplo 2.	48
Tabela 4	–	Parâmetros de simulação e projeto para o Exemplo 2.	48
Tabela 5	–	Parâmetros do conversor <i>buck</i> para o Exemplo 3.	52
Tabela 6	–	Parâmetros de simulação e projeto para o Exemplo 3.	52
Tabela 7	–	Parâmetros do conversor <i>buck</i> para o Resultado 2.	66
Tabela 8	–	Parâmetros do conversor <i>buck</i> para o Exemplo 3.	70
Tabela 9	–	Parâmetros do motor CC para o Exemplo 1.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC	Corrente Contínua
EMC	<i>Electromagnetic Compatibility</i> (Compatibilidade Eletromagnética)
EMI	<i>Electromagnetic Interference</i> (Interferência Eletromagnética)
IGBT	<i>Insulated-Gate Bipolar Transistor</i> (Transistor Bipolar de Porta Isolada)
LDO	<i>Low-Dropout Regulator</i> (Regulador de Baixa Queda de Tensão)
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade Matricial Linear)
MOSFET	<i>Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor</i> (Transistor de Efeito de Campo Metal-Óxido-Semicondutor)
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso)
YALMIP	<i>Yet Another LMI Parser</i> (Apenas mais um Interpretador de LMI)

LISTA DE SÍMBOLOS

i	Corrente elétrica [A]
R	Resistência elétrica [Ω]
L	Indutância [H]
λ_0	Constante da força contra-eletromotriz [Vs/rad]
ω	Velocidade de rotação angular [rad/s]
J	Momento de inércia [kgm^2]
k_t	Constante de Torque [Nm/A]
B_f	Atrito Viscoso [Nm/s]
T_M	Torque do motor [Nm]
τ	Torque de carga [Nm]
V_o	Tensão de saída [V]
V_{DC}	Tensão de entrada [V]
C	Capacitância [F]
i_L	Corrente em um indutor [A]
δ	Representação de uma incerteza de um politopo
δ_{min}	Valor mínimo de um politopo
δ_{max}	Valor máximo de um politopo
δ_{est}	Valor estimado de um parâmetro dentro de um politopo
A^T	Transposto da matriz real A
A^{-1}	Inverso da matriz real A
A_i	Matriz de estado de um subsistema
b_i	Matriz de entrada de um subsistema
k_i	Matriz de entrada de um subsistema, reescrito em uma referência desejada
K_{d_i}	A versão para sistemas discretos de k_i
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matriz de dimensão $n \times m$
$\mathcal{M}$	Conjunto de subsistemas
$\star$	Região de matriz que pode ser deduzida por simetria
0_n	Matriz de zeros de ordem $n \times n$
$0_{n \times m}$	Matriz de zeros de ordem $n \times m$

I_n	Matriz identidade de ordem n
1_n	Matriz de uns de ordem $n \times n$
$1_{n \times m}$	Matriz de uns de ordem $n \times m$
$A > 0$	Quando A uma matriz, indica ser simétrica positiva definida
$A < 0$	Quando A uma matriz, indica ser simétrica negativa definida
$\lambda_i(\cdot)$	i -ésimo autovalor de uma matriz
$\mathbb{I}_m$	Conjunto de inteiros representando os modos do sistema
$\max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i\}$	Máximo elemento do conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$
$\arg \max$	Índice do máximo de um conjunto
Θ_m	Simplex unitário com dimensão m tal que $\Theta_m := \{\theta \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\}$
$\otimes$	Produto de Kronecker
$\dot{x}$	Derivada de x em relação ao tempo
$\vartheta_i(\cdot)$	Um dos vértices de um politopo
σ	Índice do modo ativo de acordo com lei de chaveamento
$\mathfrak{K}_\theta$	Anulador linear de θ
$ \cdot $	Valor absoluto de um número
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos
$\text{null}(\cdot)$	Base ortonormal para um vetor ou uma matriz
$\bar{x}$	situação de equilíbrio para algum termo
θ	Tempo ativo daquele modo de chaveamento
v_i	Função auxiliar de Lyapunov do respectivo modo i

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	MOTIVAÇÃO	17
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	18
2	CONCEITOS BÁSICOS	20
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS	20
2.1.1	Sistemas contínuos	20
2.1.2	Sistemas discretos	21
2.2	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	22
2.2.1	Definição	22
2.2.2	Propriedades	23
2.3	FERRAMENTAS DE MANIPULAÇÃO DE LMIS	23
2.3.1	Mudança de variáveis e Transformação de Congruência	24
2.3.2	Complemento de Schur	25
2.3.3	Procedimento-S	25
2.3.4	Lema de Finsler	26
3	SISTEMAS CHAVEADOS	27
3.1	DEFINIÇÃO DE SISTEMAS CHAVEADOS	27
3.2	MODOS DESLIZANTES	28
3.3	CHATTERING	29
3.4	EQUILÍBRIO DE SISTEMAS CHAVEADOS	29
4	MODELAGEM DOS SISTEMAS DE ESTUDO	31
4.1	MOTOR CC	31
4.2	CONVERSOR BUCK	32
5	CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS AFINS	34
5.1	LEI DE CHAVEAMENTO BASEADA EM $\max(v_i(t))$	34
5.2	ROBUSTEZ	38
5.3	VARIAÇÃO COM FILTRO <i>WASHOUT</i>	39
5.4	CONTROLE CHAVEADO EM SISTEMAS DISCRETOS	41
5.5	ESTABILIDADE PRÁTICA E REGIÃO DE CONVERGÊNCIA	42
5.6	EXEMPLOS DE CONTROLE CHAVEADO	43
5.6.1	Exemplo 1: Controle de um motor simples	44
5.6.2	Exemplo 2: Conversor Buck com Indutância Incerta	48
5.6.3	Exemplo 3: Conversor Buck com Carga Incerta e Filtro Washout	52
6	CONTROLE CHAVEADO COM REDUÇÃO DE CHATTERING	56
6.1	MOTIVAÇÃO	56

6.2	AJUSTE DO PROJETO COM OTIMIZAÇÃO	56
7	RESULTADOS DE SIMULAÇÕES	61
7.1	CONTROLE DE UM MOTOR CC	61
7.1.1	Resultados gerais do controle	61
7.1.2	Resultados a respeito da frequência de controle	64
7.1.3	Resultado com menor frequência de chaveamento	65
7.2	CONTROLE DE UM CONVERSOR BUCK	65
7.2.1	Simulação em alta frequência	66
7.2.2	Simulação em frequência usual	67
7.3	BUCK COM CARGA INDEFINIDA	70
7.4	ANÁLISE DE PERTURBAÇÕES	73
7.5	COMPARAÇÃO COM A LEI DE CHAVEAMENTO ORIGINAL	74
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

A evolução tecnológica da humanidade está intimamente vinculada à habilidade de compreender a natureza ao seu redor e impor comportamentos desejados aos sistemas artificiais por ela concebidos. No âmbito da engenharia de controle, a busca constante por sistemas capazes de operar com o máximo de eficiência e o mínimo erro constitui um dos principais motivadores que moldaram, historicamente, o refinamento de teorias e ferramentas para o projeto de controladores (Bennett, 1993).

Todavia, grande parte dos dispositivos práticos não atua de forma puramente suave ou linear (Utkin, 1977); pelo contrário, a natureza intrínseca de diversos componentes modernos baseia-se em decisões discretas de ativação e bloqueio, assemelhando-se ao comportamento de comutação de um termostato rudimentar.

Diante dessa necessidade de modelar sistemas que operam por meio de dinâmicas descontínuas e decisões discretas, destaca-se a classe dos chamados sistemas híbridos. Tais estruturas caracterizam-se pela capacidade de alterar suas propriedades dinâmicas contínuas a partir da ocorrência de eventos discretos (Liberzon, 2003). Esse tipo de modelo é ideal para descrever sistemas práticos cujo comportamento muda repentinamente devido a ações de chaveamento, como a abertura e fechamento de válvulas, o acionamento de relés ou a atuação de interruptores eletrônicos.

Uma subclasse proeminente e de grande interesse prático dentro dos sistemas híbridos é a dos sistemas chaveados. Estes sistemas contam com um número finito de subsistemas, cada qual governado por uma dinâmica contínua própria, cujo funcionamento global é coordenado por uma regra de comutação (*switching rule*) responsável por ditar ativamente a alternância entre eles. Na literatura de automação e eletrônica de potência, os conversores estáticos e os sistemas de acionamento elétrico surgem como os exemplos mais consolidados dessa subclasse, sendo extensivamente empregados como *benchmarks* para o desenvolvimento e validação de novos algoritmos de controle (Trofino et al., 2009).

No cenário dos sistemas de engenharia modernos, esse ato de alternar abruptamente entre diferentes modos de operação introduz desafios à modelagem matemática. O ideal teórico de alcançar uma convergência assintótica estrita muitas vezes força o sistema a oscilar fortemente em frequências elevadas em torno da referência (Young; Utkin; Ozguner, 1999). Esse comportamento indesejado evidencia que, para viabilizar soluções aplicadas à engenharia real, torna-se necessário flexibilizar as exigências clássicas de controle, abrindo espaço para conceitos que tolerem pequenos erros residuais em troca da preservação física e da eficiência do sistema.

A ampla aplicação prática dessas estruturas exige o projeto de regras de comutação que não apenas garantam a estabilidade matemática do sistema, mas que também considerem as limitações reais dos dispositivos de chaveamento. É nesse contexto que se estabelecem as justificativas para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 MOTIVAÇÃO

Embora a teoria clássica de sistemas chaveados assuma a possibilidade de comutações ideais e em frequência infinitamente alta para garantir a convergência estrita dos estados, a transição para o ambiente prático impõe a necessidade de restrições físicas. Dispositivos de chaveamento reais, como transistores de potência (MOSFETs, IGBTs) ou relés mecânicos, possuem tempos de comutação não nulos e limitações operacionais que inviabilizam o comportamento puramente contínuo idealizado (Barbi, 2006). Quando um controlador projeta uma frequência de chaveamento excessivamente elevada, o sistema entra no regime dinâmico indesejado conhecido como *chattering*.

A ocorrência do *chattering* é um dos problemas mais críticos na implementação prática de leis de controle chaveado, atuando de forma destrutiva em diferentes frentes da planta dinâmica. Sob a perspectiva eletromecânica, as rápidas e contínuas oscilações induzem um estresse mecânico severo em partes móveis, além de causar fadiga estrutural e degradação precoce de atuadores e componentes, reduzindo drasticamente a vida útil dos equipamentos (Utkin; Lee, 2006).

Além do desgaste físico, o fenômeno compromete diretamente a eficiência energética do sistema. Cada ação de abertura e fechamento de um interruptor eletrônico envolve perdas por comutação (*switching losses*) causadas pela sobreposição transitória de tensão e corrente no componente (Barbi, 2006). Consequentemente, o chaveamento em alta frequência eleva as perdas por comutação, provocando o aquecimento excessivo dos semicondutores. Na prática, isso exige o uso de dissipadores de calor maiores, aumentando o custo de fabricação do projeto além de reduzir a eficiência energética do circuito.

Outro fator de extrema relevância no cenário da engenharia moderna é o impacto do *chattering* em termos de ruído eletromagnético. As comutações abruptas em alta frequência geram taxas elevadas de variação de tensão e corrente no tempo (dv/dt e di/dt). Esses transientes rápidos funcionam como fontes primárias de Interferência Eletromagnética (EMI), propagando ruídos tanto por condução quanto por radiação. Esse fenômeno não apenas prejudica a precisão dos próprios sensores de leitura do sistema, como também pode violar normas internacionais de compatibilidade eletromagnética (EMC), afetando o funcionamento de equipamentos vizinhos na rede elétrica (Mohan; Undeland; Robbins, 2003).

Diante desse cenário, torna-se evidente que mitigar o *chattering* não é apenas uma questão de elegância matemática, mas um requisito crucial para viabilizar o uso de sistemas chaveados na indústria real. É essa necessidade de conciliar o desempenho do controle com a preservação física, o silêncio eletromagnético e a eficiência energética das plantas que motiva o desenvolvimento de novas metodologias capazes de atenuar a frequência de comutação sem impactar a precisão do sistema.

Em particular, o escopo deste trabalho concentra-se no projeto de leis de controle para sistemas chaveados afins descritos no tempo contínuo. A metodologia proposta adota o conceito

de estabilidade prática para flexibilizar as exigências de decréscimo estrito das funções de Lyapunov tradicionais em uma proximidade da referência. A partir dessa relaxação matemática, obtém-se um problema de otimização que molda as superfícies de chaveamento a um formato capaz de reduzir o efeito de *chattering*, ao induzir uma oscilação controlada e de amplitude limitada no entorno do ponto de equilíbrio.

A técnica proposta é aplicável a sistemas chaveados afins nos quais seja viável definir uma superfície de comutação projetada para induzir um ciclo limite estável (oscilação controlada de amplitude limitada) em torno do ponto de equilíbrio desejado.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

A presente dissertação está organizada em 8 capítulos, estruturados da seguinte forma:

- **Capítulo 2 — Conceitos Básicos:** Apresenta os conceitos fundamentais sobre sistemas dinâmicos analisados nos domínios do tempo contínuo e discreto. São introduzidas as Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e descritas as ferramentas computacionais e os *solvers* de otimização utilizados para a sua manipulação e solução.
- **Capítulo 3 — Sistemas Chaveados:** Aborda a definição formal de sistemas chaveados e os conceitos essenciais correlatos ao tema, tais como regimes de modos deslizantes e o fenômeno de *chattering* (foco central deste estudo). Por fim, realiza-se a caracterização geométrica e matemática das condições de equilíbrio sob estruturas chaveadas.
- **Capítulo 4 — Modelagem dos Sistemas de Estudo:** Dedicar-se à modelagem matemática e à obtenção das representações em espaço de estados para sistemas chaveados das plantas dinâmicas utilizadas nas validações numéricas: um motor de corrente contínua (CC) e um conversor estático *buck*.
- **Capítulo 5 — Controle Chaveado para Sistemas Afins:** Revisa uma técnica existente na literatura baseada em funções do tipo *max* para o projeto de regras de chaveamento, discutindo suas variações como o controle robusto e o emprego de filtros *washout* para sistemas com equilíbrio parcialmente desconhecido. Apresentam-se também os fundamentos do controle chaveado discreto e o conceito de estabilidade prática, seguidos de exemplos ilustrativos que aplicam as diferentes variações da metodologia estudada.
- **Capítulo 6 — Controle Chaveado com Redução de *Chattering*:** Apresenta a principal contribuição científica deste trabalho, que consiste em uma variação da técnica de controle chaveado clássica fundamentada no conceito de estabilidade prática associada a uma estratégia de otimização. A abordagem confere flexibilidade ao projeto ao permitir o crescimento local da função de Lyapunov em regiões de baixa energia, reestruturando as superfícies de comutação de modo a induzir uma oscilação controlada dos estados e mitigar o efeito de *chattering*.

- **Capítulo 7 — Resultados de Simulação:** Expõe as validações numéricas da técnica proposta sob diferentes cenários e frequências de amostragem. São analisados os perfis de decaimento da função de Lyapunov face aos efeitos de discretização temporal, as taxas de redução de comutações obtidas e características associadas à robustez paramétrica do controlador projetado.
- **Capítulo 8 — Considerações Finais:** Apresenta as conclusões gerais deste trabalho, sintetizando o cumprimento dos objetivos propostos e correlacionando as contribuições teóricas com os resultados práticos obtidos. Adicionalmente, discutem-se as limitações da metodologia face aos efeitos de discretização temporal e são propostas diretrizes e sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Durante a elaboração deste trabalho, foi feito o uso da ferramenta de inteligência artificial Gemini. O uso limitou-se estritamente à assistência na redação e na formatação técnica do documento. Especificamente, a ferramenta foi utilizada com o objetivo de auxiliar na revisão gramatical, no refinamento da clareza e fluidez textual, bem como no suporte técnico para a otimização de *scripts* de geração e formatação das figuras apresentadas.

Cumprе enfatizar que toda a fundamentação teórica, a concepção metodológica, o desenvolvimento dos modelos e simulações, bem como a interpretação e análise crítica dos resultados científicos contidos nesta dissertação constituem frutos de pesquisa original concebida e executada exclusivamente pelo autor. A ferramenta não participou de nenhuma etapa de criação intelectual, geração de ideias ou condução dos experimentos. Após o uso do modelo para os fins de suporte textual e visual descritos, o autor revisou, editou e validou integralmente o conteúdo, assumindo total responsabilidade pela integridade e exatidão do trabalho final.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo apresenta os principais fundamentos e ferramentas teóricas que sustentam o desenvolvimento desta dissertação. O entendimento rigoroso da modelagem de sistemas dinâmicos é o primeiro passo para garantir a execução correta de processos, abrangendo desde a etapa de projeto, passando por estratégias avançadas de diagnóstico e prevenção de falhas e indo até análise de desempenho e síntese de estratégias de controle avançado (Isidori, 2013).

Inicialmente, são introduzidas as noções fundamentais relacionadas a sistemas dinâmicos, tanto em representação por espaço de estados em tempo contínuo quanto em tempo discreto. Em seguida, aborda-se o conceito de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs - *Linear Matrix Inequalities*). Tais ferramentas matemáticas consolidaram-se na área de controle por permitirem a tradução de requisitos de projeto complexos em problemas de otimização convexa, facilitando a busca por garantias de estabilidade e robustez de forma numericamente eficiente (Boyd et al., 1994).

Por fim, são discutidos os artifícios matemáticos e lemas necessários para a formulação de condições de estabilidade fundamentadas no segundo método de Lyapunov. Esta abordagem é central para o trabalho, pois permite analisar a estabilidade de sistemas (incluindo os chaveados) através do comportamento de funções candidatas de Lyapunov, sem a necessidade de resolver explicitamente as equações diferenciais do sistema (Khalil, 2002).

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Na natureza e na engenharia, diversas grandezas interagem de forma dinâmica, como a posição e a velocidade de um veículo, as tensões e correntes em um circuito elétrico ou os níveis em reservatórios acoplados. Tais fenômenos podem ser modelados por meio de equações diferenciais ou de diferenças, que descrevem não apenas o estado atual do sistema, mas também a sua evolução temporal em resposta a estímulos externos (Ogata, 2011). As variáveis fundamentais que caracterizam esse comportamento são denominadas variáveis de estado, e compõem a base para os problemas modernos de modelagem, análise e controle.

De forma geral, a formulação de um modelo depende da natureza temporal do processo. Neste trabalho, a ênfase recai sobre a representação em espaço de estados, uma abordagem que oferece uma descrição compacta e robusta, sendo particularmente adequada para o tratamento de sistemas chaveados e para a formulação de critérios de estabilidade via LMIs (Chen, 2009). Esta representação facilita a extensão do controle clássico para sistemas multivariáveis e sistemas com parâmetros variantes, temas centrais para o desenvolvimento desta dissertação.

2.1.1 Sistemas contínuos

Sistemas em tempo contínuo são aqueles cuja dinâmica evolui de forma ininterrupta no tempo, sendo tipicamente descritos por equações diferenciais ordinárias. Em uma formulação

geral por espaço de estados, a evolução do sistema pode ser modelada como:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ denota o vetor de entradas.

Entretanto, para fins de análise de estabilidade e projeto de controle via LMIs, este trabalho foca em uma classe específica de sistemas lineares invariantes no tempo com termos afins. Tais sistemas são representados pela equação:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + b, \quad (2)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada e $b \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de termos constantes (ou entradas exógenas) (Hespanha, 2018). A inclusão do termo afim b é essencial para a modelagem fiel de conversores estáticos e máquinas elétricas sob carga, permitindo que o ponto de equilíbrio do sistema seja deslocado da origem (Dezuo, 2010).

2.1.2 Sistemas discretos

Sistemas discretos são aqueles cuja dinâmica modelada evolui não através de equações diferenciais, mas sim de equações de diferenças, pois representam os valores dos estados em instantes de tempo discretos. No contexto de espaço de estados, essa dinâmica geral pode ser representada por:

$$x[k+1] = f(x[k], u[k]), \quad (3)$$

onde $x[k] \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados no instante discreto k , e $u[k] \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas.

De forma análoga ao caso contínuo, sistemas lineares afins discretos podem ser descritos por:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] + b_d, \quad (4)$$

onde A_d , B_d e b_d são obtidos a partir da discretização do sistema contínuo, considerando um período de amostragem T_s adequado à dinâmica do processo (Franklin; Powell; Workman, 1990). Uma abordagem comum consiste em assumir a entrada constante entre os instantes de amostragem, técnica conhecida como segurador de ordem zero (*zero-order hold*), resultando em (Åström; Wittenmark, 2013):

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau \right) B, \quad (5)$$

sendo b_d obtido de forma análoga através da integração do termo afim contínuo.

Embora o foco deste trabalho esteja em sistemas contínuos, a representação discreta é relevante no contexto da formulação de algumas condições baseadas em desigualdades matriciais lineares. Em particular, a discretização do sistema pode ser empregada na construção de condições auxiliares utilizadas no projeto do controle, sem alterar a natureza contínua da implementação considerada.

2.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As LMIs constituem uma ferramenta computacional e matemática amplamente utilizada na análise e no projeto de sistemas de controle moderno. Uma de suas principais vantagens reside na capacidade de formular requisitos de desempenho e estabilidade na forma de problemas de otimização convexa (Boyd et al., 1994). Essa característica garante que, caso uma solução exista, ela possa ser encontrada de maneira eficiente por meio de métodos numéricos de tempo polinomial, como os algoritmos de pontos interiores (Gahinet et al., 1995).

No contexto deste trabalho, as LMIs são empregadas na obtenção de condições sistemáticas para o projeto do controle chaveado e na análise das propriedades de robustez do sistema em malha fechada. Para a compreensão das formulações propostas nos capítulos subsequentes, torna-se necessário apresentar sua definição formal, suas principais propriedades e as ferramentas algébricas utilizadas em sua manipulação.

2.2.1 Definição

As LMIs são desigualdades matriciais lineares ou afins em relação a um conjunto de variáveis de decisão. Devido às suas características algébricas, elas definem um conjunto de restrições convexas sobre essas variáveis, o que garante que problemas formulados nesta estrutura possam ser resolvidos por *solvers* numéricos visando tanto a viabilidade (obtenção de qualquer solução que satisfaça a desigualdade) quanto a otimização de um índice de desempenho (Boyd et al., 1994).

De forma geral, uma LMI pode ser escrita na forma $F(g) > 0$, onde:

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^q g_i F_i > 0, \quad (6)$$

em que $g = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_q]' \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de variáveis de decisão a serem determinadas, e $F_0, F_1, \dots, F_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes reais e simétricas conhecidas.

O símbolo “ $>$ ” indica que a matriz resultante $F(g)$ deve ser definida positiva, ou seja, todos os seus autovalores devem ser estritamente maiores que zero, o que é equivalente a dizer que $x'F(g)x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Analogamente, utilizam-se os símbolos “ $\geq$ ”, “ $<$ ” e “ $\leq$ ” para representar restrições de matrizes semidefinidas positivas, definidas negativas e semidefinidas negativas, respectivamente.

Um exemplo clássico de LMI é a estabilidade de Lyapunov para sistemas lineares $\dot{x}(t) = Ax(t)$. O sistema é estável se existir uma matriz P que satisfaça:

$$P = P' > 0, \quad A'P + PA < 0, \quad (7)$$

onde os elementos da matriz simétrica P são as variáveis de decisão.

2.2.2 Propriedades

As LMIs apresentam propriedades algébricas e geométricas fundamentais que justificam seu amplo uso em problemas de análise e projeto de sistemas de controle moderno.

A principal característica das LMIs é a convexidade do seu conjunto de soluções. Formalmente, o conjunto de vetores g que satisfazem uma LMI da forma $F(g) < 0$ é um conjunto convexo. Isso implica que, dadas duas soluções viáveis g_a e g_b , qualquer combinação convexa entre elas, definida por $\alpha g_a + (1 - \alpha)g_b$ com $0 \leq \alpha \leq 1$, também será uma solução válida para a mesma desigualdade (Boyd et al., 1994).

Além disso, a interseção de múltiplas LMIs também define um conjunto convexo. Essa propriedade é de extrema relevância prática, pois permite impor simultaneamente diversas restrições de projeto — como estabilidade, limites de sinal de controle e taxas de decaimento — sobre as mesmas variáveis de decisão, preservando a natureza convexa do problema e a garantia de convergência para um ótimo global (Nesterov; Nemirovskii, 1987).

Outra propriedade relevante está na estrutura afim da função $F(g)$, que garante que as desigualdades permaneçam lineares em relação às variáveis de decisão. Essa característica é o que viabiliza a aplicação de *solvers* numéricos eficientes, baseados em métodos de pontos interiores, que possuem complexidade computacional de tempo polinomial.

Para além da simples verificação de factibilidade (busca por qualquer g que satisfaça $F(g) < 0$), as LMIs são frequentemente empregadas em problemas de otimização convexa. Nestes casos, o objetivo é determinar o vetor de variáveis de decisão g que minimize uma função custo linear $c'g$, sujeita a um conjunto de restrições matriciais:

$$\min_g c'g \quad \text{sujeito a} \quad F(g) < 0. \quad (8)$$

Como o domínio de busca definido pelas LMIs é convexo, qualquer mínimo local encontrado é também o mínimo global do problema. Essa característica é explorada em problemas de síntese de controladores, nos quais se busca não apenas assegurar a estabilidade do sistema, mas também otimizar critérios de desempenho H_∞ , rejeição de perturbações ou minimização de esforço de controle.

2.3 FERRAMENTAS DE MANIPULAÇÃO DE LMIS

Nesta seção, são apresentadas ferramentas algébricas fundamentais para a manipulação e transformação de LMIs. O uso dessas ferramentas é motivado pela necessidade de converter problemas de controle originalmente não lineares, ou que apresentam acoplamento entre as variáveis de decisão, em formulações convexas passíveis de resolução numérica.

Tais artifícios permitem reescrever condições de estabilidade e desempenho em formas equivalentes ou, em certos casos, em representações mais conservadoras, porém computacionalmente tratáveis. A escolha da ferramenta adequada depende da estrutura do sistema e dos

objetivos de projeto, buscando-se sempre o equilíbrio entre o rigor matemático e a viabilidade da implementação via *solvers* de otimização (Boyd et al., 1994), (Gahinet et al., 1995).

Ao longo das subseções a seguir, será adotada a notação de blocos simétricos, em que o símbolo $*$ denota elementos que podem ser deduzidos por simetria, visando a concisão das expressões matriciais.

2.3.1 Mudança de variáveis e Transformação de Congruência

A mudança de variáveis combinada com a transformação de congruência constitui uma técnica fundamental para transformar desigualdades matriciais não lineares em LMIs. Em diversos problemas de controle, a interação entre as matrizes do sistema e os ganhos do controlador resulta em termos bilineares nas variáveis de decisão, o que inviabiliza a resolução direta por otimização convexa (Boyd et al., 1994).

Para ilustrar o método, considere o sistema linear invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u(t) = Kx(t), \quad (9)$$

onde o objetivo é determinar a matriz de ganho de realimentação K que estabilize o sistema em malha fechada. A dinâmica resultante é descrita por:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (10)$$

Utilizando uma função candidata de Lyapunov quadrática $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$, com $P = P' > 0$, a condição de estabilidade assintótica é dada pela desigualdade:

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0. \quad (11)$$

Ao expandir os termos, obtém-se:

$$A'P + PA + K'B'P + PBK < 0. \quad (12)$$

Nota-se que os termos $K'B'P$ e PBK são bilineares, pois envolvem o produto das variáveis de decisão K e P . Para eliminar esse acoplamento e linearizar a expressão, utiliza-se o artifício de uma transformação de congruência. Matematicamente, duas matrizes simétricas M e N são ditas congruentes se existe uma matriz não singular T tal que $N = T'MT$. Assim, define-se $Q = P^{-1} > 0$ e multiplica-se a desigualdade anterior à esquerda e à direita por Q :

$$Q(A'P + PA + K'B'P + PBK)Q < 0, \quad (13)$$

o que, considerando que $PQ = QP = I$, resulta em:

$$QA' + AQ + QK'B' + BKQ < 0. \quad (14)$$

Apesar da transformação, a bilinearidade persiste entre K e Q . Pode-se então utilizar uma mudança de variável, definindo uma variável auxiliar $Y = KQ$. Substituindo na desigualdade, obtém-se:

$$QA' + AQ + Y'B' + BY < 0. \quad (15)$$

Esta última expressão é estritamente uma LMI em relação às novas variáveis de decisão Q e Y . Uma vez obtidas as soluções numéricas $Q > 0$ e Y , o ganho de realimentação original do sistema é perfeitamente recuperado por $K = YQ^{-1}$.

2.3.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur é uma ferramenta algébrica fundamental que permite transformar desigualdades matriciais não lineares, que envolvem inversas de matrizes, em LMIs equivalentes de dimensão superior. Essa técnica é amplamente utilizada para linearizar condições que surgem naturalmente em problemas de desempenho e robustez (Boyd et al., 1994).

Considere matrizes simétricas $M_1(g)$ e $M_2(g)$, e uma matriz $M_3(g)$ de dimensões apropriadas, todas dependentes afins do vetor de variáveis de decisão g . A condição não linear:

$$M_1(g) - M_3(g)'M_2(g)^{-1}M_3(g) > 0, \quad \text{com } M_2(g) > 0, \quad (16)$$

é equivalente à LMI:

$$\begin{bmatrix} M_1(g) & M_3(g)' \\ * & M_2(g) \end{bmatrix} > 0. \quad (17)$$

Onde o símbolo $*$ denota o bloco transposto por simetria. Como exemplo de aplicação, considere a restrição de que o estado x de um sistema pertença a um elipsoide definido por $x'Px \leq 1$, com $P > 0$. Esta condição quadrática em x pode ser reescrita via complemento de Schur como a LMI:

$$\begin{bmatrix} 1 & x' \\ x & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

o que permite incluir restrições de amplitude de estado ou sinal de controle diretamente no problema de otimização.

2.3.3 Procedimento-S

O procedimento-S (*S-procedure*) é uma técnica matemática utilizada para avaliar a validade de uma desigualdade sujeita a uma restrição de outra desigualdade. No contexto de controle, essa ferramenta é fundamental para tratar sistemas com incertezas limitadas ou restrições de estado, permitindo converter condições condicionais em LMIs únicas (Boyd et al., 1994).

Considere uma função quadrática $F(\xi) = \xi'F\xi$ e uma restrição dada por $T(\xi) = \xi'T\xi \geq 0$, com F e T matrizes simétricas. O objetivo é garantir que:

$$\xi'F\xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0 \text{ tal que } \xi'T\xi \geq 0. \quad (19)$$

Uma condição suficiente (e, em certos casos com uma única restrição, necessária) para que a afirmação acima seja verdadeira é a existência de um escalar não negativo $\tau \geq 0$ tal que:

$$F - \tau T > 0. \quad (20)$$

O conservadorismo da técnica surge quando existem múltiplas restrições $T_i(\xi) \geq 0$, caso em que a condição análoga com múltiplos escalares τ_i torna-se apenas suficiente (Polik; Terlaky, 2007).

Exemplo: Considere que se deseja garantir a estabilidade de um sistema apenas dentro de um setor do espaço de estados definido por $\xi' T \xi \geq 0$. Mesmo que a matriz de Lyapunov original F não seja definida positiva em todo o espaço $\mathbb{R}^n$, o procedimento-S permite encontrar um acoplamento via τ que satisfaça a condição de estabilidade restrita àquela região de interesse.

2.3.4 Lema de Finsler

O Lema de Finsler é uma ferramenta fundamental para o tratamento de problemas de controle com restrições estruturais. Ele estabelece condições equivalentes para que uma forma quadrática seja negativa em um subespaço definido por uma restrição linear. Tal ferramenta é amplamente utilizada para eliminar variáveis de controle de desigualdades matriciais ou para introduzir variáveis de folga que reduzem o conservadorismo em sistemas com parâmetros variantes.

Considere uma matriz simétrica $F(g) = F(g)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz de restrição $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $x' F(g) x < 0, \quad \forall x \neq 0 \text{ tal que } Cx = 0;$
2. $B_\perp' F(g) B_\perp < 0$, onde $B_\perp$ é uma base para o núcleo (*null space*) de C ;
3. $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ tal que $F(g) - \sigma C' C < 0$;
4. $\exists L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $F(g) + LC + C' L' < 0$.

A última equivalência é particularmente útil no projeto de controladores, pois a matriz L , frequentemente chamada de multiplicador de Finsler ou variável de folga, provê graus de liberdade adicionais para a linearização de condições bilineares.

Exemplo: Suponha que se deseje verificar a estabilidade de um sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ onde o estado está restrito a um plano $Cx = 0$. Em vez de testar a estabilidade em todo o espaço $\mathbb{R}^n$, o Lema de Finsler permite formular uma LMI que busca uma matriz L que satisfaça a condição (4). Se tal L for encontrada, o sistema é estável dentro do subespaço de interesse, mesmo que a matriz $F(g)$ original possua autovalores positivos fora dele.

3 SISTEMAS CHAVEADOS

Sistemas chaveados representam uma classe de sistemas híbridos que combinam dinâmicas contínuas com eventos discretos de comutação. Neste Capítulo, fundamenta-se a representação matemática desses sistemas e os fenômenos decorrentes da alternância entre diferentes modos de operação, estabelecendo a base necessária para o projeto de leis de controle baseadas em funções de Lyapunov.

3.1 DEFINIÇÃO DE SISTEMAS CHAVEADOS

Os sistemas chaveados compõem uma subclasse dos sistemas híbridos e podem ser definidos como sistemas dinâmicos no tempo contínuo que possuem múltiplos modos de operação, governados por uma regra de decisão. Um motor de corrente contínua (CC), por exemplo, acionado por meio de uma chave eletrônica ou uma ponte H, é um representante típico desta classe. Nestes casos, a topologia do circuito muda conforme o estado de condução dos semicondutores, alterando a dinâmica das variáveis de estado. Dessa forma, a dinâmica global do sistema é definida pela ativação de um modo específico em cada instante de tempo, sendo esta escolha determinada por uma lei de chaveamento.

De forma geral, um sistema chaveado em tempo contínuo pode ser representado matematicamente por:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad \sigma(t) \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}, \quad (21)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $f_i(\cdot)$ define a dinâmica associada ao modo i , e $\mathcal{M}$ representa o conjunto finito de índices dos modos de operação possíveis. Assim, a trajetória do sistema é composta por segmentos de trajetórias dos subsistemas individuais.

Em diversas aplicações práticas, como em conversores estáticos e máquinas elétricas, os subsistemas podem ser representados por dinâmicas lineares com termos afins. Nesse cenário, cada modo $i \in \mathcal{M}$ é descrito como:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad (22)$$

com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo a matriz de estados e $b_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor de termos afins associados ao modo i (Liberzon, 2003).

A transição entre os subsistemas é ditada por uma função de chaveamento $\sigma(t)$, responsável por determinar qual modo deve estar ativo a cada instante. Formalmente, essa função é definida como um mapeamento do espaço de estados ou do tempo para o conjunto de índices:

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}. \quad (23)$$

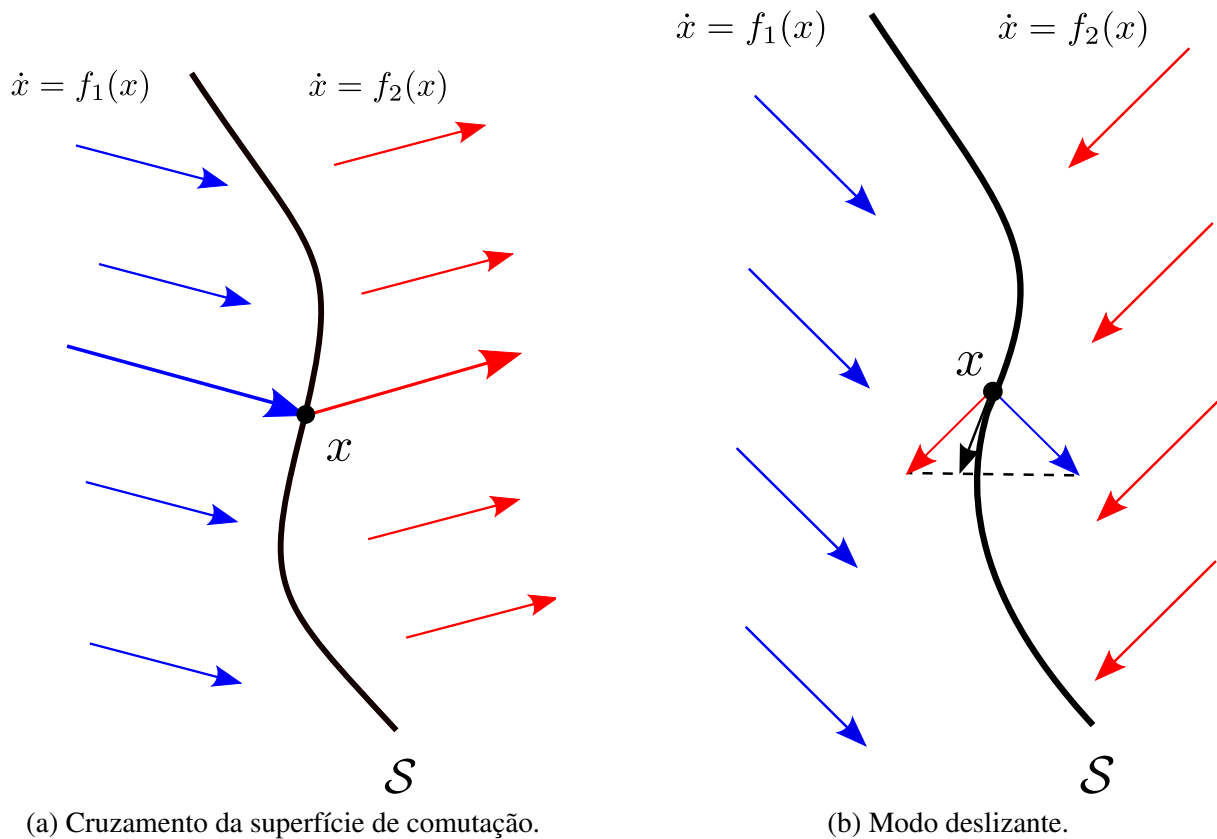
A lei de chaveamento pode depender explicitamente do tempo, do estado do sistema ou de ambos. No contexto deste trabalho, as leis dependentes do estado são de especial interesse,

pois permitem o projeto de controladores robustos baseados na partição do espaço de estados. Exemplos típicos desta modelagem incluem um motor CC acionado através de um inversor e o conversor CC-CC do tipo *buck*, que serão detalhados como plantas de estudo nos capítulos subsequentes.

3.2 MODOS DESLIZANTES

Os modos deslizantes (*sliding modes*) ocorrem quando a lei de chaveamento força a trajetória do sistema a permanecer sobre uma superfície de comutação $\mathcal{S}$, restringindo a dinâmica a uma variedade de dimensão inferior. A Figura 1 ilustra os dois comportamentos possíveis quando o estado atinge a interface entre dois modos de operação, $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.



Fonte: Adaptado de Scharlau (2013).

Na Figura 1(a), observa-se que, embora o sistema atinja a superfície vindo da região azul ($f_1(x)$), o campo de vetores da região vermelha ($f_2(x)$) aponta para fora da superfície, resultando no simples cruzamento da fronteira. Em contraste, a Figura 1(b) apresenta a condição de existência do modo deslizante: os campos de vetores de ambos os subsistemas apontam em direção à superfície $\mathcal{S}$. Nesse cenário, o estado fica “aprisionado” na interface, e a dinâmica resultante é definida pela combinação convexa dos campos de vetores originais, conforme a teoria de soluções de Filippov (Utkin, 1992).

Matematicamente, para um sistema com dois modos, a dinâmica deslizante ($\dot{x}_{sl}$) pode ser descrita por:

$$\dot{x}_{sl} = \gamma f_1(x) + (1 - \gamma)f_2(x), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (24)$$

onde γ representa o ciclo de trabalho (*duty cycle*) implícito necessário para manter o estado sobre a superfície. Note que caso γ fosse 1 ou 0, não seria um *modo deslizante* propriamente.

A partir dessa formulação, observa-se que o modo deslizante permite que o sistema apresente um comportamento dinâmico que não pertence a nenhum dos subsistemas isoladamente. Na prática, entretanto, as limitações físicas dos componentes de hardware impedem o comportamento ideal contínuo, dando origem ao *chattering*, que será explorado na seção seguinte.

3.3 CHATTERING

Quando dois ou mais campos vetoriais apontam em direção à superfície de chaveamento, para que o sistema apresentasse a dinâmica convexa ideal, seria teoricamente necessária uma taxa de comutação infinita. Na prática, a impossibilidade de atingir tal frequência e a presença de atrasos de computação ou limitações de hardware resultam no fenômeno conhecido como *chattering*.

Do ponto de vista teórico, esse comportamento ocorre quando os campos vetoriais dos subsistemas em ambos os lados da superfície possuem componentes que convergem para a interface. Nessa condição, cada subsistema tende a conduzir a trajetória para o lado oposto da fronteira, resultando em sucessivas e rápidas transições entre os modos de operação.

No cenário ideal, esse processo ocorreria com frequência infinita, caracterizando o modo deslizante ideal. Sob essa hipótese, a trajetória evoluiria exatamente sobre a superfície, seguindo a dinâmica equivalente descrita pela combinação convexa de Filippov. Entretanto, em sistemas físicos, a frequência de chaveamento é finita, o que faz com que o estado oscile em um movimento de “zigue-zague” em torno da dinâmica média desejada.

Essas oscilações de alta frequência podem impactar severamente o desempenho do sistema, aumentando as perdas por comutação em conversores estáticos, causando desgaste prematuro em atuadores mecânicos e excitando dinâmicas não modeladas (como ressonâncias estruturais). Apesar de frequentemente indesejado, o *chattering* pode ser interpretado como uma aproximação prática da dinâmica média associada ao modo deslizante, sendo essa perspectiva fundamental para a análise de estabilidade proposta neste trabalho.

3.4 EQUILÍBRIO DE SISTEMAS CHAVEADOS

Diferentemente de sistemas lineares convencionais, nos quais o ponto de equilíbrio é determinado unicamente pela solução de $Ax + b = 0$, em sistemas chaveados o equilíbrio pode ocorrer em pontos que não são o repouso natural de nenhum dos subsistemas isoladamente.

Partindo do sistema linear afim definido em (22), com a lei de chaveamento dada pelo máximo de um conjunto de funções de Lyapunov, a dinâmica pode ser interpretada por meio da combinação convexa entre os subsistemas, conforme a formulação de Filippov (Liberzon, 2003).

Essa abordagem descreve que, em regime de modos deslizantes, a dinâmica resultante é uma composição das dinâmicas associadas a cada modo ativo. Tal representação pode ser escrita como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t))(A_i x(t) + b_i), \quad (25)$$

onde os coeficientes θ_i representam a proporção instantânea de ativação de cada modo. Como esses coeficientes indicam a fração de tempo de permanência em cada modo, sua soma deve ser unitária, definindo o simplex unitário Θ :

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}. \quad (26)$$

A formulação em (26) permite interpretar a dinâmica do sistema como pertencente ao invólucro convexo dos subsistemas. Em particular, no ponto de equilíbrio do sistema chaveado ($\bar{x}$), a taxa de variação do estado deve ser nula, o que implica:

$$0 = \sum_{i=1}^m \theta_i(\bar{x})(A_i \bar{x} + b_i). \quad (27)$$

Definindo $k_i(\bar{x}) = A_i \bar{x} + b_i$ como o vetor de direção associado ao i -ésimo subsistema avaliado no ponto $\bar{x}$, a condição de equilíbrio pode ser reescrita de forma compacta como:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i k_i(\bar{x}) = 0. \quad (28)$$

Portanto, conclui-se que podem ser considerados pontos de equilíbrio de um sistema chaveado apenas aqueles para os quais exista um vetor de pesos $\theta \in \Theta$ tal que a combinação convexa dos vetores $k_i(\bar{x})$ resulte no vetor nulo. Fisicamente, isso significa que o equilíbrio é mantido por um chaveamento de alta frequência que cancela as tendências de movimento de cada modo individual, permitindo que o sistema estacione em uma posição de interesse para o projeto (Dezuo, 2010).

4 MODELAGEM DOS SISTEMAS DE ESTUDO

Neste capítulo, são apresentados os modelos dinâmicos das plantas de estudo utilizadas para validar as estratégias de controle propostas neste trabalho. A modelagem é fundamentada na representação em espaço de estados, permitindo descrever as variações estruturais da dinâmica decorrentes do acionamento de chaves eletrônicas de potência.

Inicialmente, detalha-se o modelo de um motor de corrente contínua (CC) operando por meio de uma chave eletrônica. Esse sistema é caracterizado por dois modos de operação distintos, correspondentes aos estados de condução e bloqueio da chave. Na sequência, apresenta-se a modelagem de um conversor CC–CC do tipo *buck*, também definido por dois modos de operação associados ao ciclo de chaveamento do semicondutor de potência.

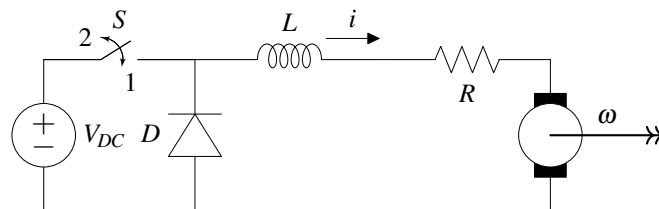
Tais modelos representam sistemas lineares afins chaveados, nos quais o objetivo de controle é a regulação de variáveis de saída em torno de pontos de operação específicos. Essas plantas servirão como base para o projeto, simulação e análise comparativa das leis de chaveamento que serão exploradas nos capítulos subsequentes.

4.1 MOTOR CC

Motores de corrente contínua (CC) são dispositivos que convertem energia elétrica em energia mecânica, sendo amplamente aplicados em sistemas industriais, robótica móvel e eletrodomésticos. Seu princípio de funcionamento baseia-se na interação entre os campos magnéticos gerados no estator e no rotor, produzindo torque eletromagnético e, consequentemente, movimento rotacional.

Neste trabalho, considera-se um motor CC de ímãs permanentes. Nessa configuração, o campo magnético do estator é constante, o que simplifica o modelo dinâmico, pois a corrente de campo deixa de ser uma variável de estado. O controle da potência entregue ao motor é realizado por meio de uma chave eletrônica de potência em série com o circuito da armadura, conforme ilustrado no modelo elétrico da Figura 2.

Figura 2 – Modelo elétrico de um motor CC controlado por uma chave.



Fonte: Adaptado de Lima (2019).

O sistema apresenta dois modos de operação distintos:

- **Modo 1 (Condução):** A chave está fechada, aplicando a tensão da fonte V_{DC} aos terminais do motor.

- **Modo 2 (Bloqueio):** A chave está aberta. A corrente da armadura continua a circular através de um diodo de roda livre (D), devido à energia armazenada na indutância da armadura.

As variáveis de estado escolhidas são a corrente da armadura $i(t)$ e a velocidade angular do eixo $\omega(t)$. Os parâmetros do modelo incluem a indutância L , resistência R , momento de inércia J , constante de torque k_t , constante de força contraeletromotriz λ_0 , coeficiente de atrito viscoso B_f , tensão de alimentação V_{DC} e o torque de carga τ .

Aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff ao circuito da armadura, obtêm-se as equações dinâmicas para cada modo:

Modo 1 – Chave em condução:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \lambda_0 \omega(t) = V_{DC} \implies \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{\lambda_0}{L}\omega(t) + \frac{V_{DC}}{L}. \quad (29)$$

Modo 2 – Chave em bloqueio:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \lambda_0 \omega(t) = 0 \implies \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{\lambda_0}{L}\omega(t). \quad (30)$$

A dinâmica mecânica, regida pela Segunda Lei de Newton para sistemas rotacionais, é independente do estado da chave e descrita por:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = T_M - B_f \omega(t) - \tau. \quad (31)$$

Sabendo que o torque eletromagnético proporcionado pelo motor é proporcional à corrente ($T_M = k_t i(t)$), tem-se:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{k_t}{J}i(t) - \frac{B_f}{J}\omega(t) - \frac{\tau}{J}. \quad (32)$$

Definindo o vetor de estados $x(t) = [i(t) \quad \omega(t)]'$, o sistema é representado na forma afim chaveada $\dot{x}(t) = Ax(t) + b_i$, com $i \in \{1, 2\}$, onde:

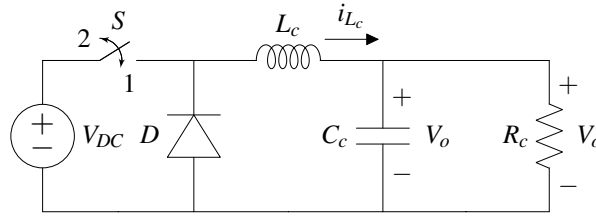
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{\lambda_0}{L} \\ \frac{k_t}{J} & -\frac{B_f}{J} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_{DC}}{L} \\ -\frac{\tau}{J} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau}{J} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

4.2 CONVERSOR BUCK

Conversores CC–CC são amplamente utilizados em sistemas eletrônicos para realizar a adaptação de níveis de tensão contínua. Entre as diversas topologias existentes, o conversor *buck* é empregado quando o objetivo de projeto é obter uma tensão de saída inferior à tensão de entrada.

O circuito elétrico equivalente do conversor *buck* considerado neste trabalho é apresentado na Figura 3. Ele é composto, em sua forma básica, por uma fonte de alimentação V_{in} , uma chave eletrônica de potência S , um diodo de roda livre D e um filtro passa-baixas de segunda ordem,

Figura 3 – Modelo de um conversor do tipo *buck* controlado por uma chave.



Fonte: Adaptado de Lima (2019).

formado por um indutor L e um capacitor C que alimentam uma carga resistiva R . O controle da tensão de saída é realizado por meio do acionamento da chave, que alterna entre os estados de condução e bloqueio, definindo os dois modos de operação do sistema.

As variáveis de estado escolhidas para a modelagem são a corrente no indutor $i_L(t)$ e a tensão no capacitor $v_C(t)$, que também representa a tensão de saída na carga. Os parâmetros do modelo são a indutância L , a capacitância C , a resistência de carga R e a tensão de entrada V_{in} . As equações dinâmicas para cada modo são apresentadas a seguir:

Modo 1 – Chave em condução: Neste estado, a chave conecta a fonte de entrada ao filtro LC. Aplicando-se as leis de Kirchhoff, obtém-se:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = V_{in} - v_C(t) \implies \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L}v_C(t) + \frac{V_{in}}{L}, \quad (34)$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_L(t) - \frac{v_C(t)}{R} \implies \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{RC}v_C(t). \quad (35)$$

Modo 2 – Chave em bloqueio: Quando a chave é aberta, a continuidade da corrente no indutor é garantida pelo diodo de roda livre, e as equações tornam-se:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = -v_C(t) \implies \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L}v_C(t), \quad (36)$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_L(t) - \frac{v_C(t)}{R} \implies \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{RC}v_C(t). \quad (37)$$

Ao definir o vetor de estados $x(t) = [i_L(t) \quad v_C(t)]'$, o sistema pode ser representado na forma afim chaveada $\dot{x}(t) = Ax(t) + b_i$, com $i \in \{1, 2\}$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Assim como no caso do motor CC, o conversor *buck* é descrito por uma estrutura de sistema chaveado, cujo ponto de equilíbrio de interesse será determinado pela lei de chaveamento aplicada.

5 CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS AFINS

Neste capítulo, apresenta-se o estado da arte referente ao projeto de leis de chaveamento para sistemas chaveados afins. O objetivo principal é estabelecer as condições de estabilidade para o sistema em malha fechada utilizando funções de Lyapunov múltiplas e LMIs.

Inicialmente, define-se a formulação do problema de controle e a reescrita da dinâmica em termos do erro de seguimento. Na sequência, são descritas as leis de chaveamento baseadas na maximização de funções auxiliares e variações que permitem o tratamento de incertezas paramétricas e o uso de filtros *washout*. Por fim, as técnicas apresentadas são aplicadas aos modelos de estudo deste trabalho para avaliação de desempenho. Essa seção não traz novidades, apenas o estado da arte na literatura.

5.1 LEI DE CHAVEAMENTO BASEADA EM $\max(v_i(t))$

Considere um sistema chaveado composto por m subsistemas afins, descrito por

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}, \quad (39)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, enquanto $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b_i \in \mathbb{R}^n$ são as matrizes e vetores constantes de cada modo. A evolução temporal do sistema é determinada por uma lei de chaveamento $\sigma(t) \in \mathcal{M}$, que indica o subsistema ativo a cada instante.

O objetivo do controle é projetar $\sigma(t)$ de forma que o sistema em malha fechada apresente estabilidade global assintótica em torno de um equilíbrio desejado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Para facilitar o projeto, define-se o erro de seguimento como

$$e(t) := x(t) - \bar{x}, \quad (40)$$

o que permite reescrever a dinâmica (39) como

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i, \quad k_i = A_i \bar{x} + b_i. \quad (41)$$

Dessa forma, a estabilização de $x(t)$ em $\bar{x}$ torna-se equivalente ao problema de conduzir o erro $e(t)$ à origem.

Para resolver este problema, uma abordagem comum na literatura (Dezuo, 2010) utiliza múltiplas funções auxiliares de Lyapunov, uma associada a cada subsistema. Neste trabalho, será abordado o caso particular de uma lei de chaveamento definida pela escolha do modo de operação que apresenta o maior valor entre as funções auxiliares $v_i(e(t))$ associadas a cada modo, na forma:

$$\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}. \quad (42)$$

Esta lei, dependente dos estados, visa garantir a estabilidade da origem mesmo diante da ocorrência de modos deslizantes. A função de Lyapunov candidata para o sistema em malha

fechada é, portanto:

$$V(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}. \quad (43)$$

E considera-se que as funções auxiliares $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$ possuem a seguinte estrutura particular, composta por termos quadráticos e lineares:

$$v_i(e(t)) = e(t)'P_i e(t) + 2e(t)'S_i, \quad (44)$$

onde $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^n$ são matrizes a serem determinadas.

Para a formulação das condições de projeto, utilizam-se os vetores auxiliares $\theta, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$, onde $e_\theta = \theta \otimes e$, $\theta_i \in \Theta$ (conforme (26)) e $\bar{\theta}_i$ é definido conforme a Nota 1. Sejam $\mathfrak{K}_\theta$ o anulador linear de θ e $\alpha_i > 0$ constantes de projeto conforme a Nota 2. Definem-se as matrizes auxiliares (45-49):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_m \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & S_m \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_n & \cdots & \alpha_m I_n \end{bmatrix}, \quad \bar{P} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i, \quad (47)$$

$$\Psi_T = \begin{bmatrix} A'P + P'A & * \\ K'P + S'A & K'S + S'K \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\Phi_T = \begin{bmatrix} \alpha'(P - \bar{P}I_a) + (P' - I_a'\bar{P})\alpha & * \\ 2S'\alpha & 0_{m \times m} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

As condições de projeto para a lei de chaveamento são sumarizadas no Teorema 1.

Teorema 1 (Trofino et al. (2011)). *Seja $\bar{x}$ o equilíbrio desejado para o sistema afim (39). Supondo a existência de $\bar{\theta} \in \Theta$ e utilizando as notações (45-49), se existirem matrizes P , S e L que satisfaçam as seguintes condições:*

$$\bar{P} > 0, \quad (50)$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0, \quad (51)$$

$$Q_{a_T}'(\Psi_T + \Phi_T + LC_{b_T}(\theta) + C_{b_T}(\theta)'L')Q_{a_T} < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta), \quad (52)$$

onde Q_{a_T} é a base do espaço nulo de $C_{a_T} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times mn} & 1_m \end{bmatrix}$ e $C_{b_T}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathfrak{K}_\theta \otimes I_n & 0_{rn \times m} \end{bmatrix}$, então a origem do erro sob a lei de chaveamento (43) é globalmente assintoticamente estável e $V(e(t))$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Demonstração. A prova divide-se em duas etapas: primeiro, demonstra-se que a escolha de $v_i(e(t))$ satisfaz os requisitos de positividade da função candidata de Lyapunov $V(e(t))$, em seguida, verifica-se que sua derivada ao longo das trajetórias do sistema é negativa.

Considere que a função de Lyapunov pode ser expressa como uma combinação convexa das funções auxiliares $v_i(e(t))$:

$$V(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) v_i(e(t)), \quad (53)$$

onde $\theta_j = 0$ se $j \notin \sigma(e(t))$. Para garantir a positividade de $V(e(t))$ de forma menos conservadora do que exigir que cada $v_i(e(t))$ individual seja positiva, utiliza-se a condição para $\theta = \bar{\theta}$. Assim, com a notação de (44) e as condições LMIs (51), tem-se:

$$V(e(t)) \geq \bar{V}(e(t)) = e(t)' \bar{P} e(t) > 0, \quad \forall e(t) \neq 0. \quad (54)$$

Como $\bar{P} > 0$, $V(e(t))$ é positiva definida e radialmente ilimitada. Além disso, existem funções de classe $\mathcal{K}_\infty$ que limitam $V(e(t))$ superior e inferiormente:

$$\lambda_{\min}(\bar{P}) \|e(t)\|^2 \leq V(e(t)) \leq \max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e(t)\|)\}, \quad (55)$$

onde $\beta_i(\|e(t)\|) := \|P_i\| \|e(t)\|^2 + 2\|S_i\| \|e(t)\|$, garantindo que a função não apresente singularidades.

Na sequência, é demonstrada a obtenção da desigualdade (52). A função (43) será decrescente se houver uma combinação convexa de θ_i tal que

$$\sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) \dot{v}_i(e(t)) < 0. \quad (56)$$

Como $\theta_i(e(t))$ é incerto, porém está contido no simples Θ , assumimos que será necessário resolver a LMI múltiplas vezes. A seguir, substituindo $\dot{v}_i(e(t))$, temos:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i \left(\dot{e}(t)' P_i e(t) + e(t)' P_i \dot{e}(t) + \dot{e}(t)' S_i + S_i' \dot{e}(t) \right) < 0. \quad (57)$$

Substituindo a dinâmica $\dot{e}(t) = A_\theta e(t) + K_\theta$, definidos de acordo com:

$$A_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i A_i, \quad K_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i k_i, \quad (58)$$

obtem-se:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i \left((A_\theta e(t) + K_\theta)' P_i e(t) + e(t)' P_i (A_\theta e(t) + K_\theta) + (A_\theta e(t) + K_\theta)' S_i + S_i' (A_\theta e(t) + K_\theta) \right) < 0, \quad (59)$$

que ao aplicar a propriedade matricial de reversão do produto resulta em:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i ((e(t)'A'_\theta + K'_\theta)P_i e(t) + e(t)'P_i(A_\theta e(t) + K_\theta) + (e(t)'A'_\theta + K'_\theta)S_i + S'_i(A_\theta e(t) + K_\theta)) < 0, \quad (60)$$

e por sua vez:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i (e(t)'(A'_\theta P_i + P_i A_\theta)e(t) + (K'_\theta P_i + S'_i A_\theta)e(t) + e(t)'(P_i K_\theta + A'_\theta S_i) + K'_\theta S_i + S'_i K_\theta) < 0. \quad (61)$$

Por fim, considerando a seguinte notação:

$$P_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i P_i, \quad S_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i S_i, \quad (62)$$

a LMI pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta & \star \\ K'_\theta P_\theta + S'_\theta A_\theta & K'_\theta S_\theta + S'_\theta K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \quad (63)$$

Entretanto, exigir que esta condição valha para qualquer combinação de $\dot{v}_i(e(t))$ é conservador. Como o interesse reside apenas no decrescimento da função máxima $V(e(t))$, a condição anterior precisa ser satisfeita apenas quando

$$\sum_{i=1}^m \theta_i v_i(e(t)) - \bar{V}(e(t)) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^m \theta_i (e(t)'P_i e(t) + 2e(t)'S_i) - e(t)'\bar{P}e(t) \geq 0. \quad (64)$$

Aplicando o Procedimento-S com as constantes de relaxação α_i , define-se $\alpha_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i \alpha_i$ para obter:

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) & \star \\ K'_\theta P_\theta + S'_\theta A_\theta + 2S'_\theta \alpha_\theta & K'_\theta S_\theta + S'_\theta K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \quad (65)$$

Neste ponto, adota-se uma postura conservadora ao tratar $\theta(e(t))$ como um parâmetro variante no tempo θ , livre no simplex unitário Θ , ignorando sua dependência explícita de $e(t)$. Utilizando a notação compacta de (45-49), a desigualdade acima é reescrita como:

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (A + \alpha)'P + P'(A + \alpha) - \alpha'\bar{P}I_a - I'_a\bar{P}\alpha & \star \\ K'P + S'A + 2S'\alpha & K'S + S'K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (66)$$

Considerando $K\bar{\theta} = 0$ devido à condição (28) e $S\bar{\theta} = 0$ devido à (51), é possível verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\theta} \end{bmatrix}' \Psi_T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (67)$$

Desta forma é possível reescrever (66) como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' \Psi_T \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix}' \Psi_T \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0. \quad (68)$$

Com $C_{a_T}, C_{b_T}(\theta)$ em (69) tais que

$$C_{a_T} \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0, \quad C_{b_T}(\theta) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (69)$$

Aplicando o Lema de Finsler é possível reescrever (68) inserindo a matriz $C_{b_T}(\theta)$ que contém os anuladores lineares como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix}' (\Psi_T + LC_{b_T}(\theta) + C_{b_T}(\theta)'L') \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0 \quad (70)$$

para qualquer matriz L de dimensões adequadas. Considerando o espaço nulo de C_{a_T} e aplicando novamente o Lema de Finsler, é possível obter a LMI em (52) como uma condição suficiente para a estabilidade do sistema chaveado.

□

Nota 1. Para o problema apresentado neste capítulo, $A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) < 0$ é uma condição necessária para que (65) seja satisfeita. Como $\bar{\theta} \in \Theta$, isso implica que no caso $\theta = \bar{\theta}$, que $A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta < 0$, e portanto que $A_{\bar{\theta}}$ deve ser Hurwitz estável pois $P_{\bar{\theta}} = \bar{P} > 0$.

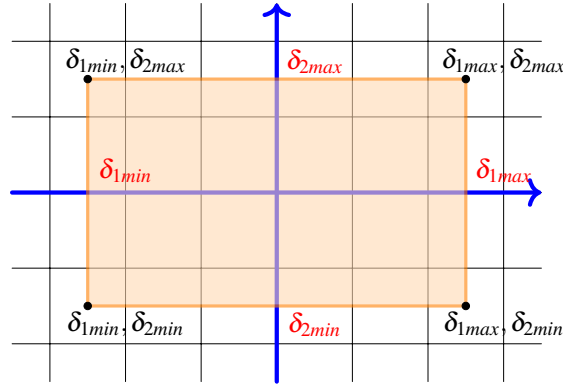
Nota 2. Embora as constantes α_i não entrem linearmente na LMI, sua escolha pode ser orientada pela dinâmica dos subsistemas. Observe que $A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) < 0$ pode ser reescrita como $(A_\theta + \alpha_\theta I_n)'P_\theta + P_\theta(A_\theta + \alpha_\theta I_n) - 2\alpha_\theta\bar{P} < 0$. E portanto recomenda-se $0 < \alpha_i < |\underline{\lambda}_i|$, onde $\underline{\lambda}_i$ é a parte real do autovalor estável de A_i mais próximo do eixo imaginário, aproximando o requisito ao desempenho exponencial.

5.2 ROBUSTEZ

Devido à propriedade de convexidade característica das LMIs, qualquer combinação convexa entre soluções de uma LMI também será uma solução válida. Isso significa, portanto que para um caso como ilustrado na Figura 4, que representa uma incerteza politópica de duas dimensões (δ_1 e δ_2), a resolução simultânea da LMI em todos os vértices de um polítopo, garante que a solução seja válida para qualquer ponto em seu interior.

Esta propriedade permite realizar a análise de estabilidade de forma robusta, o que é fundamental em aplicações práticas onde os parâmetros variam dentro de limites conhecidos ou não podem ser medidos com precisão. Um exemplo comum é a tolerância em componentes passivos, como indutores, cujos valores nominais podem apresentar variações significativas (Mohan et al., 1999).

Figura 4 – Representação de incertezas δ em duas dimensões.



Fonte: Do próprio autor.

Para exemplificar, considere um sistema chaveado afim com dois modos de operação e uma incerteza paramétrica $\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$. Para garantir a estabilidade robusta, a LMI de projeto deve ser resolvida simultaneamente para os quatro vértices do problema:

$$1) \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0, \quad \delta_{\min}, \quad (71)$$

$$2) \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0, \quad \delta_{\max}, \quad (72)$$

$$3) \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \delta_{\min}, \quad (73)$$

e

$$4) \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \delta_{\max}. \quad (74)$$

Note que, embora existam dois parâmetros θ , eles estão vinculados de forma convexa ($\theta_2 = 1 - \theta_1$) pelo Simplex definido em (26). Isso significa que o número de LMIs cresce linearmente com o número de modos do sistema chaveado. Apesar disso, para cada incerteza do sistema o número de vezes que a LMI (52) precisa ser resolvida dobra.

5.3 VARIAÇÃO COM FILTRO WASHOUT

Uma variação importante da técnica apresentada na Seção 5.1 pode ser aplicada em sistemas onde parte da condição de equilíbrio é desconhecida, como em sistemas descritos por:

$$\dot{x}(t) = A_i(\delta)x(t) + b_i(\delta) \quad (75)$$

Um exemplo de sistema que apresenta esse comportamento é um inversor do tipo *buck*, operando com carga desconhecida, o que resulta em uma corrente de equilíbrio indefinida. Para

contornar esse problema, utiliza-se um filtro *washout*, que consiste em um filtro passa-altas de primeira ordem. Dado que este filtro elimina a componente contínua de um sinal (tendendo a zero em regime permanente), ele permite que o controle seja computado para atingir a origem de um conjunto de variáveis conhecidas em conjunto ao estado nulo do sinal filtrado, independentemente do valor real da variável de equilíbrio desconhecida.

Considere que o vetor de saídas $y(t)$ é composto por variáveis com equilíbrios conhecidos $y_c(t)$ e desconhecidos $y_d(t)$:

$$y(t) := \begin{bmatrix} y_c(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix}, \quad (76)$$

que podem ser apresentados como

$$y_d(t) = C_d x(t) \in \mathbb{R}^{n_d}, \quad (77)$$

$$y_c(t) = C_c x(t) \in \mathbb{R}^{n_y - n_d}. \quad (78)$$

E portanto

$$C := \begin{bmatrix} C_c \\ C_d \end{bmatrix}. \quad (79)$$

O filtro *washout* possui a função de transferência dada por:

$$y_f(s) = \frac{s}{s + \omega} y_d(s), \quad (80)$$

onde ω é a frequência de corte a ser definida pelo projetista, $y_d(t)$ é o sinal a ser filtrado e $y_f(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ é o sinal resultante. O sistema aumentado, que combina a dinâmica incerta (75) com a do filtro (80), é representado no espaço de estados por:

$$\dot{x}_a(t) = A_{a_i}(\delta) x_a(t) + b_{a_i}(\delta), \quad (81)$$

$$y_c(t) = C_{a_c} x_a(t), \quad y_f(t) = C_{a_f} x_a(t), \quad (82)$$

onde

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}, \quad (83)$$

$$A_{a_i}(\delta) = \begin{bmatrix} A_i(\delta) & 0_{n \times n_d} \\ C_d A_i(\delta) & -\omega I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad b_{a_i}(\delta) = \begin{bmatrix} b_i(\delta) \\ C_d b_i(\delta) \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$C_{a_c} = \begin{bmatrix} C_c & 0_{(n_y - n_d) \times n_d} \end{bmatrix} \text{ e } C_{a_f} = \begin{bmatrix} 0_{n_d \times n} & I_{n_d} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Neste caso, as estruturas das matrizes P_i e S_i são compostas conforme (86), e há a necessidade de matrizes auxiliares $Q_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $R_i \in \mathbb{R}^{n_y}$.

$$P_i = P_0 + C'Q_iC, \quad S_i = S_0 + C'R_i, \quad \forall i \in \mathcal{M}. \quad (86)$$

Considerando que o objetivo é levar o sistema original ao equilíbrio $\bar{x}(\delta)$ e que $y_f(t)$ deve anular-se em regime permanente, o ponto de repouso do sistema aumentado é

$$x_a(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ 0_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_a(\delta) := \begin{bmatrix} \bar{x}(\delta) \\ 0_{n_d} \end{bmatrix},$$

o erro de seguimento é definido como $e_a(t, \delta) = x_a(t) - \bar{x}_a(\delta)$. Note que, ao calcular o erro de saída $\varepsilon_a(t)$, o termo referente à variável desconhecida y_d desaparece da lei de controle, uma vez que o filtro garante que y_f tenda a zero quando y_d atinge qualquer patamar constante.

$$\varepsilon_a(t) := \begin{bmatrix} y_c(t) - \bar{y}_c \\ y_f(t) \end{bmatrix} = C_a e_a(t, \delta), \quad C_a = \begin{bmatrix} C_{a_c} \\ C_{a_f} \end{bmatrix} \quad (87)$$

Dessa forma, a técnica de controle chaveado pode ser aplicada diretamente sobre o sistema aumentado, garantindo a estabilidade da origem de $e_a(t, \delta)$ e, conseqüentemente, o rastreamento das referências desejadas mesmo sem o conhecimento prévio de todos os termos afins do sistema original.

5.4 CONTROLE CHAVEADO EM SISTEMAS DISCRETOS

Além da formulação em tempo contínuo, abordagens baseadas em sistemas discretos são amplamente utilizadas no contexto de controle chaveado. Nesses casos, a dinâmica do sistema é descrita por equações a diferenças, na forma

$$x[k+1] = A_i x[k] + b_i, \quad i \in \mathcal{M}, \quad (88)$$

em que $k \in \mathbb{Z}^+$ representa o instante discreto de amostragem. De maneira análoga ao caso contínuo, o sistema evolui segundo uma lei de chaveamento $\sigma[k]$ que determina o modo ativo a cada passo, podendo também ser definida como uma função dos estados.

Trabalhos como o de (Weise, 2019) exploram esta abordagem para sistemas chaveados afins utilizando a formulação discreta e múltiplas funções de Lyapunov. O projeto baseia-se na maximização da função de Lyapunov para derivar as condições de estabilidade. De forma semelhante, autores como (Deaecto et al., 2010) abordam o problema em tempo discreto utilizando uma função quadrática comum a todos os modos, mas empregando uma lei de chaveamento baseada na escolha do modo de operação que resulta na menor variação da função de energia, ou seja:

$$\sigma(x[k]) := \arg \min_{i \in \mathcal{M}} \{\Delta V_i(x[k])\}. \quad (89)$$

Nesta configuração, a comutação é realizada selecionando-se o modo que proporciona a maior taxa de decaimento para a função de Lyapunov no instante atual, tendo em vista a expectativa de que o ΔV_i seja negativo.

A principal diferença em relação ao caso contínuo reside na forma como a estabilidade é analisada, sendo baseada na variação das funções de Lyapunov entre instantes consecutivos, isto é, na diferença $V(x[k+1]) - V(x[k])$. Além disso, a natureza discreta do tempo elimina a ocorrência de fenômenos como *chattering* no sentido clássico, uma vez que as comutações ocorrem apenas em instantes bem definidos.

Por outro lado, a formulação discreta pode introduzir desafios quanto à escolha do período de amostragem T_s e à fidelidade da aproximação da dinâmica contínua. Em particular, a discretização exige ajustes nas LMIs de projeto: como o sistema permanece confinado a um único modo durante todo o intervalo T_s , podem ocorrer situações em que a função de Lyapunov cresça temporariamente antes da próxima decisão de chaveamento, especialmente nas proximidades da origem. Para tratar esse fenômeno, são incorporadas condições adicionais que garantem que as trajetórias converjam para uma vizinhança limitada do equilíbrio. Consequentemente, o objetivo de controle deixa de ser a estabilidade assintótica pontual e passa a ser a estabilidade prática.

Neste trabalho, embora o foco esteja na formulação contínua, elementos da formulação discreta são utilizados como suporte para a construção de algumas condições de projeto.

5.5 ESTABILIDADE PRÁTICA E REGIÃO DE CONVERGÊNCIA

Em sistemas chaveados afins, especialmente na formulação discreta, a estabilidade assintótica global em direção a um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ pode ser inviabilizada quando este não coincide com o ponto de repouso natural de nenhum dos subsistemas individualmente. Nesses casos, busca-se garantir a denominada “estabilidade prática”, assegurando que as trajetórias do sistema converjam para uma vizinhança limitada do equilíbrio, definida como região de convergência Λ (Weise, 2019).

Considere o erro de rastreamento $e[k] = x[k] - \bar{x}$. A região de convergência é definida como um conjunto invariante baseado em uma função de Lyapunov, tal que, para qualquer estado fora de Λ , a variação da função de Lyapunov seja negativa ($\Delta V < 0$). Matematicamente, o conjunto é delimitado pelo nível unitário da função candidata:

$$\Lambda := \{e[k] \in \mathbb{R}^n : V(e[k]) \leq 1\}. \quad (90)$$

A condição para que o sistema se encontre fora da região de convergência, $V(e[k]) > 1$, pode ser escrita na forma quadrática aumentada:

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_\theta & * \\ S'_\theta & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix} > 0. \quad (91)$$

Para incorporar essa restrição ao problema de otimização, associam-se as matrizes P e S a escalares positivos β_i e β_θ , definidos pelo projetista, assim como os escalares α_i e α_θ . Utilizando

uma combinação convexa $\beta_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i \beta_i$ e aplicando o Procedimento-S, é possível relaxar a condição de estabilidade original. Ao introduzir variáveis de folga L via Lema de Finsler para tratar as incertezas paramétricas e a lei de chaveamento, chega-se à LMI de estabilidade prática:

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}' (\Psi_W + \Phi_W + \Omega + LC_{b_W}(\theta) + C_{b_W}(\theta)'L') \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (92)$$

$$Q'_{a_W} (\Psi_W + \Phi_W + \Omega + LC_{b_W}(\theta) + C_{b_W}(\theta)'L') Q_{a_W} \prec 0. \quad (93)$$

Onde Ω , que incorpora o termo de relaxação baseado em β é definido conforme (94).

$$\Omega := \begin{bmatrix} 0,5\beta'P + 0,5P'\beta & * & * \\ S'\beta & 0 & * \\ 0 & 0 & -\beta_\theta \end{bmatrix}, \quad \beta := \begin{bmatrix} \beta_1 I_n & \dots & \beta_m I_n \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Na síntese do controlador, o objetivo é minimizar o volume desta região para reduzir o erro de regime permanente. Isso é feito utilizando-se como função custo a maximização do determinante de P (ou minimização de $-\ln \det(P)$), o que equivale a reduzir o elipsoide de convergência (Boyd et al., 1994).

No entanto, conforme observado em (Weise, 2019), a execução dessa otimização considerando apenas essas condições é ilimitada. Isso faz com que a área de convergência decresça excessivamente, deixando fora dessa região, inclusive, valores de estado que seriam alcançados imediatamente depois que o sistema entrasse na zona de equilíbrio. Para evitar esse encolhimento ilimitado e garantir o confinamento adequado, a seguinte restrição de invariância deve ser imposta:

$$1 - v_i(k_j) > 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{M}. \quad (95)$$

garantindo que, uma vez que a trajetória entre em Λ , qualquer chaveamento futuro manterá o estado confinado em seu interior conjunto. Esta estratégia permite maximizar a precisão do regime permanente sem comprometer a estabilidade do sistema em malha fechada.

5.6 EXEMPLOS DE CONTROLE CHAVEADO

Nesta seção serão apresentados três exemplos simples do controle de sistemas chaveados, com as plantas descritas na Seção 4.2 e 4.1. Um caso do controle convencional, como o proposto em 5.1, um caso com um parâmetro dentro de um politopo, como a seção seguinte, e um caso com uma carga indefinida, demandando o uso da técnica com *washout*. O propósito das simulações consiste na obtenção de dados exemplo, mais simples, que serão posteriormente comparados na seção que desenvolve as técnicas aqui propostas. Essa seção traz somente exemplos ilustrativos do que já existe na literatura. As simulações foram estruturadas no MATLAB, utilizando o *parser* Yalmip em conjunto com o *solver* Mosek. Os códigos estão disponíveis no *GitHub*.

5.6.1 Exemplo 1: Controle de um motor simples

Para ilustrar o comportamento das técnicas fundamentadas no estado da arte, esta seção apresenta a simulação de um motor de corrente contínua monofásico, utilizando o modelo dinâmico discutido na Seção 4.1. O objetivo deste exemplo é observar o desempenho da lei de chaveamento ao conduzir o sistema do repouso até o ponto de equilíbrio desejado.

Os parâmetros nominais do sistema utilizados para este exemplo de simulação estão detalhados na Tabela 1, eles são parcialmente baseados em (Pinto, 2015).

Tabela 1 – Parâmetros do motor CC para o Exemplo 1.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Resistência da armadura	R	3Ω
Indutância da armadura	L	$0,3 H$
Momento de inércia	J	$0,05 kg \cdot m^2$
Coefficiente de atrito viscoso	B_f	$0,4 N \cdot m \cdot s/rad$
Constante de torque	k_t	$1,2 N \cdot m/A$
Constante f.c.e.m.	λ_0	$0,25 V \cdot s/rad$
Torque de carga	τ	$-1 N \cdot m$
Tensão de alimentação	V_{DC}	$15 V$

As condições de operação para a simulação e os parâmetros de ajuste utilizados na síntese do controle são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros de simulação e projeto para o Exemplo 1.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Frequência de chaveamento	F_{sw}	$100 kHz$
Tempo total de simulação	T_{total}	$2 s$
Referência de velocidade	ω_{des}	$10 rad/s$
Referência de corrente	$i_{L,des}$	$2,5 A$
Parâmetros de ajuste LMI	α_1, α_2	5

A solução das LMIs descritas na Seção 5.1 resultou nas matrizes P_i e S_i apresentadas em (96) e (97).

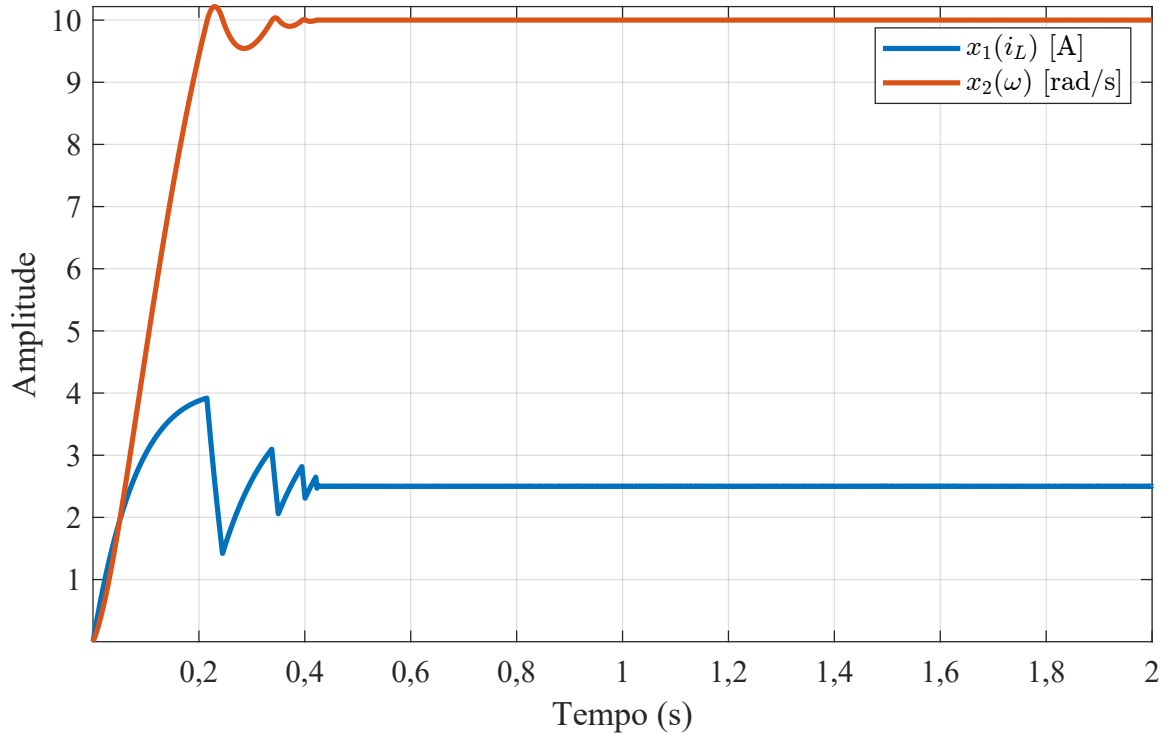
$$P_1 = \begin{bmatrix} 3,7790 & 1,2899 \\ 1,2899 & 1,3576 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3,6462 & 1,3198 \\ 1,3198 & 1,2048 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0,1871 \\ -2,3891 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0,3741 \\ 4,7781 \end{bmatrix} \quad (97)$$

Nas trajetórias da Figura 5, observa-se que a velocidade angular apresenta um comportamento subamortecido antes de atingir o regime permanente. Diferentes desempenhos, com respostas mais rápidas ou lentas, poderiam ser obtidos mediante a escolha de distintos parâmetros α_i . Cabe ressaltar que, devido à configuração nativa do ambiente de simulação utilizado

(MATLAB), as ilustrações apresentadas ao longo deste trabalho adotam o ponto como separador decimal. Simultaneamente, verifica-se na Figura 6 que o valor máximo das funções de Lyapunov decresce de forma consistente durante o transiente, conforme o esperado por projeto.

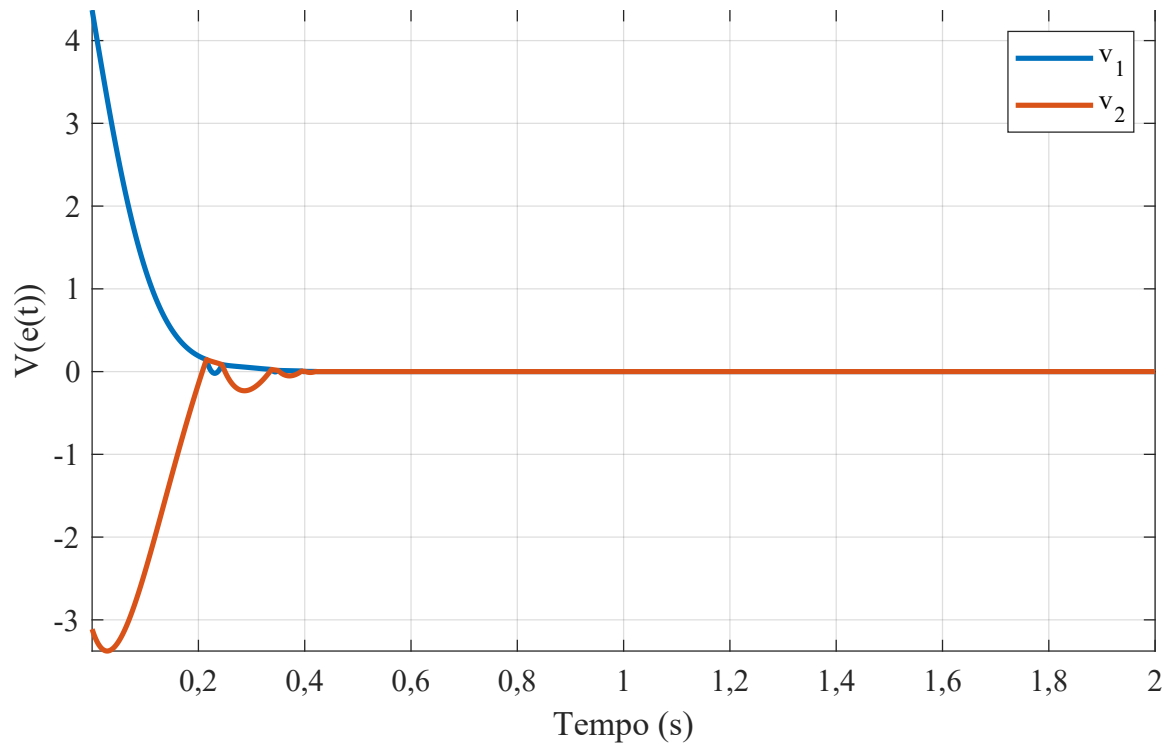
Figura 5 – Dinâmica dos estados no tempo.



Fonte: Do próprio autor (2026).

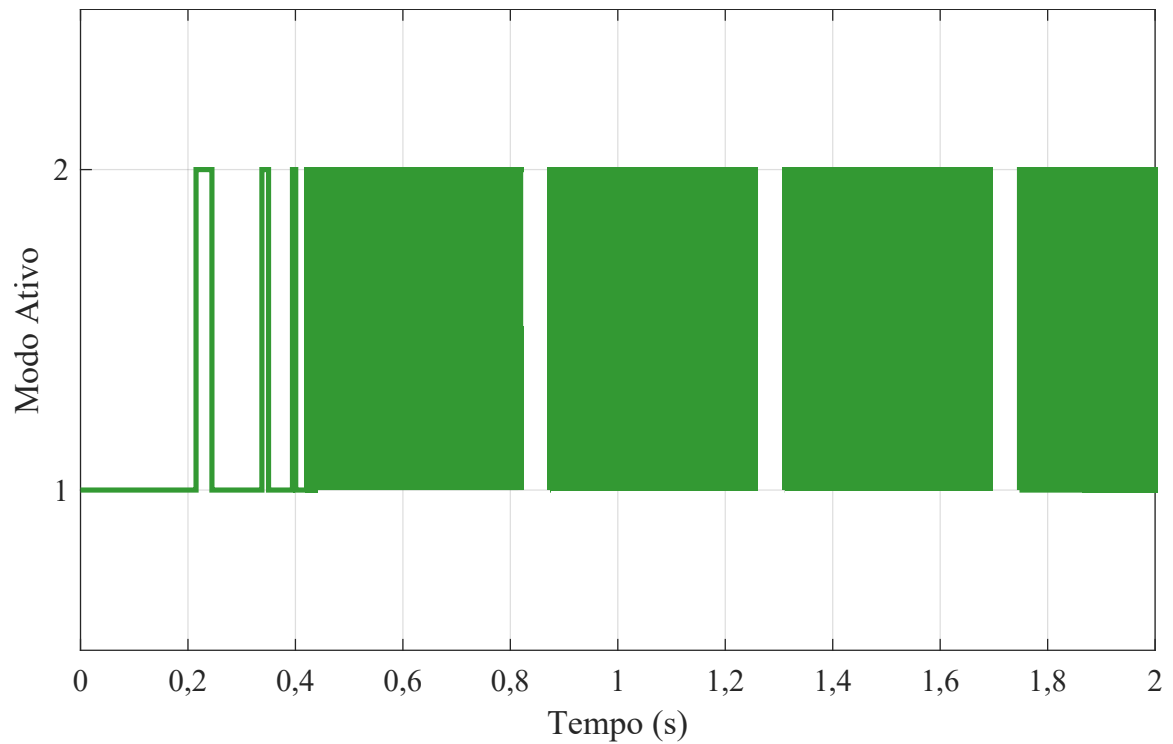
O comportamento da lei de chaveamento e o respectivo modo ativo podem ser visualizados na Figura 7. Nota-se que, inicialmente, o sistema opera em modos específicos por intervalos maiores até se aproximar da superfície de comutação, momento em que a frequência de chaveamento se eleva. Esse fenômeno é evidenciado no retrato de fase da Figura 8, onde é possível identificar a mudança na dinâmica ao cruzar as regiões de operação. Após aproximadamente 0,4 s, o sistema atinge a condição de regime em modos deslizantes.

Figura 6 – Valor das funções de Lyapunov dos diferentes modos no tempo.



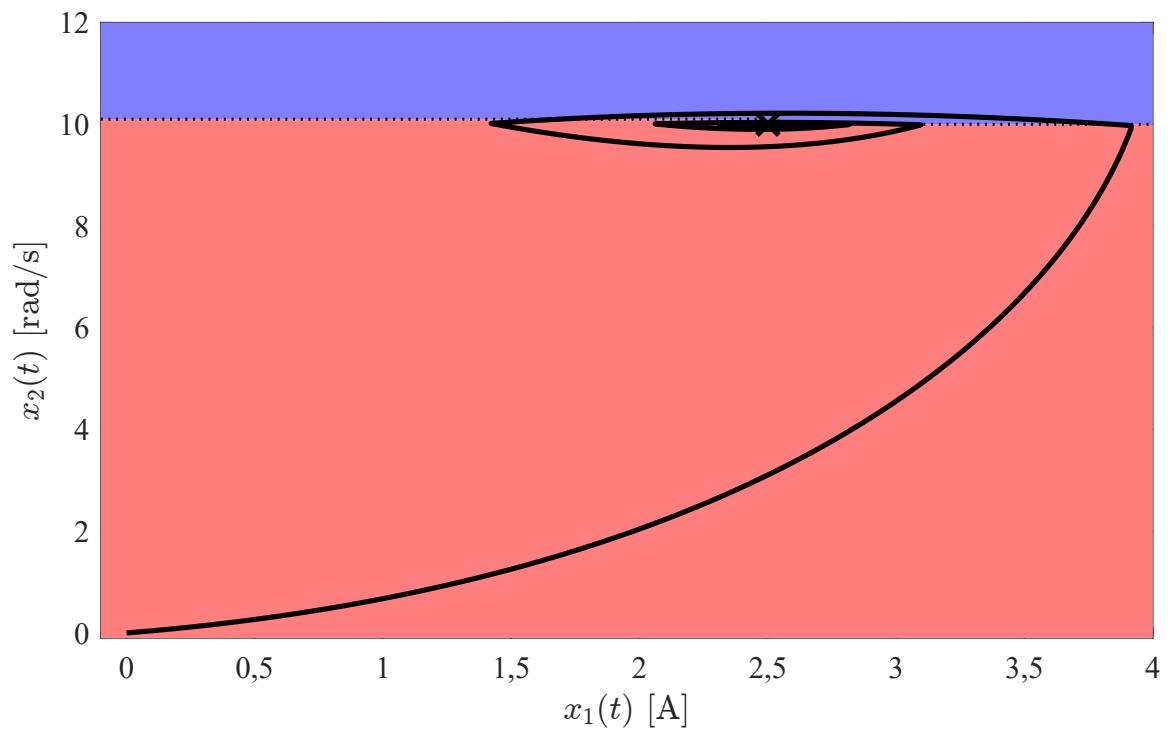
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 7 – Modo ativo da lei de chaveamento no tempo.



Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 8 – Retrato de fase do sistema.



Fonte: Do próprio autor (2026).

5.6.2 Exemplo 2: Conversor Buck com Indutância Incerta

Este segundo exemplo ilustra a aplicação de leis de chaveamento em um conversor CC–CC do tipo *buck*, considerando um cenário de incerteza paramétrica. Diferente do exemplo anterior, o projeto das LMIs é realizado de forma robusta, garantindo a estabilidade do sistema para variações na indutância do filtro de saída, conforme discutido na Seção 5.2.

O objetivo do controle é a regulação da tensão de saída $v_C(t)$ em um valor desejado, mesmo sob a variação do parâmetro L . Os parâmetros nominais do sistema e os limites de incerteza do indutor estão detalhados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros do conversor *buck* para o Exemplo 2.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Tensão de entrada	V_{in}	15 V
Tensão de saída desejada	V_{out}	10 V
Resistência de carga	R	30 Ω
Capacitância	C	100 μF
Indutância nominal	L_0	30 mH
Indutância mínima	L_{min}	25 mH
Indutância máxima	L_{max}	35 mH

As condições de simulação e os parâmetros de ajuste para a síntese do controle robusto são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros de simulação e projeto para o Exemplo 2.

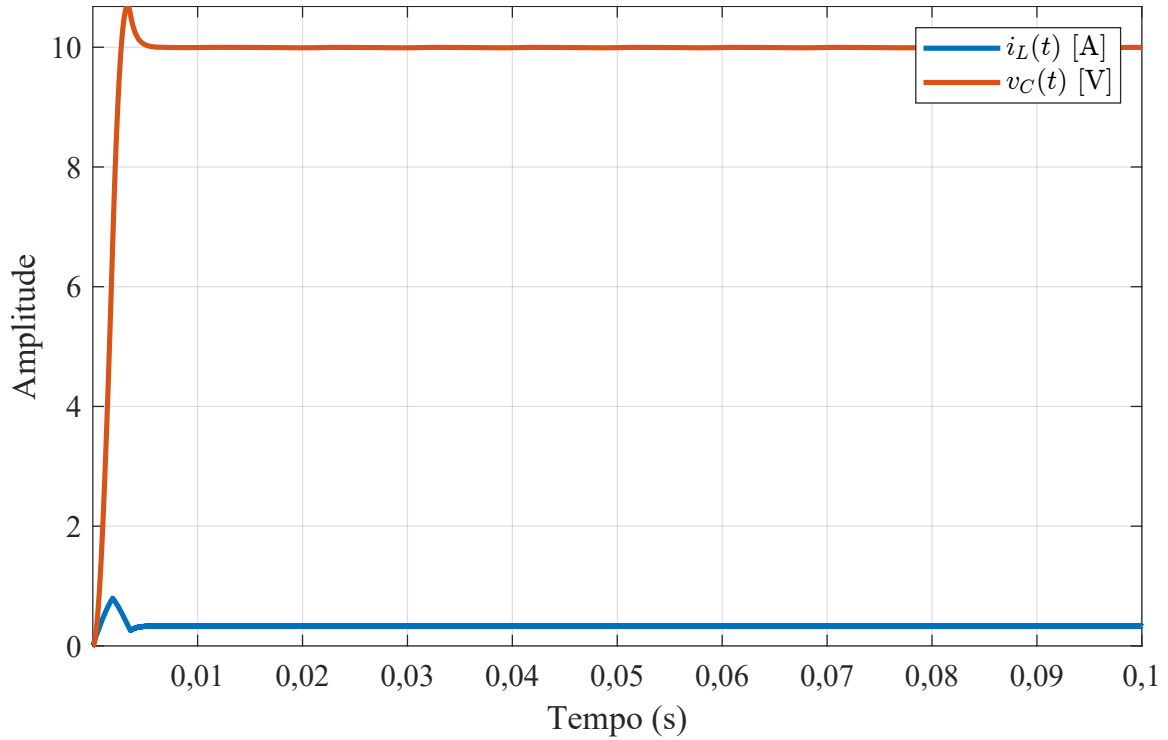
Parâmetro	Símbolo	Valor
Frequência de chaveamento	F_{sw}	100 kHz
Tempo total de simulação	T_{total}	0,1 s
Referência de corrente	$i_{L,ref}$	0,3333 A
Referência de tensão	$v_{C,ref}$	10,0 V
Parâmetros de ajuste LMI	α_1, α_2	3

Diferente da abordagem anterior, as leis de chaveamento foram sintetizadas de forma robusta, considerando os vértices do polítopo que define as incertezas paramétricas do indutor. O projeto fundamenta-se em funções de Lyapunov dependentes do modo, resultando em um conjunto de matrizes P_i e vetores de folga S_i que satisfazem as condições de estabilidade para todo o intervalo de operação $L \in [L_{min}, L_{max}]$. Por questões de concisão, os valores numéricos destas matrizes são omitidos, focando-se na análise do desempenho dinâmico e na robustez do sistema.

Os resultados da simulação numérica são apresentados nas Figuras 9 a 12. Na Figura 9, observa-se que, apesar da incerteza na indutância, a tensão de saída $v_C(t)$ converge para a referência desejada de 10 V, em cerca de 5 ms, após um *overshoot*. A Figura 10 confirma a estabilidade robusta do sistema, uma vez que a função de Lyapunov ativa, determinada pela lei de chaveamento $\sigma(e(t)) = \arg \max_i \{v_i(e(t))\}$, permanece estritamente positiva e decrescente ao

longo de toda a trajetória, mesmo frente às incertezas paramétricas. Há dois momentos onde as funções se cruzam, *sugerindo* um aumento na V , mas, na prática, isso se deve a discretização do chaveamento.

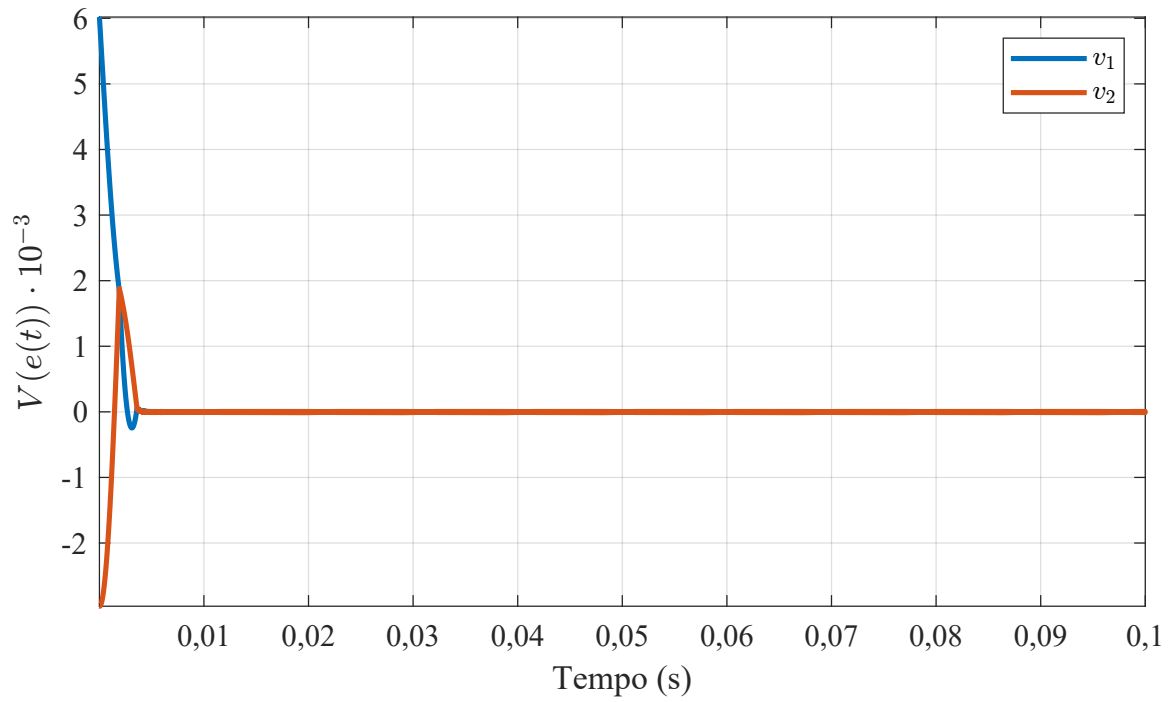
Figura 9 – Trajetória temporal dos estados para o conversor *buck*.



Fonte: Do próprio autor (2026).

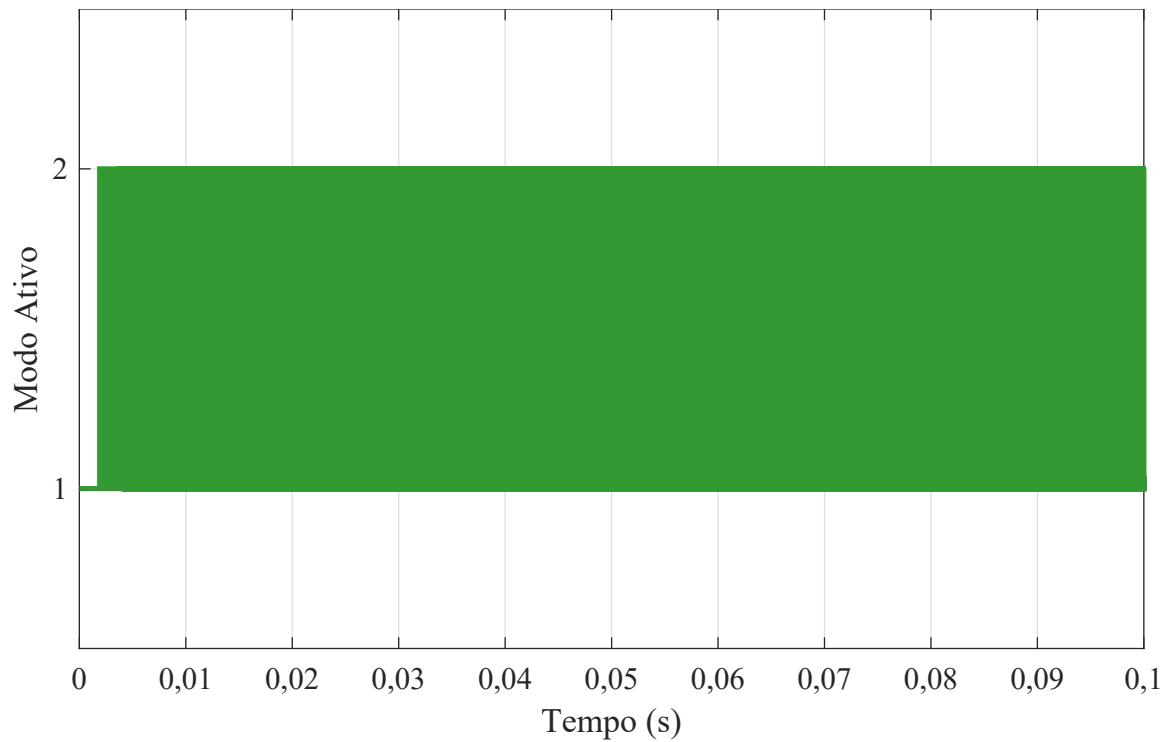
A transição para o regime permanente pode ser observada na Figura 11, onde o sistema entra em modo deslizante após o transiente inicial. O retrato de fase na Figura 12 ilustra a trajetória dos estados no plano $i_L \times v_C$, onde é possível identificar o comportamento do sistema ao atingir a superfície de comutação e manter-se na trajetória desejada, evidenciando a eficácia da estratégia de controle robusto.

Figura 10 – Evolução das funções de Lyapunov para o Exemplo 2.



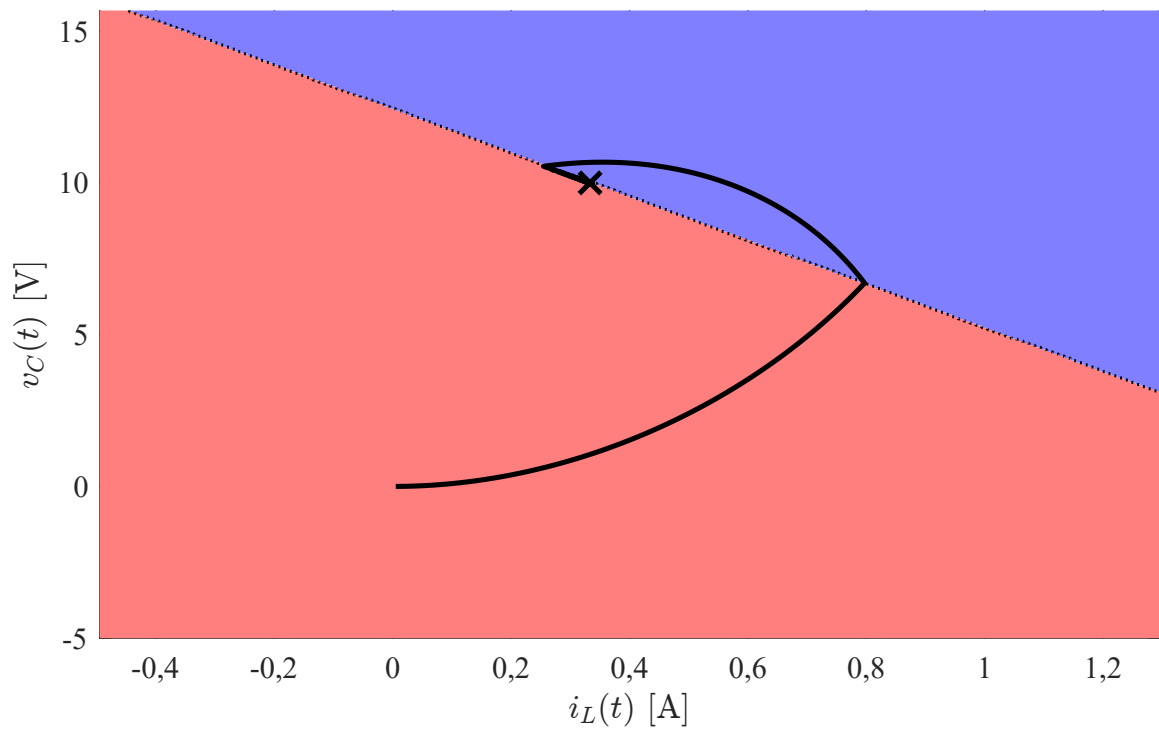
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 11 – Modo ativo da lei de chaveamento robusta para o Exemplo 2.



Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 12 – Retrato de fase e superfícies de comutação para o Exemplo 2.



Fonte: Do próprio autor (2026).

5.6.3 Exemplo 3: Conversor Buck com Carga Incerta e Filtro Washout

Neste último cenário de simulação, aborda-se o controle do conversor *buck* sob uma condição de incerteza na resistência de carga R . Como a carga é desconhecida, o ponto de equilíbrio do sistema torna-se incerto, impossibilitando o cálculo direto do erro de estado e das referências de corrente necessárias para a lei de chaveamento convencional.

Para solucionar este problema, a estratégia de controle é projetada com base no emprego de um filtro *washout*, conforme a fundamentação teórica apresentada na Seção 5.3 deste capítulo. O filtro atua sobre a variável de estado da corrente para remover sua componente de regime permanente, permitindo que a lei de chaveamento opere sobre sinais que representam puramente a dinâmica transiente e a tensão real da saída, independentemente do valor final da carga.

Os parâmetros nominais do sistema e os limites de incerteza para a resistência de carga são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros do conversor *buck* para o Exemplo 3.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Tensão de entrada	V_{in}	15 V
Tensão de saída desejada	$v_{C,ref}$	10 V
Capacitância	C	100 μF
Indutância	L	30 mH
Resistência nominal	R_0	30 Ω
Resistência mínima	R_{min}	25 Ω
Resistência máxima	R_{max}	35 Ω

As condições de simulação e os parâmetros de ajuste para o controle robusto com filtro *washout* constam na Tabela 6. Note que, devido à estratégia adotada, a referência de corrente é omitida do projeto direto.

Tabela 6 – Parâmetros de simulação e projeto para o Exemplo 3.

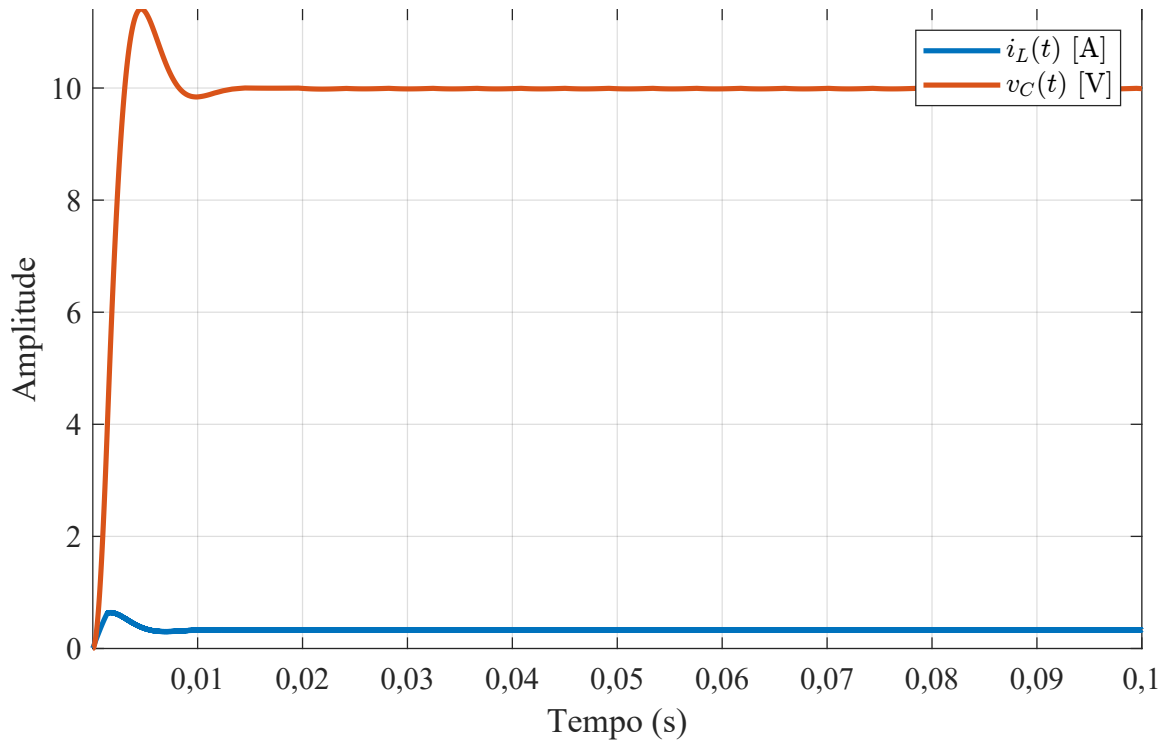
Parâmetro	Símbolo	Valor
Frequência de chaveamento	F_{sw}	100 kHz
Tempo total de simulação	T_{total}	0,1 s
Parâmetros de ajuste LMI	α_1, α_2	1

Diferente de uma implementação prática, assume-se nesta análise uma condição de “Estado Ideal” para fins de verificação da estabilidade. Embora a lei de chaveamento opere estritamente sobre os sinais filtrados e as matrizes de projeto, as funções auxiliares de Lyapunov $v_i(e(t))$ são calculadas, neste contexto, utilizando o erro real em relação ao ponto de equilíbrio nominal. Esta abordagem permite monitorar de forma fidedigna o decaimento da energia do sistema, confirmando se a estratégia baseada no filtro *washout* efetivamente conduz as variáveis físicas ao equilíbrio desejado, validando assim a robustez da técnica proposta.

Os resultados obtidos para o conversor *buck* com filtro *washout* são apresentados nas Figuras 13 a 16. Na Figura 13, observa-se que o sistema atinge a tensão de referência de 10 V,

embora apresente um tempo de acomodação superior (cerca de 3 vezes) quando comparado ao exemplo anterior. Esse comportamento é esperado, visto que a dinâmica do filtro introduz um atraso inerente na percepção do erro pelo controlador.

Figura 13 – Resposta temporal das variáveis de estado com filtro *washout*.

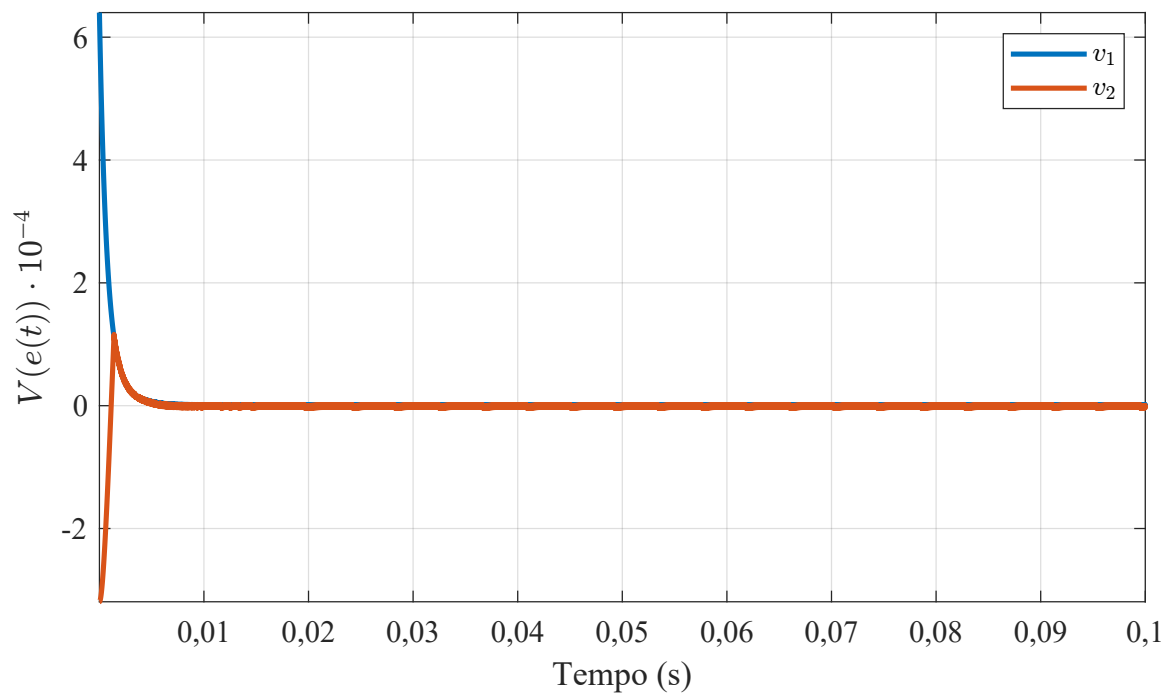


Fonte: Do próprio autor (2026).

A estabilidade do sistema é confirmada pela Figura 14, onde a função de Lyapunov ativa (calculada sobre o estado ideal) decresce de forma consistente até a estabilização. O comportamento da lei de chaveamento, ilustrado na Figura 15, demonstra a ocorrência característica de modos deslizantes durante o regime permanente, mantendo a variável de saída na referência projetada mesmo sob a incerteza da carga R .

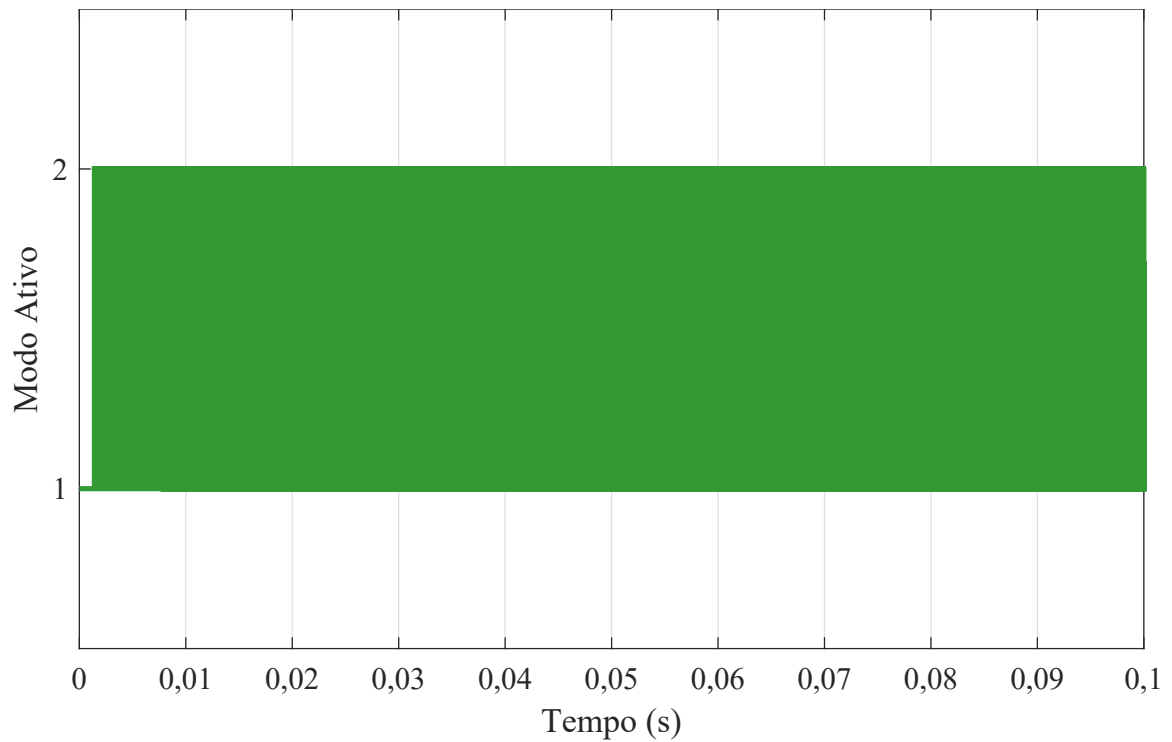
No retrato de fase apresentado na Figura 16, as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio definido em $[10 \ 0]'$. É importante ressaltar que, devido à utilização do filtro *washout*, a referência de corrente física i_L é substituída por uma referência nula para o sinal filtrado. Assim, o espaço de estados reflete a convergência da tensão para 10 V e a anulação do erro dinâmico processado pelo filtro, evidenciando que a estratégia é eficaz para contornar o desconhecimento do valor exato da resistência de carga.

Figura 14 – Função de Lyapunov ativa para o sistema com carga incerta.



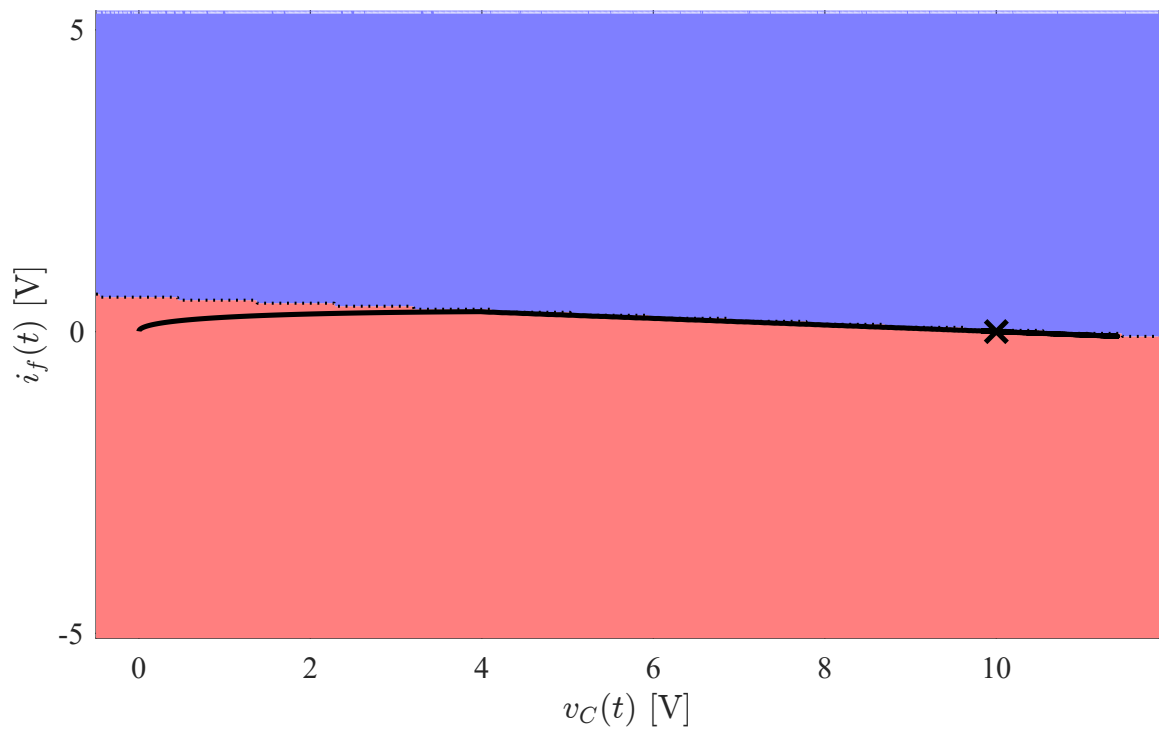
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 15 – Comportamento da lei de chaveamento $\sigma(e(t)) = \arg \max_i \{v_i(e(t))\}$.



Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 16 – Retrato de fase para o controle robusto com filtro *washout*.



Fonte: Do próprio autor (2026).

6 CONTROLE CHAVEADO COM REDUÇÃO DE CHATTERING

Este capítulo introduz uma variante da técnica de controle chaveado apresentada anteriormente, voltada à atenuação do *chattering*. A metodologia fundamenta-se na reestruturação da etapa de projeto como um problema de otimização. Para validar a proposta, apresentam-se resultados de simulação acompanhados de uma discussão sobre o desempenho e as restrições inerentes ao método desenvolvido.

6.1 MOTIVAÇÃO

As condições de projeto apresentadas no capítulo anterior permitem garantir a estabilidade de sistemas chaveados afins por meio de leis de chaveamento baseadas em funções de Lyapunov múltiplas. No entanto, tais condições não impõem restrições diretas sobre o comportamento do sinal de chaveamento.

Na prática, a ausência dessas restrições pode resultar em regimes com alta frequência de comutação — o fenômeno de *chattering* — que impacta negativamente a eficiência energética e aumenta o esforço dos componentes semicondutores. Esse efeito é particularmente crítico em aplicações de eletrônica de potência e acionamentos elétricos, onde perdas por comutação e interferência eletromagnética são gargalos de projeto (Utkin; Lee, 2006).

Dessa forma, além da garantia de estabilidade, torna-se fundamental incorporar ao problema de síntese critérios que moderem a atividade da lei de chaveamento. O objetivo é mitigar a taxa de comutação do sistema em malha fechada sem a necessidade de filtros externos ou compensações *a posteriori*.

Nesse contexto, este capítulo apresenta uma modificação nas condições baseadas em LMIs, visando a redução do *chattering* já durante a etapa de projeto, sem comprometer as propriedades de estabilidade.

6.2 AJUSTE DO PROJETO COM OTIMIZAÇÃO

A resolução dos problemas LMIs para controle chaveado, seguindo a técnica proposta na seção anterior acaba por resultar em divisões do hiperplano $\mathbb{R}^n$ do retrato de fase do sistema em diferentes regiões de operação. Um exemplo seria um problema simples de apenas dois modos e duas variáveis de estado. Neste caso, o espaço de estados poderia ser representado como um plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, e a região onde cada modo estaria ativo seria delimitada pela superfície de chaveamento. Devido ao formato das candidatas Lyapunov de cada modo, conforme Equação (44), seria uma elipse ou reta.

Ainda, conforme comentado na Nota 2, os parâmetros α_i são escolhidos pelo projetista, e estão associados à taxa de decaimento da função de Lyapunov $V(e(t))$, e portanto a performance exponencial de atingimento da referência. Na prática, a seleção de valores mais elevados para α_i

potencialmente leva a respostas transitórias mais rápidas, enquanto uma redução no parâmetro leva a respostas transitórias mais lentas, e por vezes sub amortecidas.

Conectando essas ideias, percebe-se que é possível escolher parâmetros que imponham uma maior taxa de decrescimento de um modo do que de outro, visando forçar dados formatos para a superfície de chaveamento. Assim, também é possível otimizar as LMIs para obter resultados desejados, mas sem interferir no comportamento que permite que o sistema possua soluções válidas.

Imagine a aplicação da estabilidade prática, de forma similar à proposta na Seção 5.5, através da adição da Matriz Ω e da maximização do determinante de P (uso de $-\ln \det(P)$ como função custo), mas agora para um sistema discreto. Inicialmente, observa-se que as LMIs adicionais de invariância não seriam mandatórias, pois estando em um sistema contínuo sem impor restrições de tempo entre chaveamentos, o esperado é que com uma resposta válida, o valor da função de Lyapunov apresente um contínuo decaimento. Contudo, sua adição permite a criação de uma direção onde a matriz P não conseguirá ser otimizada. Caso essa direção seja muito próximo a tangente da superfície de chaveamento para o ponto de equilíbrio, isso permite que o sistema oscile em torno desse ponto.

Cabe ressaltar que, devido às características estruturais do solver MOSEK utilizado via YALMIP, a função objetivo original $-\ln \det(P)$ é reformulada internamente para a maximização do termo geométrico $\det(P)^{1/\gamma}$, em que $\gamma = 2^{\lceil \log_2(\dim(P)) \rceil}$. Embora essa transformação modifique o valor numérico final da função custo reportado pelo solver, ela é geometricamente equivalente para fins de otimização, convergindo para a mesma matriz P ideal e garantindo, de forma análoga, a minimização do volume do elipsoide.

A metodologia proposta se baseia no sistema reescrito em função do erro, conforme em (41), fazendo também uso da informação das direções para as quais os campos vetoriais dos modos apontam na condição de equilíbrio como condição auxiliar. Nesse contexto, propõe-se a obtenção dos vetores K_{d_i} , que seriam similares ao k_i , porém na versão discreta. Tais vetores representam o quanto os estados se deslocam durante um tempo de ação de controle T_s , partindo da referência, conforme definido na Seção 5.4. Para assegurar o desejado formato para a superfície de chaveamento, é proposto então a adição de LMIs para que o valor da Função de Lyapunov possua um valor mínimo nessas direções - a condição de invariância - e por fim, realizar um ajuste nos parâmetros α e β que permita a formação desse ciclo limite. Assim, as condições de projeto para a lei de chaveamento são sumarizadas no Teorema 2.

Teorema 2. *Seja $\bar{x}$ o equilíbrio desejado para o sistema afim (39). Supondo a existência de $\bar{\theta} \in \Theta$ e utilizando as notações (103-108), se existirem matrizes P , S e L que satisfaçam as seguintes condições:*

$$\bar{P} > 0, \quad (98)$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0, \quad (99)$$

$$Q'_a(\Psi + \Phi + \Omega + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L')Q_a < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta), \quad (100)$$

$$1 - v_i(k_{d_j}) > 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{M}, \quad (101)$$

sujeitas à condição de minimização:

$$\min \quad -\ln \det \bar{P}, \quad (102)$$

onde Q_a é a base do espaço nulo de $C_a = \begin{bmatrix} 0_{1 \times mn} & 1_m & 0 \end{bmatrix}$ e $C_b(\theta) = \begin{bmatrix} \mathfrak{K}_\theta \otimes I_n & 0_{rn \times m} & 0_{rn \times 1} \end{bmatrix}$, então o sistema em malha fechada sob a lei de chaveamento (43) é globalmente praticamente estável, garantindo o confinamento das trajetórias do erro em um conjunto invariante residual em torno da origem, e a depender dos parâmetros selecionados, o sistema estabelece um ciclo limite que atua na redução do chattering.

As matrizes auxiliares, por sua vez, possuem as seguintes estruturas, similares às da Seção 5.1, porém aumentadas para Ψ , Φ e Ω :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_m \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & S_m \end{bmatrix}, \quad (104)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_n & \cdots & \alpha_m I_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 I_n & \cdots & \beta_m I_n \end{bmatrix}, \quad (105)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A'P + P'A & * & * \\ K'P + S'A & K'S + S'K & * \\ 0_{1 \times mn} & 0_{1 \times m} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (106)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \alpha'(P - \bar{P}I_a) + (P' - I'_a \bar{P})\alpha & * & * \\ 2S'\alpha & 0_{m \times m} & * \\ 0_{1 \times mn} & 0_{1 \times m} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (107)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0,5\beta'P + 0,5P'\beta & * & * \\ S'\beta & 0 & * \\ 0 & 0 & -\beta_\theta \end{bmatrix}, \quad \bar{P} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i. \quad (108)$$

Demonstração. Partindo da LMI (66), reescrita como (109) segundo a formulação original,

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' (\Psi + \Phi) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta), \quad (109)$$

podemos adicionar uma nova linha e coluna de zeros às matrizes Ψ e Φ , para posteriormente podermos somar a matriz Ω (94):

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}' (\Psi + \Phi) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta), \quad (110)$$

É importante notar que a inicial simples inclusão de linhas e colunas nulas à estrutura $(\Psi + \Phi)$ resultaria em uma matriz apenas semidefinida, impossibilitando a verificação de que toda a matriz fosse estritamente menor do que zero. No entanto para a fundamentação teórica completa é necessária a adição da matriz de relaxação Ω tal que a soma aumentada seja estritamente negativa, assim temos:

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}' (\Psi + \Phi + \Omega) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta), \quad (111)$$

A partir daqui, serão executados passos similares aos da Seção 5.1, para a adição dos anuladores C_a , C_b e Q_a , assim como a matriz L . Inicialmente, como $K\bar{\theta} = 0$ devido à condição (28) e $S\bar{\theta} = 0$ devido à (51), é possível verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (112)$$

E portanto é possível reescrever (111) como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}' (\Psi + \Phi + \Omega) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta). \quad (113)$$

Com $C_a, C_b(\theta)$ em (18) tais que

$$C_a \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad C_b(\theta) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (114)$$

e aplicando o Lema de Finsler, é possível reescrever (113) como:

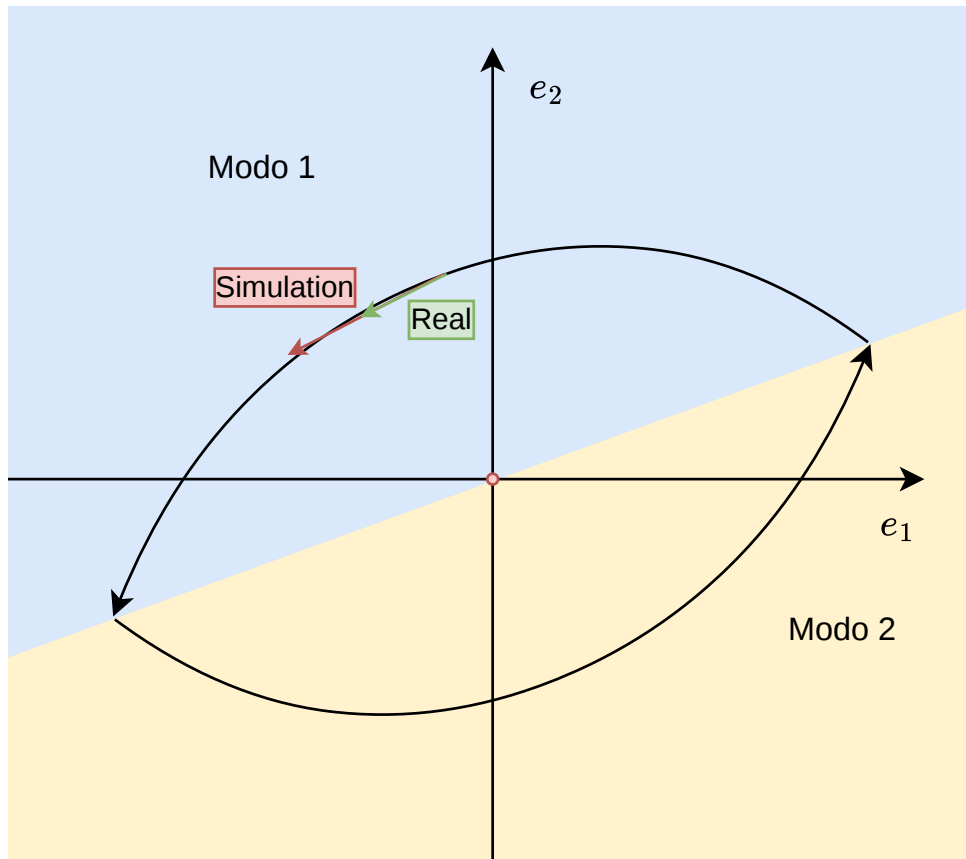
$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}' (\Psi + \Phi + \Omega + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L') \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (115)$$

para qualquer matriz L de dimensões adequadas. Considerando o espaço nulo de C_a e aplicando novamente o Lema de Finsler, é possível obter a LMI em (100) como uma condição suficiente para a estabilidade do sistema chaveado. $\square$

Nota 3. Para que seja possível o projeto com a otimização para redução do *chattering*, é necessário que a superfície de chaveamento acabe se posicionando de forma quase que paralela aos vetores K_{d_i} , e para tanto, costuma ser necessário a aplicação de um parâmetro α de valor *pequeno*, o que pode resultar em um transiente lento ou sub amortecido. Isso contudo não impede a utilização da técnica, uma vez que ela pode ser aplicada para o controle após o sistema atingir a referência desejada, caso velocidade seja de extrema importância.

Nota 4. Devido a estratégia de otimização proposta, quando a direção da dinâmica tende a uma condição de paralelismo em relação às superfícies de chaveamento, o termo $\dot{V}(e(t))$ atinge valores negativos infinitesimais, tornando o decréscimo da função sensível ao erro de truncamento numérico inerente à discretização temporal (passo de integração dt). A utilização de passos dt menores na simulação, permite a observação de que a função de Lyapunov realmente está decrescendo nessas condições, conforme apresentado na Figura 17.

Figura 17 – Representação de tangência descrita na Nota 4.



Fonte: Do próprio autor (2026).

7 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Neste capítulo, são apresentados exemplos numéricos que ilustram a aplicação da técnica desenvolvida no Capítulo 6. Os resultados obtidos simulando a técnica proposta são comparados àqueles alcançados pela abordagem convencional, apresentada na Seção 5.1. Além disso, o desempenho e os limites da metodologia proposta são avaliados diante da inserção de perturbações externas no sistema.

Os três primeiros exemplos utilizam plantas similares às descritas no Capítulo 5.1, com pequenos ajustes paramétricos. O primeiro cenário considera o sistema com parâmetros nominais conhecidos. O segundo e o terceiro exemplo abordam sistemas sujeitos a incertezas paramétricas, avaliando o impacto de variações na indutância e na carga, respectivamente. Por fim, apresenta-se uma simulação executada sob condições imprevistas de operação, na qual o modelo considerado no projeto do controlador está incorreto em relação à planta real utilizada na simulação.

7.1 CONTROLE DE UM MOTOR CC

Neste primeiro resultado, apresenta-se a simulação do controle de um motor CC com parâmetros similares aos do modelo introduzido na Seção 5.6.1 nas Tabelas 1 e 2. O objetivo é comparar o comportamento do sistema sob duas frequências distintas de simulação e atuação: 10 MHz e 30 MHz, respectivamente. Na prática, essas frequências são excessivamente altas e pouco habituais, mas para essa seção, servem para ilustrar alguns dos efeitos do uso de diferentes frequências.

Os vetores K_{d_i} , por sua vez, foram definidos para uma frequência de discretização do sistema de 10 kHz, e portanto, um passo de 100 μs . Isso implica que o resultado do controle projetado é o mesmo, independente da frequência de controle que será aplicada, o que muda é apenas a precisão do controle ao atuar. Em uma aplicação real, a diferenciação entre o comportamento dessas duas condições exigiria conversores analógico-digitais (AD) com resoluções de dezenas de bits para que tais variações fossem perceptíveis.

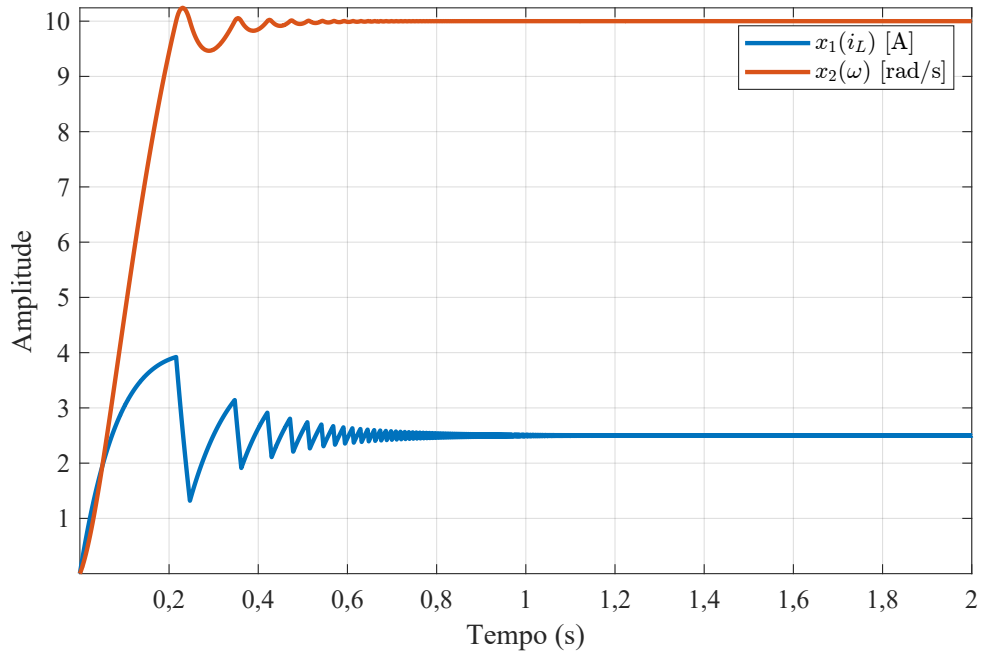
7.1.1 Resultados gerais do controle

Nesta seção, são utilizados apenas os resultados obtidos com a frequência de atuação de 10 MHz, pois, de forma geral, o comportamento dinâmico é semelhante para ambas as frequências. Na Figura 18, é possível observar que, apesar do comportamento subamortecido, os estados convergem para o equilíbrio desejado. Como esperado, enquanto o sistema busca o equilíbrio, a função de Lyapunov (Figura 19) decresce de forma consistente.

O comportamento da lei de chaveamento e o respectivo modo ativo podem ser visualizados na Figura 20. Inicialmente, o sistema opera em modos específicos por intervalos de tempo maiores até se aproximar da superfície de comutação, momento em que a frequência de chaveamento se eleva. Esse fenômeno é evidenciado no retrato de fase da Figura 21, onde é

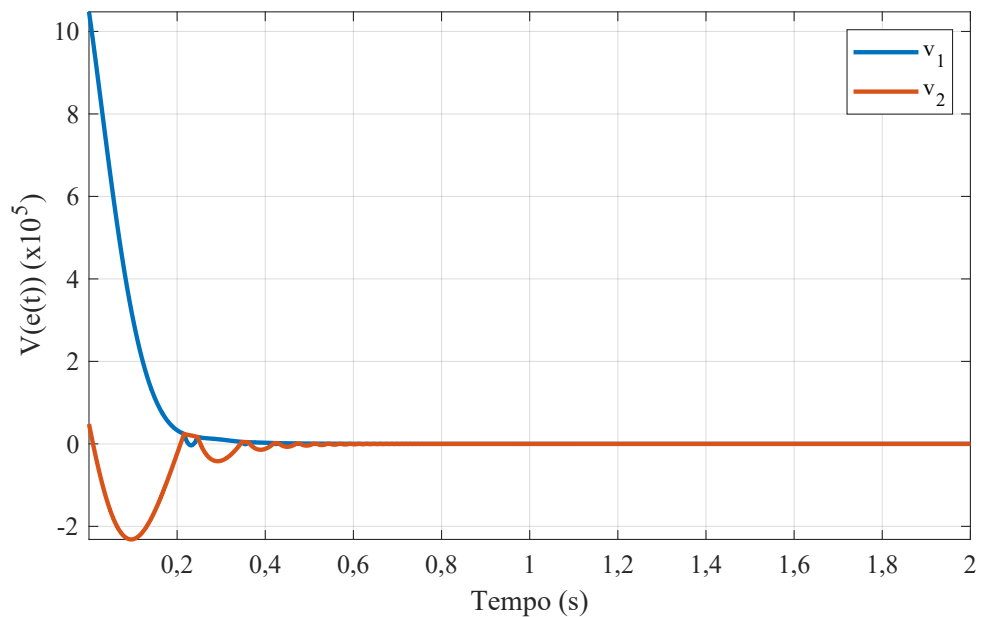
possível identificar a mudança na dinâmica ao cruzar as regiões de operação. Adicionalmente, as marcações em ciano na Figura 21 indicam as direções dos vetores k_{d_i} , revelando o proposto quase-paralelismo entre esses vetores e a superfície de chaveamento. Após aproximadamente 0,5 s, o sistema alcança valores de estado próximos aos desejados e entra no regime de oscilação controlada proposto neste trabalho.

Figura 18 – Dinâmica dos estados no tempo.



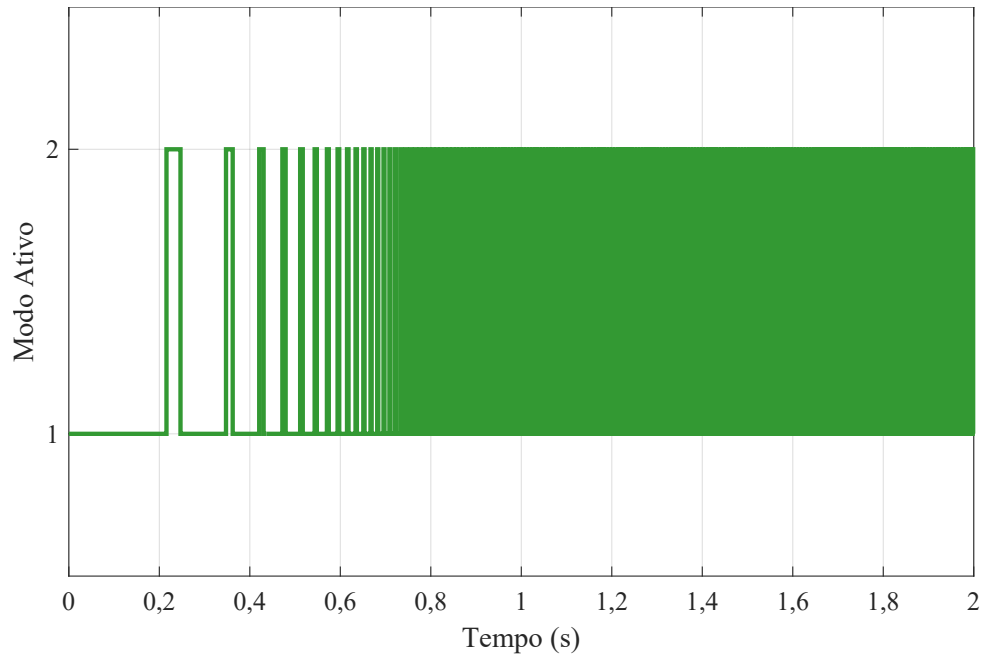
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 19 – Valor das funções auxiliares de Lyapunov dos diferentes modos no tempo.



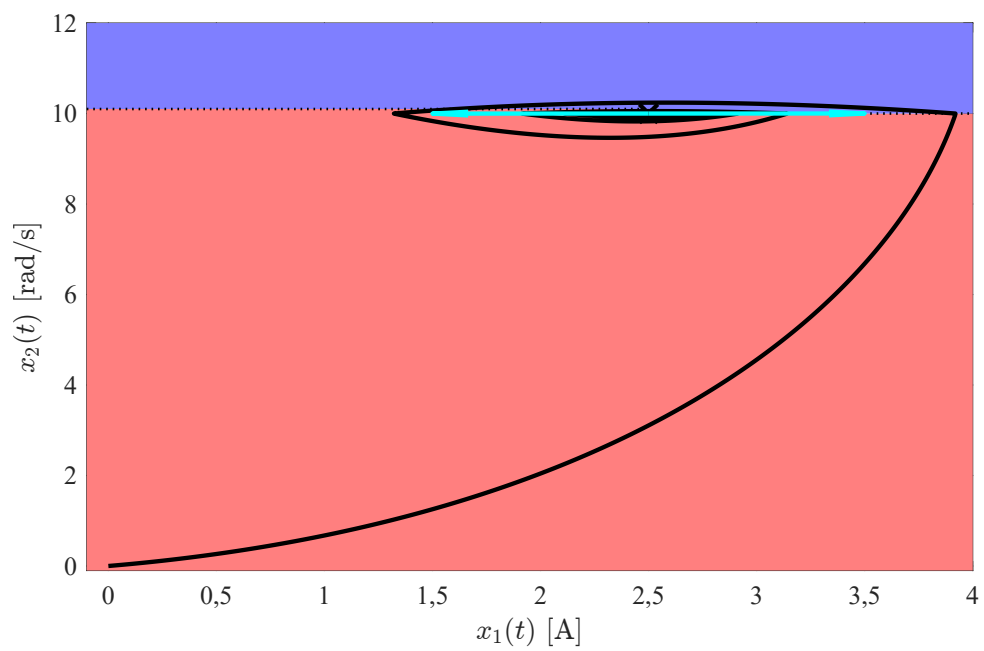
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 20 – Modo ativo da lei de chaveamento no tempo. (Nota: Por questões de limites de renderização, essa figura retrata o resultado da simulação com 100 kHz).



Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 21 – Retrato de fase do sistema com vetores da direção de otimização.



Fonte: Do próprio autor (2026).

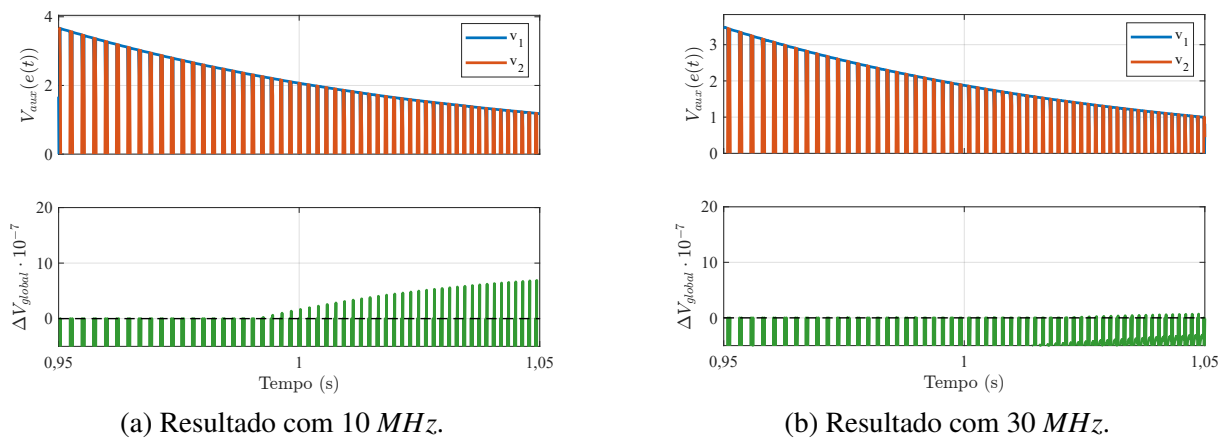
7.1.2 Resultados a respeito da frequência de controle

De forma geral, o sistema apresenta um comportamento semelhante para as frequências de 10 MHz e 30 MHz. No entanto, próximo às condições de equilíbrio, o aumento da frequência de controle influencia a dinâmica do *chattering*. Com a estratégia proposta para a redução desse efeito, o sistema consegue manter uma trajetória menor no entorno do ponto de equilíbrio à medida que a frequência se eleva. Esse comportamento também pode ser verificado diretamente no valor de regime permanente atingido pela função de Lyapunov do sistema.

Além disso, é importante destacar o instante em que a função de Lyapunov cessa o seu decréscimo devido aos efeitos de discretização, comportamento verificado em ambos os cenários e ilustrado na Figura 22. Observa-se ainda que, no momento em que ocorre a troca de modo de operação, a respectiva variação da função de Lyapunov (ΔV) é saturada em zero. Ao analisar o valor da função de Lyapunov nesses instantes, constata-se que, sob as condições de simulação adotadas, a função interrompe o seu decréscimo antes de atingir o valor unitário.

Contudo, nota-se que o aumento da frequência de controle posterga esse fenômeno: para a frequência de 10 MHz, o decréscimo cessa em aproximadamente 0,98 s, enquanto para 30 MHz, esse ponto é deslocado para cerca de 1,02 s. Esse comportamento evidencia o impacto da discretização temporal da simulação sobre o sistema, conforme discutido na Nota 4 no capítulo anterior, sendo justificado pela grande variação de amplitude entre o valor inicial e o final da função de Lyapunov, que atinge cerca de seis ordens de grandeza. Para assegurar que o limite numérico onde a função deixasse de decrescer ocorresse apenas para valores inferiores ao unitário, seriam necessárias frequências de controle tendendo ao infinito, o que é inviável em simulações digitais.

Figura 22 – Valores da função de Lyapunov e sua derivada para o resultado 1.



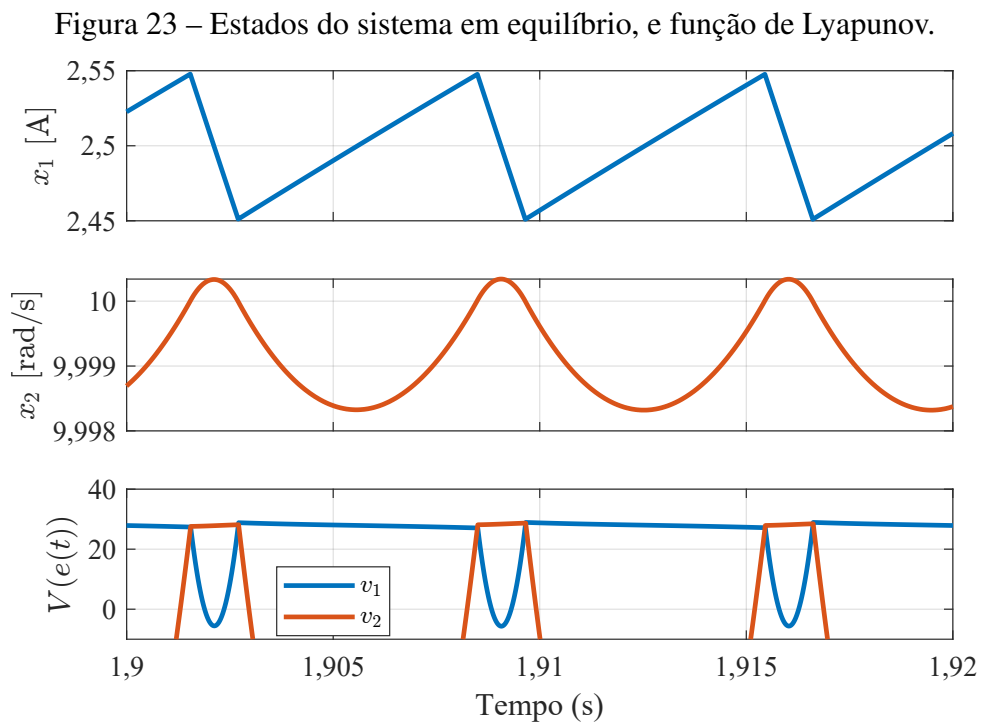
Fonte: Do próprio autor (2026).

7.1.3 Resultado com menor frequência de chaveamento

Diferentes frequências de atuação podem ser utilizadas para o controle do motor. Para esta seção, adotou-se uma frequência com características mais práticas do que as apresentadas na seção anterior, estabelecida em 100 kHz. O objetivo aqui é avaliar a frequência que efetivamente é aplicada ao motor devido à oscilação introduzida pela técnica proposta.

Na parte superior da Figura 23, observa-se o comportamento das variáveis de estado após o sistema atingir o regime permanente, enquanto a parte inferior apresenta a resposta da função de Lyapunov nessa mesma condição. É perceptível o comportamento oscilatório da função de Lyapunov, o que reduz indiretamente a frequência efetiva de chaveamento percebida pelo motor.

A partir da análise dos intervalos de comutação, verifica-se que o tempo de permanência no Modo 1 em regime é de aproximadamente 5,8 ms, enquanto no Modo 2 é de cerca de 1,16 ms. Essa dinâmica equivale a uma frequência média de chaveamento de apenas 143,6 Hz. Esse resultado é obtido ao custo de uma velocidade de rotação menos de 0,1% inferior à desejada, apresentando uma oscilação menor que 0,2%. Por fim, o valor residual da função de Lyapunov nesta seção mantém-se bem superior à unidade, o que decorre diretamente da limitação imposta pela menor frequência de comutação utilizada.



Fonte: Do próprio autor (2026).

7.2 CONTROLE DE UM CONVERSOR BUCK

Nesta seção, apresenta-se a simulação de um conversor buck com características similares às do modelo introduzido na Seção 5.6.2 nas Tabelas 3 e 4, com exceção do valor da indutância,

que segue as especificações descritas na Tabela 7 sob uma abordagem de projeto robusto. Um aspecto particular desta análise decorre da existência de dois limites para os vetores K_{d_i} , o que exigiu que a LMI (101) fosse resolvida para os cenários extremos (máximo e mínimo) das tolerâncias associadas à indutância.

Para a validação do método, as simulações foram executadas sob duas condições distintas de frequência de atuação: a primeira a 10 MHz, com o objetivo de avaliar o limite numérico em que a função de Lyapunov interrompe o seu decréscimo, e a segunda a 100 kHz, com o intuito de ilustrar o comportamento do conversor sob uma condição operacional mais prática.

Tabela 7 – Parâmetros do conversor *buck* para o Resultado 2.

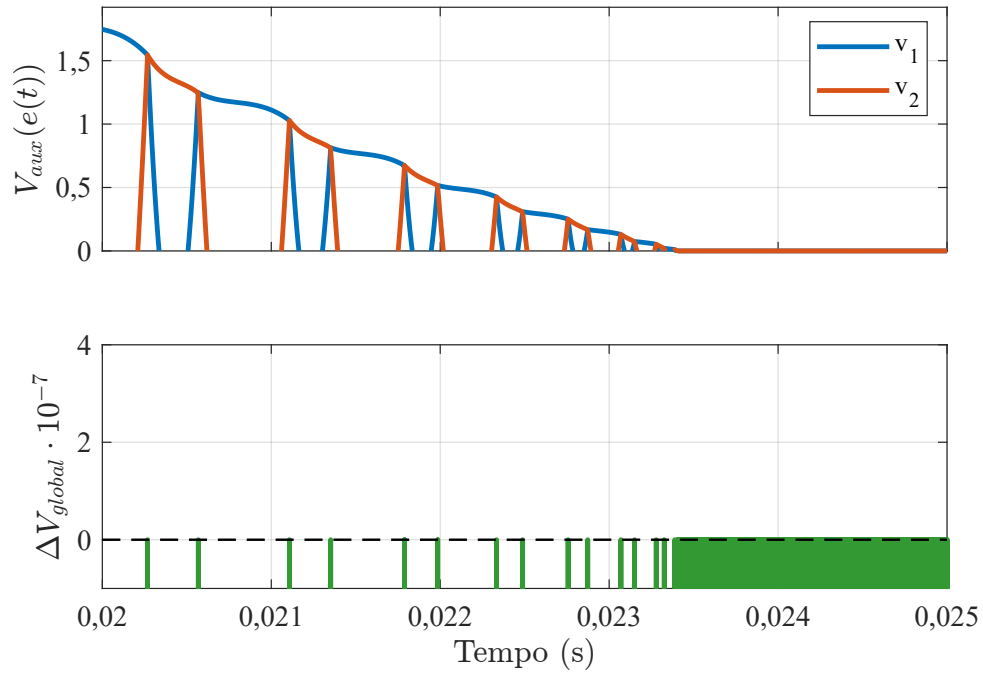
Parâmetro	Símbolo	Valor
Indutância nominal	L_0	30,0 <i>mH</i>
Indutância mínima	L_{min}	28,5 <i>mH</i>
Indutância máxima	L_{max}	31,5 <i>mH</i>

7.2.1 Simulação em alta frequência

Na parte superior da Figura 24, apresenta-se um detalhe do comportamento da função de Lyapunov, enquanto o gráfico inferior ilustra a respectiva variação de V . Sob essa condição de simulação, com frequência de atuação de 10 MHz, observa-se que a derivada não assume valores positivos enquanto a função de Lyapunov estiver acima do valor unitário.

Particularmente, neste exemplo, constata-se que a função decresce continuamente em direção a zero. Esse comportamento indica que, sob tais condições, a trajetória de oscilação controlada proposta neste trabalho não se estabelece. Uma hipótese para a ocorrência desse fenômeno é que ele esteja associado à frequência de controle utilizada.

Figura 24 – Valor da função de Lyapunov e da variação de V para o resultado 2.



Fonte: Do próprio autor (2026).

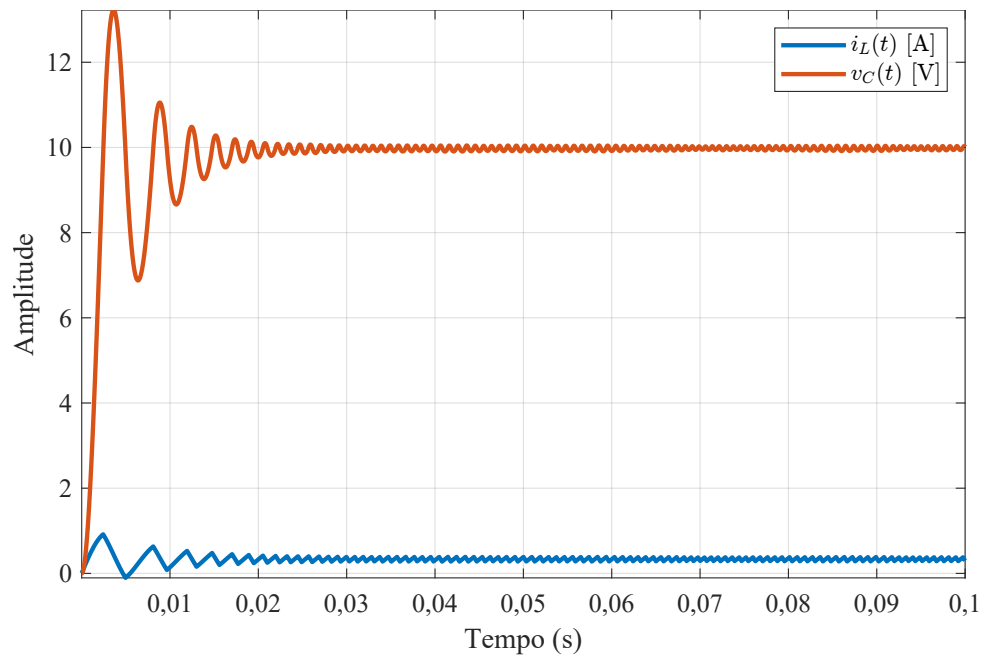
7.2.2 Simulação em frequência usual

Na Figura 25, apresenta-se a dinâmica dos estados do sistema sob uma frequência de amostragem mais convencional, de 100 kHz. Nota-se que, apesar da oscilação durante o transiente, as variáveis de estado convergem para o entorno da referência desejada.

Por meio do comportamento da função de Lyapunov, ilustrado na Figura 26, constata-se o efeito da estratégia proposta: o sistema permanece no mesmo modo ativo por intervalos de tempo significativamente maiores do que na abordagem convencional, visto que a função oscila de forma controlada em torno do valor de referência estabelecido. Nesta simulação, os tempos de permanência nos modos foram de aproximadamente $560 \mu s$ e $280 \mu s$, o que equivale a uma frequência média de comutação de apenas 1,19 kHz.

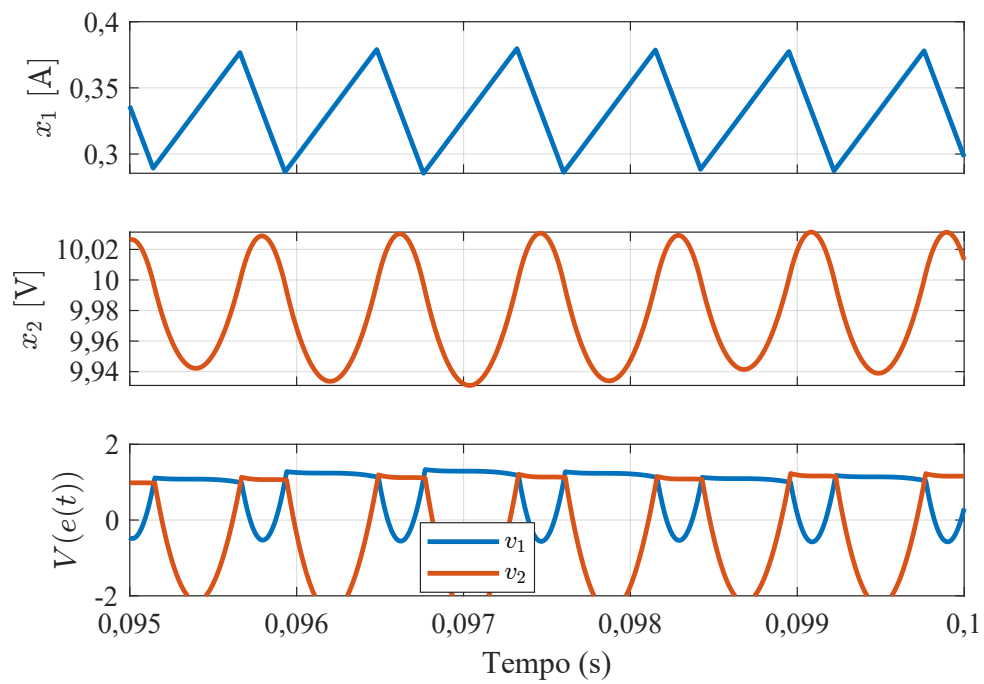
Essa drástica redução no chaveamento é obtida ao custo de uma oscilação inferior a 50 mV na tensão de saída. Esse nível de oscilação é perfeitamente aceitável para circuitos que atuam como primeiro estágio de conversão, nos quais comumente se emprega um regulador linear de baixa queda (*Low-DropOut* — LDO) para realizar a regulação fina posterior de tensões inferiores. Por fim, um detalhe da dinâmica dos estados pode ser observado no retrato de fase da Figura 27, no qual ficam evidentes as oscilações em torno do ponto de operação desejado.

Figura 25 – Dinâmica dos estados no tempo.



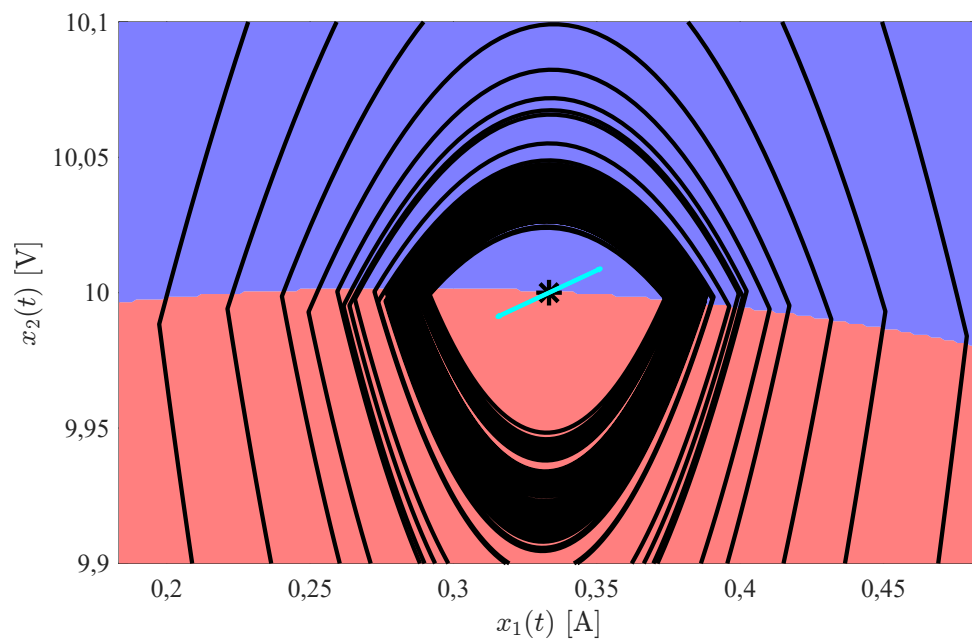
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 26 – Valor dos estados e função de Lyapunov em regime.



Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 27 – Detalhe da trajetória dos estados em regime em um diagrama de fase.



Fonte: Do próprio autor (2026).

7.3 BUCK COM CARGA INDEFINIDA

Nesta seção, apresenta-se a simulação de um conversor buck com características similares às do modelo introduzido na Seção 5.6.3 nas Tabelas 5 e 6, mas com resistência seguindo as especificações descritas na Tabela 8, ou seja, também sob uma abordagem de projeto robusto. De maneira análoga ao caso anterior, a existência de dois limites para os vetores K_{d_i} — que desta vez apontam em direções diferentes — exigiu que a LMI (101) fosse resolvida o dobro de vezes, contemplando os valores máximos e mínimos das tolerâncias da carga. Para este cenário, a simulação foi executada apenas uma vez, adotando-se a frequência de atuação de 100 kHz, de forma similar às seções anteriores.

Tabela 8 – Parâmetros do conversor *buck* para o Exemplo 3.

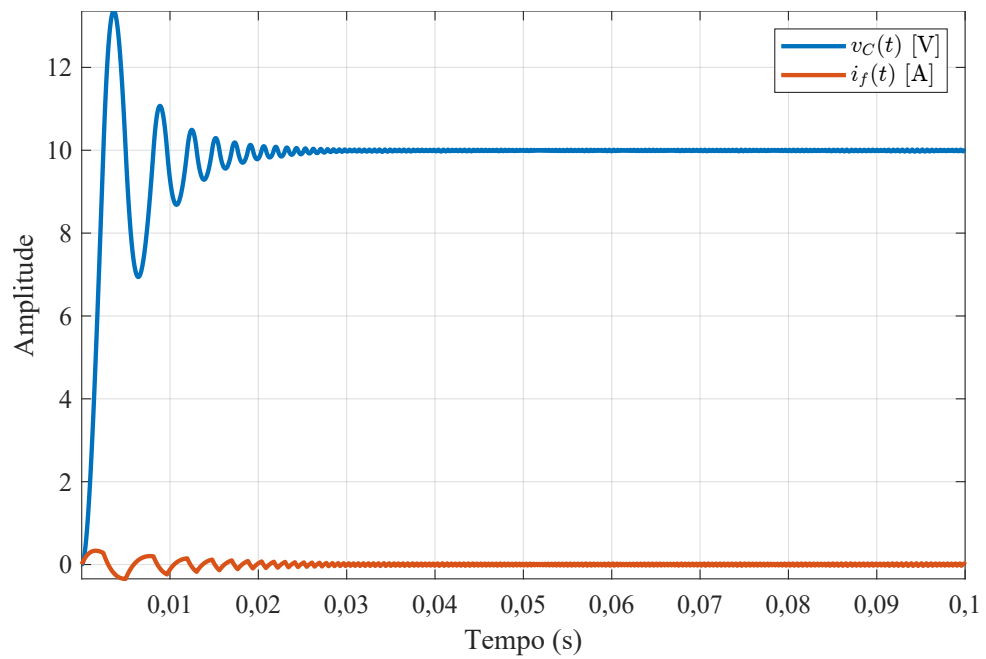
Parâmetro	Símbolo	Valor
Resistência nominal	R_0	30,0 Ω
Resistência mínima	R_{min}	29,7 Ω
Resistência máxima	R_{max}	30,3 Ω

O comportamento dinâmico das variáveis de estado sob a frequência de atuação de 100 kHz pode ser observado na Figura 28. Nota-se que, apesar da oscilação inicial na tensão, os estados convergem para o entorno das referências estabelecidas — neste caso, 10 V para a tensão de saída e valor nulo para a corrente filtrada.

A partir do comportamento da função de Lyapunov, ilustrado na Figura 29, verifica-se o efeito da estratégia proposta: as oscilações controladas permitem que o sistema permaneça no mesmo modo ativo por intervalos de tempo maiores do que na abordagem convencional, operando em torno do valor de referência. Nesta simulação, os tempos de permanência nos modos foram de aproximadamente 170 μ s e 330 μ s, o que equivale a uma frequência média de comutação de apenas 2,0 kHz. Essa redução é obtida ao custo de uma oscilação (*ripple*) inferior a 20 mV na tensão de saída.

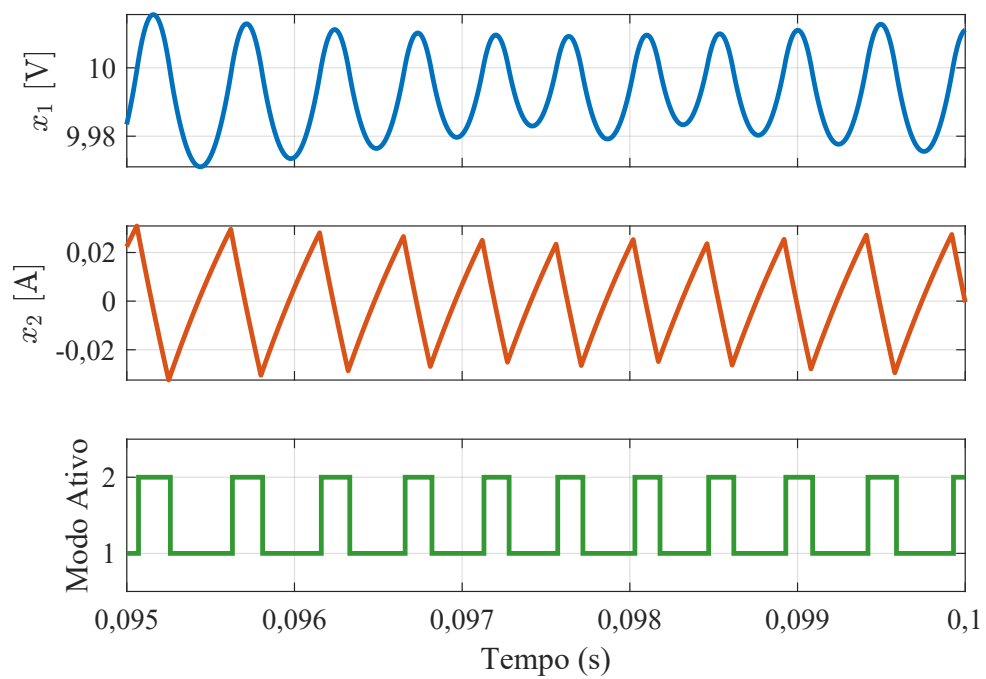
Por fim, o retrato de fase destacado na Figura 30 detalha a trajetória das variáveis do sistema, tornando visível o confinamento das oscilações no entorno do ponto de operação desejado.

Figura 28 – Dinâmica dos estados no tempo.



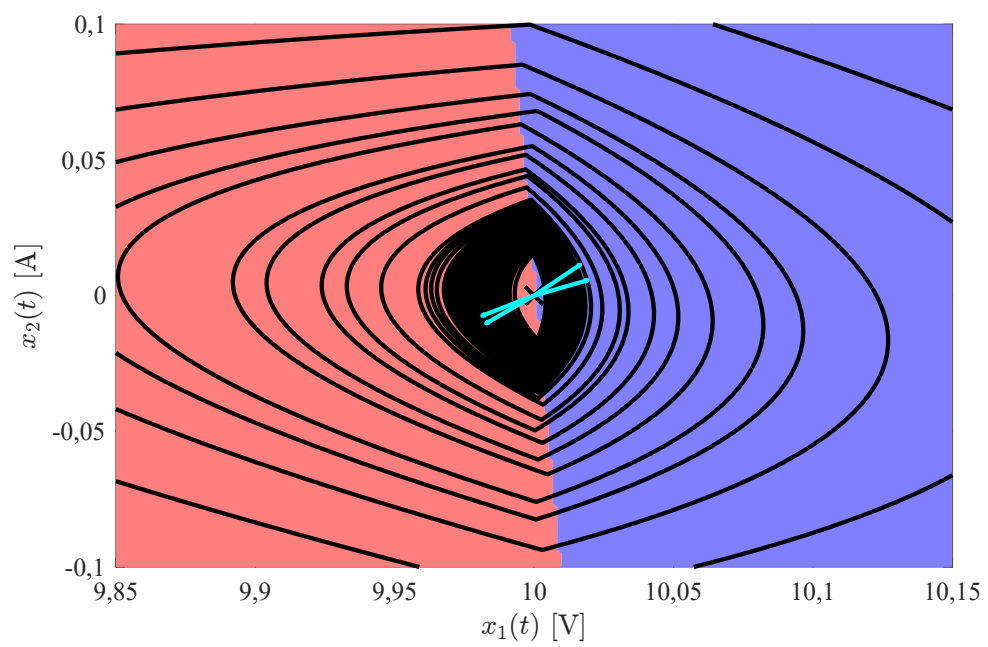
Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 29 – Valor dos estados e função de Lyapunov em regime.



Fonte: Do próprio autor (2026).

Figura 30 – Detalhe da trajetória dos estados em regime em um diagrama de fase.



Fonte: Do próprio autor (2026).

7.4 ANÁLISE DE PERTURBAÇÕES

Esta seção apresenta uma análise de desempenho baseada em uma variação do Resultado 1. Para avaliar o impacto de erros de modelagem na lei de controle, adotou-se um cenário de simulação no qual os parâmetros reais da planta divergem dos valores nominais utilizados no projeto do controlador. Esse descasamento paramétrico é detalhado na Tabela 9.

Tabela 9 – Parâmetros do motor CC para o Exemplo 1.

Parâmetro	Símbolo	Valor Projeto	Valor Simulado
Indutância da armadura	L	$0,3\ H$	$0,5\ H$
Momento de inércia	J	$0,05\ kg \cdot m^2$	$0,01\ kg \cdot m^2$
Coefficiente de atrito viscoso	B_f	$0,4\ N \cdot m \cdot s/rad$	$0,3\ N \cdot m \cdot s/rad$

Sob essas condições, a resposta transiente do sistema é apresentada na Figura 31. É possível observar que a velocidade de rotação converge para a referência desejada, embora a variável de corrente apresente um desvio permanente em relação ao comportamento nominal. Esse comportamento é esperado, visto que a discrepância entre os parâmetros de projeto e os simulados altera o ponto de equilíbrio da planta, impedindo a anulação simultânea de ambos os erros de estado sob a lei de controle nominal.

A análise em regime permanente, ilustrada na Figura 32, mostra que a função de Lyapunov permanece em um nível residual afastado de zero, o que decorre diretamente do erro de regime introduzido pelo descasamento paramétrico. Apesar desse deslocamento, constata-se que a estratégia de otimização manteve-se eficaz, visto que o comportamento oscilatório controlado — projetado para a mitigação do *chattering* — persistiu. Para esse caso, os tempos de permanência nos modos foram de 1,06 ms e 3,19 ms, o que resulta em uma frequência média de chaveamento de aproximadamente 235 Hz.

Figura 31 – Comportamento transiente do Resultado 4.

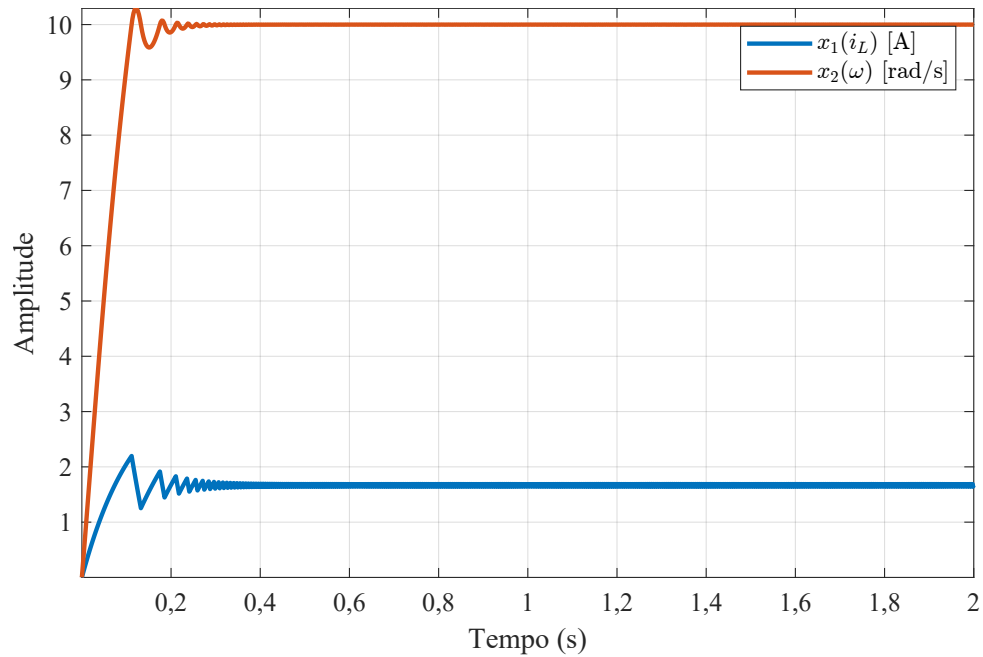
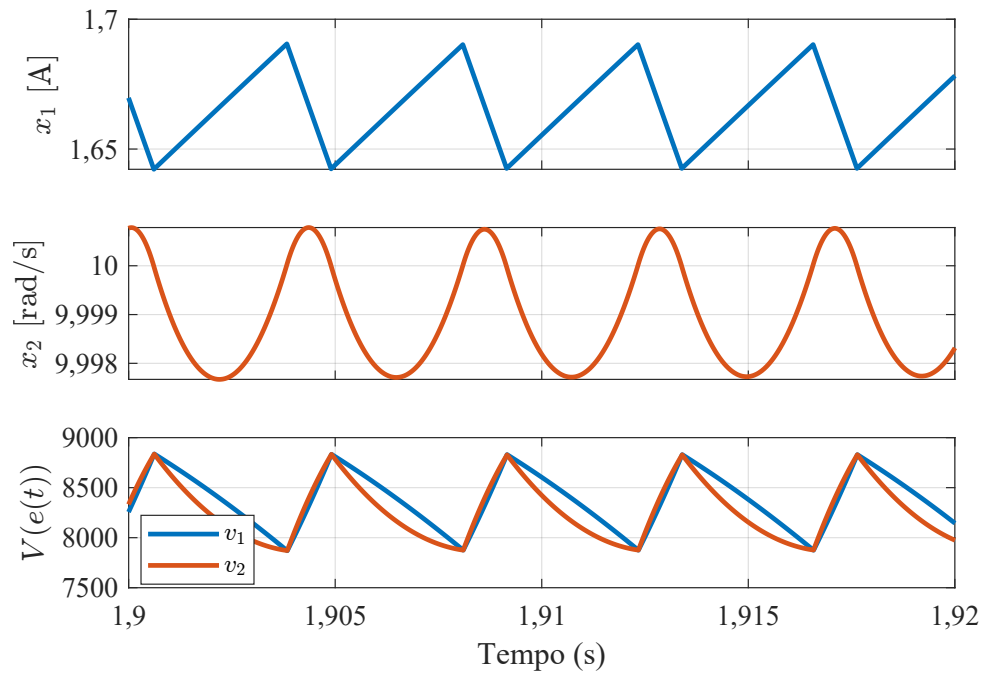


Figura 32 – Detalhe dos estados e valor da função de Lyapunov para o Resultado 4.



7.5 COMPARAÇÃO COM A LEI DE CHAVEAMENTO ORIGINAL

Uma comparação entre os resultados obtidos com e sem a aplicação da técnica proposta permite observar que a resposta dinâmica sem a estratégia proposta apresenta um tempo de assentamento levemente melhor para parâmetros α similares. No caso do controle original, é

possível ainda otimizar o tempo transiente se o parâmetro α for ajustado para um valor maior. Por outro lado, na técnica proposta, o parâmetro α deve ser mantido em valores baixos, já que o aumento desse parâmetro prejudica a oscilação desejada.

Dessa forma, a técnica se mostra eficaz para ser aplicada em sistemas chaveados afins nos quais seja viável definir uma superfície de chaveamento que induza um ciclo limite estável (oscilação controlada) em torno do ponto de equilíbrio desejado.

Apesar da perda de desempenho transiente, a abordagem proposta foi desenvolvida com foco no comportamento em regime permanente. Nessa condição, ela conduz as trajetórias do sistema a uma oscilação controlada em torno da origem, aceitando um pequeno acréscimo no erro em troca de uma grande redução no número de chaveamentos da planta.

Essa característica fica evidente ao analisar os resultados numéricos do Exemplo 1 e do Resultado 1. Utilizando as frações de tempo $\bar{\theta}_1 = 1/3$ e $\bar{\theta}_2 = 2/3$ e uma frequência base de 100 kHz, o sistema com o controle original opera com uma frequência efetiva próxima a 33,33 kHz em regime permanente. Isso ocorre porque o controlador tradicional precisa alternar os modos continuamente para manter o equilíbrio, permanecendo no Modo 1 durante um terço do tempo e no Modo 2 nos outros dois terços. Em contrapartida, com o uso da técnica proposta, essa frequência se reduziu para cerca de 143,6 Hz, confirmando a eficácia do método em atenuar o *chattering* com baixo impacto no erro final do sistema.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, abordou-se o controle chaveado no tempo contínuo e propôs-se uma variação da técnica clássica, a qual permite a atenuação do efeito de *chattering*. Isso é alcançado por meio da síntese de condições que favorecem uma oscilação controlada dos estados em torno do equilíbrio desejado. Para a estruturação desta dissertação, o texto foi organizado como segue: o Capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais sobre sistemas dinâmicos contínuos e discretos, LMIs e as ferramentas computacionais para sua manipulação.

O Capítulo 3 aborda a definição de sistemas chaveados e conceitos essenciais relacionados ao tema, tais como regimes de modos deslizantes, o fenômeno de *chattering* — foco central deste estudo —, além da caracterização de condições de equilíbrio em sistemas chaveados.

No Capítulo 4, os modelos em espaço de estados para sistemas chaveados são deduzidos para as plantas utilizadas nas validações numéricas: um motor de corrente contínua (CC) e um conversor estático *buck*.

O estado da arte é apresentado no Capítulo 5, destacando-se uma das técnicas existentes na literatura que emprega função do tipo *max*. Discutem-se também variações aplicadas à técnica, tais como o controle robusto, o uso de filtros *washout* para sistemas com equilíbrio parcialmente desconhecido, ideias por trás de controle chaveado em sistemas discretos bem como conceitos necessários para isso, como o de estabilidade prática e exemplos aplicando algumas das técnicas.

No Capítulo 6, propõe-se a principal contribuição deste trabalho: uma variação da técnica de controle chaveado fundamentada no conceito de estabilidade prática (oriundo de sistemas discretos) associada a uma estratégia de otimização. Esta abordagem permite o projeto do controlador conferindo flexibilidade para que a função de Lyapunov cresça em regiões de baixa energia. Isso estabelece uma geometria das superfícies de chaveamento que induz a oscilação dos estados em torno do equilíbrio, promovendo uma redução expressiva no número de comutações e, consequentemente, mitigando o *chattering*.

No Capítulo 7, a técnica proposta é submetida a diferentes cenários de simulação numérica para a validação do seu desempenho, cujos principais resultados são destacados a seguir:

- **Análise em alta frequência e efeitos de discretização:** Em cenários de teste com elevada taxa de amostragem, observou-se o decréscimo monótono da função de Lyapunov até as proximidades da região residual unitária ($V \approx 1$). Constatou-se que, devido à discretização temporal intrínseca ao solver de simulação, a função de Lyapunov cessa o decréscimo estrito em valores próximos, porém superiores a esse limiar; contudo, o aumento da frequência de execução estende a convergência para valores inferiores da função, evidenciando experimentalmente o regime de estabilidade prática.
- **Comportamento em frequências reduzidas:** Ao executar o controle sob frequências de amostragem menores, verificou-se a convergência das trajetórias de estado para a referência, com uma oscilação em torno da condição desejada.

- **Redução do número de comutações:** O algoritmo proposto foi eficaz em reduzir a frequência de chaveamento observada pela planta em centenas de vezes no primeiro cenário de testes (Exemplo 1) e em até 28 vezes no segundo cenário (Exemplo 2), comprovando a viabilidade da técnica na mitigação do esforço de controle.
- **Deslocamento de valor médio (*offset*):** Identificou-se que, a depender da condição de equilíbrio e da razão cíclica média ($\bar{\theta}_i$) em cada modo, o sistema pode apresentar uma oscilação com valor médio levemente deslocado em relação à referência. Como solução de projeto, sugere-se a compensação desse efeito por meio do ajuste preditivo das referências reais.
- **Análise de robustez paramétrica:** Sob condições de incertezas paramétricas severas, observou-se que a dinâmica de oscilação tende a não ocorrer, conforme a amplitude da incerteza utilizada no projeto aumenta, conduzindo o sistema a um comportamento convergente que se assemelha à técnica original do estado da arte. Apesar disso, a utilização de um controle fora das especificações, pode acabar levando a oscilações dos estados.

Tendo em vista as contribuições e limitações identificadas neste trabalho, consideram-se relevantes os seguintes tópicos para o desenvolvimento de estudos futuros:

- **Investigação do *trade-off* entre desempenho transitório e mitigação de comutações:** Desenvolvimento de critérios de projeto que otimizem o balanço entre a velocidade de convergência na dinâmica transitória e a eficácia na redução do efeito de *chattering*.
- **Análise analítica do impacto da amostragem na amplitude de oscilação:** Mapeamento matemático e formalização de como a escolha da frequência de chaveamento digital afeta quantitativamente a amplitude do ciclo limite ou da oscilação residual no entorno da referência do sistema.
- **Ampliação dos limites de robustez paramétrica:** Investigação de modificações estruturais ou leis de adaptação que estendam a aplicabilidade da técnica proposta frente a incertezas paramétricas de maior magnitude, sem que a característica de oscilação controlada seja anulada.
- **Unificação de critérios via otimização multiobjetivo:** Desenvolvimento de formulações baseadas em superfícies de custo unificadas, permitindo a integração simultânea das técnicas de relaxação de Lyapunov aqui propostas com outras metas de otimização de desempenho do sistema (como minimização do esforço de controle ou do erro integral).
- **Aumento no número de modos:** Avaliar a possibilidade de utilização da técnica em sistemas com mais de dois modos de operação, investigando se os estados permanecem

“rodando” em torno da referência, e possíveis variações para que seja possível otimizar o sistema nessas condições.

- **Implementação e validação experimental:** Aplicação prática da técnica proposta em uma plataforma de testes real. Já existem resultados na literatura de aplicações práticas de técnicas de controle chaveado com leis de chaveamento do tipo *max*, mas para esse caso, seria interessante avaliar se o *chattering* realmente conseguiria ser mitigado, devido a erros de amostragem e medições. Assim, o objetivo seria confrontar as previsões teóricas aqui obtidas com o comportamento prático do sistema, analisando os efeitos das dinâmicas não modeladas e limitações do hardware sobre o ciclo limite.

REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, K.J.; WITTENMARK, B. **Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Third Edition**. Dover Publications, 2013. (Dover Books on Electrical Engineering). ISBN 9780486284040. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TynEAgAAQBAJ>. Citado na página 21.
- BARBI, I. **Eletrônica de Potência**. 5. ed. Florianópolis, Brazil: Editora da UFSC, 2006. Citado na página 17.
- BENNETT, S. **A History of Control Engineering, 1930-1955**. Sheffield, England: P. Peregrinus, 1993. (Control, Robotics and Sensors Series). ISBN 9780863412998. Citado na página 16.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, USA: SIAM, 1994. v. 86. Citado 6 vezes nas páginas 20, 22, 23, 24, 25 e 43.
- CHEN, C.T. **Linear System Theory and Design, Third Edition, International Edition**. OUP USA, 2009. ISBN 9780195392074. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=D9nXSAAACAAJ>. Citado na página 20.
- DEAECTO, G. S. et al. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. **IET Control Theory & Applications**, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, July 2010. Citado na página 41.
- DEZUO, T. J. M. **Estabilidade de sistemas não lineares e controle de sistemas chaveados**. Dissertação (Mestrado) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 21, 30 e 34.
- FRANKLIN, G.F.; POWELL, J.D.; WORKMAN, M.L. **Digital Control of Dynamic Systems**. Addison-Wesley Publishing Company, 1990. (Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering). ISBN 9780201119381. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Iw8oAQAAMAAJ>. Citado na página 21.
- GAHINET, Pascal et al. **LMI control toolbox user's guide**. [S.l.: s.n.], 1995. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- HESPANHA, J.P. **Linear Systems Theory: Second Edition**. Princeton University Press, 2018. ISBN 9780691179575. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=O3OYDwAAQBAJ>. Citado na página 21.
- ISIDORI, A. **Nonlinear Control Systems**. Springer London, 2013. (Communications and Control Engineering). ISBN 9781846286155. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=N9h5BgAAQBAJ>. Citado na página 20.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. Citado na página 20.
- LIBERZON, D. **Switching in Systems and Control**. Boston, USA: Birkhäuser, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 16, 27 e 30.
- LIMA, V. L. **Controle Robusto de Conversores estáticos para a geração fotovoltaica e carregamento de baterias**. 2019. 189 f. p. Monografia (Bacharel em Engenharia Elétrica), Udesc (Universidade do Estado de Santa Catarina), Joinville, Brasil. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.

MOHAN, N.; UNDELAND, T. M.; ROBBINS, W. P. **Power Electronics: Converters, Applications and Design**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. Citado na página 17.

MOHAN, S. S. et al. Simple accurate expressions for planar spiral inductances. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, v. 34, n. 10, p. 1419–1424, 1999. Citado na página 38.

NESTEROV, Y.; NEMIROVSKII, A. **Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. (Studies in Applied and Numerical Mathematics). ISBN 9780898715156. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=C-MjQ98V9eoC>. Citado na página 23.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. [S.l.]: PRENTICE HALL BRASIL, 2011. ISBN 9788576058106. Citado na página 20.

PINTO, L. P. G. **Estimação de variáveis de estados e parâmetros baseada em observadores chaveados**. Tese (Doutorado) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil, 2015. Citado na página 44.

POLIK, Imre; TERLAKY, Tamás. A survey of the s-lemma. **SIAM Review**, v. 49, p. 371–418, 07 2007. Citado na página 26.

SCHARLAU, C. C. **Controle de Sistemas Chaveados e Aplicações**. Tese (Doutorado) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil, 2013. Citado na página 28.

TROFINO, A. et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 9, p. 2215–2222, September 2009. Citado na página 16.

TROFINO, A. et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: **50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference**. Orlando, USA: [s.n.], 2011. p. 1183–1188. Citado na página 35.

UTKIN, U. I. **Sliding Modes in Control and Optimization**. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992. Citado na página 28.

UTKIN, V. Variable structure systems with sliding modes. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 22, n. 2, p. 212–222, 1977. Citado na página 16.

UTKIN, V.; LEE, H. Chattering problem in sliding mode control systems. In: **International Workshop on Variable Structure Systems**. Alghero, Italy: [s.n.], 2006. p. 346–350. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

WEISE, Renê Adriano. **Controle de sistemas chaveados afins em tempo discreto**. 97 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)) — Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.

YOUNG, K.D.; UTKIN, V.I.; OZGUNER, U. A control engineer's guide to sliding mode control. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 7, n. 3, p. 328–342, 1999. Citado na página 16.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Tiago Jackson May Dezuo, professor do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da dissertação/tese intitulada: **“Controle de sistemas chaveados com redução de chattering através de projeto”** de autoria do acadêmico Douglas Ohf.

Joinville, 21 de agosto de 2026.

Assinatura digital do(a) orientador(a):

Tiago Jackson May Dezuo