

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – ENGENHARIA ELÉTRICA**

HENRIQUE CARLOS LUNARDI

**PROJETO DE OBSERVADOR CHAVEADO ROBUSTO PARA ESTIMAÇÃO E
REALIMENTAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES LIMITADAS EM AMPLITUDE**

JOINVILLE

2026

HENRIQUE CARLOS LUNARDI

**PROJETO DE OBSERVADOR CHAVEADO ROBUSTO PARA ESTIMAÇÃO E
REALIMENTAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES LIMITADAS EM AMPLITUDE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Dr. Tiago Jackson May Dezuo

JOINVILLE

2026

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Lunardi, Henrique Carlos

Projeto de observador chaveado robusto para estimação e
realimentação de não linearidades limitadas em amplitude /
Henrique Carlos Lunardi. -- 2026.

123 p.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo

Tese (doutorado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Joinville, 2026.

1. Sistemas chaveados. 2. Observadores. 3. Não
linearidades limitadas. 4. LMIs. 5. Sistemas fotovoltaicos. I.
Dezuo, Tiago Jackson May. II. Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

HENRIQUE CARLOS LUNARDI

**PROJETO DE OBSERVADOR CHAVEADO ROBUSTO PARA ESTIMAÇÃO E
REALIMENTAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES LIMITADAS EM AMPLITUDE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Dr. Tiago Jackson May Dezuo

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Tiago Jackson May Dezuo
UDESC

Membros:

Dr. Ademir Nied
UDESC

Dr. César Manchein
UDESC

Dr. César Cataldo Scharlau
UFSC

Dr. Alexandro Garro Brito
UFSC

Joinville, 20 de março de 2026

Dedico este trabalho à minha família e a todos os meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, expresso minha profunda gratidão aos meus pais, Eliane e Evandro, que, ao longo de toda a minha vida, estiveram ao meu lado, oferecendo apoio incondicional, compreensão e incentivo em cada etapa da minha vida.

Aos meus irmãos, Emanuel e Emilly, agradeço pelo constante estímulo, pelas palavras de incentivo nos momentos mais difíceis e, especialmente, pela compreensão diante da minha ausência nos últimos anos.

À Luana, manifesto minha gratidão pelo apoio, pelo amparo nos momentos de dificuldade, pelo incentivo constante e, sobretudo, pela compreensão ao longo desta jornada. Seu carinho, paciência e presença foram essenciais para que eu pudesse seguir firme até aqui.

Ao professor Tiago Dezuo, expresso minha especial gratidão pela orientação exemplar. Sua dedicação, disponibilidade, amizade e o conhecimento compartilhado foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade, pelas valiosas contribuições e pelas considerações construtivas, que certamente enriqueceram esta pesquisa.

À UDESC, expresso meu sincero agradecimento pela estrutura oferecida, pelo ambiente acadêmico de excelência e pelas oportunidades de aprendizado e crescimento pessoal e profissional proporcionadas ao longo de toda a minha vida acadêmica.

Estendo meu reconhecimento a todos os amigos, colegas de trabalho e irmãos de caminhada que fizeram parte desta etapa e que, sem dúvida, continuarão presentes na minha vida.

Agradeço, ainda, à UNIEDU pelo apoio financeiro concedido por meio de bolsa de estudo, fundamental para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este objetivo fosse alcançado.

Muito obrigado.

“A função da teoria é nos permitir ver o que, de
outra forma, seria invisível.”
- Douglas McGregor

RESUMO

Este trabalho aborda o projeto de observadores para sistemas chaveados não lineares contendo funções não lineares limitadas em amplitude. Sistemas chaveados estão amplamente presentes em eletrônica de potência e geração de energia renovável, nos quais a presença de não linearidades e chaveamento impõe desafios ao projeto de observadores robustos, especialmente em situações com medição parcial de estados. O objetivo principal consiste em desenvolver um observador chaveado capaz de estimar, em tempo real, uma função não linear com amplitude limitada por valores mínimo e máximo conhecidos, bem como os estados do sistema, utilizando uma metodologia baseada em modos deslizantes, funções de Lyapunov e Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para garantir estabilidade assintótica. A estratégia proposta alterna dinamicamente entre os limites inferior e superior da função não linear e emprega técnicas de filtragem para reconstruir sua estimativa efetiva. A factibilidade das LMIs fornece condições sistemáticas de projeto e assegura a existência do observador. A validação da técnica é realizada por meio de estudo de casos em ambiente de simulação, incluindo um sistema teórico com medição parcial de estados e um modelo de sistema fotovoltaico acoplado a um conversor CC-CC Boost, no qual se demonstra a estimação da corrente do arranjo e sua utilização em um algoritmo de rastreamento do ponto de máxima potência (MPPT) sem a necessidade de sensor de corrente físico. Os resultados de simulação evidenciam convergência adequada dos estados estimados, robustez frente a incertezas paramétricas e desempenho satisfatório sob diferentes condições operacionais, indicando que a metodologia proposta constitui uma alternativa eficaz para a estimação de funções não lineares em sistemas chaveados.

Palavras-chave: Sistemas chaveados. Observadores. Não linearidades limitadas. LMIs. Sistemas fotovoltaicos.

ABSTRACT

This work addresses the design of observers for switched nonlinear systems containing nonlinear functions bounded in amplitude by known values. Switched systems are widely present in power electronics and renewable energy generation, where the presence of nonlinearities and switching imposes challenges on the design of robust observers, especially in situations with partial state measurements. The main objective is to develop a switched observer capable of estimating, in real time, a nonlinear function bounded in amplitude by known minimum and maximum values, as well as the system states, using a methodology based on sliding modes, Lyapunov functions, and Linear Matrix Inequalities (LMIs) to ensure asymptotic stability. The proposed strategy dynamically alternates between the lower and upper bounds of the nonlinear function and employs filtering techniques to reconstruct its effective estimate. The feasibility of the LMIs provides systematic design conditions and guarantees the existence of the observer. The technique is validated through case studies in a simulation environment, including a theoretical system with partial state measurement and a photovoltaic system model coupled to a DC–DC Boost converter, in which the estimation of the array current and its use in a Maximum Power Point Tracking (MPPT) algorithm are demonstrated without the need for a physical current sensor. The simulation results show adequate convergence of the estimated states, robustness against parametric uncertainties, and satisfactory performance under different operating conditions, indicating that the proposed methodology constitutes an effective alternative for the estimation of nonlinear functions in switched systems.

Keywords: Switched systems. Observers. Amplitude-bounded nonlinearities. LMIs. Photovoltaic systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação. | 25 |
| Figura 2 – Exemplo de uma curva ϕ limitada pelos setores $[l, u]$. | 38 |
| Figura 3 – Estrutura de um observador de ordem completa. | 47 |
| Figura 4 – Comportamento do filtro Butterworth para diferentes ordens. | 55 |
| Figura 5 – Exemplos de funções não lineares. | 58 |
| Figura 6 – Exemplos de funções não lineares com amplitude limitada entre valores máximo e mínimo. | 60 |
| Figura 7 – Modelo simplificado de uma célula fotovoltaica. | 62 |
| Figura 8 – Modelagem de um painel fotovoltaico sob condições uniformes. | 64 |
| Figura 9 – Curva característica $V-I$ sob condições uniformes. | 65 |
| Figura 10 – Curva característica $V-P$ sob condições uniformes. | 66 |
| Figura 11 – Curva característica $V-I$ com temperatura de 25 °C e variação na irradiação. | 66 |
| Figura 12 – Curva característica $V-I$ com irradiação de 1000 W/m ² e variação na temperatura. | 67 |
| Figura 13 – Curva característica $V-I$ com seus limites. | 68 |
| Figura 14 – Conexão de um conversor CC-CC. | 71 |
| Figura 15 – Topologias de conversores CC-CC. | 72 |
| Figura 16 – Estrutura proposta da lei de chaveamento por realimentação de estados baseada em observador. | 78 |
| Figura 17 – Filtros MMS e Butterworth aplicados a um sinal PWM. (a) Sinal PWM. (b) Sinal filtrado com MMS. (c) Sinal filtrado com Butterworth. | 83 |
| Figura 18 – Estrutura do observador. | 86 |
| Figura 19 – Função não linear $\phi(t)$ os limites ϕ_{min} e ϕ_{max} . | 87 |
| Figura 20 – Sobreposição dos estados reais e estimados. | 88 |
| Figura 21 – Função ϕ recuperada através de um filtro média móvel. | 89 |
| Figura 22 – Erro entre os estados reais e os estimados. | 89 |
| Figura 23 – Componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} . | 90 |
| Figura 24 – Sobreposição dos estados reais e estimados para limites muito grandes. | 91 |
| Figura 25 – Erro entre os estados reais e os estimados para limites muito grandes. | 92 |
| Figura 26 – Função ϕ recuperada através de um filtro média móvel para limites muito grandes. | 92 |
| Figura 27 – Sobreposição dos estados reais e estimados para limites muito pequenos. | 93 |
| Figura 28 – Erro entre os estados reais e os estimados para limites muito pequenos. | 94 |
| Figura 29 – Função ϕ recuperada através de um filtro média móvel para limites muito pequenos. | 94 |
| Figura 30 – Componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} para limites muito pequenos. | 95 |
| Figura 31 – Topologia de ligação dos módulos fotovoltaicos. | 96 |

| | |
|---|-----|
| Figura 32 – Topologia do sistema PV. | 96 |
| Figura 33 – MPPT <i>Perturba e Observa</i> (P&O). | 98 |
| Figura 34 – Estrutura proposta de realimentação de estados baseada em observador para sistemas fotovoltaicos. | 101 |
| Figura 35 – Sobreposição dos estados reais e estimados. | 103 |
| Figura 36 – Sobreposição da função não linear real ϕ , sua estimativa filtrada $\hat{\phi}$ e o sinal de chaveamento do observador j | 103 |
| Figura 37 – Erros de estimação. | 104 |
| Figura 38 – Componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} | 105 |
| Figura 39 – Potência de saída do sistema acompanhando corretamente o MPPT. | 105 |
| Figura 40 – Comparação da potência de saída do sistema com a utilização da corrente estimada (\hat{i}_{pv}) e a corrente real (i_{pv}) do painel no MPPT. | 106 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 – Parâmetros do painel KC200GT. | 96 |
| Tabela 2 – Modos de operação do sistema chaveado. | 97 |
| Tabela 3 – Parâmetros do conversor Boost. | 97 |
| Tabela 4 – Parâmetros do filtro Butterworth. | 102 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|------|--|
| ADT | Tempo Médio de Permanência — <i>Average Dwell Time</i> |
| BMI | Desigualdade Matricial Bilinear — <i>Bilinear Matrix Inequality</i> |
| BMIs | Desigualdades Matriciais Bilineares — <i>Bilinear Matrix Inequalities</i> |
| CC | Corrente Contínua |
| CQLF | Função Quadrática Comum de Lyapunov — <i>Common Quadratic Lyapunov Function</i> |
| EKF | Filtro Estendido de Kalman — <i>Extended Kalman Filter</i> |
| LMI | Desigualdade Matricial Linear — <i>Linear Matrix Inequality</i> |
| LMIs | Desigualdades Matriciais Lineares — <i>Linear Matrix Inequalities</i> |
| LTI | Linear Invariante no Tempo — <i>Linear Time-Invariant</i> |
| MIMO | Sistema de Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas — <i>Multiple-Input Multiple-Output</i> |
| MLF | Múltiplas Funções de Lyapunov — <i>Multiple Lyapunov Functions</i> |
| MMS | Média Móvel Simples |
| MPP | Ponto de Máxima Potência — <i>Maximum Power Point</i> |
| MPPT | Rastreamento do Ponto de Máxima Potência — <i>Maximum Power Point Tracking</i> |
| P&O | Perturba e Observa — <i>Perturb and Observe</i> |
| PID | Proporcional Integral Derivativo |
| PV | Fotovoltaico — <i>Photovoltaic</i> |
| PWM | Modulação por Largura de Pulso — <i>Pulse-Width Modulation</i> |
| SISO | Sistema de Entrada Única e Saída Única — <i>Single-Input Single-Output</i> |

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÃO

| | |
|---------------------------|--|
| $\arg \max \{f_i\}$ | Índice i do argumento de maior valor entre as f_i |
| D_h | Derivada diferencial em direção a h |
| $\text{diag}(\cdot)$ | Matriz cujos elementos, indicados entre parênteses, são diagonalmente concatenados |
| $E[w(t)]$ | Valor esperado do sinal $w(t)$ |
| $\exp(f)$ | Função exponencial de f |
| \hat{f} | Valor estimado de f |
| $\lambda_{\min}(M)$ | Representa o menor autovalor da matriz M |
| \mathbb{R}^n | Espaço euclidiano de dimensão n |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$ | Espaço euclidiano de dimensão $n \times m$ |
| \mathcal{C}^1 | Função de classe C^1 |
| \mathcal{M} | Conjunto de índices finitos $\{1, 2, \dots, m\}$ |
| \mathcal{O} | Matriz de Observabilidade |
| $\mathcal{V}(v)$ | Conjunto de todos os vértices do politopo (ou simplex) v |
| \mathcal{W}_o | Gramiano de Observabilidade |
| $\max \{f_i\}$ | Maior valor entre as f_i |
| $\min \{f_i\}$ | Menor valor entre as f_i |
| M' | Transposto da matriz real (ou vetor) M |
| M^{-1} | Inversa da matriz real M |
| $M > 0$ | Significa que a matriz M é simétrica e definida positiva |
| $M < 0$ | Significa que a matriz M é simétrica e definida negativa |
| $\mathfrak{A}_a(a)$ | Anulador linear de a |
| ∇f | Gradiente de f |
| \otimes | Produto de Kronecker |
| $\text{row}_j(M)$ | Representa a j -ésima linha da matriz M |
| \star | São os blocos dos termos de uma matriz que podem ser deduzidos da simetria |
| \mathcal{S} | Superfície de chaveamento |
| σ | Sinal de chaveamento |
| $\mathbf{0}_m$ | Vetor de zeros de dimensão $1 \times m$ |

| | |
|---------------------------|--|
| $\mathbf{0}_{m \times n}$ | Matriz de zeros com dimensão $m \times n$ |
| $\mathbf{1}_m$ | Vetor de uns com dimensão $1 \times m$ |
| $\ \cdot\ $ | Norma euclidiana de vetores e norma induzida de matrizes |
| $\ \cdot\ _2$ | Norma \mathcal{H}_2 , associada à energia média da resposta do sistema |
| \dot{f} | Derivada de f em função do tempo |
| \bar{f} | Valor constante de equilíbrio de f em regime |
| E_g | Energia de banda do silício (1.1 eV) |
| I_{cel} | Corrente de saída nos terminais da célula fotovoltaica, em Amperes |
| I_{ph} | Fotocorrente, em Amperes |
| I_{pv} | Corrente do arranjo, em Amperes |
| I_r | Corrente de saturação reversa da célula, em Amperes |
| I_{rr} | Corrente de saturação reversa de referência, em Amperes |
| I_{sc} | Corrente de curto circuito da célula, em Amperes |
| M_p | Número de <i>strings</i> em paralelo |
| M_s | Número de módulos em série |
| N_s | Número de células em série no módulo |
| P_{sun} | Intensidade de irradiação solar recebida, em W/m^2 |
| $P_{sun,r}$ | Intensidade de irradiação de referência ($1000 W/m^2$) |
| R_p | Resistência paralelo da célula, em Ohms |
| R_s | Resistência série da célula, em Ohms |
| T | Temperatura da célula, em Kelvin |
| T_r | Temperatura de referência (298K) |
| V_{cel} | Tensão de saída nos terminais da célula fotovoltaica, em Volts |
| V_{oc} | Tensão de circuito aberto da célula, em Volts |
| V_{pv} | Tensão do arranjo, em Volts |
| ε_e | Carga do elétron ($1.6 \times 10^{-19} C$) |
| η | Fator de qualidade da junção p-n |
| γ | Coefficiente de temperatura de I_{sc} |
| κ | Constante de Boltzmann ($1.38 \times 10^{-23} J/K$) |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 19 |
| 1.1 | APRESENTAÇÃO | 19 |
| 1.2 | OBJETIVOS | 20 |
| 1.3 | CONTRIBUIÇÕES DA TESE | 21 |
| 1.4 | ESTRUTURA DO TRABALHO | 22 |
| 2 | SISTEMAS CHAVEADOS | 23 |
| 2.1 | INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS CHAVEADOS | 23 |
| 2.1.1 | Classificação quanto ao tipo de chaveamento | 24 |
| 2.1.2 | Modo deslizante | 25 |
| 2.2 | ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS | 26 |
| 2.2.1 | Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação arbitrária | 27 |
| 2.2.2 | Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação restrita | 28 |
| 2.2.3 | Estabilização de sistemas chaveados | 29 |
| 2.3 | SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO AFIM | 30 |
| 2.3.1 | Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo afim | 31 |
| 2.3.2 | Anulador linear | 32 |
| 2.3.3 | Projeto utilizando medição parcial de estados | 35 |
| 2.4 | SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO NÃO LINEAR E LIMITADO EM SETORES | 35 |
| 2.4.1 | Função não linear limitada em setores | 38 |
| 2.4.2 | Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo não linear e limitado em setores | 39 |
| 2.4.3 | LMIs independentes do ponto de equilíbrio | 40 |
| 2.5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 41 |
| 3 | FUNDAMENTOS DE OBSERVADORES DE ESTADO E FILTRAGEM | 43 |
| 3.1 | OBSERVABILIDADE E DETECTABILIDADE PARA SISTEMAS LTI | 44 |
| 3.2 | O OBSERVADOR DE LUENBERGER PARA SISTEMAS LTI | 46 |
| 3.3 | DESAFIOS EM OBSERVADORES PARA SISTEMAS CHAVEADOS E NÃO LINEARES | 47 |
| 3.4 | OBSERVADORES CHAVEADOS PARA ESTIMAÇÃO CONJUNTA DE ESTADOS E PARÂMETROS | 49 |
| 3.4.1 | Modelo do sistema e estrutura do observador | 49 |
| 3.4.2 | Lei de chaveamento e dinâmica do erro | 50 |
| 3.4.3 | Projeto via LMI e convergência | 50 |
| 3.4.4 | Vantagens da Abordagem | 51 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.5 | FILTRAGEM | 51 |
| 3.5.1 | Filtro de média móvel simples (MMS) | 52 |
| 3.5.2 | Filtro \mathcal{H}_2 | 52 |
| 3.5.3 | Filtro \mathcal{H}_∞ | 53 |
| 3.5.4 | Filtro Butterworth | 54 |
| 3.6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 56 |
| 4 | FUNÇÕES NÃO LINEARES | 57 |
| 4.1 | CARACTERIZAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES | 57 |
| 4.2 | FUNÇÕES NÃO LINEARES LIMITADAS | 58 |
| 4.2.1 | Funções com amplitude limitada entre valores máximo e mínimo | 59 |
| 4.2.2 | Relevância em sistemas físicos e eletrônicos | 60 |
| 4.3 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 61 |
| 5 | SISTEMAS FOTOVOLTAICOS | 62 |
| 5.1 | MODELAGEM DE UMA CÉLULA FOTOVOLTAICA | 62 |
| 5.2 | CURVAS CARACTERÍSTICAS | 65 |
| 5.3 | SISTEMAS FOTOVOLTAICOS COM NÃO LINEARIDADES LIMITADAS EM AMPLITUDE | 67 |
| 5.3.1 | Modelagem como uma fonte de corrente dependente da tensão | 67 |
| 5.3.2 | Modelagem como uma fonte de tensão dependente da corrente | 68 |
| 5.4 | RASTREAMENTO DO PONTO DE MÁXIMA POTÊNCIA | 69 |
| 5.4.1 | Métodos clássicos | 70 |
| 5.4.2 | Métodos heurísticos e inteligentes | 70 |
| 5.4.3 | Considerações sobre a escolha da técnica de MPPT | 70 |
| 5.5 | CONVERSORES CC-CC | 71 |
| 5.6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 72 |
| 6 | OBSERVADOR CHAVEADO PARA ESTIMAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES LIMITADAS EM AMPLITUDE | 74 |
| 6.1 | DESCRIÇÃO DO SISTEMA CHAVEADO | 75 |
| 6.2 | REPRESENTAÇÃO DO OBSERVADOR CHAVEADO | 75 |
| 6.3 | PROJETO DA LEI DE CHAVEAMENTO DO OBSERVADOR | 77 |
| 6.4 | FILTRAGEM PARA ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO NÃO LINEAR | 82 |
| 6.5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 84 |
| 7 | ESTUDO DE CASOS | 85 |
| 7.1 | APLICAÇÃO DO OBSERVADOR COM MEDIÇÃO PARCIAL EM UM SISTEMA TEÓRICO | 85 |
| 7.1.1 | Projeto do observador | 86 |
| 7.1.2 | Resultados da simulação | 87 |

| | | |
|--------------|--|------------|
| 7.1.3 | Escolha inapropriada de limites | 90 |
| 7.1.3.1 | <i>Limites superdimensionados</i> | 91 |
| 7.1.3.2 | <i>Limites subdimensionados</i> | 93 |
| 7.2 | APLICAÇÃO DO OBSERVADOR EM UM SISTEMA FOTOVOLTAICO . | 95 |
| 7.2.1 | MPPT | 97 |
| 7.2.2 | Projeto do controlador | 99 |
| 7.2.3 | Projeto do observador | 100 |
| 7.2.4 | Filtro | 101 |
| 7.2.5 | Resultados de simulação | 102 |
| 7.3 | CONCLUSÕES DOS ESTUDO DE CASOS | 107 |
| 7.4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 107 |
| 8 | CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES | 108 |
| 8.1 | TRABALHOS FUTUROS | 110 |
| 8.2 | PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO | 111 |
| | REFERÊNCIAS | 113 |
| | APÊNDICE A – CONCEITOS PRELIMINARES | 121 |
| A.1 | PROCEDIMENTO S | 121 |
| A.2 | PRODUTO DE KRONECKER | 121 |
| A.3 | LEMA DE FINSLER | 122 |
| A.4 | ANULADOR LINEAR | 122 |
| A.5 | FUNÇÃO CLASSE \mathcal{K} | 123 |
| A.6 | FUNÇÃO LOCALMENTE LIPSCHITZ | 123 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO

Sistemas chaveados são sistemas dinâmicos caracterizados por um conjunto finito de subsistemas com dinâmica contínua e uma regra lógica que governa as transições entre eles (Liberzon; Morse, 1999). Sua aplicabilidade é vasta, abrangendo desde eletrônica de potência em eletrodomésticos até complexos sistemas industriais, como *drives* de velocidade variável operando com dezenas de megawatts. Embora sistemas chaveados lineares e afins sejam encontrados em contextos mais simples, a não linearidade é uma característica comum em aplicações mais complexas, como na geração de energia a partir de fontes renováveis. Sistemas fotovoltaicos (PV), por exemplo, exibem comportamento chaveado não linear devido às características intrínsecas do processo de geração e aos dispositivos de eletrônica de potência utilizados no controle do fluxo energético (Dezuo, 2014; Lunardi; Dezuo; Trofino, 2023). O avanço neste campo, conforme apontado por Blaabjerg et al. (2011), está atrelado tanto ao aprimoramento das topologias de conversores de energia quanto ao desenvolvimento de técnicas de controle mais eficazes, visando aumentar a eficiência e reduzir os custos do sistema.

O projeto de leis de chaveamento para sistemas chaveados tem sido objeto de extensa pesquisa, resultando em uma variedade de abordagens documentadas na literatura (DeCarlo et al., 2000; Lin; Antsaklis, 2005). Técnicas baseadas em funções de Lyapunov e Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) destacam-se por sua capacidade de incorporar restrições e pela disponibilidade de ferramentas computacionais robustas para sua solução (Bolzern; Spinelli, 2004; Trofino et al., 2011; Scharlau et al., 2014).

Para sistemas chaveados afins, diversas técnicas de projeto estão disponíveis, inclusive para casos com condições de equilíbrio incertas. Contudo, muitas abordagens baseiam-se em modelos médios, o que pode comprometer a robustez e impor limitações à ação de controle. Projetar leis de chaveamento com base no modelo instantâneo surge como uma alternativa interessante, permitindo a incorporação de requisitos de desempenho robusto, como otimização \mathcal{H}_∞ e custo garantido (Trofino; Scharlau; Coutinho, 2012; Senger; Trofino, 2016). No entanto, a extensão dessas técnicas para sistemas chaveados não lineares apresenta desafios significativos, frequentemente resultando em condições de projeto conservadoras, especialmente na presença de múltiplas não linearidades.

Uma estratégia para mitigar o conservadorismo consiste em focar em classes específicas de não linearidades, como funções limitadas por setores (Hajiahmadi; Schutter; Hellendoorn, 2014; Dezuo; Trofino; Scharlau, 2014; Dezuo; Lunardi; Trofino, 2017). Mesmo nessas abordagens, limitações persistem, como a necessidade de conhecimento completo do vetor de estados para a implementação da lei de chaveamento.

Nesse contexto, a estimação precisa dos estados do sistema torna-se crucial, não apenas para a aplicação de estratégias de controle, mas também para fins de diagnóstico e detecção de falhas. A minimização do número de sensores, por restrições diversas (econômicas, tecnológicas

ou de viabilidade), impulsiona a utilização de sensores virtuais, que combinam medições de sensores físicos com algoritmos (observadores) para estimar variáveis não medidas em tempo real (Pinto, 2015).

O projeto de observadores para sistemas lineares é um campo bem estabelecido, com os trabalhos de Kalman (1960) e Luenberger (1971). Contudo, a predominância de comportamentos não lineares em processos industriais motivou intensa pesquisa na área de observadores não lineares. Apesar da ausência de um método universal, diversos algoritmos foram propostos. O Filtro de Kalman Estendido (EKF), por exemplo, ganhou popularidade pela simplicidade de implementação, mas carece de provas formais de estabilidade em muitos casos (Raida, 1995). Outras abordagens buscam linearizar a dinâmica do erro de estimação através de transformações de estado complexas, restringindo sua aplicabilidade (BESTLE; ZEITZ, 1983; Hou; Pugh, 1999; RAGHAVAN; HEDRICK, 1994; Guay, 2002).

A metodologia adotada neste trabalho explora a combinação de técnicas baseadas em LMIs e equações de Lyapunov para o projeto de observadores (Tan; Edwards, 2001; Choi; Ro, 2005; Pinto, 2015; Chan et al., 2021). O projeto do observador é formulado como um problema de otimização convexa, cuja factibilidade garante a existência do observador (Rajamani, 1998; Fan; Arcak, 2002). Observadores de alto ganho (Bouhadjra et al., 2020), *fuzzy* (Chang; Jin, 2022) e adaptativos (Belhaj et al., 2020) representam outras alternativas existentes, cada uma com suas particularidades.

Embora técnicas LMI já sejam aplicadas no projeto de observadores para sistemas lineares, sua extensão para sistemas não lineares e chaveados é uma área de pesquisa ativa e promissora. O desenvolvimento de observadores robustos para essa classe de sistemas, utilizando LMIs, pode gerar contribuições significativas, dada a ainda limitada quantidade de trabalhos na literatura que abordam conjuntamente não linearidades e chaveamento na estimação de estados. Este trabalho foca especificamente no projeto de um observador chaveado para estimar uma função não linear incerta, limitada em amplitude por valores mínimo e máximo conhecidos, dentro de um sistema chaveado, utilizando uma abordagem baseada em modos deslizantes, funções de Lyapunov e LMIs para garantir a estabilidade.

1.2 OBJETIVOS

Dentro deste contexto, o objetivo principal deste trabalho é propor novas técnicas e metodologias para o projeto de observadores para sistemas não lineares e chaveados, mais especificamente:

1. Desenvolver um observador chaveado capaz de estimar funções não lineares incertas, com amplitude limitada por valores conhecidos, presentes em sistemas chaveados.
2. Modelar a dinâmica de estimação utilizando uma estrutura de observador chaveado e garantir a estabilidade através de análise baseada em funções de Lyapunov e Desigualdades

Matriciais Lineares (LMIs).

3. Propor uma metodologia de estimação baseada na alternância entre os limites inferior e superior conhecidos da função não linear, utilizando um filtro (como o filtro de média móvel e de Butterworth) para reconstruir seu valor efetivo.
4. Validar a técnica proposta através de estudo de caso em um sistema fotovoltaico (PV) acoplado a um conversor CC-CC Boost, demonstrando a capacidade de estimar a corrente não linear do arranjo PV em tempo real.
5. Demonstrar a aplicação da corrente estimada na implementação de um algoritmo de Rastreamento do Ponto de Máxima Potência (MPPT) sem a necessidade de um sensor de corrente físico.
6. Validar a técnica proposta através de estudo de caso em um sistema teórico, onde a busca-se estimar a função não linear e os estados do sistema realizando a medição de apenas um estado do sistema.
7. Avaliar a precisão, estabilidade e robustez do método proposto por meio de simulações sob condições operacionais realistas e incertezas paramétricas.

Dessa forma, esta tese contribui para a área de controle de sistemas chaveados não lineares ao introduzir uma metodologia formal, sistemática para estimação e realimentação de não linearidades limitadas em amplitude, fundamentada em garantias rigorosas de estabilidade.

1.3 CONTRIBUIÇÕES DA TESE

As principais contribuições desta tese podem ser sintetizadas da seguinte forma:

- Proposição de uma metodologia de estimação baseada em chaveamento, explorando a dinâmica em modo deslizante para reconstrução explícita de funções não lineares cuja imagem é limitada por valores mínimo e máximo conhecidos.
- Formulação de condições suficientes de estabilidade na forma de LMIs com garantia de convergência assintótica do erro de estimação.
- Integração da função estimada em malhas de realimentação, demonstrando viabilidade prática da abordagem sem sensores físicos adicionais.
- Demonstração da aplicabilidade do método em diferentes cenários de simulação, incluindo sistemas com medição parcial de estados e modelo fotovoltaico chaveado.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- O Capítulo 2 introduz os sistemas chaveados, suas características, classificação e o fenômeno dos modos deslizantes. Este capítulo serve como base conceitual para o desenvolvimento do observador.
- O Capítulo 3 explora os fundamentos teóricos dos observadores de estado, abordando conceitos como observabilidade e detectabilidade em sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI), o projeto do observador de Luenberger e sua aplicação em sistemas chaveados via LMIs. Técnicas de filtragem como média móvel, \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e Butterworth também são discutidas.
- O Capítulo 4 foca nas funções não lineares limitadas em amplitude, isto é, com imagem restrita entre valores máximo e mínimo, estabelecendo a base para a modelagem da não linearidade presente no sistema fotovoltaico e para o projeto do observador.
- O Capítulo 5 detalha a modelagem de sistemas fotovoltaicos, caracterizando sua curva I-V como uma função não linear com amplitude limitada e introduz os conversores CC-CC como elementos responsáveis pela característica chaveada do sistema.
- O Capítulo 6 apresenta a principal contribuição teórica desta tese: o desenvolvimento e a fundamentação formal de um observador chaveado robusto para estimar funções não lineares limitadas em amplitude. Inclui a modelagem do sistema, a formulação baseada em LMIs e a prova de estabilidade.
- O Capítulo 7 ilustra a aplicação da técnica desenvolvida em um sistema fotovoltaico e um exemplo teórico com medição parcial de estados. Discute também os desafios relacionados à escolha dos limites da não linearidade.
- O Capítulo 8 sumariza as conclusões e contribuições do trabalho.

2 SISTEMAS CHAVEADOS

Este capítulo visa apresentar ao leitor uma contextualização sobre as propriedades, características e metodologias de análise aplicadas a sistemas chaveados. Adicionalmente, serão examinadas algumas técnicas de controle para sistemas chaveados não lineares, já consolidadas na literatura, que servirão como base para o que será desenvolvido no Capítulo 6.

Inicialmente, serão apresentadas as características e propriedades que distinguem a classe de sistemas chaveados, os diversos tipos de comutação e os conceitos de estabilidade aplicados a tais sistemas, além de uma revisão das principais ferramentas analíticas. Por fim, será detalhado o projeto de um controlador para sistemas chaveados não lineares cujas não linearidades são limitadas em setores.

2.1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS CHAVEADOS

Sistemas dinâmicos cuja descrição envolve uma interação entre dinâmicas contínuas e discretas são usualmente referidos como sistemas híbridos (Liberzon, 2003). Podem ser enquadrados nesta classificação o controle de tráfego aéreo, os sistemas de transportes, processos químicos, sistemas de potência (Antsaklis, 2000), de modo geral, quase todos os processos que dependem de chaves eletrônicas ou válvulas para sua operação.

Existem duas perspectivas distintas ao se trabalhar com sistemas híbridos: uma com foco no comportamento discreto, que trata a dinâmica contínua de forma simplificada, e outra cuja a ênfase está na dinâmica de tempo contínuo (Liberzon, 2005). A abordagem empregada neste trabalho fundamenta-se nas dinâmicas de tempo contínuo, com a representação dos eventos discretos de maneira isolada. A partir disso, é possível definir uma classe particular de sistemas híbridos, denominada sistemas chaveados.

Sistemas chaveados são uma classe específica de sistemas híbridos, compostos por múltiplos subsistemas (modos de operação) e uma lei de chaveamento que especifica o subsistema ativo a cada instante de tempo (Liberzon; Morse, 1999). Obtém-se um sistema chaveado a partir de um sistema híbrido mediante a simplificação dos detalhes do comportamento dos eventos discretos, considerando-se então todos os possíveis sinais de chaveamento para uma determinada classe. Por essa razão, os sistemas chaveados podem ser classificados como um caso particular de nível mais complexo dentro dos sistemas híbridos. Frequentemente, esta simplificação resulta em um sistema com descrição mais simples, porém que admite mais soluções que o sistema original (Liberzon, 2005). Detalhes adicionais sobre a relação entre sistemas híbridos e chaveados podem ser consultados em Hespanha (2004).

Um sistema chaveado pode ser modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i \in \mathcal{M}, \quad (2.1)$$

onde $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma família de funções com regularidade suficiente (ao menos localmente

Lipschitz¹), na qual:

$$\mathcal{M} := \{1, 2, \dots, m\}, \quad (2.2)$$

configura um conjunto finito de índices, sendo m o número de subsistemas (ou modos de operação) do sistema chaveado. O sistema em malha fechada opera em conformidade com um sinal de chaveamento $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}$, que se define como uma função constante por partes, a qual exibe uma quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo, permanecendo constante entre descontinuidades consecutivas (Hespanha, 2004).

Um sistema chaveado pode ser categorizado conforme as características dos subsistemas que o integram. Quando um sistema chaveado é composto integralmente por subsistemas lineares, ele é denominado sistema chaveado linear, e sua dinâmica de malha fechada é expressa por:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t), \quad \sigma \in \mathcal{M}. \quad (2.3)$$

2.1.1 Classificação quanto ao tipo de chaveamento

É possível classificar diversas categorias de chaveamento para sistemas chaveados (Liberzon, 2003). A seguir, serão discriminadas as classificações e suas características fundamentais:

- **Chaveamento dependente dos estados:** Nesses sistemas, o sinal de chaveamento σ é função do estado $x(t)$. O espaço de estados é particionado em regiões, onde cada região corresponde à ativação de um dos subsistemas. As fronteiras entre essas regiões são chamadas de superfícies de chaveamento.
- **Chaveamento dependente do tempo:** Nesses sistemas, a alteração no sinal de chaveamento ocorre após um intervalo de tempo predeterminado. Para este tipo, o sinal de chaveamento é descrito como $\sigma(t)$, enfatizando sua dependência temporal explícita.
- **Chaveamento autônomo:** Nesses sistemas, não há controle direto sobre a lei de chaveamento. Incluem-se neste grupo os sistemas com chaveamento dependente de estados, onde a localização das superfícies de chaveamento é pré-fixada. Também se incluem os sistemas dependentes do tempo, nos quais a regra que define $\sigma(t)$ é desconhecida ou foi negligenciada na modelagem.
- **Chaveamento controlado:** Nesses sistemas, o sinal de chaveamento é ativamente imposto para se atingir um comportamento específico. O mecanismo de chaveamento é controlado diretamente, podendo ser dependente dos estados ou do tempo.

É importante ressaltar que podem existir combinações entre os diferentes tipos de chaveamento em um mesmo sistema. Além disso, pode ser complexo estabelecer uma distinção precisa entre chaveamento autônomo e controlado, bem como determinar a diferença entre chaveamento

¹ Para mais informações sobre funções de Lipschitz, vide Apêndice A.6.

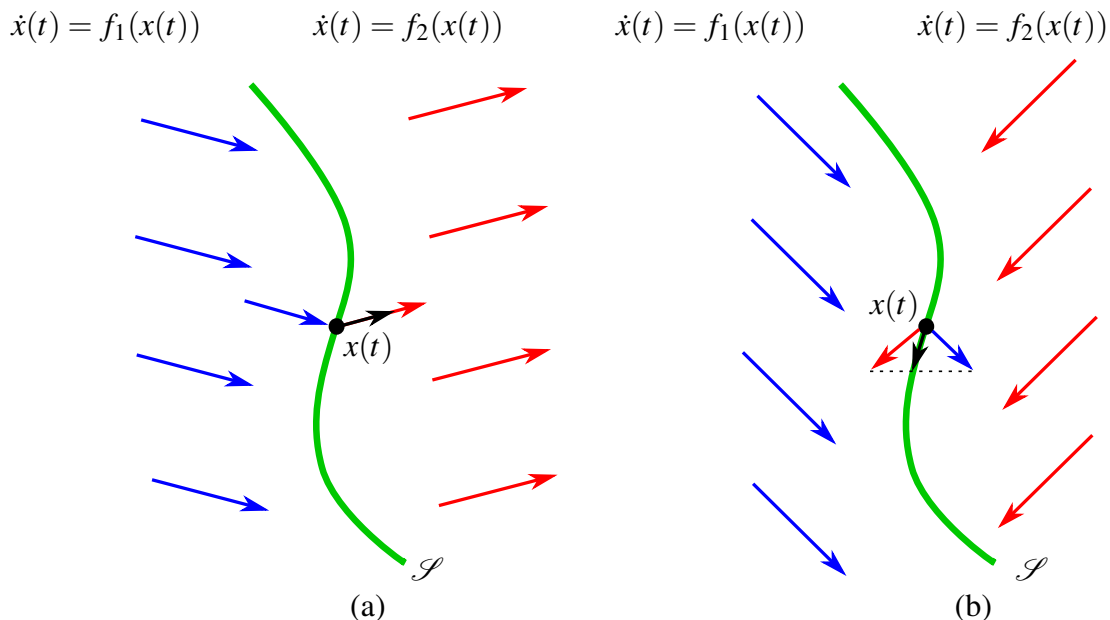
dependente de estados ou de tempo (Scharlau, 2013). Neste trabalho, o foco recai sobre leis de chaveamento dependentes do estado, com possível ocorrência de modos deslizantes.

2.1.2 Modo deslizante

Uma das propriedades mais notáveis ao se tratar de sistemas chaveados é o comportamento do sistema nos chamados modos deslizantes (*sliding modes*). Nesses regimes, os sistemas podem exibir dinâmicas que não são encontradas em nenhum modo de operação isoladamente (Liberzon, 2003).

Para a definição de modos deslizantes, será usado como exemplo um sistema chaveado com comutação dependente dos estados, definida pela superfície \mathcal{S} , e com dois modos de operação, ou seja, $\dot{x} = f_i(x)$, $i = \{1, 2\}$, cada um ativo em um lado de \mathcal{S} . Supõe-se que não há saltos nos estados no instante da comutação. Se o campo vetorial $f_1(x)$ aponta para a superfície \mathcal{S} e o outro, $f_2(x)$, aponta para fora, a trajetória contínua atinge \mathcal{S} e a cruza diretamente. Esta situação é ilustrada na Figura 1(a). Por outro lado, é possível que ambos os campos vetoriais $f_1(x)$ e $f_2(x)$ apontem em direção à superfície, como observado na Figura 1(b). Neste caso, quando a trajetória alcança \mathcal{S} , ela é impedida de sair dessa região e passa a se deslocar sobre a superfície. Assim, o campo vetorial que define a dinâmica é tangente à superfície.

Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.



Fonte: Adaptado de Scharlau (2013).

O comportamento do sistema em modo deslizante foi exhaustivamente abordado por Filippov (1988). Conforme os conceitos ali desenvolvidos, o campo vetorial que define a dinâmica em modo deslizante é tangente à superfície de chaveamento, existindo várias formas de defini-lo. A forma mais simples e difundida na literatura baseia-se na definição do campo vetorial tangente

pela combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas em cada ponto da trajetória sobre a superfície. Por exemplo, na Figura 1(b), o campo vetorial tangente é dado por:

$$f_{\theta} := \theta(x(t))f_1(x(t)) + (1 - \theta(x(t)))f_2(x(t)), \quad \theta(x(t)) \in [0, 1], \quad (2.4)$$

onde $\theta(x(t))$ é o elemento de combinação convexa, que pode ser obtido por regras de projeção ortogonal (Filippov, 1988). Esta forma de definir o campo vetorial tangente também permite caracterizar a dinâmica nos modos isolados: para $\dot{x}(t) = f_1(x(t))$, $\theta(x(t)) = 1$, e para $\dot{x}(t) = f_2(x(t))$, $\theta(x(t)) = 0$. Deste modo, a dinâmica de um sistema chaveado, com ou sem modos deslizantes, pode ser vista como uma inclusão diferencial:

$$\dot{x}(t) = f_{\theta}(x(t)) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t))f_i(x(t)), \quad \theta \in \Theta, \quad (2.5)$$

onde Θ é o simplex que representa as combinações convexas possíveis de θ , definido como:

$$\Theta := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Uma dedução formal e genérica dos modos deslizantes é fornecida em Filippov (1988), onde também se encontram formas alternativas para a determinação dos campos vetoriais tangentes.

O modo deslizante pode ser interpretado como um chaveamento de frequência infinitamente rápida. Este fenômeno não é desejável na prática, pois corresponde a chaveamentos de alta frequência (*chattering*), que induzem desgaste excessivo nos dispositivos físicos (Liberzon, 2003). Por essa razão, a limitação da frequência de chaveamento é um aspecto crucial no controle de sistemas chaveados. Uma forma de obter tal limitação é pela introdução de um requisito de tempo mínimo de residência (*dwell time*) em cada modo de operação (Sun, 2006). A introdução desse requisito não é trivial, e o desenvolvimento de uma metodologia apropriada para limitação de frequência ainda constitui um problema em aberto no caso geral. Avanços recentes têm se concentrado em aprimorar as condições de tempo de permanência, em especial o conceito de tempo de permanência médio (*average dwell time* – ADT), para garantir a estabilidade de sistemas chaveados com modos instáveis e dinâmicas não lineares (Dong; Tian, 2024).

Outra forma de evitar a ocorrência de *chattering* é a introdução de uma histerese, cuja ideia básica é definir duas regiões sobrepostas através do deslocamento da superfície \mathcal{S} (Scharlau, 2013). Mais detalhes sobre a introdução de histerese podem ser vistos em Bolzern e Spinelli (2004) e DeCarlo et al. (2000).

2.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS

A análise da estabilidade de sistemas chaveados, especialmente dos sistemas lineares, tem despertado crescente interesse nas últimas décadas. Um dos principais motivos é que, mesmo quando todos os subsistemas que compõem o sistema são individualmente exponencialmente

estáveis, o comportamento global pode se tornar instável sob determinados padrões de chaveamento. Por outro lado, é possível alcançar estabilidade global alternando entre subsistemas instáveis. Esses dois cenários evidenciam que a estabilidade de um sistema chaveado depende não apenas da dinâmica interna de cada subsistema, mas também das propriedades do sinal de chaveamento (Lin; Antsaklis, 2005).

Pesquisas recentes têm concentrado esforços na caracterização dessas propriedades do sinal de chaveamento, propondo restrições baseadas em conceitos como *dwell time* e *average dwell time*. Essas restrições estabelecem limites sobre a frequência de chaveamento, permitindo garantir estabilidade mesmo em sistemas que alternam entre modos de comportamento distintos. Nesse contexto, métodos baseados em funções de Lyapunov múltiplas ou dependentes de modo têm se mostrado ferramentas eficazes tanto na análise quanto na síntese de controladores para sistemas que incluem subsistemas estáveis e instáveis.

Por exemplo, Rotulo, Persis e Tesi (2021) propuseram uma abordagem de estabilização *data-driven* para sistemas lineares chaveados com subsistemas parcialmente desconhecidos, demonstrando estabilidade exponencial quando o chaveamento ocorre de forma suficientemente lenta. Em Xiang (2022), foram apresentadas condições necessárias e suficientes para a estabilidade de sistemas lineares chaveados no tempo discreto sob o conceito de *ranged dwell time*. Já Xiong et al. (2023) analisaram sistemas singulares chaveados contendo modos estáveis e instáveis, introduzindo uma função de Lyapunov por trecho temporal e uma regra de *mode-dependent dwell time*, na qual modos estáveis requerem chaveamentos lentos, enquanto modos instáveis demandam chaveamentos mais rápidos. Mais recentemente, Rossa e Tanwani (2025) apresentaram condições de estabilidade exponencial para sistemas não lineares chaveados com base no conceito de *average dwell time*, estabelecendo uma análise inversa fundamentada em funções de Lyapunov múltiplas.

Esses resultados recentes reforçam que a estabilidade global de um sistema chaveado está condicionada tanto às propriedades dinâmicas de seus subsistemas quanto às características temporais do sinal de chaveamento, destacando a importância do projeto de estratégias de controle e de leis de chaveamento adequadamente definidas.

De forma geral, o estudo da estabilidade de sistemas chaveados pode ser dividido em dois tipos de problemas: (i) quando o sistema está sujeito a comutação arbitrária e (ii) quando a comutação é controlada ou restrita (Scharlau, 2013). As próximas seções abordam em detalhe cada um desses casos.

2.2.1 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação arbitrária

O problema da análise de estabilidade sob comutação arbitrária foca em determinar as condições sob as quais um sistema chaveado é estável, considerando que, a princípio, não há informações sobre o sinal de chaveamento e este não possui restrições. Nesse caso, é necessário que todos os subsistemas sejam assintoticamente estáveis. Contudo, essa hipótese não é suficiente para garantir a estabilidade, pois mesmo assim é possível obter trajetórias divergentes para

uma dada condição inicial. Por outro lado, pode-se garantir a estabilidade global uniforme² exponencial de um sistema chaveado linear sob comutação arbitrária se existir uma Função Quadrática Comum de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function* - CQLF) para todos os subsistemas (Liberzon; Morse, 1999).

Muitos esforços têm sido dedicados ao estudo de CQLFs, motivados pelo fato de que as condições para sua existência não são fáceis de satisfazer (Liberzon, 2003; King; Shorten, 2004). Liberzon e Morse (1999) propõem um método para sistemas LTI chaveados baseado na solução da álgebra de Lie, gerada pelas matrizes de dinâmica dos subsistemas, onde tal método considera que as condições para a solução dessa álgebra implicam a existência de uma CQLF.

Para sistemas de ordem elevada com mais de dois subsistemas, as condições necessárias e suficientes para a existência de uma CQLF em sistemas chaveados LTI ainda se apresentam como um problema em aberto (Lin; Antsaklis, 2005). É importante salientar que a existência de uma CQLF é uma condição apenas suficiente, mas não necessária, para a estabilidade sob comutação arbitrária. Desta forma, existem sistemas chaveados que não possuem uma CQLF, mas que são estáveis sob comutação arbitrária (Liberzon, 2003; Scharlau, 2013).

2.2.2 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação restrita

Nesta subseção, será abordada a análise de estabilidade de sistemas chaveados considerando que o sinal de chaveamento possui restrições. Tais restrições podem existir no domínio do tempo (por exemplo, limites para o tempo de permanência ou tempo médio de permanência) ou no espaço de estados. É possível, então, determinar quais dessas restrições devem ser impostas ao sinal de chaveamento para assegurar a estabilidade (Lin; Antsaklis, 2005).

Uma das ferramentas empregadas na análise de estabilidade de sistemas com comutação restrita são as Múltiplas Funções de Lyapunov (*Multiple Lyapunov Functions* - MLF). A ideia fundamental consiste em utilizar uma função de Lyapunov associada a cada modo ou região do espaço de estados. Essas funções, quando concatenadas, formam uma função de Lyapunov com características não convencionais: podem ser descontínuas, podem não decrescer monotonicamente ao longo das trajetórias e ser diferenciáveis apenas por trechos.

A utilização desta abordagem pode ser ilustrada pela seguinte situação: supondo que todos os modos sejam estáveis, cada modo pode ser associado a uma função de Lyapunov V_i . Quando o modo i estiver ativo, o valor de V_i deve decrescer. Se for incluída uma restrição no sinal de chaveamento tal que, cada vez que o sistema ativa o modo i , o valor da V_i correspondente seja menor que o valor na ativação anterior, então o sistema chaveado será assintoticamente estável (Lin; Antsaklis, 2005).

O uso de MLFs tem sido tema de inúmeras pesquisas (Branicky, 1998; DeCarlo et al., 2000; Liberzon; Morse, 1999). A busca por tais funções de Lyapunov também pode ser formulada como um problema de LMIs, conforme apresentado em trabalhos anteriores (Coutinho

² Neste contexto, “uniforme” é usado para descrever a uniformidade em relação aos sinais de chaveamento.

et al., 2003; Scharlau, 2013; Dezuo, 2014; Dezuo; Lunardi; Trofino, 2017; Lunardi; Dezuo; Trofino, 2023). A síntese de MLFs via LMIs continua sendo uma das abordagens mais robustas e computacionalmente tratáveis para a análise de sistemas chaveados, como evidenciado por revisões recentes da literatura (Rossa; Tanwani, 2025; Yu; Feng, 2024; Li, 2023).

2.2.3 Estabilização de sistemas chaveados

O objetivo desta subseção é estabelecer leis de chaveamento para uma família de subsistemas de modo a tornar o sistema chaveado estável. Este problema tem solução trivial se ao menos um dos subsistemas for estável, pois basta manter ativo tal modo (Liberzon, 2003). Por outro lado, quando nenhum dos subsistemas é estável, torna-se necessário projetar uma lei de chaveamento que estabilize o sistema global.

Uma das abordagens para o problema de estabilização foca na estabilização quadrática. Foi demonstrado por Wicks, Peleties e DeCarlo (1994) que a existência de uma combinação convexa estável das matrizes de dinâmica de um sistema chaveado linear implica a existência de uma lei de chaveamento dependente de estados que estabiliza o sistema juntamente com uma CQLF. Feron (1996) provou que essa condição de combinação convexa estável é suficiente e necessária para o caso de dois subsistemas. Os resultados dessas duas referências foram estendidos para sistemas chaveados afins em Bolzern e Spinelli (2004).

Infelizmente, a busca por uma combinação convexa estável das matrizes de dinâmica é um problema NP-Difícil (*NP-Hard*) (Skafidas et al., 1999). O projeto de uma lei de chaveamento para estabilização quadrática via LMIs, considerando um sistema chaveado linear com incertezas politópicas, é apresentado em Zhai, Lin e Antsaklis (2003). Deve-se notar, contudo, que todos esses métodos garantem estabilidade pela existência de uma CQLF. Isso representa uma abordagem conservadora, pois, como visto, existem sistemas chaveados estáveis que não possuem uma CQLF.

Uma alternativa para este problema é utilizar múltiplas funções de Lyapunov no projeto da lei de chaveamento. Esta abordagem foi proposta inicialmente em Wicks e DeCarlo (1997), empregando funções de Lyapunov quadráticas por partes para sistemas LTI chaveados com dois modos. Em Mignone, Ferrari-Trecate e Morari (2000), apresenta-se um método baseado em LMIs para projeto de realimentação de estados de sistemas discretos afins por partes. Um método de projeto para sistemas chaveados com campos vetoriais lineares usando Desigualdades Matriciais Bilineares (*Bilinear Matrix Inequalities* - BMIs) é proposto em Pettersson (2003). É importante salientar que grande parte das condições de estabilização publicadas, verificáveis via LMIs ou BMIs, são apenas suficientes, exceto para casos particulares de estabilização quadrática (Lin; Antsaklis, 2005).

Em relação às leis de chaveamento, é possível identificar nos trabalhos publicados diferentes estruturas usadas para estabilização. Por exemplo, alguns resultados empregam leis baseadas na função “min” ou “max” de um conjunto de funções auxiliares dependentes do estado. Como exemplos, pode-se citar Geromel e Colaneri (2006), Deaecto et al. (2010) para a função

“min” e Ji, Xiaoxia e Xie (2006), Trofino et al. (2012) para a função “max”. Por um lado, as condições para garantia de estabilidade em modos deslizantes são mais simples com a função “min” (Liberzon, 2003). Por outro lado, o uso da função “max” não restringe as funções auxiliares a serem positivas, ao contrário do que ocorre com a função “min” associada aos argumentos de estabilidade de Lyapunov. Outras abordagens definem as leis de chaveamento através da derivada da função de Lyapunov (Bolzern; Spinelli, 2004; Hu; Ma; Lin, 2008).

Outra questão relevante é saber sob quais condições é possível estabilizar um sistema chaveado pelo projeto adequado de leis de chaveamento. Algumas condições suficientes foram propostas em Sun (2004). Lin e Antsaklis (2005) estabelecem condições suficientes e necessárias para uma classe de sistemas chaveados lineares com base em funções de Lyapunov poliedrais. No entanto, este resultado depende de uma transformação de coordenadas, e ainda não se conhece um método eficiente para a determinação dessa transformação.

2.3 SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO AFIM

A maioria dos sistemas chaveados em aplicações práticas não pode ser modelada como sistemas lineares, o que torna necessária a expansão da seção anterior para classes mais abrangentes.

Nesta seção, será abordada uma expansão para o caso em que o sistema chaveado é composto por subsistemas do tipo afim:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad i \in \mathcal{M}, \quad (2.7)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, supostamente disponível para medição, e $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{M}$, são as matrizes de cada subsistema.

Supõe-se que a comutação entre os m subsistemas da Equação (2.7) ocorra segundo uma lei de chaveamento representada pelo sinal:

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.8)$$

que pode ser visto como um mapeamento do vetor de estados, a cada instante t , para o conjunto de índices $\sigma(x(t)) \in \mathcal{M}$ do modo de operação ativo. Se, em um dado instante, $\sigma(x(t))$ possui um único elemento, este define o subsistema ativo. Caso contrário, $\sigma(x(t))$ possui múltiplos elementos, e pode estar ocorrendo modo deslizante. Utilizando os resultados de Filippov (1988) para definir a dinâmica em modo deslizante, $\sigma(x(t))$ torna-se um sinal constante por partes, descontínuo apenas nos instantes em que a trajetória entra ou sai de uma superfície de chaveamento.

O objetivo é projetar uma lei de chaveamento $\sigma(x(t))$ que leve assintoticamente os estados do sistema para uma dada referência constante \bar{x} , ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}. \quad (2.9)$$

Dado \bar{x} , é possível definir o erro do sistema como:

$$e(t) = x(t) - \bar{x} \quad (2.10)$$

e, com isso, reescrever a Equação (2.7) em termos de $e(t)$:

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i, \quad k_i := b_i + A_i \bar{x}. \quad (2.11)$$

Como \bar{x} é constante, pode-se reescrever a lei de chaveamento em função de $e(t)$, ou seja, $\sigma(e(t))$. Caso ocorra modo deslizante, assume-se que a dinâmica do erro pode ser representada como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema da Equação (2.11), assim:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t))(A_i e(t) + k_i), \quad \theta(e(t)) \in \Theta \quad (2.12)$$

e $\theta(e(t))$ é um vetor com elementos $\theta_i(e(t))$ definidos de acordo com Filippov (1988) e Θ é o simplex definido na Equação (2.6). Observe que $\theta_i(e(t)) = 0$ caso $i \notin \sigma(e(t))$. Os modos deslizantes podem ocorrer em um ponto $e(t)$ se existir uma combinação convexa dos campos vetoriais tal que o vetor resultante pertença ao hiperplano tangente da superfície de chaveamento no ponto $e(t)$.

Para atingir globalmente o objetivo de seguimento, como descrito por Trofino et al. (2009), é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável da Equação (2.11). Com isso, é possível estabelecer o Lema 1.

Lema 1 *A origem é um ponto de equilíbrio da Equação (2.11) se e somente se existir $\bar{\theta} \in \Theta$ tal que:*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0. \quad (2.13)$$

□

Demonstração 1 (Lema 1) *Basta substituir $\dot{e}(t) = 0$ e $e(t) = 0$ na Equação (2.11).* □

Com base nas considerações anteriores, o problema será reformulado como o projeto de uma lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ que conduza os estados da Equação (2.11) para a origem.

2.3.1 Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo afim

Nessa subseção, serão apresentados os resultados obtidos em Trofino et al. (2011) para uma lei de chaveamento para sistemas afins, obtida pela aplicação da função ‘max’ na forma:

$$\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}, \quad (2.14)$$

onde $v_i(e(t))$, $i \in \mathcal{M}$, são funções auxiliares associadas aos subsistemas da Equação (2.11). A função \max representa o valor máximo entre as $v_i(e(t))$ e a função \arg é responsável por encontrar o argumento i do sistema que retorna tal valor máximo. O sinal de chaveamento $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}$ mapeia, dentre o conjunto de subsistemas, aquele que possui a “energia máxima”. Por exemplo, $\sigma(e(t_0)) = \{j, k, l\}$ significa que no instante $t = t_0$ a trajetória do erro está na superfície de chaveamento definida pelos subsistemas $\{j, k, l\}$, pois $v_j(e(t_0)) = v_k(e(t_0)) = v_l(e(t_0)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t_0))\}$. Sempre que o conjunto $\sigma(e(t))$ tiver mais de um elemento, um modo deslizante pode estar ocorrendo, e os elementos da combinação convexa, $\theta(e(t))$, são tais que $\theta_i(e(t)) = 0$ se $i \notin \sigma(e(t))$ (Filippov, 1988, p.50). Percebe-se que a Equação (2.14) é uma lei de chaveamento dependente dos estados que utiliza a ideia de Múltiplas Funções de Lyapunov.

A lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ deve assegurar que a origem da dinâmica do erro de seguimento seja globalmente assintoticamente estável. Portanto, buscam-se condições de projeto que resultem em uma lei de chaveamento que conduza assintoticamente os estados à origem, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes.

A seguir, são apresentadas condições suficientes para o projeto usando a teoria de Lyapunov e o processo para descrevê-las como LMIs. Considera-se que as funções auxiliares $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$; $i \in \mathcal{M}$, da Equação (2.14), possuem a seguinte estrutura particular:

$$v_i(e(t)) = e(t)' P_i e(t) + 2e(t)' S_i, \quad (2.15)$$

onde $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^n$ são matrizes a determinar. Nota-se que as funções auxiliares possuem termos quadráticos e lineares. Os termos lineares adicionam graus de liberdade significativos ao problema de estabilidade de sistemas afins, embora na maioria dos casos sejam desprezados (Bolzern; Spinelli, 2004; Xu; Zhai; He, 2008).

Antes de apresentar o próximo teorema, é importante definir a notação auxiliar. Considerando os vetores auxiliares $\theta, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$:

$$\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} := \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\theta}_m \end{bmatrix}, \quad e_\theta := \theta \otimes e(t), \quad (2.16)$$

onde $\theta \in \Theta$ e $\bar{\theta} \in \Theta$ são definidos pela Equação (2.13). O símbolo \otimes representa o produto de Kronecker³.

2.3.2 Anulador linear

Sendo um anulador linear⁴ $\mathfrak{N}_\theta(\theta)$. Dada uma função vetorial $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$, uma função matricial $\mathfrak{N}_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ será chamada de um Anulador Linear de $f(\cdot)$ se satisfizer as duas condições: **(i)** $\mathfrak{N}_f(\cdot)$ é linear e **(ii)** $\mathfrak{N}_f(h)f(h) = 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^q$ de interesse.

³ Para mais informações sobre o produto de Kronecker, vide Apêndice A.2.

⁴ Para mais informações sobre anulador linear, vide Apêndice A.4.

O anulador linear será usado em conjunto com o Lema de Finsler⁵ para reduzir o conservadorismo das LMIs, como apresentado em Trofino e Dezuo (2014).

Define-se a notação auxiliar para o próximo teorema. Seja $\mathfrak{K}_\theta(\theta) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ o anulador linear de θ (Apêndice A.4), $\mathfrak{K}_\theta(\theta)$ é uma função linear de θ com $\mathfrak{K}_\theta(\theta)\theta = 0$, $\forall \theta \in \Theta$. Sejam as constantes positivas α_i , $i \in \mathcal{M}$ escolhidas pelo projetista. Considere as matrizes auxiliares:

$$A := [A_1 \ \cdots \ A_m], \quad K := [k_1 \ \cdots \ k_m], \quad (2.17)$$

$$P := [P_1 \ \cdots \ P_m], \quad S := [S_1 \ \cdots \ S_m], \quad (2.18)$$

$$\alpha := [\alpha_1 I_n \ \cdots \ \alpha_m I_n], \quad I_a := \mathbf{1}_m \otimes I_n, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{1}_m := [1 \ \cdots \ 1] \in \mathbb{R}^m, \quad P_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i, \quad (2.20)$$

$$P_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i P_i, \quad A_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i A_i, \quad (2.21)$$

$$K_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i k_i, \quad S_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i S_i, \quad (2.22)$$

$$L_a(\theta) := \sum_{i=1}^m \theta_i L_i, \quad \mathfrak{K}_\theta(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad (2.23)$$

$$\Psi_a := \begin{bmatrix} A'P + P'A & \star \\ K'P + S'A & K'S + S'K \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\Phi_a := \begin{bmatrix} \alpha'(P - P_{\bar{\theta}}I_a) + (P' - I_a'P_{\bar{\theta}})\alpha & \star \\ 2S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

onde \star representa blocos inferidos pela simetria da matriz.

As condições de projeto são dadas no Teorema 1, extraído de Trofino et al. (2011).

Teorema 1 *Sendo \bar{x} um vetor constante (equilíbrio desejado) para o sistema da Equação (2.7) e supondo que $x(t)$ é mensurável. Considere o sistema afim (2.11) (erro de seguimento) e assumindo a existência de $\bar{\theta} \in \Theta$ conforme o Lema 1. Usando as notações (2.17)-(2.25) e seja L_i , $i \in m$, matrizes a determinar com dimensões de $C_b(\theta)'$, sendo:*

$$C_a = [\mathbf{0}_{mn} \ \mathbf{1}_m], \quad C_b(\theta) = [\mathfrak{K}_\theta(\theta) \otimes I_n \ \mathbf{0}_{rn \times m}], \quad (2.26)$$

⁵ Para mais informações sobre o Lema de Finsler, vide Apêndice A.3.

com o anulador $\mathfrak{X}_\theta(\theta)$. Sejam $\alpha_i > 0$ constantes de projeto. Supondo que existam matrizes P , S , L_b e L_i , $i \in \mathcal{M}$ que solucionem o problema LMI:

$$P_{\bar{\theta}} > 0, \quad (2.27)$$

$$S_{\bar{\theta}} = 0, \quad (2.28)$$

$$\Psi_a + \Phi_a + L_b C_b(\theta) + C_b(\theta)' L_b' + L_a(\theta) C_a + C_a' L_a(\theta)' < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (2.29)$$

onde $\vartheta(\Theta)$ representa o conjunto de vértices do simplex Θ .

Com isso, a origem da Equação (2.11) sob a lei de chaveamento da Equação (2.14) é globalmente assintoticamente estável e:

$$V(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} \quad (2.30)$$

é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada. \square

Demonstração 2 (Teorema 1) A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em Dezuo (2014, p. 80). \square

Percebe-se que a Desigualdade (2.29) é composta por vários termos somados: um assegura o decréscimo da derivada da função de Lyapunov, e as demais reduzem o conservadorismo da LMI.

A condição resolvida para a Inequação (2.29) é obtida do sistema original pré e pós-multiplicando-a por $\xi = \begin{bmatrix} e_\theta' & (\theta - \bar{\theta})' \end{bmatrix}'$. Isso leva aos seguintes termos:

- $\xi' \Psi_a \xi$: Parcela correspondente à derivada temporal da Equação (2.15).
- $\xi' \Phi_a \xi \geq 0$: Necessária para reduzir o conservadorismo via Procedimento S (Apêndice A.1), permitindo que apenas a $\max\{v_i(x(t))\}$ seja necessariamente decrescente.
- $\xi'(L C_b(\theta) + C_b(\theta)' L') \xi = 0$: Reduz o conservadorismo usando o anulador linear (Apêndice A.3), sabendo que:

$$\mathfrak{X}_\theta(\theta) \cdot \theta = 0. \quad (2.31)$$

- $\xi'(L_a(\theta) C_a + C_a' L_a(\theta)') \xi$: Reduz o conservadorismo usando o Lema de Finsler (Apêndice A.3), sabendo que:

$$1 - \sum_{i=1}^m (\theta_i) = 0 \quad \text{e} \quad 1 - \sum_{i=1}^m (\bar{\theta}_i) = 0. \quad (2.32)$$

2.3.3 Projeto utilizando medição parcial de estados

Os resultados do Teorema 1 são aplicáveis apenas se houver medição completa dos estados para determinar o modo ativo pela Equação (2.15). Na prática, contudo, alguns estados podem não estar disponíveis (custo ou impossibilidade física). Nesses casos, requer-se uma lei de chaveamento que use medição parcial. Considerando o sistema da Equação (2.7) com medição $y(t) = C_i x(t) \in \mathbb{R}^g$, onde $C_i \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $i \in \mathcal{M}$ é dada. Define-se o erro de medição como:

$$\varepsilon(t) = y(t) - C_i \bar{x}(t) = C_i e(t). \quad (2.33)$$

Assumindo que as funções auxiliares $v_i(e(t))$, $i \in \mathcal{M}$, tenham a estrutura:

$$P_i := P_0 + C_i' Q_i C_i, \quad S_i := S_0 + C_i' R_i, \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (2.34)$$

onde $P_0 = P_0' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i = Q_i' \in \mathbb{R}^{g \times g}$, $S_0 \in \mathbb{R}^n$, $R_i \in \mathbb{R}^g$. Neste caso, $v_i(e(t))$ pode ser reescrita como:

$$v_i(e(t)) = e(t)'(P_0 + C_i' Q_i C_i)e(t) + 2e(t)'(S_0 + C_i' R_i) \quad (2.35)$$

$$= e(t)' P_0 e(t) + 2e(t)' S_0 + \mu_i(\varepsilon(t)), \quad (2.36)$$

onde:

$$\mu_i(\varepsilon(t)) = \varepsilon(t)' C_i' Q_i C_i \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t)' C_i' R_i. \quad (2.37)$$

Consequentemente:

$$\max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = e(t)' P_0 e(t) + 2e(t)' S_0 + \max_{i \in \mathcal{M}} \{\mu_i(\varepsilon(t))\} \quad (2.38)$$

Como P_0 e S_0 independem do modo i , é possível reescrever a lei de chaveamento apenas em função dos termos que variam com o modo:

$$\arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{\mu_i(\varepsilon(t))\} = \sigma(\varepsilon(t)). \quad (2.39)$$

Assim, a lei de chaveamento torna-se função apenas de $\varepsilon(t)$, que é conhecido.

2.4 SISTEMAS CHAVEADOS DO TIPO NÃO LINEAR E LIMITADO EM SETORES

Esta seção apresenta uma extensão da Seção 2.3, desenvolvida em Dezuo (2014), para uma classe de sistemas chaveados com subsistemas não lineares dependentes do estado, especificamente, funções limitadas em setores.

Dentre as diversas técnicas para controle de sistemas chaveados, poucas tratam adequadamente o caso não linear. Neste quesito, técnicas baseadas em funções de Lyapunov e LMIs, como as de Bolzern e Spinelli (2004) e Trofino et al. (2011), quando devidamente modificadas, são capazes de abordar esta classe de sistemas. A vantagem de formular um problema como LMI

é a facilidade em incorporar novas restrições, desde que também expressas como LMIs. Contudo, estender os resultados de sistemas afins para não lineares é uma tarefa árdua; condições de projeto genéricas para todos os sistemas não lineares usualmente resultam em LMIs excessivamente conservadoras. Uma forma de reduzir o conservadorismo é explorar a estrutura específica de classes de não linearidades, como as delimitadas por setores em função do estado (Khalil, 2002). O tratamento de não linearidades limitadas por setor em conjunto com dinâmicas chaveadas é um campo de pesquisa ativo, onde abordagens como a modelagem T-S Fuzzy têm sido combinadas com LMIs para derivar condições de estabilização menos conservadoras (Chang; Jin, 2022).

Considerando um sistema chaveado não linear com m subsistemas:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i + B \psi_x(q_x(x(t))), \quad i \in \mathcal{M} \quad (2.40)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ são os estados, $\psi_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função não linear dependente de um único estado:

$$q_x(x(t)) := C_q x(t) \quad (2.41)$$

com $C_q \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ dado, e $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^n$ dados pela modelagem.

O problema consiste em projetar uma lei de chaveamento que leve os estados assintoticamente a uma referência constante \bar{x} . Ou seja, o ponto de equilíbrio desejado \bar{x} do sistema em malha fechada deve ser assintoticamente estável.

Dado \bar{x} , pode-se reescrever o sistema apresentado pela Equação (2.40) em função do erro:

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + A_i \bar{x} + b_i + B \psi(q(e(t))), \quad i \in \mathcal{M}, \quad (2.42)$$

onde:

$$\psi(q(e(t))) := \psi_x(q(e(t)) + C_q \bar{x}) = \psi_x(q_x(e(t))) \quad (2.43)$$

é apenas uma translação das coordenadas ψ_x , q_x para ψ , q , e

$$e(t) := x(t) - \bar{x}, \quad q(e(t)) := C_q e(t). \quad (2.44)$$

Percebe-se que $\psi(q(e(t)))$ é $\psi_x(q_x(x(t)))$ reescrito em função de $e(t)$.

Considerando a decomposição de A_i e b_i :

$$A_i := \bar{A}_0 + \bar{A}_i, \quad b_i := \bar{b}_0 + \bar{b}_i, \quad (2.45)$$

onde \bar{A}_0 , \bar{b}_0 são as componentes comuns a todos os $i \in \mathcal{M}$, e \bar{A}_i , \bar{b}_i contêm os termos que variam com i .

Definindo:

$$h_0 := \bar{A}_0 \bar{x} + \bar{b}_0, \quad h_i := \bar{A}_i \bar{x} + \bar{b}_i, \quad (2.46)$$

pode-se reescrever:

$$A_i \bar{x} + b_i = h_0 + h_i . \quad (2.47)$$

Assume-se que o modo deslizante pode ser representado por uma combinação convexa dos subsistemas (Seção 2.1.2). Com isso, a equação que engloba as dinâmicas dos subsistemas e os modos deslizantes é dada por:

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t))(A_i e(t) + h_0 + h_i + B\psi(q(e(t)))) , \quad \theta(e(t)) \in \Theta , \quad (2.48)$$

onde $\theta(e(t))$ é o vetor de elementos $\theta_i(e(t))$ e Θ é o simplex apresentado na Equação (2.6).

Sabe-se que um modo deslizante pode ocorrer em $e(t)$ se for possível encontrar uma combinação convexa dos campos vetoriais tal que $\dot{e}(t)$ pertença ao hiperplano tangente à superfície de chaveamento em $e(t)$.

Para garantir que o erro seja nulo em regime, a origem deve ser um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da Equação (2.48), sendo necessário que:

$$\sum_{i=1}^m \theta_i(0)(h_0 + h_i + B\psi(0)) = 0 , \quad (2.49)$$

onde $\theta_i(0)$, $i \in \mathcal{M}$ são funções contínuas por trechos no tempo, caracterizando a condição de equilíbrio. Com isso, pode-se definir:

$$\bar{\psi} := \psi(0) , \quad (2.50)$$

e escalares constantes $\bar{\theta}_i$ que satisfazem o Lema 2.

Lema 2 *A origem é um ponto de equilíbrio da Equação (2.48) se e somente se existe $\bar{\theta} \in \Theta$ tal que:*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(h_0 + h_i + B\bar{\psi}) = 0 . \quad (2.51)$$

□

Demonstração 3 (Lema 2) *Basta substituir $\dot{e}(t) = 0$ e $e(t) = 0$ na Equação (2.48).* □

Enquanto $\theta(0)$ está associado à condição de equilíbrio (em geral desconhecida e possivelmente variável), $\bar{\theta}$ é uma constante auxiliar que representa um valor particular que $\theta(0)$ pode assumir.

Como a Equação (2.51) é nula, pode-se subtraí-la da Equação (2.48) e reescrever a dinâmica do erro de forma mais conveniente:

$$\dot{e}(t) = A_\theta e(t) + k_\theta , \quad \theta_i \in \Theta \quad (2.52)$$

sendo $A_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i(e)A_i$ e $k_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i(e)k_i$ com:

$$k_i = h_i - h_{\bar{\theta}} + B\Delta\psi , \quad (2.53)$$

sendo $h_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i h_i$ e $\Delta\psi := \psi(t) - \bar{\psi}$. É possível notar que o termo h_0 foi eliminado das equações por este procedimento, como demonstrado em Dezuo (2014, p. 86).

2.4.1 Função não linear limitada em setores

Uma função é dita limitada em setores se satisfaz a Definição 1.

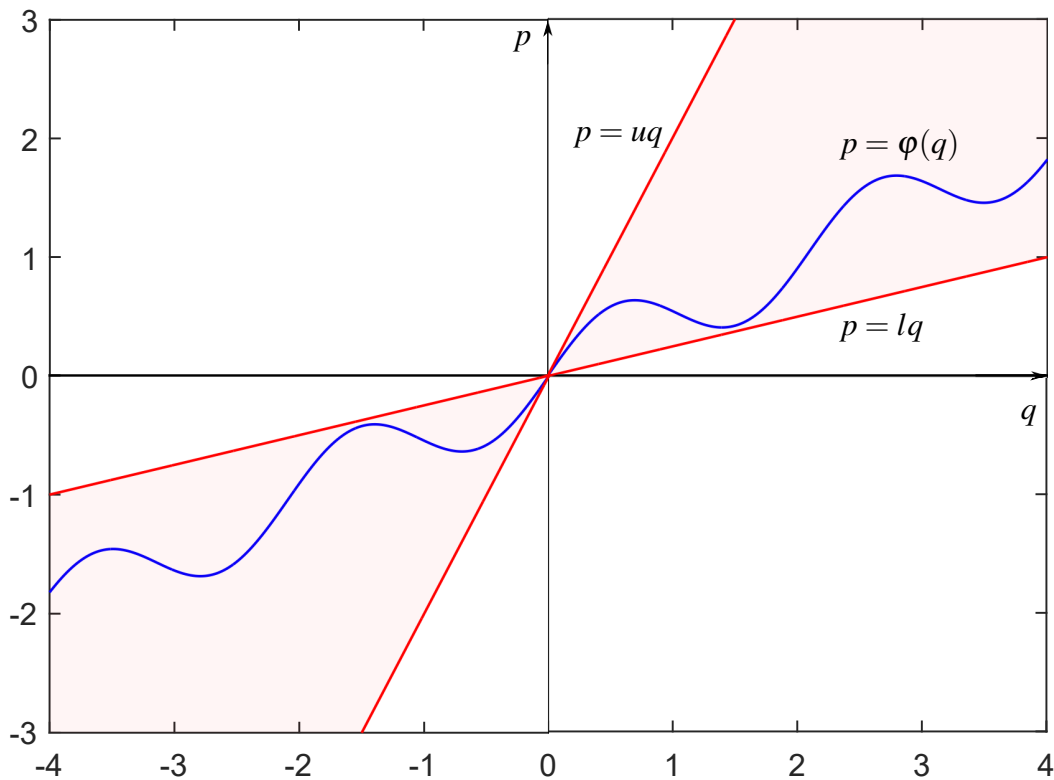
Definição 1 A função $\varphi(q) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, com $\varphi(0) = 0$, é dita limitada em setores $[l, u]$ se para todo $q \in \mathbb{R}$, $p = \varphi(q)$ fica confinada entre as retas $p = lq$ e $p = uq$. Com isso, a desigualdade:

$$(p - uq)(p - lq) \leq 0 \quad (2.54)$$

é válida para todo q , $p = \varphi(q)$. \square

Uma representação gráfica de uma função limitada em setores é vista na Figura 2, onde $\varphi(q) = \sin(3q)/3 + q/2$ é sempre limitada nos setores $[l, u] = [1/4, 2]$.

Figura 2 – Exemplo de uma curva φ limitada pelos setores $[l, u]$.



Fonte: Próprio autor.

Considerando a Definição 1 com a função não linear $p = \Delta\psi(q)$, $q = C_q e$, e sabendo que $\Delta\psi(0) = 0$ quando $C_q e = 0$, é possível reescrever a Inequação (2.54) como:

$$-(\Delta\psi - uC_q e)(\Delta\psi - lC_q e) \geq 0. \quad (2.55)$$

Observação 1 Sempre existe um setor $[l, u]$ suficientemente grande para conter uma função não linear contínua $\varphi(q)$. Por exemplo, o setor $[-\infty, \infty]$ contém todos os pontos $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Mais informações sobre funções não lineares limitadas por setor podem ser encontradas em Khalil (2002, p. 232).

2.4.2 Projeto de uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo não linear e limitado em setores

Nesta subseção, será apresentada uma lei de chaveamento para sistemas chaveados do tipo não linear e limitado em setor, obtida pela aplicação da função “max” na forma da Equação (2.14).

A lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ deve tornar a origem da dinâmica do erro globalmente assintoticamente estável. Busca-se, portanto, obter condições de projeto que resultem em uma lei de chaveamento que conduza os estados à origem, mesmo com modos deslizantes.

A seguir, são dadas condições suficientes para o projeto usando a teoria de Lyapunov e sua formulação como LMIs. Considera-se que as funções auxiliares $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$, $i \in \mathcal{M}$, da Equação (2.14), possuem a estrutura:

$$v_i(e(t)) = e(t)'P_i e(t) + 2e(t)'(S_i - S_{\bar{\theta}}), \quad (2.56)$$

onde $S_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i$, e $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^n$ são matrizes a determinar.

Define-se a notação auxiliar. Seja $\mathfrak{K}_\theta(\theta) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ o anulador linear de θ (Apêndice A.4), com $\mathfrak{K}_\theta(\theta)\theta = 0$, $\forall \theta \in \Theta$. Sejam $\alpha_i > 0$, $i \in \mathcal{M}$, constantes de projeto. Considere as matrizes:

$$A := [A_1 \ \cdots \ A_m], \quad H := [h_1 \ \cdots \ h_m], \quad (2.57)$$

$$P := [P_1 \ \cdots \ P_m], \quad S := [S_1 \ \cdots \ S_m], \quad (2.58)$$

$$\alpha := [\alpha_1 I_n \ \cdots \ \alpha_m I_n], \quad I_a := \mathbf{1}_m \otimes I_n, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{1}_m := [1 \ \cdots \ 1] \in \mathbb{R}^m, \quad P_{\bar{\theta}} := \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i, \quad (2.60)$$

$$C_a := [\mathbf{0}_{mn} \ \mathbf{1}_m \ 0], \quad C_b(\theta) := [\mathfrak{K}_\theta(\theta) \otimes I_n \ \mathbf{0}_{rn \times m+1}], \quad (2.61)$$

$$L_a(\theta) := \sum_{i=1}^m \theta_i L_i, \quad \mathfrak{K}_\theta(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad (2.62)$$

$$\Gamma_n := \begin{bmatrix} -I_a' C_q'(ul) C_q I_a & \star & \star \\ \mathbf{0}_{m \times mn} & \mathbf{0}_{m \times m} & \star \\ (1/2) C_q I_a (u+l) & \mathbf{0}_m & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\Psi_n := \begin{bmatrix} A'P + P'A & \star & \star \\ H'P + S'A & H'S + S'H & \star \\ B'P & B'S & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\Phi_n := \begin{bmatrix} \alpha'(P - P_{\bar{\theta}}I_a) + (P' - I_a'P_{\bar{\theta}})\alpha & \star & \star \\ 2S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times m} & \star \\ 0 & \mathbf{0}_m & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Teorema 2 *Seja \bar{x} um vetor constante (ponto de equilíbrio) do sistema apresentado na Equação (2.40) e supondo $x(t)$ disponível online. Considerando o erro do sistema (2.48) e seja $\bar{\theta} \in \Theta$ um vetor constante que atende ao Lema 2. Utilizando a notação (2.57)-(2.65), sendo $L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$, matrizes a determinar com as dimensões $C_b(\theta)', C_a'$.*

Supondo que $\exists P, S, \tau > 0, L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$ que resolvam as seguintes LMIs:

$$P_{\bar{\theta}} > 0, \quad (2.66)$$

$$\Psi_n + \Phi_n + \tau\Gamma_n + L_b C_b(\theta) + C_b'(\theta)L_b' + L_a(\theta)C_a + C_a' L_a(\theta)' < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta), \quad (2.67)$$

onde $\vartheta(\Theta)$ é o conjunto de vértices do simplex Θ , então, o sistema chaveado não linear da Equação (2.48) é globalmente assintoticamente estável sob a lei de chaveamento apresentada na Equação (2.14) com as funções da Equação (2.56), e com isso:

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\}, \quad v_i(e) = e' P_i e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}), \quad (2.68)$$

é uma função de Lyapunov do sistema. □

Demonstração 4 (Teorema 2) *A demonstração do Teorema 2 é apresentada em Dezuo (2014, p. 101).* □

2.4.3 LMIs independentes do ponto de equilíbrio

Nesta subseção, é apresentado que é possível obter LMIs do Teorema 2 que são independentes do ponto de equilíbrio \bar{x} e de $\bar{\theta}$, se as matrizes A_i (do sistema) e P_i (da função de Lyapunov) possuírem uma estrutura particular. A aplicação deste resultado requer que as matrizes sejam idênticas para todos os subsistemas, ou seja:

$$A_i = \bar{A}_0, \quad P_i = P_0, \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (2.69)$$

onde \bar{A}_0 é dado pela decomposição (2.45) (com $\bar{A}_i = 0, \forall i$), e $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz a determinar. Adicionalmente, considera-se a seguinte notação auxiliar:

$$\Phi_s := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \star & \star \\ 2S'\alpha & \mathbf{0}_{m \times m} & \star \\ 0 & \mathbf{0}_m & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Corolário 1 *Seja \bar{x} um vetor constante, não necessariamente conhecido, (ponto de equilíbrio) do sistema da Equação (2.40), e supondo $x(t)$ disponível para medição. Considerando o erro do sistema da Equação (2.48) e seja $\bar{\theta} \in \Theta$ um vetor constante que atenda ao Lema 2. Utilizando a notação (2.57)-(2.64) e (2.70), sendo $L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$ matrizes a determinar com as dimensões $C_b(\theta)', C_a'$.*

Supondo que existam P_0 (tal que $P = [P_0 \cdots P_0]$), $S, \tau > 0, L_b, L_i, i \in \mathcal{M}$, que resolvam as seguintes LMIs:

$$P_0 > 0, \quad (2.71)$$

$$\Psi_n + \Phi_s + \tau \Gamma_n + L_b C_b(\theta) + C_b'(\theta) L_b' + L_a(\theta) C_a + C_a' L_a(\theta)' < 0, \quad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \quad (2.72)$$

(onde Ψ_n usa $A_i = \bar{A}_0$ e $P_i = P_0$).

Então, o sistema chaveado não linear da Equação (2.48) é globalmente assintoticamente estável utilizando a lei de chaveamento da Equação (2.14) com:

$$V(e) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\}, \quad v_i(e) = e' P_0 e + 2e'(S_i - S_{\bar{\theta}}), \quad (2.73)$$

sendo esta uma função de Lyapunov do sistema. □

Demonstração 5 (Corolário 1) *A demonstração do Corolário 1 é apresentada por Dezuo (2014, p. 108).* □

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, revisaram-se os conceitos fundamentais e as ferramentas analíticas essenciais para o estudo de sistemas chaveados. Partindo da definição de sistemas chaveados como uma classe particular de sistemas híbridos, foram exploradas diferentes estratégias de chaveamento, assim como o fenômeno dos modos deslizantes, incluindo o problema associado ao *chattering*.

A análise de estabilidade foi detalhada, diferenciando-se as abordagens para comutação arbitrária, que frequentemente conduzem a resultados conservadores, como a busca por CQLF, das abordagens para comutação restrita, nas quais o uso de MLF se mostra uma ferramenta poderosa e flexível.

Demonstrou-se que a síntese de leis de controle estabilizadoras para esta classe de sistemas pode ser tratada de forma sistemática por meio da formulação de problemas de otimização convexa, especificamente utilizando LMIs. Tal metodologia foi apresentada tanto para sistemas chaveados afins quanto para sistemas não lineares com não linearidades limitadas em setores, evidenciando a capacidade das LMIs de incorporar restrições e reduzir o conservadorismo na análise de estabilidade.

A estrutura teórica apresentada neste capítulo, embora centrada na estabilização e controle, é fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. As mesmas ferramentas, em especial a teoria de estabilidade de Lyapunov, a modelagem por setores e a síntese baseada em LMIs, fornecem a base para o problema de estimação de estados. No Capítulo 6, essa fundamentação será adaptada e ampliada para enfrentar os desafios do projeto de observadores de estado para sistemas chaveados não lineares, que constitui o foco central desta pesquisa.

3 FUNDAMENTOS DE OBSERVADORES DE ESTADO E FILTRAGEM

Neste capítulo, estabelece-se o contexto fundamental para a estimação de variáveis de estado, introduzindo conceitos e terminologias essenciais que serão empregados ao longo deste trabalho. A estimação de estado é um pilar da engenharia de controle moderna, crucial em cenários onde a medição direta de todas as variáveis de estado do sistema é impraticável, seja por limitações físicas, custo de sensores, ou pela natureza abstrata de certas variáveis como os encontrados em sistemas socioeconômicos ou biológicos (Khalil, 2002; Simon, 2006). Observadores de estado, ou simplesmente observadores, são algoritmos dinâmicos projetados para reconstruir o estado interno de um sistema a partir de medições de entrada e saída disponíveis. Particularmente em sistemas não lineares e chaveados, objeto central desta tese, o projeto de observadores eficazes enfrenta desafios significativos devido às dinâmicas complexas, descontinuidades e incertezas inerentes.

Adicionalmente, serão explorados métodos de filtragem relevantes que podem ser integrados aos observadores. Sinais de medição em sistemas reais são invariavelmente corrompidos por ruído, e distúrbios podem afetar a dinâmica do processo. A filtragem adequada é, portanto, indispensável para aprimorar a precisão das estimativas de estado, mitigar o impacto do ruído e garantir o desempenho robusto do observador e do sistema de controle em malha fechada (Grewal; Andrews, 2014).

Inicialmente, observa-se a teoria clássica para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI¹), que serve como base para abordagens mais avançadas. Considere um sistema LTI na forma de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, e $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ são constantes. A condição inicial do sistema em $t = 0$ é $x(0) := x_0$.

A solução da equação diferencial da Equação (3.1) para uma dada entrada $u(t)$ e condição inicial x_0 fornece a saída:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) . \quad (3.2)$$

Esta equação relaciona a saída $y(t)$ com a condição inicial x_0 e a entrada $u(t)$ para $t \geq 0$. A questão fundamental da observabilidade reside em determinar se é possível estimar de forma única x_0 e sua trajetória $x(t)$ para todo $t > 0$ conhecendo $u(t)$ e $y(t)$ sobre um intervalo de tempo finito.

¹ Do inglês: *Linear Time-Invariant*.

3.1 OBSERVABILIDADE E DETECTABILIDADE PARA SISTEMAS LTI

A capacidade de estimar o estado de um sistema a partir de suas saídas é formalizada pelos conceitos de observabilidade e detectabilidade.

Definição 2 (Observabilidade) *Um sistema LTI é dito **observável** se, para qualquer condição inicial desconhecida $x(0) = x_0$, existe um tempo finito $t_1 > 0$ tal que o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ no intervalo $[0, t_1]$ é suficiente para determinar unicamente x_0 .*

A observabilidade garante que todos os modos (dinâmicas associadas aos autovalores) do sistema afetam a saída de alguma forma, permitindo a reconstrução completa do estado. Diversos critérios equivalentes podem ser usados para verificar a observabilidade.

Teorema 3 (Critérios de Observabilidade) *As seguintes afirmações são equivalentes para o sistema LTI (3.1):*

1. O par (A, C) é observável.
2. O Gramiano de Observabilidade $\mathcal{W}_o(t)$ é não singular (positivo definido) para qualquer $t > 0$:

$$\mathcal{W}_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau . \quad (3.3)$$

3. A matriz de Observabilidade \mathcal{O} tem posto completo (igual a n), ou seja, $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$:

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot n_y) \times n} . \quad (3.4)$$

Intuitivamente, o posto completo da matriz \mathcal{O} significa que as medições $y(t)$ e suas derivadas (implícitas na integral do Gramiano ou na dinâmica) contêm informações suficientes para distinguir entre quaisquer dois estados iniciais diferentes.

4. A equação algébrica de Lyapunov

$$A' \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o A = -C' C \quad (3.5)$$

tem uma única solução \mathcal{W}_o que é positiva definida, assumindo que A é estável (todos os autovalores têm parte real negativa). Além disso, neste caso, \mathcal{W}_o pode ser calculado como:

$$\mathcal{W}_o = \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau . \quad (3.6)$$

5. Nenhum autovetor (direito) de A pertence ao espaço nulo de C . Ou, equivalentemente, a matriz $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$ tem posto n para todo $s \in \mathbb{C}$ (Teste de Hautus para observabilidade).

Demonstração 6 (Teorema 3) As demonstrações detalhadas da equivalência destes critérios podem ser encontradas em textos clássicos de teoria de sistemas lineares, como Chen (2013). \square

O Teorema 3 estabelece que, para sistemas LTI, a observabilidade é uma propriedade estrutural do par (A, C) e independe das condições iniciais ou das entradas aplicadas (B, D) .

Teorema 4 (Observabilidade via LMI) O sistema LTI (3.1) (ou o par (A, C)) é observável se, e somente se, existe uma matriz $P = P' > 0$ tal que, para todo vetor $x \neq 0$ satisfazendo $Cx = 0$, vale

$$x'(A'P + PA)x < 0. \quad (3.7)$$

Equivalentemente, pelo Lema de Finsler (Apêndice A.3), essa condição é satisfeita se, e somente se, existe uma matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ tal que

$$A'P + PA + C'S' + SC < 0. \quad (3.8)$$

Demonstração 7 Se o par (A, C) é observável, então não existe subespaço não trivial invariante por A contido no núcleo de C . Assim, pode-se construir uma função de Lyapunov $V(x) = x'Px$ cuja derivada ao longo das trajetórias seja negativa para todo $x \neq 0$ que satisfaça $Cx = 0$. Pelo Lema de Finsler, essa condição é equivalente à existência de S tal que a LMI (3.8) seja satisfeita.

A recíproca decorre do fato de que a LMI implica ausência de modos autônomos não observáveis, garantindo que o núcleo de C não contenha autovetores associados a autovalores de A . Logo, o par (A, C) é observável. \square

Em muitas aplicações práticas, a exigência de observabilidade completa pode ser excessiva. Pode ser suficiente garantir que quaisquer modos não observáveis sejam inerentemente estáveis. Esta condição mais relaxada é conhecida como detectabilidade.

Definição 3 (Detectabilidade) Um sistema LTI (ou o par (A, C)) é dito **detectável** se todos os modos (autovalores) não observáveis são estáveis (têm parte real estritamente negativa). Equivalentemente, se existe uma matriz K_f tal que $A - K_f C$ é Hurwitz (estável).

A detectabilidade assegura que, mesmo que parte do estado não possa ser inferida diretamente das medições, a dinâmica associada a essa parte não observável converge para zero com o tempo, permitindo que um observador ainda assim estime o estado assintoticamente. A verificação da detectabilidade via LMIs é uma ferramenta eficaz.

Teorema 5 (Detectabilidade via LMI) *O sistema LTI (3.1) (ou o par (A, C)) é detectável se, e somente se, existem matrizes $P = P' > 0$ ($P \in \mathbb{R}^{n \times n}$) e $S \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ tais que a seguinte LMI é factível (Boyd et al., 1994):*

$$A'P + PA + C'S' + SC < 0. \quad (3.9)$$

Demonstração 8 (Teorema 5) *A necessidade decorre da definição de detectabilidade e da teoria de Lyapunov. Se (A, C) é detectável, então todos os modos instáveis ou marginalmente estáveis são observáveis. Considera-se o subespaço não observável. A dinâmica nesse subespaço é estável. Pode-se construir uma função de Lyapunov $V(x) = x'Px$ cuja derivada é negativa definida nesse subespaço ($Cx = 0$). Aplicando o Lema de Finsler (ver Apêndice A.3), a condição $\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x < 0$ para x tal que $Cx = 0$ é equivalente à existência de \mathcal{S} tal que a LMI (3.9) seja satisfeita. A suficiência segue da aplicação direta do Lema de Finsler e do Teorema de Lyapunov, mostrando que a LMI garante a estabilidade dos modos não observáveis. Uma prova detalhada é encontrada em Boyd et al. (1994). \square*

Observação 2 *Ressalta-se que as formulações via LMIs como as apresentadas nos Teoremas 4 e 5 possuem caráter construtivo e são particularmente úteis em procedimentos de projeto de observadores, nos quais as variáveis de decisão permitem determinar simultaneamente garantias de estabilidade e o ganho do observador.*

3.2 O OBSERVADOR DE LUENBERGER PARA SISTEMAS LTI

Quando um sistema LTI é observável (ou pelo menos detectável), é possível projetar um observador para estimar seu estado. A estrutura mais fundamental é o observador de Luenberger (Luenberger, 1971), que utiliza uma cópia do modelo do sistema corrigida por um termo proporcional ao erro de estimação da saída.

Considerando o sistema LTI da Equação (3.1) (assumindo $D = 0$ para simplificação, mas o resultado pode ser obtido para o sistema completo), o observador de Luenberger de ordem completa é dado por:

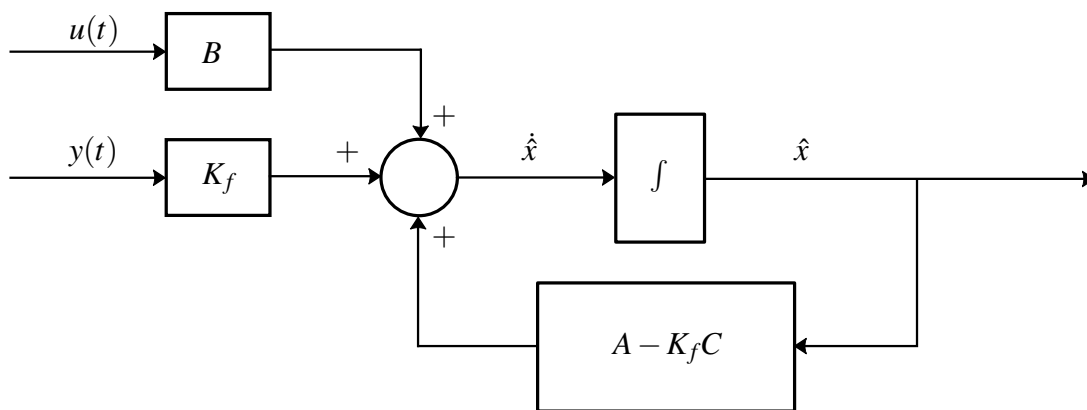
$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado estimado, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída estimada, e $K_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ é a matriz de ganhos do observador, a ser projetada. A estrutura é ilustrada na Figura 3.

A dinâmica do erro de estimação, $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, é obtida subtraindo a Equação (3.10) da Equação (3.1):

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (Ax(t) + Bu(t)) - (A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(Cx(t) - C\hat{x}(t))) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) - K_f C(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - K_f C)e(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Figura 3 – Estrutura de um observador de ordem completa.



Fonte: Próprio autor.

Observe que a dinâmica do erro é autônoma (não depende de $u(t)$ ou $y(t)$ diretamente) e linear. Para que o erro convirja assintoticamente a zero ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$) para qualquer condição inicial $e(0)$, a matriz $(A - K_f C)$ deve ser Hurwitz, ou seja, todos os seus autovalores devem ter parte real negativa.

O projeto do observador de Luenberger consiste, portanto, em escolher a matriz de ganhos K_f tal que $(A - K_f C)$ seja Hurwitz. Pela teoria de controle LTI, tal K_f existe se, e somente se, o par (A, C) é detectável (Chen, 2013). Se o par (A, C) for observável, os autovalores de $(A - K_f C)$ podem ser alocados arbitrariamente no plano complexo, utilizando técnicas como a alocação de polos via fórmula de Ackermann (para SISO) ou métodos baseados na equação de Sylvester. O projeto via LMIs, como sugerido pelo Teorema 5 (onde $S = PK_f'$ com $P > 0$ apropriado), também é uma abordagem eficaz, especialmente para incorporar restrições adicionais ou otimizar o desempenho do observador em relação a ruídos.

Apesar de sua simplicidade, o observador de Luenberger não é diretamente aplicável a sistemas chaveados e não lineares, especialmente na presença de incertezas estruturais.

3.3 DESAFIOS EM OBSERVADORES PARA SISTEMAS CHAVEADOS E NÃO LINEARES

Projetar observadores para sistemas chaveados e não lineares, como os investigados neste trabalho, introduz desafios significativos que transcendem a teoria LTI clássica (Liberzon, 2003; Johansson, 2003).

1. **Dinâmicas Variantes no Tempo e Descontinuidades:** A principal característica dos sistemas chaveados é a mudança abrupta na dinâmica do sistema (representada por diferentes matrizes A_i, B_i, C_i, D_i nos modos i). Isso viola a suposição de invariância no tempo fundamental para a teoria LTI. A matriz $(A - K_f C)$ da dinâmica do erro torna-se

$(A_{\sigma(t)} - K_f C_{\sigma(t)})$, que varia no tempo de forma descontínua. A estabilidade de tal sistema não é garantida mesmo que cada $(A_i - K_f C_i)$ seja Hurwitz individualmente (Liberzon, 2003). Além disso, a própria condição de observabilidade pode variar entre os modos ou necessitar de análise considerando o comportamento chaveado (Tanwani; Shim; Liberzon, 2013).

2. **Não Linearidades:** A presença de funções não lineares $\phi(x)$ no modelo do sistema invalida a superposição e torna a análise de observabilidade e o projeto do observador consideravelmente mais complexos. A dinâmica do erro torna-se não linear, e a convergência do erro não pode mais ser garantida pela simples alocação de autovalores. Técnicas como linearização estendida (EKF), observadores de alto ganho, observadores baseados em modos deslizantes, ou abordagens baseadas em funções de Lyapunov são necessárias (Khalil, 2002; Isidori, 1995).
3. **Incertezas:** Modelos de sistemas reais frequentemente contêm incertezas paramétricas (como variações em resistências, capacitâncias, parâmetros de modelos não lineares) ou dinâmicas não modeladas (efeitos de alta frequência e atrasos). Um observador projetado para o modelo nominal pode ter desempenho degradado ou até se tornar instável na presença dessas incertezas. Observadores robustos são necessários para garantir a convergência do erro apesar das incertezas (Gao; Li, 2014; Petersen; McFarlane, 1991).
4. **Complexidade Combinada:** Sistemas chaveados não lineares combinam os desafios de chaveamento e não linearidade, exigindo abordagens ainda mais sofisticadas. A interação entre as descontinuidades do chaveamento e as não linearidades pode levar a comportamentos complexos, como múltiplos equilíbrios, trajetórias caóticas ou saltos abruptos entre estados estáveis (Johansson, 2003).

A metodologia LMI, combinada com funções de Lyapunov, surge como uma ferramenta eficaz para enfrentar esses desafios (Boyd et al., 1994; Dezuo, 2014; Trofino; Dezuo, 2014; Pinto; Trofino, 2014). As LMIs permitem formular condições de estabilidade e desempenho para sistemas complexos incluindo chaveados, não lineares com não linearidades limitadas por setor e incertos. Para sistemas chaveados, LMIs podem ser usadas para encontrar funções de Lyapunov comuns ou múltiplas que garantam estabilidade sob certas leis de chaveamento (Lin; Antsaklis, 2009). Para sistemas não lineares (como os limitados por setor abordados neste trabalho), LMIs são usadas para garantir a estabilidade local ou global explorando propriedades estruturais das não linearidades (Dezuo, 2014).

O projeto de observadores chaveados robustos via LMIs, garantindo a convergência do erro de estimação na presença de chaveamento, não linearidades e incertezas, é um campo de pesquisa ativo e central para esta tese (Naifar; Jmal; Derbel, 2020; Mohite; Alma; Zemouche, 2022; Mohite; Alma; Zemouche, 2024). A utilização de LMIs permite não apenas garantir a estabilidade, mas também otimizar o desempenho do observador em relação a ruídos e distúrbios,

conectando o projeto do observador à teoria de filtragem robusta. Como exemplo de abordagens específicas que utilizam essas ferramentas, pode-se citar o trabalho de Pinto (2015), detalhado na Seção 3.4.

3.4 OBSERVADORES CHAVEADOS PARA ESTIMAÇÃO CONJUNTA DE ESTADOS E PARÂMETROS

Uma contribuição relevante no campo de observadores para sistemas com parâmetros incertos é a abordagem baseada em observadores chaveados, como proposto por Pinto (2015). Este método visa a estimação conjunta das variáveis de estado e dos parâmetros desconhecidos do sistema, oferecendo uma alternativa a métodos clássicos como o Filtro Estendido de Kalman (EKF) ou observadores adaptativos. A principal motivação reside na capacidade de tratar sistemas onde os parâmetros incertos podem variar dentro de limites conhecidos, formulando o problema de estimação através da estabilização de um sistema de erro chaveado (Pinto, 2015).

3.4.1 Modelo do sistema e estrutura do observador

A classe de sistemas considerada é a de sistemas afins invariantes no tempo, descrita por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dr(t)\end{aligned}\tag{3.12}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, e $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ é uma entrada conhecida ou desconhecida (distúrbio). As matrizes (A, b) contêm os parâmetros desconhecidos, mas assume-se que pertencem a um polítopo convexo Π conhecido, definido pelos seus vértices (A_i, b_i) , $i \in \mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$. Portanto, o par real (A, b) pode ser expresso como uma combinação convexa dos vértices:

$$A = A_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i A_i, \quad b = b_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i b_i\tag{3.13}$$

para algum vetor de combinação convexa $\bar{\theta} \in \Theta$ desconhecido, onde Θ é o simplex unitário. Assume-se que A_{θ} é Hurwitz para todo $\theta \in \Theta$ (Pinto, 2015).

O observador proposto possui uma estrutura chaveada que espelha a representação politópica do sistema:

$$\dot{z}(t) = A_{\theta} z(t) + b_{\theta} + L_{\theta}(y(t) - Cz(t)) + Br(t)\tag{3.14}$$

onde $z(t)$ é o estado do observador, e as matrizes $A_{\theta}, b_{\theta}, L_{\theta}$ são combinações convexas, no tempo t , dos vértices (A_i, b_i) e dos ganhos L_i associados a cada vértice i :

$$(A_{\theta}, b_{\theta}, L_{\theta}) = \sum_{i \in \sigma(\varepsilon)} \theta_i(x, z, r) (A_i, b_i, L_i)\tag{3.15}$$

onde, $\sigma(\varepsilon) \subseteq \mathcal{M}$ é o conjunto de modos ativos determinado pela lei de chaveamento, que depende do sinal de erro disponível $\varepsilon(t)$, definido na Equação (3.18) e onde $\theta(x, z, r) \in \Theta$ é o vetor de combinação convexa instantâneo, seguindo a teoria de Filippov para inclusões diferenciais quando ocorrem modos deslizantes (Pinto, 2015).

3.4.2 Lei de chaveamento e dinâmica do erro

A lei de chaveamento $\sigma(\varepsilon)$ é projetada para direcionar a combinação convexa $\theta(t)$ do observador para o valor verdadeiro $\bar{\theta}$, estimando assim os parâmetros. A abordagem utiliza a composição ‘max’ de um conjunto de funções auxiliares v_i , que dependem do erro $\varepsilon(t)$:

$$v_i(e, e_x, r) = \varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i - 2\varepsilon' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e + e_x' M_{\bar{\theta}} e_x \quad (3.16)$$

$$\sigma(\varepsilon) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, e_x, r)\} = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{\varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i\} \quad (3.17)$$

onde $\varepsilon(t)$ é o vetor de erro disponível definido na Equação (3.18), $e(t) = x(t) - z(t)$ é o erro de estimação de estado, $e_x(t) = x(t) - \bar{x}$ é o desvio do estado real em relação ao equilíbrio, e P_i, Q_i, M_i, S_i são matrizes a serem determinadas via LMI. Notavelmente, a lei de chaveamento da Equação (3.17) depende apenas de $\varepsilon(t)$ e das matrizes P_i, S_i em tempo real. O vetor $\varepsilon(t)$ é definido como:

$$\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} y(t) - Cz(t) \\ E_a(y(t) - C\bar{x}) \\ E_b(z(t) - \bar{x}) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde E_a e E_b selecionam componentes conhecidas do equilíbrio \bar{x} (se houver).

A dinâmica do erro de estimação de estado $e(t)$ é dada por:

$$\dot{e}(t) = (A_{\bar{\theta}} - L_{\theta}C)e(t) + (A_{\bar{\theta}} - A_{\theta})z(t) + (b_{\bar{\theta}} - b_{\theta}) + (B - L_{\theta}D)w(t) \quad (3.19)$$

onde $w(t) = r(t)$ foi renomeado para representar um distúrbio genérico conhecido ou desconhecido. O objetivo do projeto é garantir a convergência assintótica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \bar{\theta} \quad (3.20)$$

3.4.3 Projeto via LMI e convergência

O projeto dos ganhos L_i e das matrizes P_i, Q_i, M_i, S_i é formulado como um problema de otimização convexa envolvendo LMIs. A abordagem baseia-se na construção de uma função candidata a Lyapunov $V(e, e_x, w) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, e_x, w)\}$. As condições LMI (detalhadas nos Teoremas 7, 8 e 9 de Pinto (2015)) são derivadas de forma a garantir que a derivada (direcional) de V seja negativa definida (ou satisfaça uma condição de dissipatividade em relação aos distúrbios

e ao erro paramétrico $\bar{\theta} - \theta$), assegurando a estabilidade do sistema de erro e a convergência desejada pela Equação (3.20).

Na implementação prática, o parâmetro $\theta(t)$ de Filippov, que não está diretamente disponível, é aproximado pela média móvel do sinal lógico de chaveamento $\rho_i(\sigma(\varepsilon(t)))$ sobre um intervalo de tempo T suficientemente pequeno (Pinto, 2015, Comentário 6):

$$\theta_i(t) \approx \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \rho_i(\sigma(\varepsilon(\tau))) d\tau \quad (3.21)$$

onde $\rho_i(\sigma) = 1$ se $i \in \sigma$ e $\rho_j(\sigma) = 0$ para $j \neq i$ (assumindo seleção única em caso de múltiplos máximos para simplificar a aproximação). Esta aproximação conecta a teoria de Filippov com implementações baseadas em chaveamento de alta frequência ou PWM.

3.4.4 Vantagens da Abordagem

As principais vantagens desta abordagem incluem:

- Tratamento conjunto da estimação de estados e parâmetros para sistemas afins com incerteza politópica.
- Aplicabilidade sem necessidade de formas canônicas específicas.
- Projeto sistemático baseado em LMIs, que são convexas e solucionáveis eficientemente por *solvers* disponíveis.
- Consideração explícita de modos deslizantes via teoria de Filippov na formulação da dinâmica do erro e na análise de estabilidade.
- Redução a um observador de Luenberger padrão na ausência de incerteza paramétrica ($m = 1$).
- Flexibilidade para incorporar critérios de performance (\mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞) através de formulações LMI estendidas.

A necessidade de A_θ ser Hurwitz em todo o politopo e a complexidade computacional das LMIs para sistemas de alta ordem ou com muitos vértices no politopo são potenciais limitações a serem consideradas. A conexão com a aproximação via média móvel da Equação (3.21) também sugere a relevância de filtros passa-baixas na implementação e análise prática.

3.5 FILTRAGEM

Observadores são projetados para estimar estados, mas em ambientes práticos, as medições ($y(t)$) são frequentemente contaminadas por ruído, e a própria dinâmica do sistema ($\dot{x}(t)$) pode ser sujeita a distúrbios de processo. A função do observador, nesse contexto, expande-se

para incluir a atenuação desses efeitos indesejados, atuando como um filtro dinâmico (Simon, 2006; Grewal; Andrews, 2014).

Embora filtros sejam mais comumente aplicados para sinais de entradas e saídas, em observadores chaveados eles também podem ser empregados para obter valores equivalentes de parâmetros ou estados estimados. Isso é particularmente relevante quando o sinal do observador assume apenas valores nos vértices do politopo, como ocorre no presente trabalho, sendo necessária alguma técnica de filtragem para determinar um valor representativo do chaveamento. A utilização dessas técnicas contribui para aumentar a acurácia, a robustez e a suavidade das estimativas de estado.

A seguir serão apresentadas algumas técnicas de filtragem amplamente utilizadas na literatura e adequadas ao contexto de observadores e sistemas dinâmicos.

3.5.1 Filtro de média móvel simples (MMS)

O Filtro de Média Móvel Simples (MMS) é uma das técnicas de filtragem mais elementares, frequentemente usada para suavizar sinais ruidosos e identificar tendências (Smith, 1999; Da Silva et al., 2018). Sua operação consiste em calcular a média aritmética de um número fixo (k) dos últimos pontos de dados de um sinal discreto no tempo.

Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma sequência de dados amostrados. A saída y_i do filtro MMS de janela k no instante i é dada por:

$$y_i = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=i-k}^i x_j \right), \quad \text{para } i \geq k \quad (3.22)$$

onde o parâmetro k define a largura da janela de média. Um valor maior de k resulta em maior suavização (atenuação de ruído de alta frequência), mas também introduz um maior atraso (fase) no sinal filtrado e pode atenuar variações rápidas do sinal original que sejam de interesse (Smith, 1999).

O MMS pode ser aplicado diretamente às medições $y(t)$ antes de serem usadas pelo observador, ou internamente no cálculo do termo de correção $K_f(y - \hat{y})$, ou ainda na saída estimada $\hat{x}(t)$ para suavização. Sua simplicidade computacional é uma vantagem significativa, especialmente em sistemas embarcados com recursos limitados. No entanto, sua resposta em frequência é limitada e o atraso introduzido pode ser problemático para sistemas de controle que exigem respostas rápidas. É mais adequado para ruídos de alta frequência e quando a simplicidade é prioritária. A aproximação, apresentada na Equação (3.21), utilizada na implementação do observador chaveado de Pinto (2015) funciona essencialmente como um filtro de média móvel aplicado ao sinal lógico de chaveamento ρ_i .

3.5.2 Filtro \mathcal{H}_2

O projeto de observadores sob o critério \mathcal{H}_2 visa minimizar a energia média quadrática do erro de estimação $e_z(t)$ em resposta a ruídos estocásticos que atuam no sistema (ruído de processo

$w(t)$) e nas medições (ruído de medição $v(t)$, frequentemente incluído no termo $D_w w(t)$) (Boyd et al., 1994). A norma \mathcal{H}_2 de um sistema LTI quantifica essa energia média quadrática da saída em resposta a entradas impulsivas ou ruído branco e pode ser definida como

$$\|h(t)\|_2^2 = \int_0^\infty h'(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{tr}(H^*(j\omega)H(j\omega))d\omega, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (3.23)$$

onde a relação da primeira equação é obtida utilizando o Teorema de Parseval, e $\mathbf{tr}()$ representa o traço de uma matriz (Zhou; Doyle; Glover, 1996).

Seja um sistema linear invariante no tempo sujeito a ruído:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \quad (3.24)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_w w(t) \quad (3.25)$$

$$z(t) = C_z x(t) \quad (3.26)$$

onde $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um ruído branco de média nula, valor esperado $E[w(t)] = 0$, e correlação igual à identidade $E[w(t)w'(t+\tau)] = I\delta(\tau)$. B_w e D_w são matrizes de dimensão adequada, e $z(t)$ é uma saída de performance ponderada pela matriz C_z . A condição inicial do sistema é $x(0) = x_0$.

O objetivo do projeto do filtro \mathcal{H}_2 (observador) é encontrar o ganho K_f que minimize a norma $\|T_{e_z w}\|_2$, onde $T_{e_z w}$ é a função de transferência do ruído $w(t)$ para o erro de estimação $e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, com $\hat{z}(t) = C_z \hat{x}(t)$ e $\hat{x}(t)$ sendo o estado do observador.

A dinâmica do erro de estimação $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, considerando um observador tipo Luenberger, é dada por:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.27)$$

$$= (A - K_f C)e(t) + (B_w - K_f D_w)w(t) \quad (3.28)$$

$$e_z(t) = C_z e(t) \quad (3.29)$$

A função a ser minimizada, equivalente à variância do erro de estimação, é

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E[e_z'(t)e_z(t)]. \quad (3.30)$$

Para sistemas LTI, o observador \mathcal{H}_2 ótimo corresponde ao Filtro de Kalman sob certas suposições sobre as estatísticas do ruído (Simon, 2006). Projetos robustos \mathcal{H}_2 via LMIs permitem lidar com incertezas no modelo, minimizando um limite superior da norma \mathcal{H}_2 no pior caso de incerteza (Pinto, 2015). Pesquisas recentes exploram otimizações \mathcal{H}_2 para sistemas complexos, incluindo sistemas chaveados e com atrasos (Yu et al., 2023).

3.5.3 Filtro \mathcal{H}_∞

O critério \mathcal{H}_∞ adota uma perspectiva diferente pois busca minimizar o ganho máximo da energia do erro de estimação $e_z(t)$ em relação à energia dos sinais de entrada (distúrbios $w(t)$), sem fazer suposições estatísticas sobre esses sinais (Zhou; Doyle; Glover, 1996). A norma

\mathcal{H}_∞ de um sistema LTI é o supremo do ganho de amplitude de sua resposta em frequência, ou equivalentemente, o ganho \mathcal{L}_2 induzido:

$$\|T_{e_z w}\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0} \frac{\|e_z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (3.31)$$

O objetivo do projeto do filtro \mathcal{H}_∞ é encontrar um ganho K_f que estabilize a dinâmica do erro e garanta que $\|T_{e_z w}\|_\infty < \gamma$, para um nível de atenuação $\gamma > 0$ menor possível. O projeto via LMIs, como apresentado em Pinto (2015), permite resolver este problema de forma eficiente, inclusive para sistemas com incertezas (projeto robusto \mathcal{H}_∞). Abordagens recentes estendem o projeto \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares com incertezas paramétricas e distúrbios externos, empregando controle adaptativo inteligente baseado em redes neurais e otimização de parâmetros (Yu; Feng, 2024; Qasim; Ali; Lutfy, 2025).

O critério \mathcal{H}_∞ é preferível quando os distúrbios são desconhecidos, mas considerados limitados em energia, e o objetivo é garantir um nível de atenuação de erro no pior caso. É uma abordagem robusta por natureza, pois não depende de estatísticas precisas do ruído. É muito relevante para sistemas sujeitos a distúrbios externos determinísticos ou incertezas não estruturadas.

3.5.4 Filtro Butterworth

O filtro Butterworth é um tipo de filtro linear projetado para ter uma resposta em frequência o mais plana possível na banda passante (maximamente plana) e uma atenuação monotônica na banda de rejeição (Oppenheim; Schaffer, 2010). Diferente de outros filtros como Chebyshev ou Elíptico, ele não apresenta ondulações (*ripple*) nem na banda passante nem na banda de rejeição.

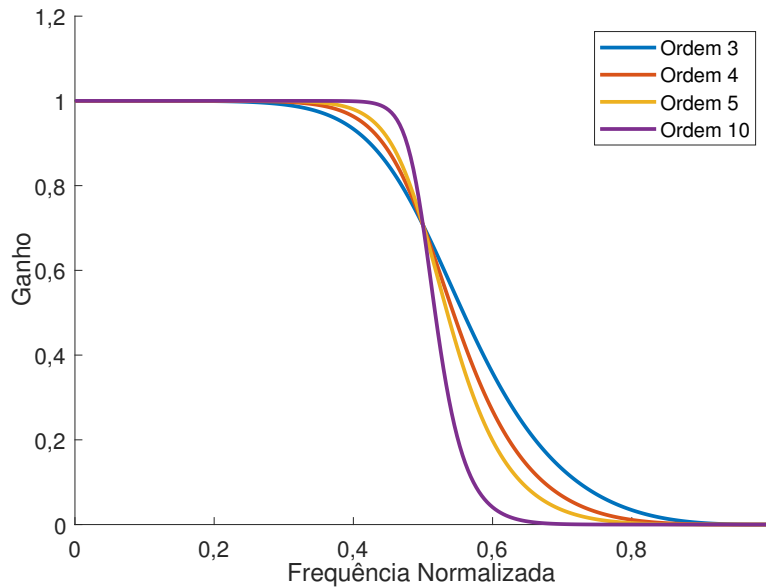
A função de transferência de um filtro Butterworth passa-baixas analógico de ordem N com frequência de corte ω_c (em rad/s, onde a magnitude cai para $1/\sqrt{2}$ ou -3dB) tem a forma:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}. \quad (3.32)$$

Os polos de $H(s)$ estão localizados uniformemente sobre um semicírculo de raio ω_c no semiplano esquerdo do plano complexo. Para implementação digital, o projeto analógico é frequentemente mapeado para o domínio discreto Z usando transformações como a transformação bilinear (Proakis; Manolakis, 2007).

A ordem N do filtro define a taxa de atenuação na banda de rejeição (*roll-off*). A medida que N aumenta, a transição entre a banda passante e a banda de rejeição torna-se mais abrupta, proporcionando uma separação mais nítida entre as frequências desejadas e indesejadas. No entanto, esse aumento na ordem também implica maior complexidade computacional e maior atraso de fase introduzido pelo filtro. A Figura 4 ilustra o comportamento do filtro Butterworth para diferentes ordens, evidenciando o comprometimento entre seletividade e resposta temporal.

Figura 4 – Comportamento do filtro Butterworth para diferentes ordens.



Fonte: Próprio autor.

Filtros Butterworth são excelentes para suavizar sinais quando se deseja preservar a forma do sinal na banda passante sem introduzir distorções de amplitude (*ripple*). Em observadores, podem ser usados para:

1. **Pré-filtragem de Medições:** Aplicados a $y(t)$ para atenuar ruído de alta frequência antes de alimentar o observador. A escolha da frequência de corte ω_c deve ser feita cuidadosamente para não atenuar dinâmicas relevantes do sistema que precisam ser observadas.
2. **Pós-filtragem de Estimativas:** Aplicados a $\hat{x}(t)$ para suavizar a estimativa, especialmente se ela for usada em um loop de controle, reduzindo o *chattering* que pode ser induzido por chaveamentos ou ruído residual na estimativa.
3. **Filtragem Interna:** Como no caso da estimação da não linearidade $\phi(x)$ apresentado no Capítulo 6, onde o filtro Butterworth é usado para calcular o valor médio do sinal chaveado $\hat{\phi}_j$ que representa os limites da função, obtendo assim a estimativa $\hat{\phi}$. A resposta maximamente plana é vantajosa para obter uma média estável sem oscilações indesejadas na estimativa da função não linear.

Nesse contexto, especialmente no caso da filtragem interna descrita no item 3, a resposta monotônica e a ausência de *ripple* dos filtros Butterworth tornam-se particularmente vantajosas. Essas características permitem obter uma estimativa média mais estável do sinal chaveado $\hat{\phi}_j$, evitando oscilações indesejadas na reconstrução de $\hat{\phi}$. Como resultado, o filtro contribui diretamente para a suavidade e precisão da estimação da não linearidade, aspectos fundamentais para o desempenho do observador.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo estabeleceu os fundamentos da teoria de observadores para sistemas LTI, definindo observabilidade e detectabilidade e introduzindo o observador de Luenberger. Foram destacados os desafios intrínsecos ao projeto de observadores para sistemas chaveados e não lineares, motivando a necessidade de abordagens avançadas, como as baseadas em LMIs e funções de Lyapunov, que constituem o núcleo desta tese.

Nesse contexto, foi apresentada a abordagem desenvolvida por Pinto (2015), que propõe uma metodologia para estimação conjunta de variáveis de estado e parâmetros em sistemas afins com incertezas limitadas por um politopo conhecido. Esta tese apresenta similaridades estruturais com a proposta por Pinto (2015), especialmente no uso de observadores chaveados projetados via LMIs. Contudo, diferentemente do trabalho de Pinto (2015), que concentra a análise em sistemas afins com incerteza paramétrica politópica, o foco deste trabalho dirige o estudo a funções não lineares cuja imagem é limitada por valores mínimo e máximo conhecidos, ampliando a classe de sistemas considerados e explorando a estimação de funções não lineares limitadas com interpretação física. Dessa forma, o presente trabalho caracteriza uma extensão metodológica que amplia a aplicabilidade dos observadores chaveados para uma classe relevante de sistemas não lineares.

Adicionalmente, discutiu-se a importância crucial da filtragem no contexto de observadores práticos, sujeitos a ruído e distúrbios. Foram apresentados alguns tipos de filtros como Média Móvel Simples, \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e Butterworth mostrando seus princípios de funcionamento e aplicabilidade específica para melhorar a precisão, robustez e suavidade das estimativas de estado. A integração adequada de técnicas de filtragem é essencial para o desempenho efetivo de observadores em aplicações reais, especialmente em sistemas complexos como os fotovoltaicos chaveados investigados nesta tese.

O Capítulo 6 aprofundará o projeto de observadores chaveados não lineares utilizando a metodologia LMI, incorporando filtros específicos, como o Butterworth, para a reconstrução de funções não lineares a partir de sinais chaveados internamente gerados pelo observador. A combinação da teoria de observadores robustos com técnicas de filtragem apropriadas é fundamental para alcançar os objetivos de estimação precisa e controle eficaz em sistemas complexos e incertos.

4 FUNÇÕES NÃO LINEARES

Este capítulo introduz o conceito fundamental de funções não lineares, estabelecendo a base para a análise destes sistemas. A dinâmica de muitos sistemas físicos e de engenharia é inerentemente não linear, tornando essencial a compreensão dessas funções para modelagem precisa e projeto de controle eficaz (Khalil, 2002). Em particular, não linearidades estão frequentemente associadas a restrições físicas, limites de operação e fenômenos que não podem ser adequadamente descritos por modelos lineares.

No contexto desta tese, o foco recai sobre uma subclasse específica: funções não lineares cuja imagem possui amplitude limitada entre valores mínimo e máximo conhecidos. Esta classe é particularmente importante, pois reflete restrições físicas ou operacionais presentes em sistemas reais, como saturação de atuadores, limites de componentes eletrônicos ou capacidades de produção. O conhecimento explícito desses limites constitui uma informação estrutural relevante que pode ser explorada no projeto de observadores. A caracterização e exploração dessas limitações são cruciais para o desenvolvimento do observador chaveado proposto no Capítulo 6, onde a técnica baseada em LMIs e análise de estabilidade via funções de Lyapunov serão empregadas para garantir a convergência da estimação mesmo na presença dessas não linearidades limitadas.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES

Diferentemente das funções lineares, que obedecem ao princípio da superposição, as funções não lineares apresentam uma relação mais complexa entre entrada e saída. Formalmente, uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é classificada como não linear se não satisfaz a condição de linearidade $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ para todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e todos os vetores x_1, x_2 em seu domínio (Khalil, 2002). Graficamente, enquanto funções lineares são representadas por retas, planos ou hiperplanos, as funções não lineares podem assumir uma vasta gama de formas, incluindo curvas complexas, oscilações, saturação e descontinuidades.

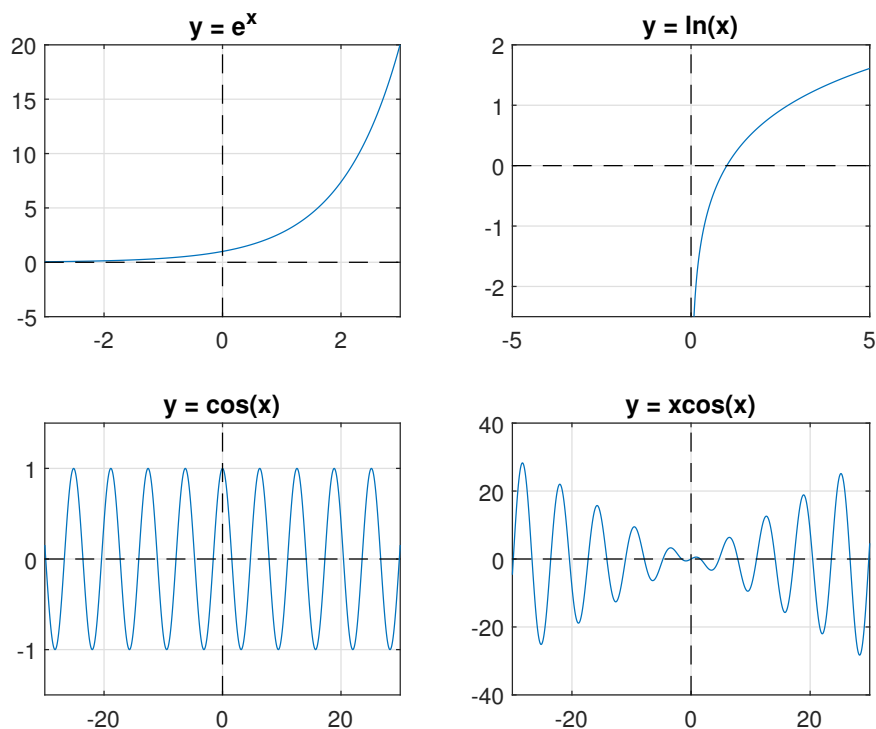
Existem diversas categorias de funções não lineares, cada uma com propriedades matemáticas e comportamentais distintas (Stewart, 2016). Alguns exemplos comuns incluem:

- **Funções Polinomiais:** Funções cujo grau é maior que um (e.g., $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$).
- **Funções Exponenciais e Logarítmicas:** Funções que envolvem potências ou logaritmos (e.g., $y = e^x$, $y = \ln(x)$).
- **Funções Trigonométricas:** Funções baseadas em relações angulares (e.g., $y = \sin(x)$, $y = \tan(x)$).
- **Funções Racionais:** Razão entre dois polinômios.
- **Funções com Saturação ou Zonas Mortas:** Funções que limitam a saída ou não respondem a entradas pequenas.

- **Funções com Histerese:** Funções cuja saída depende não apenas da entrada atual, mas também do histórico de entradas.

A Figura 5 ilustra graficamente alguns desses comportamentos não lineares. A presença de não linearidades introduz desafios significativos na análise de estabilidade e no projeto de controladores e observadores para sistemas dinâmicos. Em particular, tais desafios tornam inadequadas abordagens baseadas exclusivamente em linearização local quando se busca garantir propriedades globais de estabilidade.

Figura 5 – Exemplos de funções não lineares.



Fonte: Próprio autor.

4.2 FUNÇÕES NÃO LINEARES LIMITADAS

Em muitas aplicações práticas, as variáveis associadas a funções não lineares não podem assumir valores arbitrários. Limitações teóricas, físicas, restrições de segurança ou especificações de projeto impõem limites ao comportamento do sistema. Esses limites são, em geral, conhecidos a partir de características físicas dos componentes ou de requisitos de segurança. Isso leva à consideração de funções não lineares limitadas, cujo domínio ou imagem (ou ambos) estão restritos a determinados conjuntos. Nesta seção, o foco será direcionado a uma subclasse particularmente relevante para esta tese: funções cuja imagem possui amplitude limitada entre valores mínimo e máximo conhecidos.

4.2.1 Funções com amplitude limitada entre valores máximo e mínimo

Neste trabalho, utiliza-se a denominação função limitada em amplitude para descrever funções não lineares cuja imagem permanece confinada entre limites mínimo e máximo conhecidos. Assim, a restrição considerada é imposta diretamente sobre a saída da função, isto é, sobre sua amplitude admissível.

Mais especificamente, considera-se uma classe de funções não lineares cuja saída está confinada a um intervalo fechado, definido por um limite inferior (ϕ_{\min}) e um limite superior (ϕ_{\max}), independentemente do valor da variável de entrada. Na literatura de controle, esse tipo de função pode ser associado a descrições de limitação por setores (*sector-bounded*); contudo, para evitar ambiguidade com o conceito empregado na técnica de controle apresentada na Seção 2.4, adota-se aqui a denominação função limitada em amplitude (Khalil, 2002; Lima, 2009).

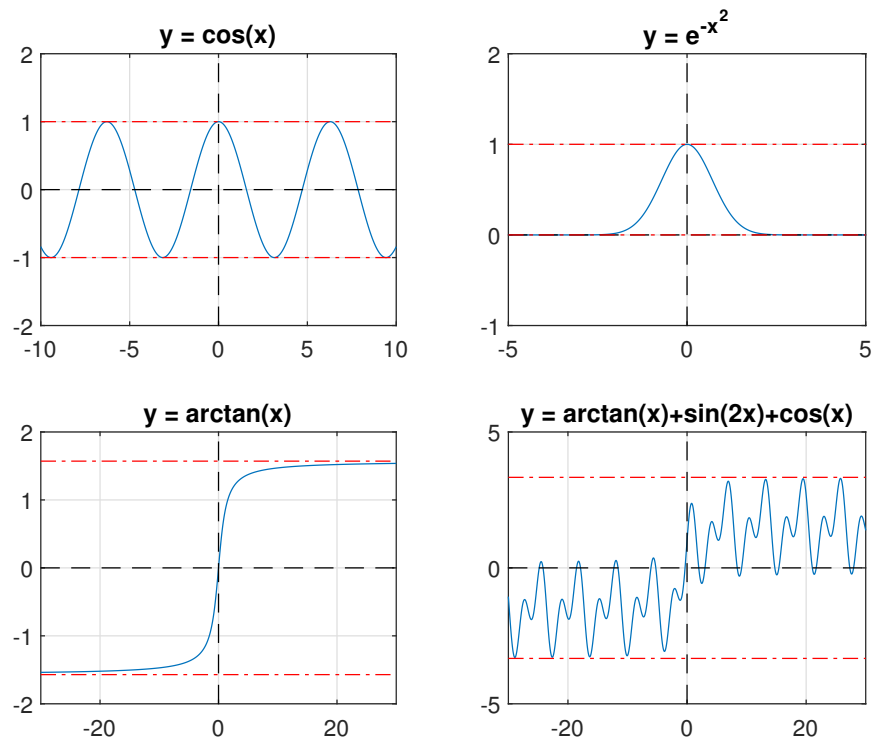
Matematicamente, uma função $y(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ é dita limitada em amplitude entre ϕ_{\min} e ϕ_{\max} se, para todo x pertencente ao domínio \mathcal{D} , a seguinte condição for satisfeita:

$$\phi_{\min} \leq y(x) \leq \phi_{\max} \quad (4.1)$$

onde ϕ_{\min} e ϕ_{\max} são constantes reais conhecidas, com $\phi_{\min} \leq \phi_{\max}$.

Esta propriedade implica que a imagem da função $y(x)$ está contida no intervalo $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$. Exemplos incluem funções de saturação, funções sigmóides (como a tangente hiperbólica ou a função logística), e características de dispositivos físicos que operam dentro de limites definidos. A Figura 6 apresenta exemplos de funções não lineares que satisfazem essa condição de limitação.

Figura 6 – Exemplos de funções não lineares com amplitude limitada entre valores máximo e mínimo.



Fonte: Próprio autor.

4.2.2 Relevância em sistemas físicos e eletrônicos

A existência de limites mínimo e máximo para a amplitude de funções não lineares não é apenas uma construção matemática, mas uma característica intrínseca de inúmeros sistemas físicos e de engenharia. Ignorar esses limites pode levar a modelos que falham em prever o comportamento real do sistema, especialmente sob condições extremas, e resultar em projetos de controle que são ineficazes ou até mesmo instáveis na prática.

Um exemplo encontra-se em sistemas eletrônicos, área central para a aplicação desenvolvida nesta tese, pois, embora modelos teóricos frequentemente utilizem idealizações (como fontes de tensão/corrente ideais, ganhos infinitos, chaves instantâneas), os componentes reais possuem limitações físicas intrínsecas:

- **Saturação de Amplificadores:** A tensão de saída de um amplificador operacional, por exemplo, é limitada pelas tensões de alimentação positiva e negativa (V_{CC+} e V_{CC-}). Qualquer tentativa de produzir uma saída fora desse intervalo resulta em saturação, um comportamento não linear limitado (Mohan; Undeland; Robbins, 2003).
- **Limites de Corrente e Tensão em Semicondutores:** Transistores (BJT, MOSFET) e diodos têm limites máximos de corrente que podem conduzir e tensão reversa que podem bloquear antes de serem danificados. Suas características de condução ($I_C - V_{BE}$) são não

lineares e limitadas pela região de operação segura (SOA - Safe Operating Area) (Mohan; Undeland; Robbins, 2003).

- **Chaves Eletrônicas:** Dispositivos de chaveamento como IGBTs ou MOSFETs de potência, usados em conversores (como os abordados posteriormente), possuem especificações máximas de corrente de condução e tensão de bloqueio. A operação além desses limites leva à falha do componente (Mohan; Undeland; Robbins, 2003).
- **Características Físicas de Sensores e Atuadores:** Muitos sensores apresentam saturação quando a grandeza medida excede sua faixa de operação. Atuadores, como motores ou válvulas, também possuem limites físicos em sua velocidade, torque ou posição.

Em todos esses casos, mesmo que um modelo matemático idealizado possa ser usado para análise em uma faixa de operação “normal”, a descrição completa e robusta do sistema exige a incorporação desses limites ϕ_{min} e ϕ_{max} . O conhecimento explícito desses limites é uma informação valiosa que pode ser explorada no projeto de observadores e controladores para garantir operação segura, prever corretamente o comportamento sob saturação e melhorar a robustez e o desempenho geral do sistema. O observador chaveado desenvolvido nesta tese utilizará essa informação sobre os limites das não linearidades.

4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, foi apresentado o conceito geral de funções não lineares e aprofundou-se na classe específica de funções cuja imagem é limitada em amplitude entre valores máximo e mínimo. Foi destacado que essa limitação não é apenas uma abstração matemática, mas uma representação fiel de restrições encontradas em muitos sistemas reais, com exemplos notáveis em componentes e sistemas eletrônicos. Essas restrições, quando explicitamente incorporadas ao modelo, fornecem informações estruturais valiosas para o projeto de observadores. A compreensão dessa classe de funções é essencial para a modelagem precisa e o projeto de controle robusto.

No Capítulo 5, será detalhado como a característica corrente-tensão (I-V) dos sistemas fotovoltaicos pode ser modelada e analisada dentro deste conceito de funções não lineares limitadas, considerando suas dependências em parâmetros como irradiação e temperatura. Subsequentemente, no Capítulo 6, o conhecimento dos limites $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ será fundamental no desenvolvimento e na análise de estabilidade do observador chaveado proposto para sistemas chaveados contendo tais não linearidades.

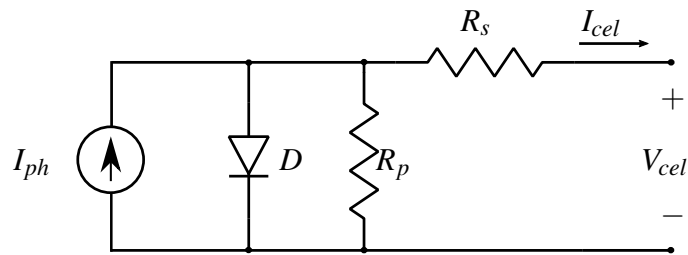
5 SISTEMAS FOTOVOLTAICOS

Este capítulo introduz os sistemas fotovoltaicos apresentando uma modelagem para estes sistemas, além das curvas características $V-I$ e $V-P$ sob condições uniformes e, com isso, mostra que as curvas $V-I$ podem ser tratadas como não linearidades limitadas em amplitude. Também, esclarece o motivo da utilização de conversores chaveados CC-CC entre a saída do arranjo e a entrada da carga, o que faz com que este seja um sistema chaveado.

5.1 MODELAGEM DE UMA CÉLULA FOTOVOLTAICA

A modelagem de uma célula fotovoltaica pode ser feita de forma simplificada, por meio de um circuito equivalente contendo uma fonte de corrente, em paralelo a um diodo. Para apresentar o efeito de não idealidades presente no sistema, pode-se adicionar duas resistências, uma em série e a outra em paralelo, como apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Modelo simplificado de uma célula fotovoltaica.



Fonte: Próprio autor.

Desenvolvendo a equação para o circuito da Figura 7, obtém-se os seguintes resultados (Casaro, 2009):

$$I_{ph} - \left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) I_{cel} - \frac{V_{cel}}{R_p} - I_r \left(\exp \left(\frac{\epsilon_e}{\eta \kappa T} (V_{cel} + R_s I_{cel}) \right) - 1 \right) = 0, \quad (5.1)$$

onde:

$$I_{ph} = (I_{sc} + \gamma(T - T_r)) \frac{P_{sun}}{P_{sun,r}}, \quad (5.2)$$

$$I_r = I_{rr} \left(\frac{T}{T_r} \right)^3 \exp \left(\frac{\epsilon_e E_g}{\eta \kappa} \left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T} \right) \right), \quad (5.3)$$

$$I_{rr} = \frac{I_{sc} - \frac{V_{oc}}{R_p}}{\exp \left(\frac{\epsilon_e V_{oc}}{\eta \kappa T_r} \right) - 1}. \quad (5.4)$$

Variáveis:

- V_{cel} - Tensão de saída nos terminais da célula, em Volts;
- I_{cel} - Corrente de saída nos terminais da célula, em Amperes;
- I_{ph} - Fotocorrente, em Amperes;
- I_r - Corrente de saturação reversa da célula, em Amperes.

Constantes retiradas do *datasheet* do módulo ou determináveis:

- R_s - Resistência série da célula, em Ohms;
- R_p - Resistência paralelo da célula, em Ohms;
- ϵ_e - Carga do elétron (1.6×10^{-19} C);
- η - Fator de qualidade da junção p-n;
- κ - Constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K);
- T_r - Temperatura de referência (298K);
- P_{sun_r} - Intensidade de irradiação de referência (1000 W/m²);
- I_{sc} - Corrente de curto circuito da célula, em Amperes;
- V_{oc} - Tensão de circuito aberto da célula, em Volts;
- γ - Coeficiente de temperatura de I_{sc} ;
- I_{rr} - Corrente de saturação reversa de referência;
- E_g - Energia de banda do silício (1.1 eV).

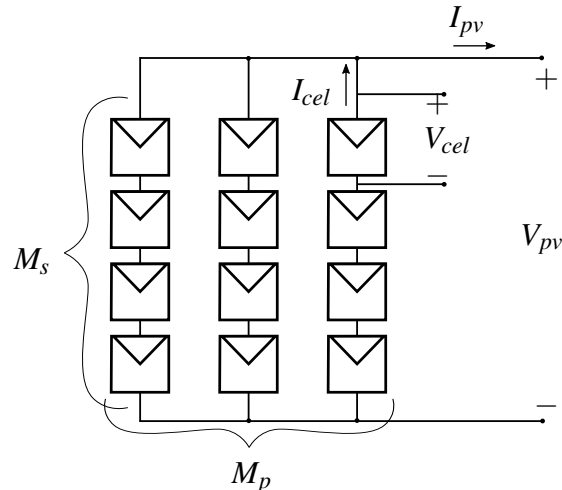
Parâmetros de entrada:

- T - Temperatura da célula, em Kelvin;
- P_{sun} - Intensidade de irradiação solar recebida, em W/m².

É possível perceber na Equação (5.1) que I_{cel} ou V_{cel} não podem ser isolados em função das demais variáveis. Logo, é necessário calcular seus valores empregando métodos numéricos para a realização de simulações. Para isso, é possível obter o valor de I_{cel} para cada valor de V_{cel} , ou de forma análoga, obter o valor de V_{cel} para cada valor de I_{cel} , levando em consideração os parâmetros das células e os valores de temperatura e irradiação. Uma possível saída é utilizar o método de Newton-Raphson para encontrar a solução desta equação. Esse método é preferido por apresentar uma convergência em poucas interações e também por já ser utilizado em outros trabalhos envolvendo sistemas fotovoltaicos (Dezuo, 2014).

Vale ressaltar que, em condições uniformes de temperatura e irradiação, é possível obter uma equação que descreva o comportamento do módulo diretamente a partir da equação de uma célula. Apenas algumas constantes devem ser incluídas, levando em consideração a quantidade de células em série e em paralelo, como apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Modelagem de um painel fotovoltaico sob condições uniformes.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 8, tem-se que a corrente I_{pv} é a soma das correntes I_{cel} de cada conjunto de células conectadas em paralelo. Já a tensão V_{pv} é a soma da tensão V_{cel} das células conectadas em série. Como em condições uniformes de temperatura e irradiação a tensão divide-se igualmente por todas as células, a corrente produzida por cada célula nessa tensão é a mesma. Logo, a tensão V_{pv} é obtida pela multiplicação da tensão da célula V_{cel} pelo número de painéis conectados em série (M_s) (considerando módulos compostos apenas por células conectadas em série, o termo N_s aparece na equação). A corrente I_{pv} , por sua vez, é a multiplicação de I_{cel} com o número de strings em paralelo (M_p).

$$V_{cel} = \frac{V_{pv}}{M_s N_s} \quad (5.5)$$

$$I_{cel} = \frac{I_{pv}}{M_p} \quad (5.6)$$

Onde:

- V_{pv} - Tensão do arranjo;
- I_{pv} - Corrente do arranjo;

- N_s - Número de células em série no módulo;
- M_s - Número de módulos em série;
- M_p - Número de *strings* em paralelo.

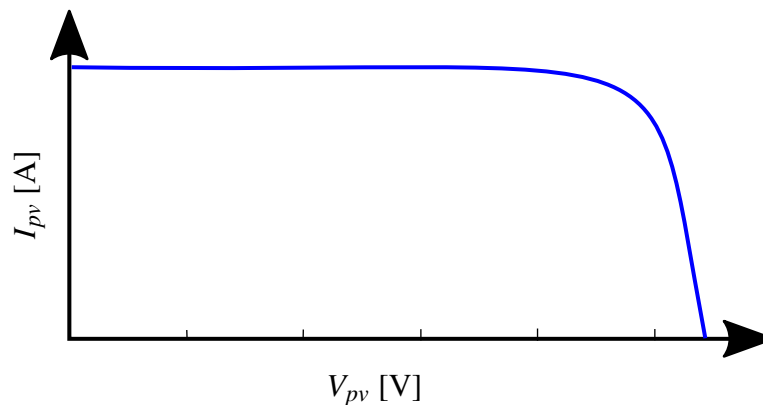
As Equações (5.5) e (5.6) podem ser substituídas na Equação (5.1) para se obter a Equação (5.7), que descreve o comportamento do arranjo de módulos sob condições uniformes.

$$I_{ph} - \left(1 + \frac{R_s}{R_p}\right) \frac{I_{pv}}{M_p} - \frac{V_{pv}}{R_p M_s N_s} - I_r \left(\exp \left(\frac{\epsilon_e}{\eta \kappa T} \left(\frac{V_{pv}}{M_s N_s} + \frac{R_s I_{pv}}{M_p} \right) \right) - 1 \right) = 0 \quad (5.7)$$

5.2 CURVAS CARACTERÍSTICAS

A partir da Equação (5.7), levando em consideração a irradiação e temperatura distribuídas uniformemente sobre o módulo, pode-se traçar a curva V - I característica de um painel, apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Curva característica V - I sob condições uniformes.



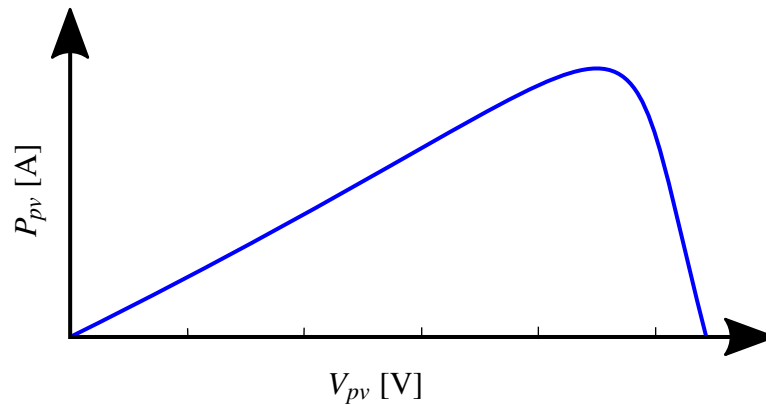
Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

A curva de potência gerada pelo módulo é obtida através da multiplicação da tensão V_{pv} pela corrente I_{pv} do módulo e é apresentada na Figura 10. Para o caso de distribuição uniforme de temperatura e irradiação, pode-se observar que existe apenas um ponto de máximo, sendo esse o máximo global.

Observação 3 Entretanto, na prática, podem ocorrer situações de sombreamento parcial nos módulos fotovoltaicos, nas quais a irradiação não é distribuída uniformemente entre as células ou entre os módulos do arranjo. Nesses casos, as curvas V - I e V - P podem apresentar múltiplos pontos de máximo local, bem como discontinuidades ou mudanças abruptas de inclinação associadas à atuação dos diodos de bypass. A análise desses efeitos e suas implicações sobre o comportamento dinâmico e o rastreamento do ponto de máxima potência foi objeto de estudo do autor em Dezuo, Lunardi e Trofino (2017).

Destaca-se que a técnica desenvolvida no Capítulo 6 também é aplicável a tais condições de operação, sendo capaz de lidar com a presença de múltiplos máximos locais e com as não linearidades introduzidas pelo sombreamento parcial. □

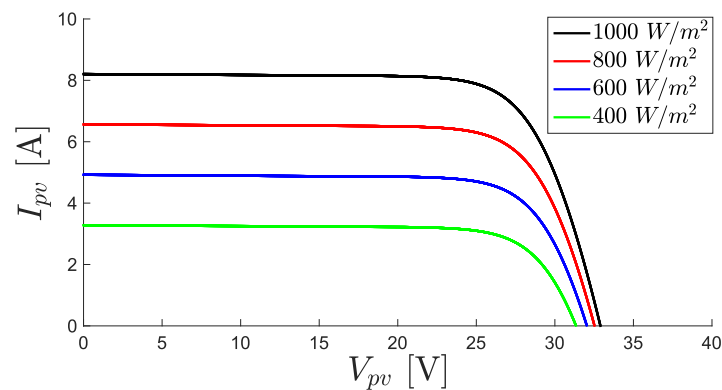
Figura 10 – Curva característica V - P sob condições uniformes.



Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

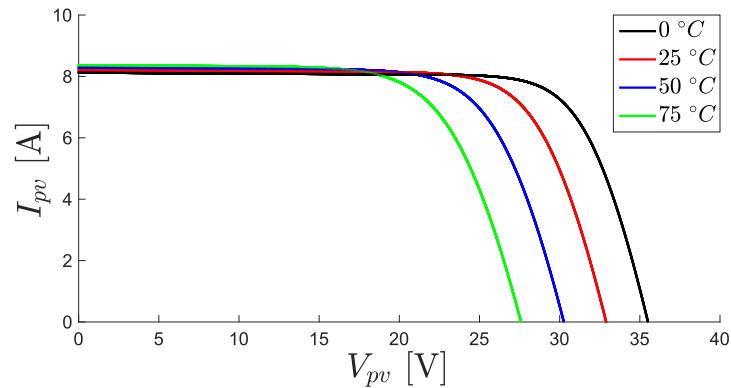
A curva V - I de um painel sob condições distintas de irradiação e temperatura (distribuídas uniformemente) pode apresentar uma grande variação, como mostra-se nas Figuras 11 e 12.

Figura 11 – Curva característica V - I com temperatura de 25 °C e variação na irradiação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 12 – Curva característica V - I com irradiação de 1000 W/m^2 e variação na temperatura.



Fonte: Próprio autor.

5.3 SISTEMAS FOTOVOLTAICOS COM NÃO LINEARIDADES LIMITADAS EM AMPLITUDE

Conhecendo as características do sistema fotovoltaico apresentado na Seção 5.2, é possível observar algumas particularidades.

Como visto na Subseção 4.2.1, se para qualquer ponto da curva V - I existirem constantes ϕ_{min} e ϕ_{max} que abranjam a curva toda, estas podem ser consideradas limitantes dessa curva. Para isso, pode-se sugerir valores que englobem toda a curva V - I .

A Figura 13 apresenta a característica V - I de um conjunto fotovoltaico sob condições uniformes. Pode-se observar que essa curva sempre se encontra no primeiro quadrante, pois tanto a corrente quanto a tensão em sistemas fotovoltaicos não assumem valores negativos. Esse comportamento decorre da presença de diodos de *blocking* e *bypass*, que são incorporados para impedir condução reversa de corrente e proteger as células solares contra possíveis danos causados por sombreamento parcial ou falhas. Além disso, os valores máximos de tensão e corrente são determinados pelas características elétricas dos módulos que compõem o sistema.

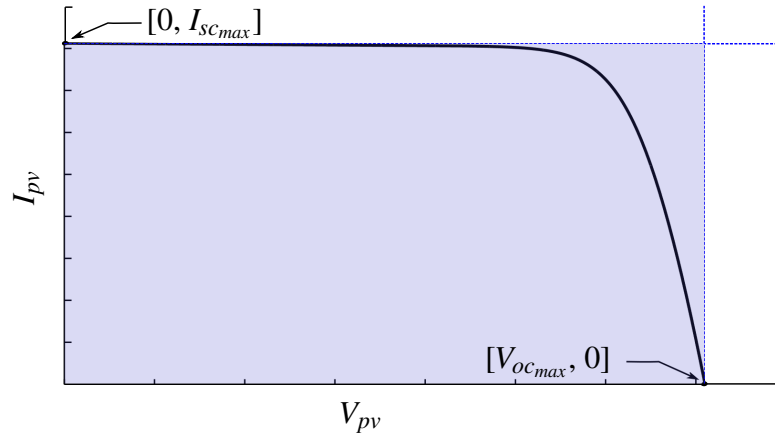
5.3.1 Modelagem como uma fonte de corrente dependente da tensão

Tratando a corrente do sistema fotovoltaico como uma função não linear dependente da tensão aplicada no sistema $I_{pv} = \phi(V_{pv}, T, P_{sun})$.

Como apresentado anteriormente, qualquer ponto da curva $I_{pv} = \phi(V_{pv}, T, P_{sun})$ está restrito ao primeiro quadrante, o que implica que a corrente não pode ser negativa. Assim, o limite inferior para a função $\phi(\cdot)$ é

$$\phi_{min} = 0. \quad (5.8)$$

O limite superior da corrente é determinado pela corrente de curto-circuito das células e pelo número de caminhos em paralelo do arranjo. Sendo I_{sc} a corrente de curto-circuito de uma

Figura 13 – Curva característica V - I com seus limites.

Fonte: Próprio autor.

célula sob condições de referência e M_p o número de células ou módulos em paralelo, tem-se:

$$\phi_{\max} = I_{sc} \times M_p, \quad (5.9)$$

onde, para garantir robustez frente a variações de temperatura T e irradiação P_{sun} , a Equação (5.9) pode ser utilizada com $I_{sc_{max}}$ avaliada no pior caso, ou seja, considerando a maior temperatura e a maior irradiação como pode ser observado nas Figuras 11 e 12.

Portanto, para qualquer ponto da curva $I_{pv} = \phi(V_{pv})$ e para quaisquer valores de temperatura e irradiação, vale:

$$I_{pv}(V_{pv}, \delta) \in [\phi_{\min}, \phi_{\max}] = [0, I_{sc_{max}} M_p]. \quad (5.10)$$

5.3.2 Modelagem como uma fonte de tensão dependente da corrente

Tratando a tensão do sistema fotovoltaico como uma função não linear dependente da corrente aplicada no sistema $V_{pv} = \phi(I_{pv})$.

De forma análoga ao caso da corrente, a tensão também é não negativa devido à topologia do arranjo e à presença de diodos de *bypass*, desta forma, o limite inferior é:

$$\phi_{\min} = 0. \quad (5.11)$$

O limite superior de tensão é determinado pela tensão de circuito aberto de uma célula e pelo número de células em série por módulo e pelo número de módulos em série no arranjo. Sendo V_{oc} a tensão de circuito aberto de uma célula, N_s o número de células em série por módulo e M_s o número de módulos em série, obtém-se:

$$\phi_{\max} = V_{oc} \times M_s \times N_s, \quad (5.12)$$

novamente pode-se considerar, para robustez, valores de $V_{oc_{max}}$ que levem em conta as variações esperadas de temperatura e irradiação, neste caso, isso ocorre quando a temperatura é mínima e a irradiação é máxima, como pode ser observado nas Figuras 11 e 12.

Consequentemente, qualquer ponto da curva $V_{pv} = \phi(I_{pv})$ satisfaz:

$$V_{pv}(I_{pv}, \delta) \in [\phi_{\min}, \phi_{\max}] = [0, V_{oc_{\max}} M_s N_s]. \quad (5.13)$$

Proposição 1 *Sob a hipótese de que a característica $I-V$ do arranjo satisfaz $\frac{\partial i_{pv}}{\partial v_{pv}} < 0$ (monotonicidade decrescente da corrente em relação à tensão), os sinais i_{pv} e v_{pv} permanecem no primeiro quadrante e as seguintes cotas são válidas para qualquer ponto de operação e para as incertezas relevantes δ :*

$$\phi_{\min} = 0, \quad \phi_{\max}^I = I_{sc_{\max}} M_p, \quad \phi_{\max}^V = V_{oc_{\max}} M_s N_s,$$

onde $I_{sc_{\max}}$ e $V_{oc_{\max}}$ representam os valores de limite considerados frente às variações de temperatura e irradiância.

Demonstração 9 (Proposição 1) *A condição $\frac{\partial i_{pv}}{\partial v_{pv}} < 0$, apresentada no Corolário 1 de Dezuo, Lunardi e Trofino (2017), implica que a corrente diminui monotonicamente com o aumento da tensão, de modo que a corrente é maximizada na condição de curto-circuito (ou, mais corretamente, no pior caso de curto-circuito considerando as incertezas de irradiação e temperatura) e é não negativa devido aos diodos de blocking. Analogamente, a tensão é limitada superiormente pela soma das tensões de circuito aberto das células em série. Portanto, as faixas indicadas são válidas para qualquer ponto da curva e para variações dos parâmetros do sistema. \square*

Dessa forma, os limites apresentados fornecem um contorno conservador e físico da região admissível das curvas $I-V$ do sistema fotovoltaico, compatível com a descrição e notação usadas na Figura 13 e robusto frente às incertezas ambientais.

5.4 RASTREAMENTO DO PONTO DE MÁXIMA POTÊNCIA

Os sistemas fotovoltaicos apresentam uma característica não linear na relação entre tensão e corrente ($I-V$), resultando em uma potência de saída ($P = VI$) que depende fortemente das condições ambientais, como a irradiância solar e a temperatura da célula. Essa natureza não linear implica que, para cada condição de operação, exista um ponto específico em que a potência gerada é máxima. O processo de localizar e operar o sistema neste ponto denomina-se *Maximum Power Point Tracking* (MPPT).

O uso de algoritmos de MPPT é essencial para garantir a extração máxima de energia de módulos fotovoltaicos, especialmente sob condições de irradiância variável. Sem a aplicação de MPPT, o sistema tende a operar fora do ponto ótimo, resultando em perdas de eficiência e redução do aproveitamento energético do arranjo fotovoltaico.

Diversas técnicas de rastreamento do ponto de máxima potência foram propostas na literatura (Soualmia e Chenni (2016) apresentam quarenta métodos distintos de MPPT), as quais podem ser classificadas em métodos clássicos, métodos heurísticos e abordagens inteligentes. As principais estratégias são brevemente discutidas a seguir.

5.4.1 Métodos clássicos

Os métodos clássicos são caracterizados por sua simplicidade de implementação e baixo custo computacional. Dentre os mais difundidos destacam-se o método de Perturbação e Observação (P&O) e o método da Condutância Incremental.

O método P&O baseia-se na observação da variação da potência em função de pequenas perturbações impostas à tensão do sistema. Quando uma perturbação resulta em aumento de potência, o algoritmo continua na mesma direção; caso contrário, inverte o sentido da variação. Embora simples, o método pode apresentar oscilações em torno do ponto de máxima potência e desempenho degradado sob variações rápidas de irradiância (Armstrong; Hurley, 2004).

Já o método da Condutância Incremental calcula a derivada $\frac{dP}{dV}$ utilizando as condutâncias instantânea ($\frac{I}{V}$) e incremental ($\frac{dI}{dV}$), buscando o ponto onde a soma dessas condutâncias é nula. Tal abordagem oferece maior precisão sob variações de irradiância, porém requer maior esforço computacional e medições mais precisas de corrente e tensão (Xuesong et al., 2010).

5.4.2 Métodos heurísticos e inteligentes

Com o avanço da capacidade de processamento em controladores embarcados, surgiram métodos heurísticos e baseados em técnicas de inteligência computacional. Esses métodos apresentam maior robustez frente a condições ambientais dinâmicas, ruído de medição e variações rápidas de sombreamento.

Entre as abordagens mais empregadas estão os algoritmos baseados em Lógica Fuzzy (FLC), Redes Neurais Artificiais (ANN), Algoritmos Genéticos (GA) e Otimização por Enxame de Partículas (PSO) (Yadav; Khan; Kumar, 2024; Indumathi; Lakshmanan; Chin, 2024; Messalti; Harrag; Loukriz, 2015).

Tais técnicas exploram modelos aproximados ou empíricos do comportamento do sistema fotovoltaico, ajustando dinamicamente o ponto de operação de forma adaptativa. Por exemplo, os controladores fuzzy utilizam regras linguísticas para inferir a direção de ajuste de tensão, enquanto as redes neurais aprendem o mapeamento entre as variáveis ambientais e o ponto de máxima potência. Embora demandem maior poder computacional e etapa prévia de treinamento, essas abordagens em geral oferecem melhor desempenho sob condições de sombreamento parcial e transientes rápidos.

5.4.3 Considerações sobre a escolha da técnica de MPPT

A escolha da técnica de MPPT adequada depende de um compromisso entre desempenho, complexidade e robustez. Métodos clássicos são amplamente utilizados em aplicações de baixo custo, com variações suaves de temperatura e irradiação. Por outro lado, métodos mais modernos apresentam superioridade em cenários complexos, nos quais existam ruído elétrico ou mudanças rápidas de condições climáticas.

Além disso, a integração do MPPT ao conversor de potência deve considerar aspectos dinâmicos, como tempo de resposta, estabilidade e interferência entre o controle de tensão do barramento CC e o rastreamento da máxima potência. Estudos recentes apontam para o desenvolvimento de estratégias híbridas, que combinam a simplicidade dos métodos clássicos com a adaptabilidade das técnicas inteligentes, a fim de alcançar um desempenho ótimo em uma ampla gama de condições operacionais.

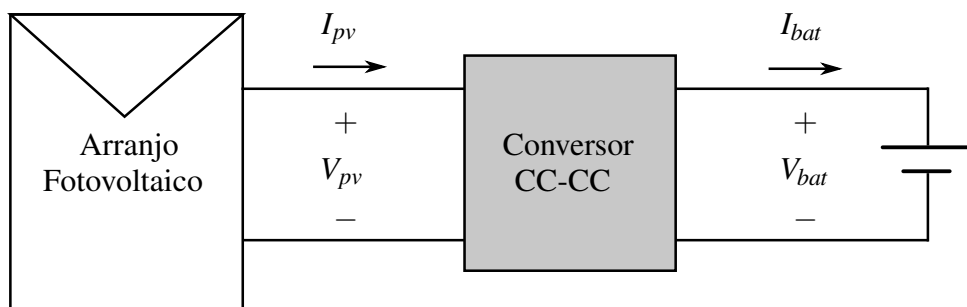
Para que essas estratégias possam ser aplicadas, é necessário que a tensão do arranjo fotovoltaico seja ajustável. Se o painel estiver conectado diretamente à carga, como ocorre em uma bateria, sua tensão de operação é fixa, o que limita o rastreamento do ponto de máxima potência. Nesse contexto, o uso de conversores de Corrente Contínua (CC-CC) torna-se essencial, permitindo variar a tensão do painel e, conseqüentemente, aumentar seu rendimento.

5.5 CONVERSORES CC-CC

Os conversores CC-CC são sistemas formados por semicondutores de potência operando como interruptores e por elementos passivos, que têm a função de controlar o fluxo de energia entre a sua entrada e a sua saída. Isso está apresentado na Figura 14, para o caso do controle de um módulo fotovoltaico com bateria, onde um conversor pode variar a tensão do painel V_{pv} e manter a tensão da bateria V_{bat} constante.

Além disso, esses conversores viabilizam a implementação de algoritmos de MPPT, ajustando dinamicamente o ponto de operação do sistema fotovoltaico.

Figura 14 – Conexão de um conversor CC-CC.



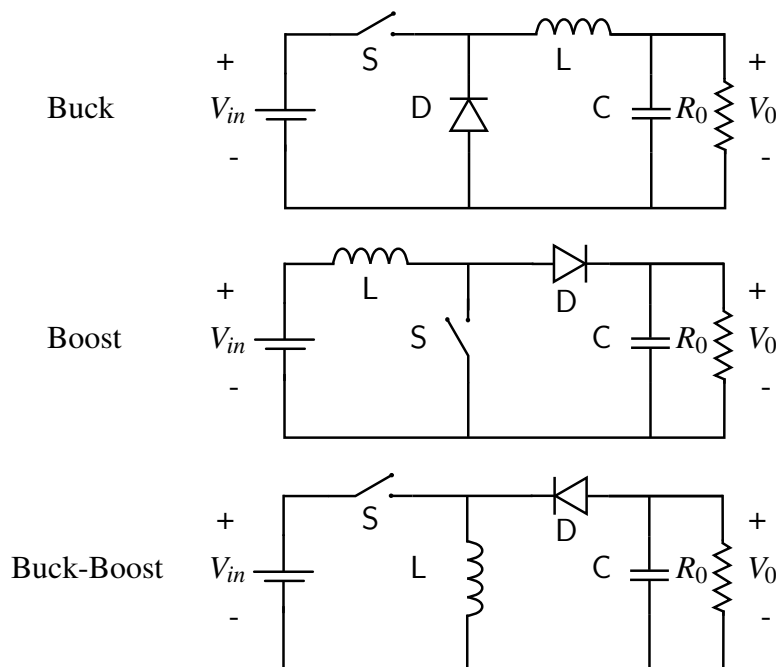
Fonte: Adaptado de Coelho, Concer e Martins (2009).

A escolha do conversor é influenciada por diversos fatores, dentre eles a relação entrada/saída de tensões possíveis. Quando se deseja trabalhar com tensões de saída V_{bat} menores que a tensão de entrada V_{pv} , um conversor possível para ser utilizado é o *Buck*, que é um abaixador de tensão. Para se trabalhar com tensões de saída V_{bat} mais elevadas que a tensão de entrada V_{pv} , um conversor possível para ser utilizado é o *Boost*, que é um elevador de tensão. Porém, quando se deseja trabalhar com tensões de saída V_{bat} , que podem variar tanto para tensões maiores quanto menores que as da entrada V_{pv} , um conversor possível para ser utilizado é o *Buck-Boost*, que pode trabalhar tanto como um elevador quanto como um abaixador de tensão.

Cada conversor anteriormente citado apresenta uma topologia distinta, como mostra a Figura 15. Porém, basicamente, eles utilizam os mesmos componentes¹: um capacitor (C), um indutor (L), um diodo (D) e uma chave (S), esta sendo responsável pelo controle do sistema. A comutação dessa chave faz com que o sistema opere em diferentes modos de funcionamento, cada um descrito por uma dinâmica contínua distinta. Circuitos que apresentam chaves para o controle de sua saída são conhecidos como sistemas chaveados.

Dessa forma, o conjunto formado pelo arranjo fotovoltaico e pelo conversor CC-CC pode ser naturalmente modelado como um sistema chaveado, conforme a teoria apresentada no Capítulo 2. Essa característica é explorada no desenvolvimento do observador chaveado proposto neste trabalho.

Figura 15 – Topologias de conversores CC-CC.



Fonte: Próprio autor.

Os conversores são uma ótima alternativa para o controle da geração fotovoltaica, por possibilitarem a variação da tensão em seus terminais, a fim de buscar o ponto de operação de maior potência que pode ser fornecida pelo painel.

5.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, este capítulo abordou os sistemas fotovoltaicos destacando que suas curvas características podem ser descritas por funções não lineares limitadas em amplitude. Demonstrou-se que as curvas $V-I$ de um sistema fotovoltaico podem ser tratadas como não linearidades cuja

¹ Embora existam diversos outros conversores de estruturas mais complexas e com diferenças de operação que vão além da conversão entre níveis de tensão, mesmo sendo possível, tratar estes casos não é o escopo deste trabalho.

imagem é limitada por valores mínimo e máximo conhecidos, estabelecendo intervalos limitantes tanto para a corrente quanto para a tensão. Esses limites decorrem de restrições físicas inerentes aos módulos fotovoltaicos e às condições ambientais de operação. A compreensão desses intervalos é de suma importância, uma vez que servirão de base para o projeto do observador discutido na Seção 7.2, onde sua aplicação será exemplificada.

Além disso, o capítulo apresentou algumas técnicas de MPPT aplicáveis ao rastreamento do ponto de máxima potência em sistemas fotovoltaicos, bem como a necessidade do uso de conversores CC-CC, que permitem transformar o arranjo fotovoltaico em um sistema chaveado. A introdução do conversor CC-CC adiciona ao sistema fotovoltaico a característica de sistema chaveado, estabelecendo o elo entre a modelagem física apresentada neste capítulo e a teoria de sistemas chaveados discutida no Capítulo 2. Esses conversores desempenham papel fundamental na operação eficiente dos sistemas fotovoltaicos.

Essa combinação de não linearidade limitada e dinâmica chaveada motiva o desenvolvimento do observador chaveado apresentado no Capítulo 6, no qual a corrente do arranjo fotovoltaico é estimada em tempo real e utilizada na implementação de um algoritmo de MPPT sem a necessidade de um sensor de corrente físico.

6 OBSERVADOR CHAVEADO PARA ESTIMAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES LIMITADAS EM AMPLITUDE

Este capítulo apresenta as principais contribuições deste trabalho, abordando o problema da estimação de uma função não linear incerta dentro de um sistema chaveado utilizando um observador baseado em modos deslizantes. Uma arquitetura de observador chaveado é proposta para estimar a função alternando entre os limites mínimo e máximo de sua amplitude conhecida. Um filtro é empregado para calcular o ciclo de trabalho (duty cycle) do chaveamento, que é então utilizado para estimar o valor médio da função. A estabilidade do observador é assegurada através do uso de funções de Lyapunov e condições LMIs, que também proporcionam maior flexibilidade no projeto da estratégia de chaveamento (Hajiahmadi; Schutter; Hellendoorn, 2014; Senger; Trofino, 2016). Demonstra-se que o observador proposto é capaz de estimar, em tempo real, a função não linear incerta mesmo na ausência de conhecimento sobre as condições iniciais do sistema.

As principais inovações científicas deste estudo para o campo de sistemas de controle, que constituem a contribuição central desta tese, são as seguintes:

- (i) A proposta de um novo método baseado em observador para estimar funções não lineares incertas em sistemas chaveados. Esta abordagem é particularmente benéfica para sistemas onde técnicas de estimação tradicionais podem falhar devido a não linearidades e incertezas.
- (ii) A implementação de um mecanismo de estimação baseado na alternância de uma variável entre os limites mínimo e máximo conhecidos da amplitude da função (ϕ_{min} e ϕ_{max}), facilitada pela implementação de um filtro que melhora a suavidade do sinal e a atenuação de ruído. Isso visa tornar a função estimada adequada para realimentação, como ilustrado nos exemplos numéricos.
- (iii) Uma análise abrangente da dinâmica do erro do observador, mostrando como o erro de estimação pode ser caracterizado e como a dinâmica de modo deslizante contribui para melhorar o desempenho da estimação.
- (iv) A aplicação de uma estrutura baseada em Lyapunov para garantir a estabilidade do observador, assegurando a convergência para o estado verdadeiro do sistema ao longo do tempo. Mais especificamente, este trabalho estende os resultados da literatura para o projeto de regras de chaveamento baseadas na função “max” para sistemas não lineares limitados por setor, incluindo o projeto de observadores chaveados.

O restante deste capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 6.1 apresenta a descrição do sistema chaveado considerado. A Seção 6.2 introduz a representação do observador chaveado proposto. A Seção 6.3 apresenta o projeto da lei de chaveamento do observador e a análise de estabilidade via LMIs. Finalmente, a Seção 6.4 discute o uso de filtros para a estimação da função não linear a partir do sinal chaveado do observador.

6.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA CHAVEADO

Considera-se um sistema dinâmico chaveado não linear composto por m subsistemas, conforme indicado abaixo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_i + D\phi(x(t)), \quad i \in \mathcal{M} \quad (6.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (6.2)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $u_i \in \mathbb{R}^p$, $i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}$, é uma entrada chaveada de um conjunto finito de m valores reais possíveis, e $\phi(x(t)) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^d$ é uma função não linear e incerta do estado, tal que:

$$\phi(x(t)) \in \Delta := \{\phi(x(t)) : \phi_{min} \leq \phi(x(t)) \leq \phi_{max}\} \quad (6.3)$$

onde ϕ_{min} e ϕ_{max} são limites conhecidos (vetores em \mathbb{R}^d , com a desigualdade aplicada elemento a elemento). $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times d}$ são matrizes dadas da estrutura do sistema.

Considera-se uma lei de chaveamento com realimentação de estado:

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M} \quad (6.4)$$

que direciona o estado para uma dada referência constante (ou constante por partes) \bar{x} . Assim, o sistema chaveado em malha fechada é dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{\sigma(x(t))} + D\phi(x(t)). \quad (6.5)$$

Nesta tese, supõe-se que $\sigma(x(t))$ é projetada previamente e conhecida $\forall t \geq 0$. O problema central é estimar o estado $x(t)$ e a função $\phi(x(t))$.

6.2 REPRESENTAÇÃO DO OBSERVADOR CHAVEADO

Considera-se o observador chaveado representado por

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu_{\sigma} + D\hat{\phi}_j, \quad j \in \hat{\mathcal{M}} := \{1, \dots, \hat{m}\}, \quad (6.6)$$

onde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado estimado e $\hat{\phi}_j(t)$ é o j -ésimo vértice de Δ , onde $j \in \hat{\mathcal{M}} := \{1, \dots, \hat{m}\}$ e \hat{m} é o número de vértices de Δ . Por exemplo, para um sistema com apenas uma função não linear incerta, o observador tem dois modos de operação possíveis: $\hat{\phi}_1 = \phi_{min}$ e $\hat{\phi}_2 = \phi_{max}$.

A ideia é chavear $\hat{\phi}_j(t)$ entre seus vértices mínimo e máximo, ϕ_{min} e ϕ_{max} , e a função não linear e incerta $\phi(x(t))$ pode ser estimada tomando-se o valor médio da contribuição de cada modo ao longo do tempo através de um filtro. Este processo é análogo à obtenção do ciclo de trabalho (*duty cycle*) de um sinal de Modulação por Largura de Pulso (PWM).

O objetivo de estimar o estado $x(t)$, e como consequência $\phi(x(t))$, pode ser reescrito como o projeto de uma lei de chaveamento que estabiliza o erro de estimação $\hat{e}(t) := \hat{x}(t) - x(t)$

em zero. Tomando a derivada temporal desta definição, obtêm-se as equações dinâmicas do erro para cada modo de operação como

$$\hat{e}(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad (6.7)$$

que podem ser reescritas usando as Equações (6.5) e (6.6) como

$$\hat{e}(t) = A\hat{x}(t) + Bu_\sigma + D\hat{\phi}_j - (Ax(t) + Bu_\sigma + D\phi(t)) \quad (6.8)$$

e notando-se que o termo Bu_σ da dinâmica do observador é sempre conhecido e idêntico ao mesmo termo na dinâmica do sistema, ambos podem ser cancelados, resultando em

$$\hat{e}(t) = A\hat{e}(t) + D(\hat{\phi}_j - \phi(x(t))). \quad (6.9)$$

Supõe-se que a comutação entre os \hat{m} subsistemas da Equação (6.9) ocorra de acordo com uma lei de chaveamento resultando no sinal de chaveamento

$$\hat{\sigma}(\hat{e}(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \hat{\mathcal{M}} \quad (6.10)$$

que pode ser visto como um mapeamento do estado, tomado a cada instante t , para o conjunto de índices $\hat{\sigma}(\hat{e}(t)) \in \hat{\mathcal{M}}$ do modo de operação atual (ativo). Se, em um dado instante, $\hat{\sigma}(\hat{e}(t))$ possui apenas um elemento, este elemento define o subsistema ativo. Caso contrário, $\hat{\sigma}(\hat{e}(t))$ possui mais de um elemento e um modo deslizante pode estar ocorrendo naquele instante. Utilizando os resultados de Filippov (1988) para definir a dinâmica do modo deslizante, $\hat{\sigma}(\hat{e}(t))$ torna-se um sinal constante por partes e é descontínuo apenas nos instantes em que a trajetória do sistema entra ou sai de uma superfície de chaveamento.

De acordo com Trofino et al. (2011), a dinâmica do modo deslizante pode ser representada como uma combinação convexa dos subsistemas individuais como em Filippov (1988). Portanto, o sistema chaveado global do observador, incluindo qualquer dinâmica de modo isolado ou qualquer dinâmica de modo deslizante possível que possa eventualmente ocorrer em uma superfície de chaveamento, pode ser representado por

$$\dot{\hat{e}}(t) = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\theta}_j(\hat{e}(t)) (A\hat{e}(t) + D(\hat{\phi}_j - \phi(x(t)))) , \quad \hat{\theta}(\hat{e}(t)) \in \hat{\Theta}, \quad (6.11)$$

onde $\hat{\Theta}$ é o simplex unitário

$$\hat{\Theta} := \left\{ \hat{\theta} \in \mathbb{R}^{\hat{m}} : \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\theta}_j = 1, \quad \hat{\theta}_j \geq 0 \right\} \quad (6.12)$$

e $\hat{\theta}(\hat{e}(t))$ é um vetor com elementos $\hat{\theta}_j(\hat{e}(t))$ definidos de acordo com os resultados de Filippov (Filippov, 1988, p. 50). Observa-se que $\hat{\theta}_j(\hat{e}(t)) = 0$ se j não for um modo de operação ativo no ponto $e(t)$. Considera-se que $\hat{\theta}(\hat{e}(t))$, visto como função do tempo, é contínuo por partes (Trofino et al., 2011).

Para alcançar o objetivo de rastreamento, a origem da Equação (6.11) deve ser um equilíbrio assintoticamente estável. Define-se $\bar{\theta} := \hat{\theta}(0)$, a partir do qual o seguinte lema pode ser estabelecido.

Lema 3 (Equilíbrio) *A origem da Equação (6.11) é um ponto de equilíbrio se, e somente se, existe $\bar{\theta} \in \hat{\Theta}$ tal que*

$$\phi(x(t)) = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \bar{\theta}_j \hat{\phi}_j. \quad (6.13)$$

Demonstração 10 (Lema 3) *Substitui-se $\hat{e}(t) = 0$ e $\hat{e}(t) = 0$ na Equação (6.11). \square*

A Equação (6.13) indica que $\phi(x(t))$ será estimada com base na média ponderada do chaveamento entre os elementos $\hat{\phi}_j$ em regime permanente. É possível substituir a Equação (6.13) na Equação (6.11) para reescrever a dinâmica do erro na seguinte forma mais conveniente.

$$\dot{\hat{e}}(t) = A\hat{e}(t) + D \sum_{j=1}^{\hat{m}} \left(\hat{\theta}_j(\hat{e}(t)) - \bar{\theta}_j \right) \hat{\phi}_j, \quad \hat{\theta}(\hat{e}(t)) \in \hat{\Theta}. \quad (6.14)$$

6.3 PROJETO DA LEI DE CHAVEAMENTO DO OBSERVADOR

Considera-se a lei de chaveamento do observador expressa por

$$\hat{\sigma}(\hat{e}(t)) := \arg \max_{j \in \mathcal{M}} \{ \hat{v}_j(\hat{e}(t)) \}, \quad (6.15)$$

onde $\hat{\sigma}(\hat{e}(t))$ é uma função constante por partes que caracteriza o modo de operação do observador a ser ativado no instante t e, neste trabalho, propõe-se que $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$, $j \in \mathcal{M}$, sejam funções auxiliares com estrutura dada por

$$\hat{v}_j(\hat{e}(t)) := \hat{e}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) + 2\hat{e}(t)' C' \hat{T} D \left(\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_{\bar{\theta}} \right), \quad (6.16)$$

onde $\hat{P} = \hat{P}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\hat{T} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ são matrizes a serem projetadas. A notação “arg max” significa que $\hat{\sigma}(\hat{e}(t))$ recebe o argumento j da função auxiliar $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$ com o valor máximo para o erro de estimação $\hat{e}(t)$ no instante atual. Nota-se que a Equação (6.16) contém termos que são invariantes em relação ao modo de operação, afetando o valor absoluto de todas as funções $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$ igualmente. Isso significa que esses termos não influenciam a determinação de qual é o argumento j do máximo $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$, onde o que importa é o valor relativo entre as $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$, $j \in \mathcal{M}$. Assim, a lei de chaveamento da Equação (6.15) pode ser reescrita para depender apenas dos termos que dependem de j como

$$\hat{\sigma}(\hat{e}(t)) = \arg \max_{j \in \mathcal{M}} \{ \hat{e}(t)' C' \hat{T} D \hat{\phi}_j \}, \quad (6.17)$$

o que, graças à estrutura particular de $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$, implica que a lei de chaveamento pode depender apenas do erro de estimação $\hat{e}(t)$ na etapa de implementação, e não de $\bar{\theta}$.

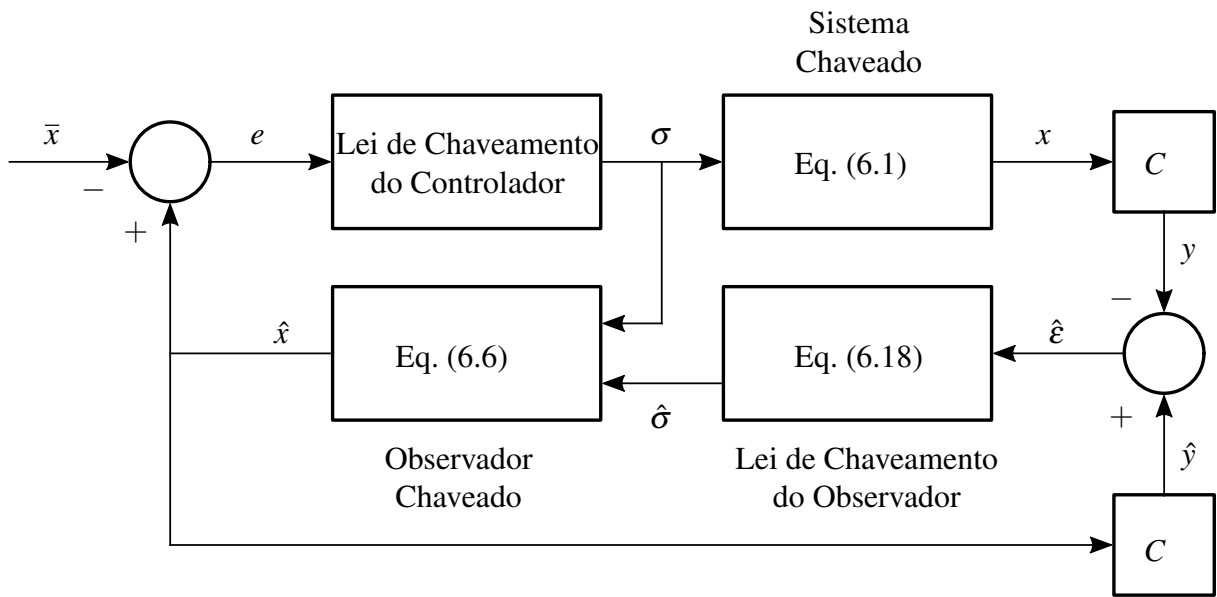
Além disso, recorda-se que $y(t) = Cx(t)$ é a saída disponível das medições. Assim, o erro de estimação da saída pode ser definido como $\hat{e}(t) := C\hat{x} - y(t) = C\hat{e}(t)$. Isso implica que a lei

de chaveamento da Equação (6.17) pode ser ainda mais simplificada para depender apenas do erro de estimação da saída medida como

$$\hat{\sigma}(\hat{\varepsilon}(t)) = \arg \max_{j \in \mathcal{M}} \{ \hat{\varepsilon}(t)' \hat{T} D \hat{\phi}_j \}. \quad (6.18)$$

A estrutura para uma lei de chaveamento baseada em realimentação de estados via observador para rastrear uma referência constante \bar{x} dada é apresentada na Figura 16.

Figura 16 – Estrutura proposta da lei de chaveamento por realimentação de estados baseada em observador.



Fonte: Próprio autor.

A lei de chaveamento apresentada na Equação (6.17) é uma adaptação da forma proposta em Trofino et al. (2011) para o objetivo de lidar com equilíbrios incertos e sistemas contínuos com um conjunto finito de controle. Portanto, este trabalho estende os resultados de Trofino et al. (2011) para a estabilização da classe de sistemas representados pela Equação (6.14). Para isso, considera-se a notação auxiliar das Equações (6.19)-(6.20) e o seguinte teorema.

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} A' \hat{P} + \hat{P} A & \hat{P} D \hat{F} + A' C' \hat{T} D \hat{F} \\ \hat{F}' D' \hat{P} + \hat{F}' D' \hat{T}' C A & \hat{F}' D' (\hat{T}' C + C' \hat{T}) D \hat{F} \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & C' \hat{T} D \hat{F} \\ \hat{F}' D' \hat{T}' C & \mathbf{0}_{\hat{m} \times \hat{m}} \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 & \cdots & \hat{\phi}_{\hat{m}} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{1}_{1 \times \hat{m}} \end{bmatrix}.$$

Teorema 6 Usando a notação auxiliar apresentada nas Equações (6.19)-(6.20), sendo \hat{Q} uma base para o espaço nulo de \hat{E} e $\hat{\alpha} > 0$ um escalar constante especificado pelo projetista. Supõe-se que existam matrizes \hat{P} e \hat{T} que solucionem as condições LMI

$$\hat{P} > 0, \quad \hat{Q}'(\hat{\Psi} + \hat{\alpha}\hat{\Phi})\hat{Q} < 0, \quad (6.21)$$

então a origem da Equação (6.14) é globalmente assintoticamente estável com a lei de chaveamento da Equação (6.18) e

$$\hat{V}(\hat{e}(t)) = \max_{j \in \mathcal{M}} \{ \hat{v}_j(\hat{e}(t)) \} \quad (6.22)$$

é uma função de Lyapunov para o observador em malha fechada.

A seguir, apresenta-se a demonstração das condições de estabilidade do observador proposto. Essa análise constitui a base formal da metodologia desenvolvida neste trabalho, pois estabelece que a lei de chaveamento definida em função do erro de estimação da saída assegura a convergência assintótica do erro do observador mesmo quando a função não linear é desconhecida, desde que seus limites de amplitude sejam conhecidos.

Demonstração 11 (Teorema 6) Segue linhas gerais similares à demonstração apresentada em Trofino et al. (2011). Em resumo, a demonstração do Teorema 6 baseia-se em mostrar que a escolha particular de $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$ satisfaz os requisitos de estabilidade para a função candidata de Lyapunov apresentada na Equação (6.22): que ela seja positiva e decrescente ao longo das trajetórias do sistema chaveado pela lei de chaveamento definida na Equação (6.15). Primeiramente, nota-se que a função candidata de Lyapunov da Equação (6.22) pode ser reescrita como uma combinação convexa particular das funções auxiliares $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$:

$$\hat{V}(\hat{e}(t)) = \max_{j \in \mathcal{M}} \{ \hat{v}_j(\hat{e}(t)) \} = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\theta}_j(\hat{e}(t)) \hat{v}_j(\hat{e}(t)), \quad (6.23)$$

para $j \in \hat{\sigma}(\hat{e}(t))$, isto é, $\hat{\theta}_k = 0$ quando $k \notin \hat{\sigma}(\hat{e}(t))$.

Nota-se que a função máximo $\hat{V}(\hat{e}(t))$ é, por definição, maior ou igual a qualquer combinação convexa das $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$. Considerando as funções auxiliares da Equação (6.16), e a combinação particular $\hat{\theta}(\hat{e}(t)) = \bar{\theta}$, tem-se

$$\hat{V}(\hat{e}(t)) \geq \sum_{j=1}^{\hat{m}} \bar{\theta}_j \hat{v}_j(\hat{e}(t)) = \hat{e}(t)' \hat{P} \hat{e}(t). \quad (6.24)$$

Portanto, devido a Equação (6.24) ser uma forma quadrática, $\hat{V}(\hat{e}(t)) > 0$ é garantida pela condição LMI $\hat{P} > 0$. Além disso, $\hat{V}(\hat{e}(t))$ é radialmente ilimitada, uma vez que o lado direito da Equação (6.24) é uma forma quadrática definida positiva. Adicionalmente, $\hat{v}_j(\hat{e}(t)) \leq \beta_j(\|\hat{e}(t)\|)$ com $\beta_j(\|\hat{e}(t)\|) := \|\hat{P}\| \|\hat{e}(t)\|^2 + 2\|C'\hat{T}D\hat{\phi}_j\| \|\hat{e}(t)\|$. Isso mostra que

$$\lambda_{\min}(\hat{P}) \|\hat{e}(t)\|^2 \leq \hat{V}(\hat{e}(t)) \leq \max_{j \in \mathcal{M}} \{ \beta_j(\|\hat{e}(t)\|) \} \quad (6.25)$$

¹ Isso se baseia nas seguintes propriedades das normas de vetores e matrizes: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ e $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

onde os limites inferior e superior são funções de classe \mathcal{K}_∞^2 .

A seguir, demonstra-se que a função de Lyapunov candidata $\hat{V}(\hat{e}(t))$ decresce estritamente ao longo de qualquer trajetória do sistema de erro do observador. Como $\hat{V}(\hat{e}(t))$ não é diferenciável no sentido clássico em todo o seu domínio, utiliza-se o conceito de derivada direcional. Nesse contexto, Lasdon (1970, p.420) mostra que, para qualquer ponto $\hat{e}(t)$ e direção h , a derivada direcional de $\hat{V}(\hat{e}(t))$ existe e é dada por:

$$D_h \hat{V}(\hat{e}(t)) = \max_{j \in \hat{\Theta}(\hat{e}(t))} \nabla \hat{v}_j(\hat{e}(t)) h . \quad (6.26)$$

Com a Equação (6.9), considera-se a notação $\dot{\hat{e}}(t) = f(\hat{e}(t))$ com:

$$f(\hat{e}(t)) = A\hat{e}(t) + D(\hat{\phi}_j - \phi(x(t))) , \quad (6.27)$$

obtendo-se, assim, a derivada direcional de $\hat{V}(\hat{e}(t))$ na direção do campo vetorial do sistema, isto é, para $h = f(\hat{e}(t))$. Dessa forma, a Equação (6.26) pode ser particularizada para o sistema descrito pela Equação (6.9).

Dessa maneira, conforme demonstrado em Senger e Trofino (2014) e Dezuo, Trofino e Scharlau (2014), pode-se reescrever a Equação (6.26) como:

$$D_{f(\hat{e}(t))} \hat{V}(\hat{e}(t)) = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\theta}_j(\hat{e}(t)) \nabla \hat{v}_j(\hat{e}(t)) f(\hat{e}(t)) . \quad (6.28)$$

Dessa forma, obtém-se a seguinte condição para garantir o decrescimento da função de Lyapunov ao longo das trajetórias do sistema:

$$D_{f(\hat{e}(t))} \hat{V}(\hat{e}(t)) < 0 , \quad \forall \hat{\theta} \in \hat{\Theta} . \quad (6.29)$$

onde $D_{f(\hat{e}(t))} \hat{V}(\hat{e}(t))$ é dado pela expressão apresentada na Equação (6.28).

Com o objetivo de obter uma forma adequada para sua análise utilizando LMIs, o lado esquerdo da Inequação (6.29) pode ser reescrito como

$$\dot{\hat{e}}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) + \hat{e}(t)' \hat{P} \dot{\hat{e}}(t) + \dot{\hat{e}}(t)' C' \hat{T} D (\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_{\bar{\theta}}) + (\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_{\bar{\theta}})' D' \hat{T}' C \dot{\hat{e}}(t) < 0 \quad (6.30)$$

onde se observa que $(\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_{\bar{\theta}})$ pode ser reescrita no formato $(\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j) \hat{\phi}_j$, com isso, considerando a notação da Equação (6.20) tem-se que

$$\sum_{j=1}^{\hat{m}} (\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j) \hat{\phi}_j = \hat{F} (\hat{\theta} - \bar{\theta}) . \quad (6.31)$$

Dessa forma, a Inequação (6.30) pode ser reescrita como

$$\dot{\hat{e}}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) + \hat{e}(t)' \hat{P} \dot{\hat{e}}(t) + \dot{\hat{e}}(t)' C' \hat{T} D \hat{F} (\hat{\theta} - \bar{\theta}) + (\hat{\theta} - \bar{\theta})' \hat{F}' D' \hat{T}' C \dot{\hat{e}}(t) < 0 . \quad (6.32)$$

² Para mais informações sobre funções de classe \mathcal{K} vide Apêndice A.5.

Substituindo $\dot{\hat{e}}(t) = A\hat{e}(t) + D\hat{F}(\hat{\theta} - \bar{\theta})$ na Inequação (6.32) e rearranjando os termos obtém-se

$$\begin{aligned} & \dot{\hat{e}}(t)' (A'\hat{P} + \hat{P}A) \hat{e}(t) + \\ & \quad \dot{\hat{e}}(t)' (\hat{P}D\hat{F} + A'C'\hat{T}D\hat{F}) (\hat{\theta} - \bar{\theta}) + \\ & \quad (\hat{\theta} - \bar{\theta})' (\hat{F}'D'\hat{P} + \hat{F}'D'\hat{T}'CA) \dot{\hat{e}}(t) + \\ & \quad (\hat{\theta} - \bar{\theta})' (\hat{F}'D'(\hat{T}'C + C'\hat{T})D\hat{F}) (\hat{\theta} - \bar{\theta}) < 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

onde, pode-se reescrever na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'\hat{P} + \hat{P}A & \hat{P}D\hat{F} + A'C'\hat{T}D\hat{F} \\ \hat{F}'D'\hat{P} + \hat{F}'D'\hat{T}'CA & \hat{F}'D'(\hat{T}'C + C'\hat{T})D\hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0, \quad (6.34)$$

ou seja, utilizando a notação apresentada na Equação (6.19), para a escolha particular de $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$ da Equação (6.16), a Equação (6.34) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' \hat{\Psi} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0. \quad (6.35)$$

Entretanto, a condição anterior implica que nenhuma combinação de $\hat{v}_j(\hat{e}(t))$ pode aumentar, nem mesmo fora do modo ativo, isto é, quando \hat{v}_j não corresponde ao valor máximo, o que não é necessário. Nota-se que o interesse é apenas garantir que a função máximo $\hat{V}(\hat{e}(t))$ decresça. Como a função “max” sempre satisfaz as condições das Equações (6.23) e (6.24), então, usando a notação apresentada na Equação (6.20), tem-se que a Equação (6.35) só precisa ser satisfeita quando

$$\sum_{j=1}^{\hat{m}} (\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j) \hat{v}_j(\hat{e}(t)) = \hat{V}(\hat{e}(t)) - \hat{e}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) \geq 0. \quad (6.36)$$

Utilizando a notação apresentada na Equação (6.19), a expressão acima pode ser desenvolvida como

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{e}(t)) - \hat{e}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) &= \\ \hat{e}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) + 2\hat{e}(t)' C' \hat{T} D (\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_{\bar{\theta}}) - \hat{e}(t)' \hat{P} \hat{e}(t) &= \\ \hat{e}(t)' C' \hat{T} D \hat{F} (\hat{\theta} - \bar{\theta}) + (\hat{\theta} - \bar{\theta})' \hat{F}' D' \hat{T}' C \hat{e}(t) &= \\ \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & C' \hat{T} D \hat{F} \\ \hat{F}' D' \hat{T}' C & \mathbf{0}_{\hat{m} \times \hat{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\hat{m}} (\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j) \hat{v}_j(\hat{e}(t)) = \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' \hat{\Phi} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (6.38)$$

Assim, pode-se usar o Procedimento S^3 com uma constante $\hat{\alpha} > 0$, definida pelo projetista, para relaxar a condição (6.35) como

$$\begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' (\hat{\Psi} + \hat{\alpha}\hat{\Phi}) \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0. \quad (6.39)$$

Embora a desigualdade da Equação (6.39) forneça uma condição suficiente para garantir o decrescimento da função de Lyapunov, que ainda pode ser conservadora, uma vez que não explora as restrições impostas pelo simplex unitário associado aos parâmetros $\hat{\theta}$. Assim, é possível reduzir esse conservadorismo incorporando essas restrições na LMI.

Nesse sentido, utilizando a notação apresentada na Equação (6.19) e a Equação (6.12), que define o simplex unitário, a expressão a seguir pode ser obtida

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\hat{m}} (\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j) &= \overbrace{\sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\theta}_j}^1 - \overbrace{\sum_{j=1}^{\hat{m}} \bar{\theta}_j}^1 = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{1}_{1 \times \hat{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} = \hat{E} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Portanto, considerando $\hat{M} \in \mathbb{R}^{(n+\hat{m}) \times 1}$ e \hat{Q} o espaço nulo de \hat{E} , é possível relaxar a LMI apresentada na Desigualdade (6.39) por meio da aplicação do Lema de Finsler⁴:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' (\hat{\Psi} + \hat{\alpha}\hat{\Phi}) \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} &\equiv \\ \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix}' (\hat{\Psi} + \hat{\alpha}\hat{\Phi} + \hat{E}'\hat{M} + \hat{M}'\hat{E}) \begin{bmatrix} \hat{e}(t) \\ \hat{\theta} - \bar{\theta} \end{bmatrix} &\equiv \\ \hat{Q}'(\hat{\Psi} + \hat{\alpha}\hat{\Phi})\hat{Q} &< 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Dessa forma, obtém-se $\hat{Q}'(\hat{\Psi} + \hat{\alpha}\hat{\Phi})\hat{Q} < 0$, demonstrando que as LMIs apresentadas nas Desigualdades (6.21) constituem condições suficientes para a estabilidade assintótica global do sistema chaveado, conforme os resultados apresentados em Filippov (1988). \square

6.4 FILTRAGEM PARA ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO NÃO LINEAR

No contexto desta tese, o objetivo da filtragem é extrair uma estimativa média confiável do comportamento do sistema, considerando que o sinal $\hat{\sigma}(t)$ oscila continuamente entre os modos operacionais definidos pelo observador. Neste cenário, o filtro opera eliminando flutuações indesejadas causadas pelo chaveamento e focando no valor efetivo do sinal ao longo do tempo, facilitando assim sua análise e uso subsequente em estratégias de controle ou estimação.

³ Para mais informações sobre o Procedimento S vide Apêndice A.1.

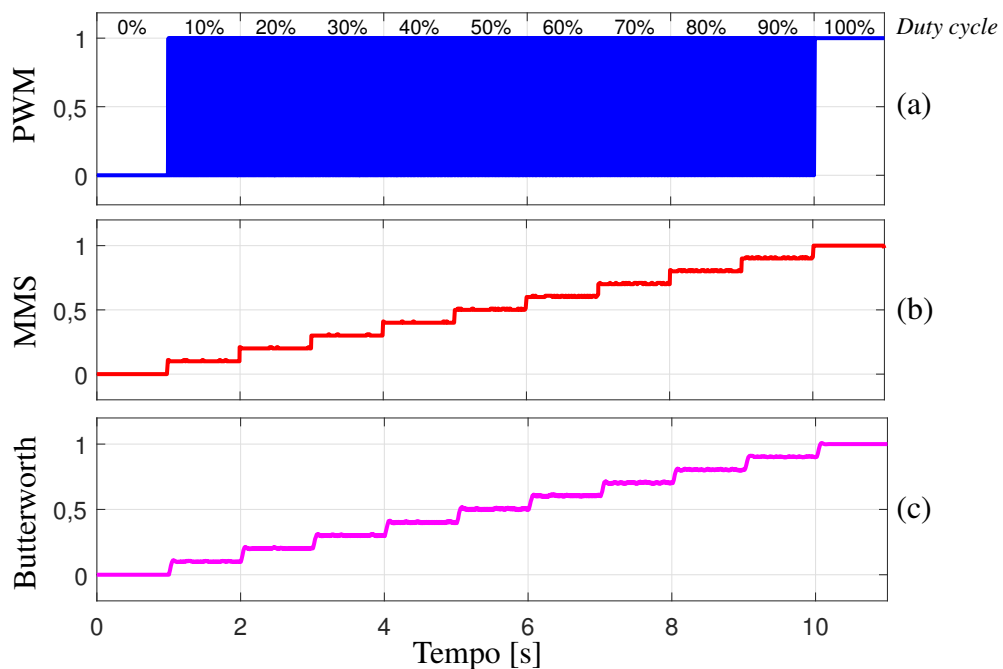
⁴ Para mais detalhes sobre o Lema de Finsler, ver Apêndice A.3.

Conforme discutido na Seção 3.5, entre os métodos mais simples e amplamente utilizados para este propósito, estão os filtros MMS, que substituem cada amostra do sinal pela média de seus vizinhos mais próximos. Apesar de sua estrutura elementar, esses filtros são bastante eficazes na atenuação de ruído de alta frequência e suavização de sinais discretos, tornando-os particularmente adequados para aplicações com recursos computacionais limitados.

Quando é necessária maior precisão na resposta em frequência, empregam-se filtros com comportamento matemático mais rigorosamente definido. O filtro Butterworth é um dos mais comumente usados nesses contextos, pois oferece uma resposta monotônica e maximamente plana na banda passante, livre de ondulações. Esta propriedade o torna particularmente adequado para aplicações que requerem uma média de sinal estável e previsível, sem distorção significativa nas frequências de interesse.

A Figura 17 ilustra um sinal PWM com variação de *duty cycle*, juntamente com os sinais resultantes da aplicação dos filtros MMS e Butterworth.

Figura 17 – Filtros MMS e Butterworth aplicados a um sinal PWM. (a) Sinal PWM. (b) Sinal filtrado com MMS. (c) Sinal filtrado com Butterworth.



Fonte: Próprio autor.

Além dos filtros discutidos, outros filtros que exibem uma resposta em frequência suavemente monotônica, sem ondulações na banda passante, transições contínuas entre as bandas de passagem e parada, e comportamento estável em uma ampla faixa de operação também podem ser empregados. Filtros com essas características são capazes de fornecer estimativas consistentes e confiáveis, mesmo em cenários marcados por oscilações abruptas causadas pelo chaveamento entre os modos operacionais definidos pelo observador.

6.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia desenvolvida neste capítulo estabeleceu as bases teóricas para o projeto de um observador chaveado capaz de estimar funções não lineares com amplitude limitada por valores conhecidos, garantindo a convergência do erro de estimação por meio de uma abordagem baseada em modos deslizantes, funções de Lyapunov e LMIs. A estrutura proposta permite reconstruir o valor efetivo da não linearidade a partir da alternância entre seus limites inferior e superior, complementada por uma etapa de filtragem adequada.

No Capítulo 7, a metodologia proposta é validada por meio de estudo de casos.

7 ESTUDO DE CASOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia de projeto de observadores chaveados desenvolvida no Capítulo 6. O objetivo principal é validar a eficácia da técnica proposta na estimação de estados e de funções não lineares desconhecidas limitadas em amplitude, bem como avaliar a sua robustez frente a diferentes condições de operação.

Além da validação qualitativa por meio de gráficos, busca-se também evidenciar critérios objetivos de desempenho, tais como convergência do erro, comportamento transitório e robustez frente a variações paramétricas.

Para isso, o capítulo organiza-se em dois estudos de casos distintos. Inicialmente, na Seção 7.1, explora-se um sistema teórico com medição parcial de estados. Este cenário permite uma análise detalhada das propriedades de convergência do observador e, fundamentalmente, investiga o impacto da escolha dos limites do setor (ϕ_{min} e ϕ_{max}) no desempenho da estimação. São discutidas as consequências de subestimar ou superestimar esses limites, evidenciando as relações entre o conservadorismo do projeto e a qualidade do sinal recuperado.

Na sequência, a Seção 7.2 apresenta uma aplicação da técnica em um sistema fotovoltaico conectado a um conversor CC-CC Boost. Neste caso, o observador é empregado como um sensor virtual para estimar a corrente do painel, dispensando o uso de um sensor físico. A estimativa obtida é então utilizada para alimentar um algoritmo MPPT, demonstrando a aplicabilidade e a relevância da proposta em problemas onde a redução de custos e o aumento da confiabilidade são essenciais.

7.1 APLICAÇÃO DO OBSERVADOR COM MEDIÇÃO PARCIAL EM UM SISTEMA TEÓRICO

O objetivo deste estudo de caso é validar o funcionamento do observador chaveado em um ambiente controlado, no qual é possível isolar os efeitos da medição parcial de estados e da escolha dos limites da função não linear, permitindo uma análise detalhada das propriedades de convergência do observador.

Exemplo 1 *Este exemplo foi pensado buscando mostrar uma das principais aplicações da técnica desenvolvida neste trabalho, onde o sistema chaveado pode ser estimado medindo apenas sua saída $y(t) = Cx(t)$ e o modo de chaveamento i em que o sistema se encontra. Além disso, o filtro MMS será utilizado neste exemplo para mostrar que a qualidade do sinal estimado está relacionada à qualidade do filtro empregado.*

Considere um sistema teórico que pode ser representado pela Equação (6.1), com dois modos de operação ($m = 2$) e que sua dinâmica pode ser representada pelas seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

além disso, considere a função não linear $\phi(t)$ dada por

$$\phi(t) = \arctang(t) + \text{sen}(2t) + \text{cos}(t) + \text{sen}(t) , \quad (7.2)$$

e a saída medida $y(t) = Cx(t)$, onde

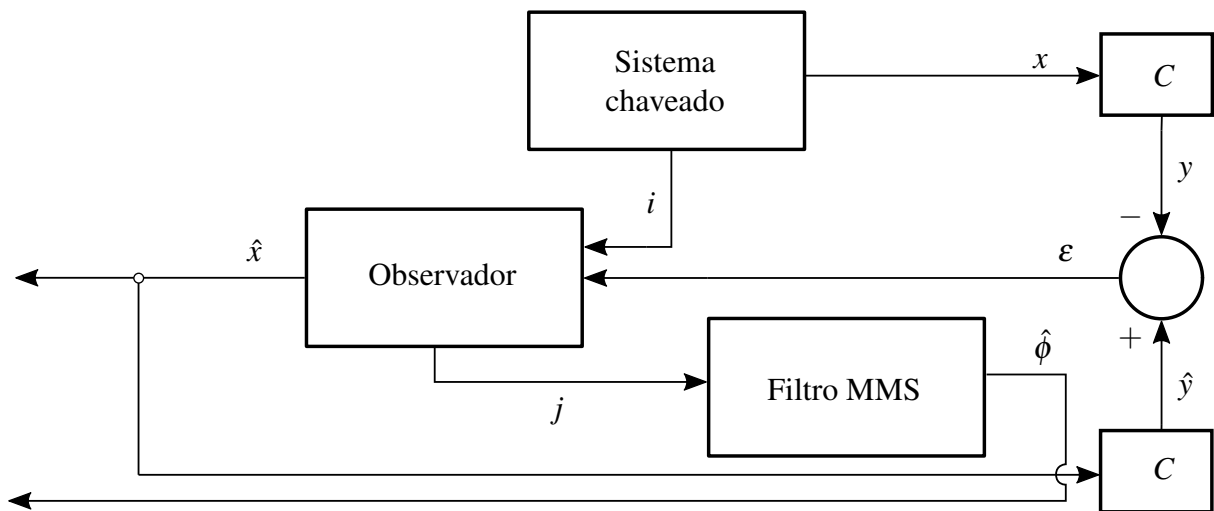
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (7.3)$$

com isso, a saída medida igual ao estado $x_2(t)$, ou seja $y(t) = x_2(t)$.

Neste exemplo, o controlador do sistema emprega um sinal PWM com frequência de 1kHz e um tempo de ciclo de 0,5 fixo.

A Figura 18 apresenta a estrutura do observador utilizado para este sistema. É possível observar que este sistema possui um controlador chaveado que não depende dos estados do sistema, com isso o controlador chaveado e o sistema serão tratados apenas como um bloco denominado “Sistema Chaveado”. Além do estado de saída $y(t)$, para o observador chaveado também é necessário conhecer o modo de operação i em que o sistema se encontra.

Figura 18 – Estrutura do observador.



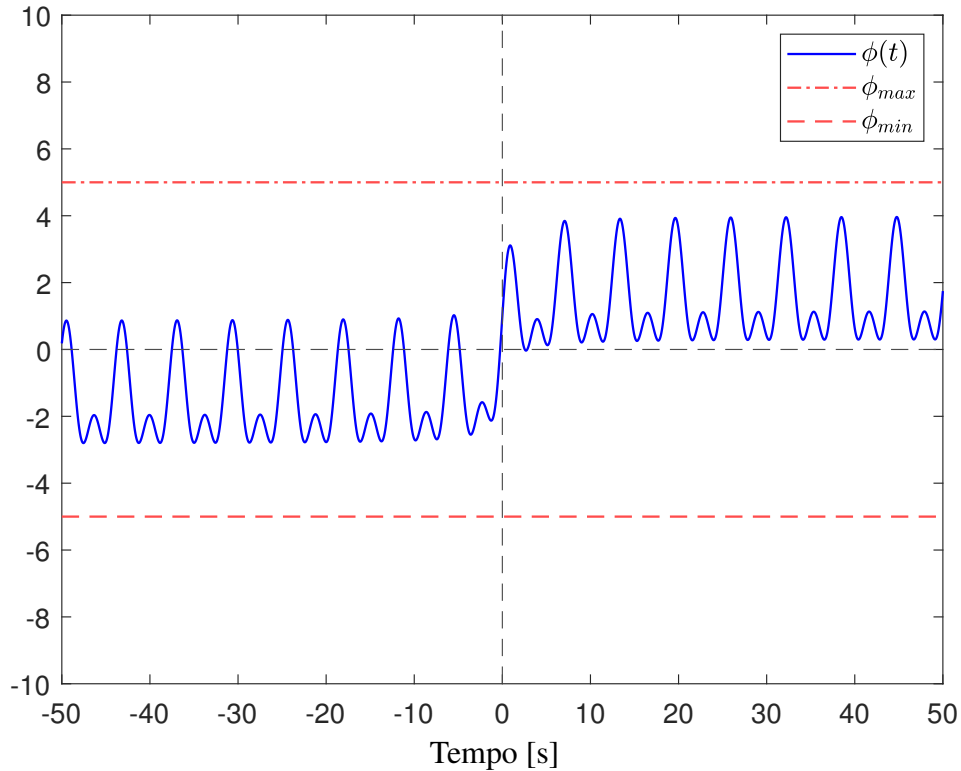
Fonte: Próprio autor.

7.1.1 Projeto do observador

Para o projeto do observador, inicialmente é necessário definir os valores de ϕ_{min} e ϕ_{max} que limitam a função não linear $\phi(t)$.

Para a função não linear da Equação (7.2) os limites definidos são $\phi_{max} = 5$ e $\phi_{min} = -5$, a Figura 19 apresenta a função não linear juntamente com os valores limitantes.

Observação 4 Os limites reais da função representada pela Equação (7.2) abrangem o intervalo $[-5/4 - \pi/2, 1 + \sqrt{2} + \pi/2]$. No entanto, para fins práticos e visando mostrar que é possível considerar limites mais amplos, será adotado o intervalo $[-5, 5]$ para este projeto.

Figura 19 – Função não linear $\phi(t)$ os limites ϕ_{min} e ϕ_{max} .

Fonte: Próprio autor.

Com isso, as LMIs do Teorema 6, considerando a estrutura particular das matrizes \hat{P} e \hat{T} , foram resolvidas por meio de um método iterativo sobre $\hat{\alpha}$, para o qual se obteve uma solução factível em $\hat{\alpha} = 200$, e como resultado são obtidas as matrizes

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0,5912 & 0,0083 \\ 0,0083 & 0,8080 \end{bmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & -0,0041 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

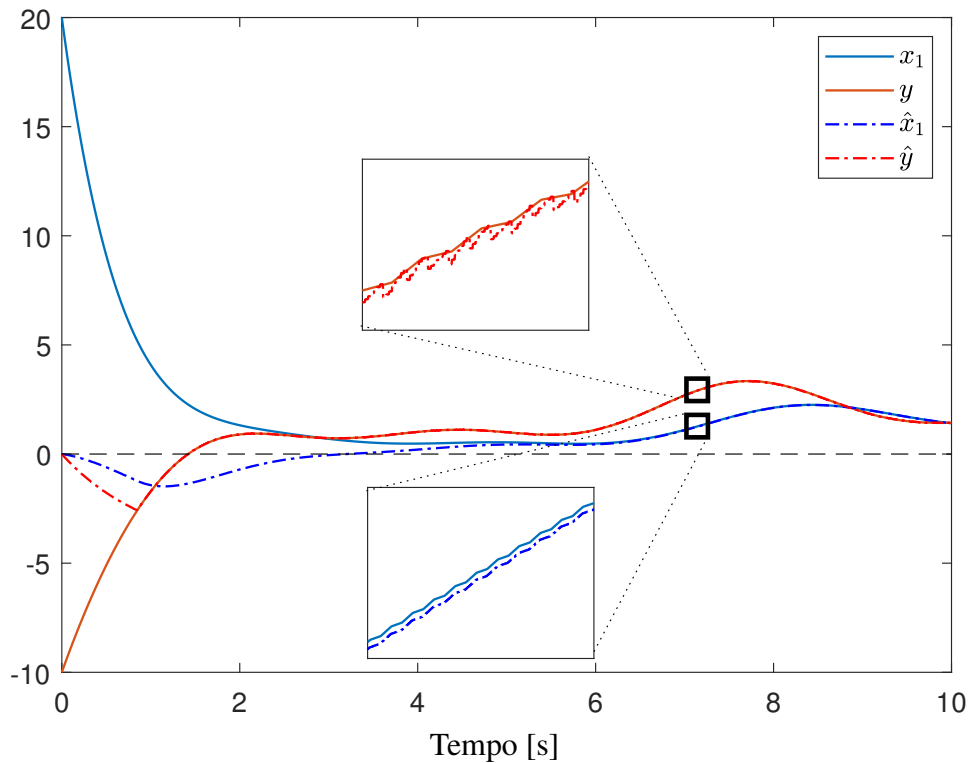
7.1.2 Resultados da simulação

As simulações do sistema foram realizadas no software Matlab, com o objetivo de analisar sua resposta ao longo de um período de 10 segundos. No início da simulação, as condições iniciais do sistema foram definidas como $x(0) = [20, -10]'$, enquanto as condições iniciais do observador foram definidas como $\hat{x}(0) = [0, 0]'$. Essas condições iniciais foram selecionadas para garantir que, no início da simulação, os estados do observador e do sistema partam de posições distintas.

A resposta do sistema simulado e do observador é apresentada na Figura 20. Embora apenas a saída do sistema chaveado seja medida e utilizada no observador, serão apresentados os estados completos para fins de comparação. Isso permite avaliar o desempenho do observador em relação a todos os estados reais do sistema e não apenas a saída medida.

É possível observar que todos os estados do sistema observado convergem para os estados reais do sistema ao longo do tempo. A diferença temporal entre os estados reais e estimados em

Figura 20 – Sobreposição dos estados reais e estimados.



Fonte: Próprio autor.

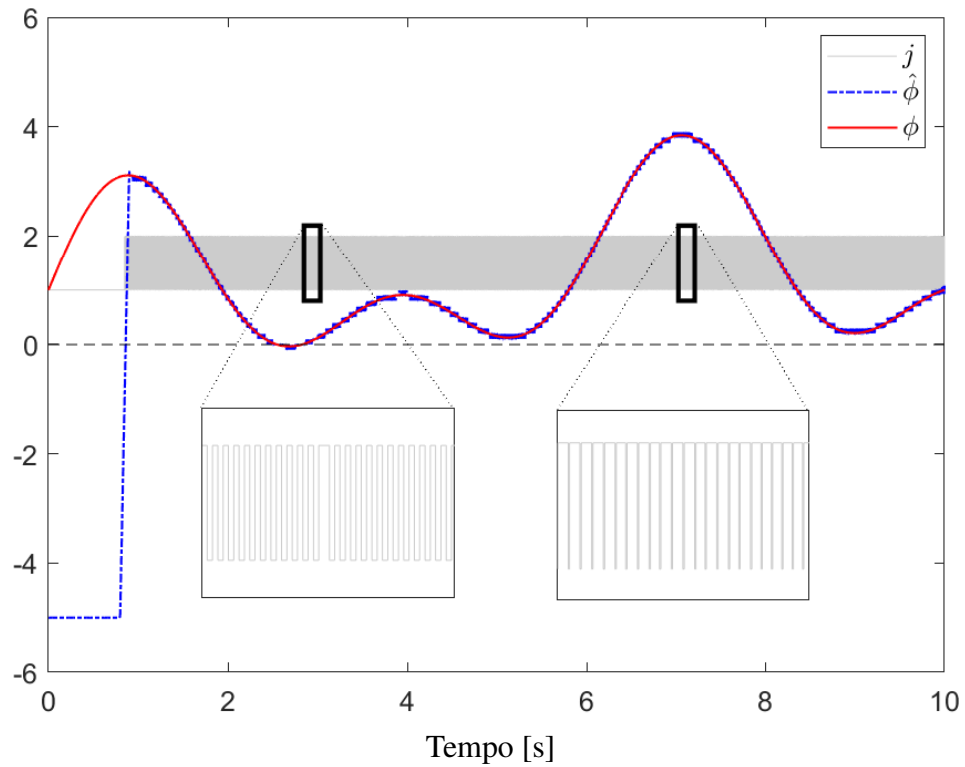
regime permanente não caracteriza um erro de estimação, mas sim um atraso introduzido pelo filtro, inerente à sua dinâmica.

A função não linear ϕ e a função estimada $\hat{\phi}$ são apresentadas na Figura 21 juntamente com o modo de operação do observador j , onde a função estimada é obtida através do chaveamento de j do filtro MMS apresentado na Subseção 3.5.1, com $k = 1000$. Pode-se perceber que existe um período em que o valor de $\hat{\phi}$ fica saturado no valor mínimo (ϕ_{min}) que delimita a função não linear. Isso ocorre até que o modo de operação do observador j comece a variar.

A Figura 22 mostra o erro entre os estados reais e estimados, bem como o da função não linear real e estimada. É evidente que, ao longo do tempo, todos os erros convergem para zero, demonstrando a capacidade do observador projetado em estimar o sistema.

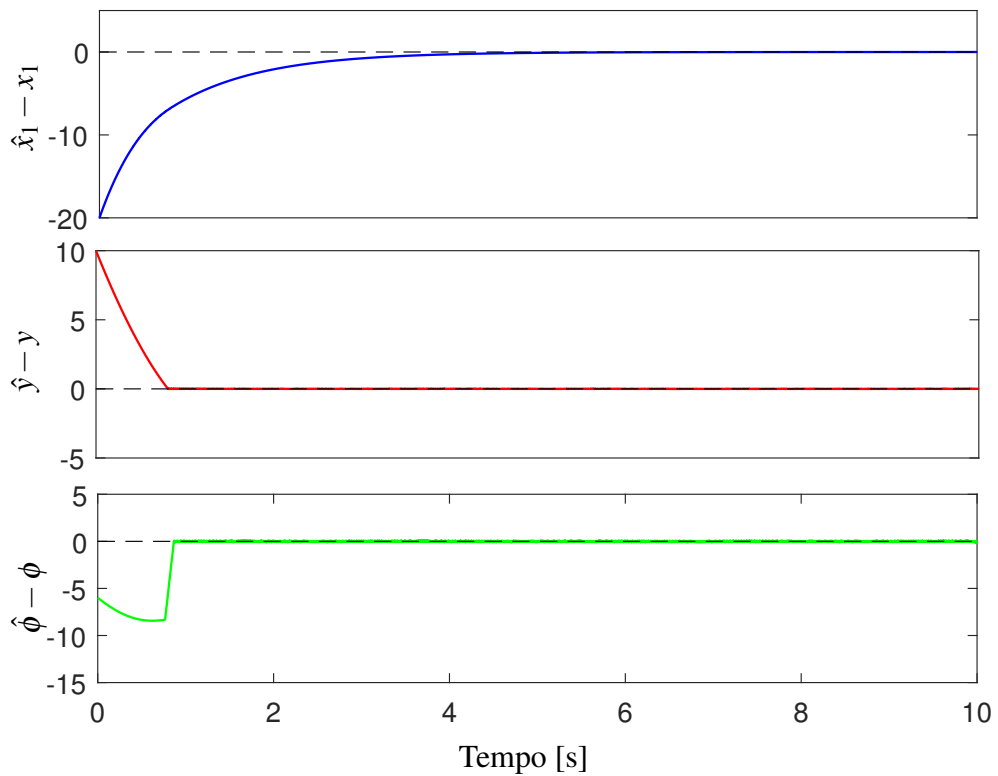
As componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} são apresentadas na Figura 23 e é possível observar que ela é positiva e decrescente mostrando que o erro do sistema está sempre diminuindo.

Figura 21 – Função ϕ recuperada através de um filtro média móvel.

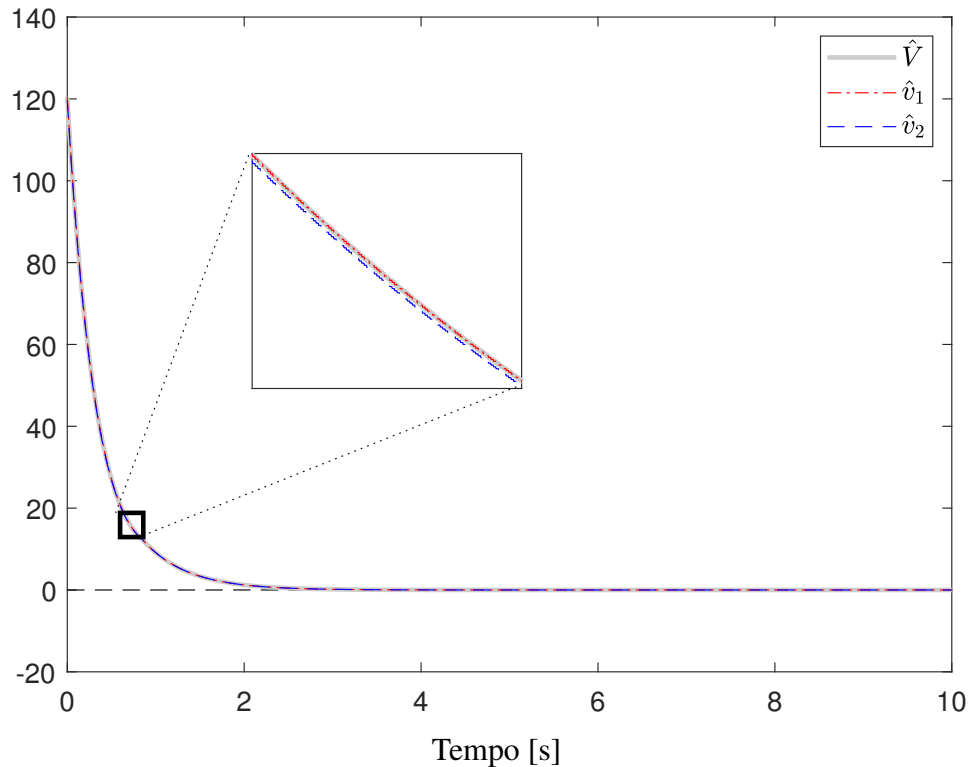


Fonte: Próprio autor.

Figura 22 – Erro entre os estados reais e os estimados.



Fonte: Próprio autor.

Figura 23 – Componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} .

Fonte: Próprio autor.

7.1.3 Escolha inapropriada de limites

Esta subseção tem por objetivo analisar as consequências decorrentes da escolha inadequada dos limites associados à função não linear considerada no projeto do observador. Inicialmente, destaca-se que a escolha de limites superdimensionados, isto é, com amplitude consideravelmente superior à necessária para abranger a curva não linear, embora evite a saturação do observador, pode impor maiores exigências ao filtro utilizado para a estimação, necessitando de uma maior capacidade de atenuação de componentes de alta frequência. Por outro lado, a definição de limites subdimensionados, isto é, com amplitude inferior à necessária para abranger a curva não linear, pode conduzir o observador à saturação, inviabilizando a reconstrução correta da função e afetando diretamente a estabilidade do sistema, uma vez que a violação das hipóteses de projeto compromete as propriedades de convergência garantidas pela análise baseada em funções de Lyapunov.

Para exemplificar essas situações, será utilizado o sistema apresentado na Seção 7.1, considerando o mesmo filtro MMS, com $k = 1000$. Serão analisados dois cenários: no primeiro, os limites atribuídos à função não linear serão superdimensionados, isto é, definidos acima do necessário; no segundo, os limites serão subdimensionados, de modo que a função não linear real não esteja integralmente contida no intervalo especificado.

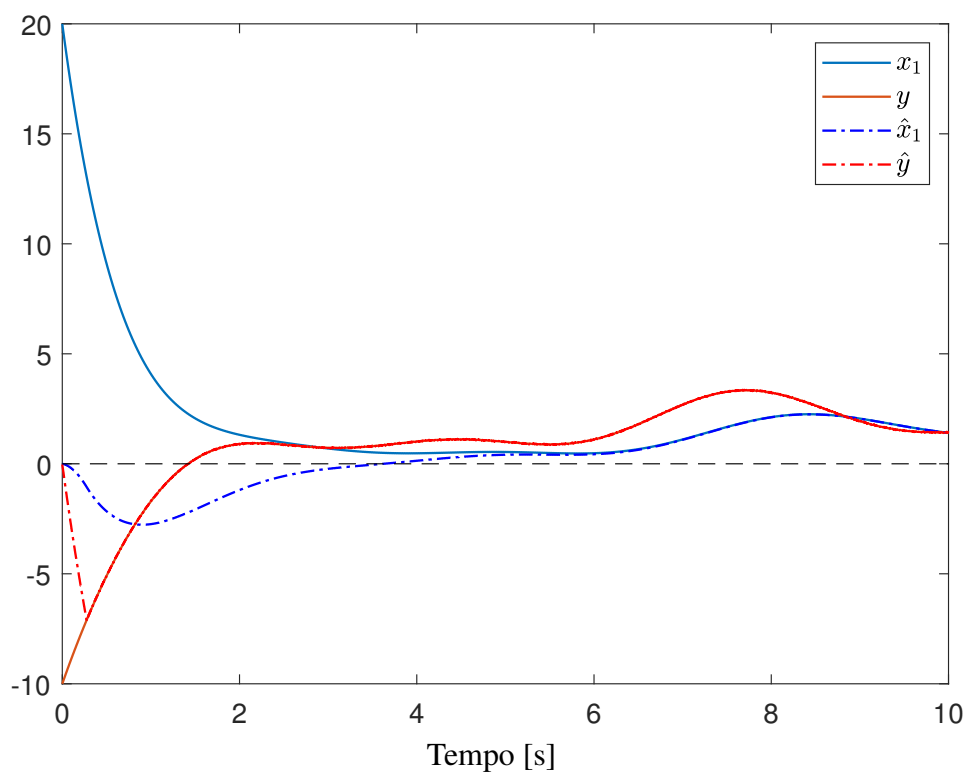
7.1.3.1 Limites superdimensionados

Exemplo 2 Esta simulação visa exemplificar o problema ao escolher limites ϕ_{max} e ϕ_{min} muito maiores do que o necessário para limitar a curva não linear por completo.

Os limites escolhidos para esta simulação foram $\phi_{min} = -30$ e $\phi_{max} = 30$. Pode-se perceber observando a Figura 19 que estes limites são bem maiores dos que seriam realmente necessários para abranger a curva inteira.

A Figura 24 apresenta os estados do sistema juntamente com o os estados estimados pelo observador.

Figura 24 – Sobreposição dos estados reais e estimados para limites muito grandes.

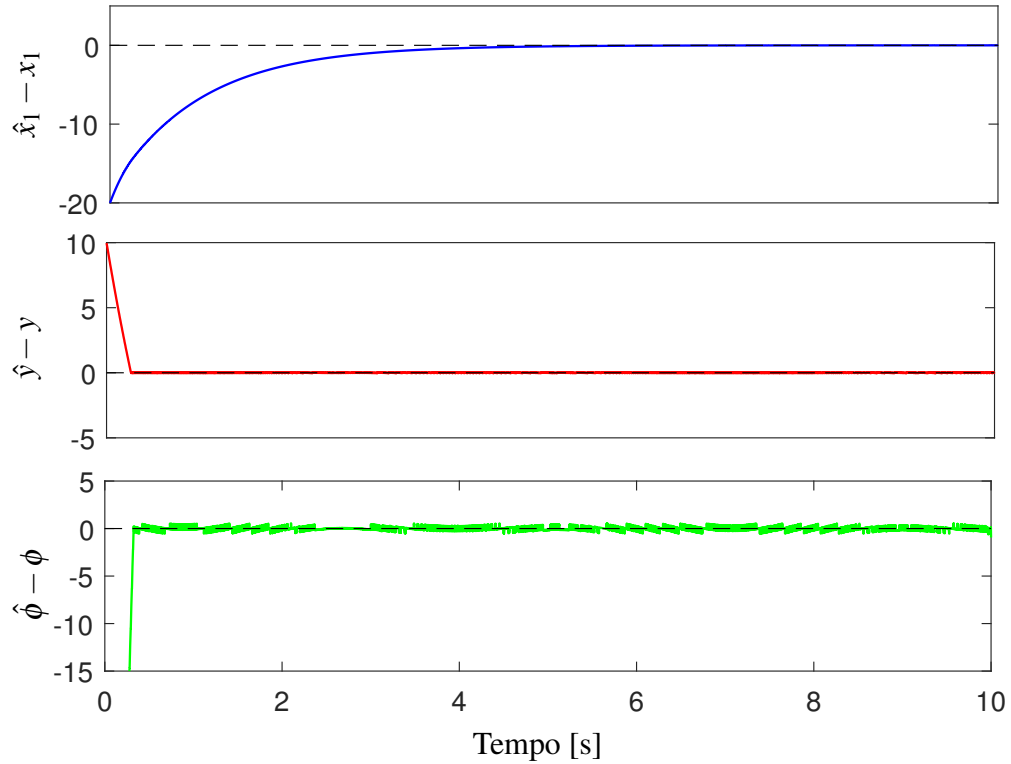


Fonte: Próprio autor.

A Figura 25 apresenta o erro entre os estados estimados e reais. Pode-se perceber por esta figura que o erro entre a saída estimada e a saída real converge mais rapidamente do que no Exemplo 1, porém, o estado x_1 apresenta praticamente o mesmo comportamento. Além disso, pode-se observar que o erro da função não linear é mais ruidoso do que se comparado ao Exemplo 1.

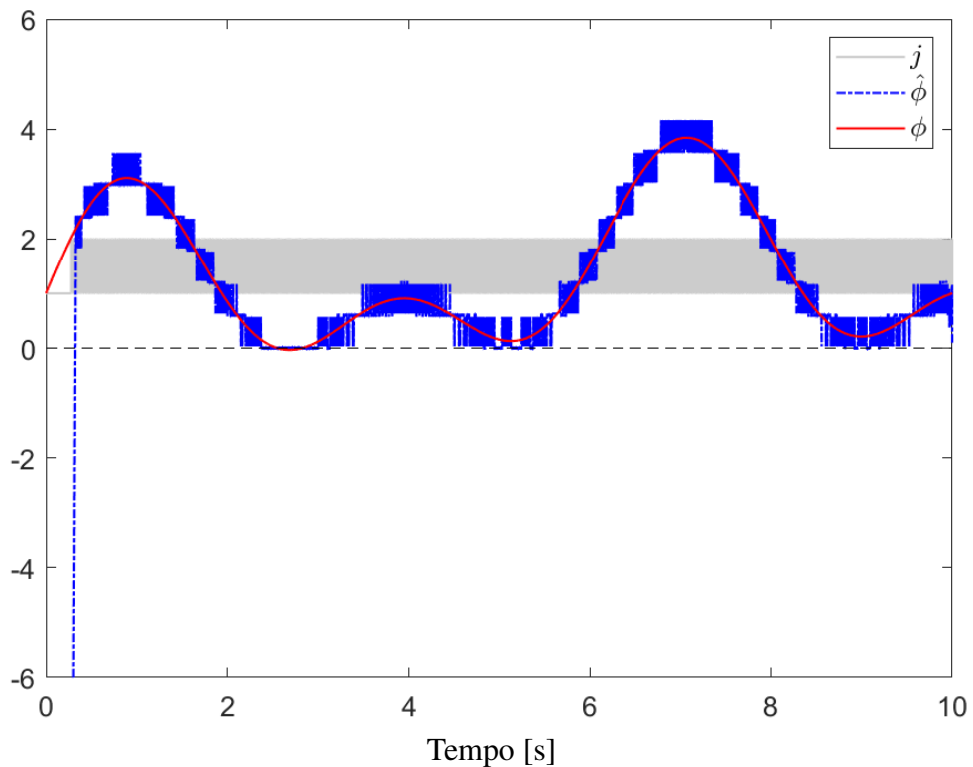
Na Figura 26 fica claro que para um mesmo filtro MMS, com $k = 1000$, a escolha de setores maiores do que o necessário acaba fazendo com que a função não linear estimada apresente um ruído devido ao chaveamento do observador. Esse comportamento ocorre porque limites excessivamente amplos reduzem a informação contida no sinal equivalente gerado pelo chaveamento do observador, exigindo maior esforço de filtragem para a recuperação do valor médio da função não linear.

Figura 25 – Erro entre os estados reais e os estimados para limites muito grandes.



Fonte: Próprio autor.

Figura 26 – Função ϕ recuperada através de um filtro média móvel para limites muito grandes.



Fonte: Próprio autor.

A escolha de setores muito maiores do que os necessário para abranger a curva toda acaba influenciando o tempo de resposta do observador além de acrescentar ruído nos estados estimados. Isso pode fazer com que ao utilizar estes estados para o controle do sistema seja problemático.

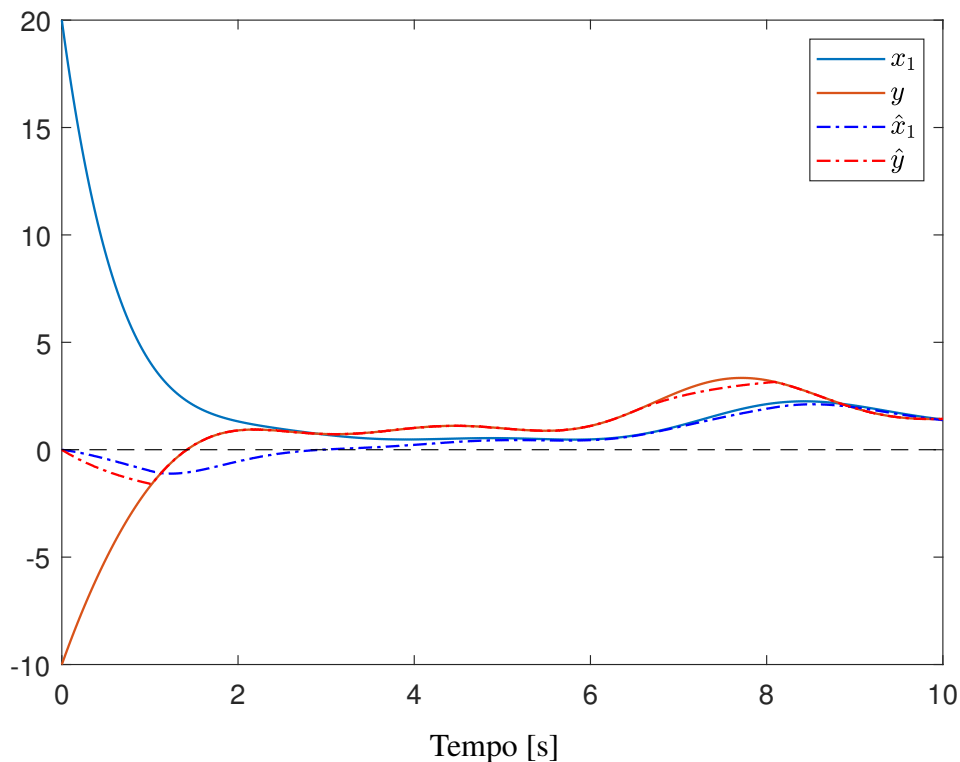
7.1.3.2 Limites subdimensionados

Exemplo 3 Esta simulação visa exemplificar o problema ao escolher limites ϕ_{max} e ϕ_{min} menores do que o necessário para limitar a curva não linear por completo.

Os limites escolhidos para esta simulação foram $\phi_{min} = -3$ e $\phi_{max} = 3$, pode-se perceber observando a Figura 19 que estes limites são menores dos que seriam realmente necessários para abranger a curva inteira.

A Figura 27 apresenta os estados do sistema juntamente com os estados estimados pelo observador.

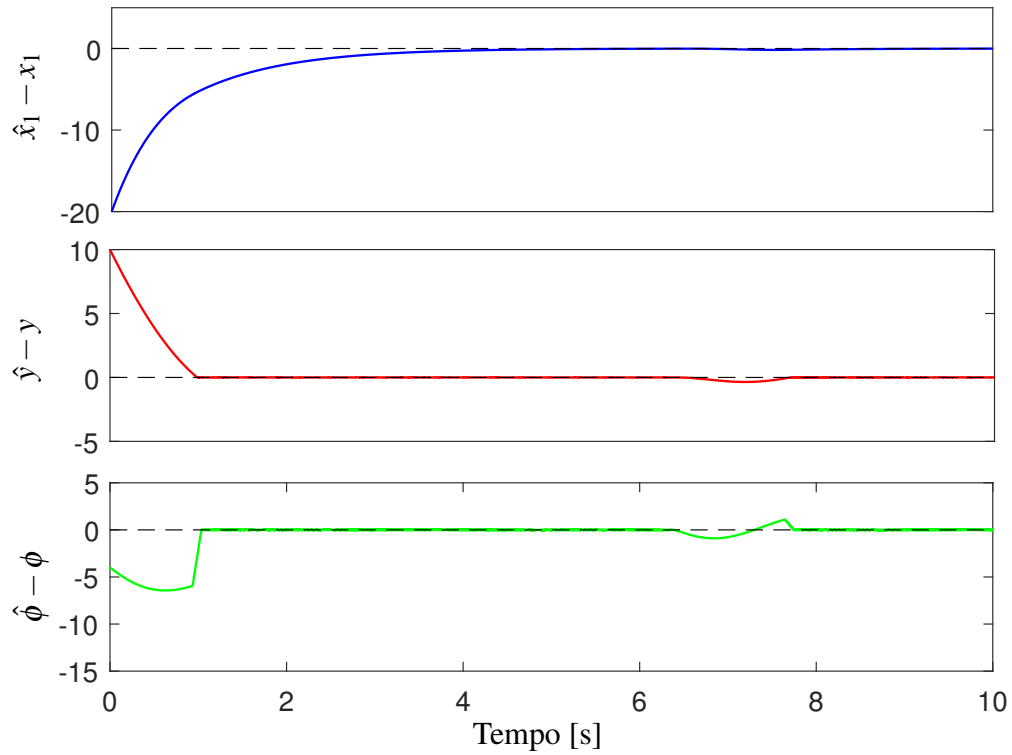
Figura 27 – Sobreposição dos estados reais e estimados para limites muito pequenos.



Fonte: Próprio autor.

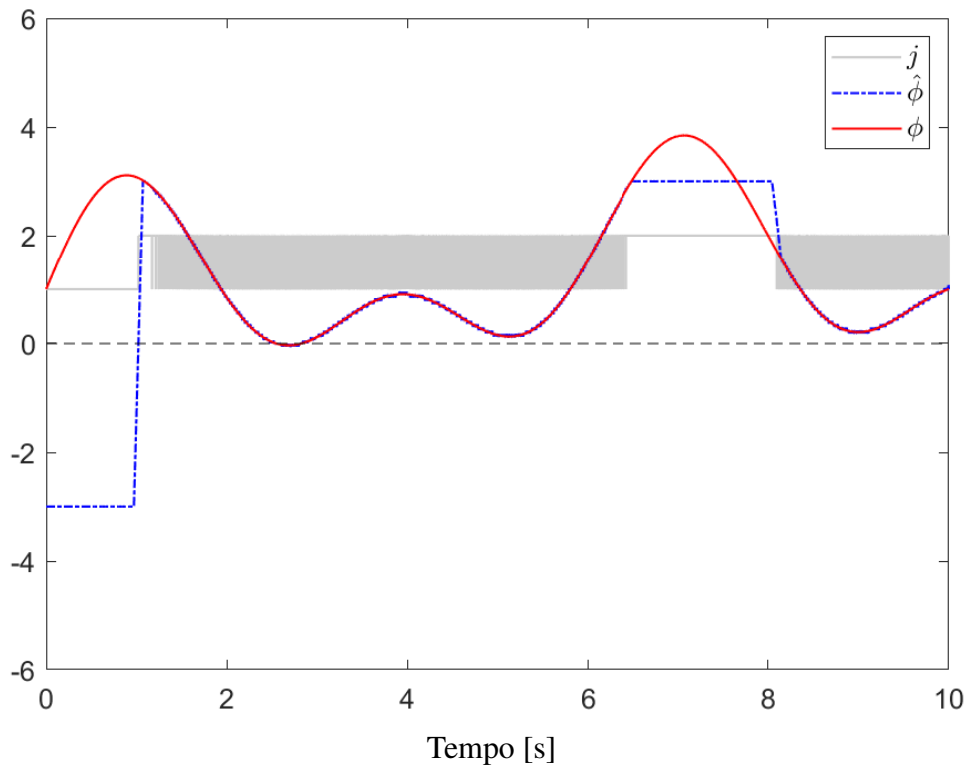
A Figura 28 apresenta o erro entre os estados estimados e reais. Pode-se perceber por esta escolha de limites menores fazem com que o sistema não consiga estimar corretamente os estados do sistema enquanto a função não linear estiver fora dos limites, porém, quando ela volta a estar dentro dos limites o observador volta a conseguir estimar corretamente o sistema. Do ponto de vista prático, esse comportamento evidencia que limites subestimados podem levar à saturação do observador, resultando em perda temporária de desempenho e inviabilizando sua utilização em aplicações reais sujeitas a variações abruptas.

Figura 28 – Erro entre os estados reais e os estimados para limites muito pequenos.



Fonte: Próprio autor.

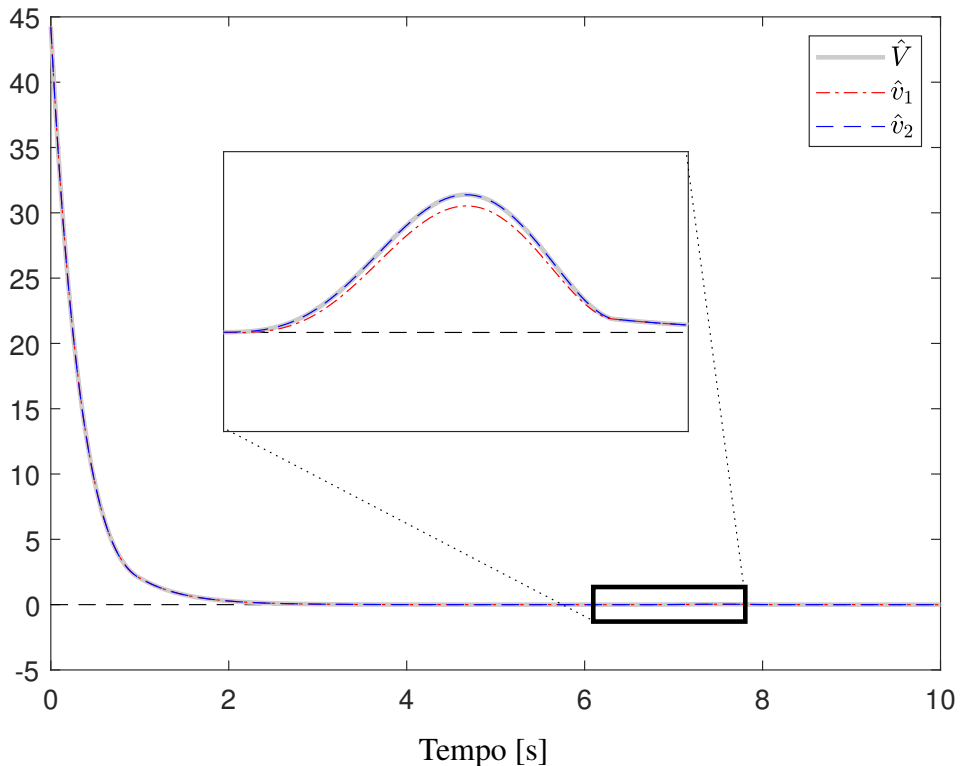
Figura 29 – Função ϕ recuperada através de um filtro média móvel para limites muito pequenos.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 29 mostra que a escolha de setores que não abrangem adequadamente a função não linear compromete o processo de estimação, uma vez que o observador entra em saturação, impedindo a estimação correta da função. Além disso, esta escolha pode afetar a estabilidade do sistema, conforme apresentado na Figura 30, na qual se observa que, durante o período de saturação, a função de Lyapunov \hat{V} passa a ser crescente.

Figura 30 – Componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} para limites muito pequenos.



Fonte: Próprio autor.

7.2 APLICAÇÃO DO OBSERVADOR EM UM SISTEMA FOTOVOLTAICO

Exemplo 4 Neste exemplo, a metodologia do observador chaveado desenvolvida no Capítulo 6 é aplicada a um sistema fotovoltaico (PV). O objetivo principal é estimar a corrente não linear i_{pv} gerada pelo arranjo PV, utilizando apenas medições de tensão e da corrente do indutor do conversor CC-CC associado. Esta estimativa permite a implementação de algoritmos de MPPT sem a necessidade de um sensor de corrente dedicado ao arranjo PV, potencialmente reduzindo o custo e a complexidade do sistema.

Para esse exemplo utilizou-se o arranjo fotovoltaico, com vinte módulos KC200GT da Kyocera, cujos parâmetros são os apresentados na Tabela 1, com a disposição apresentada na Figura 31 ($M_p = 2$, $M_s = 10$) conectados a um conversor *Boost* com tensão de saída fixa, conforme mostrado na Figura 32.

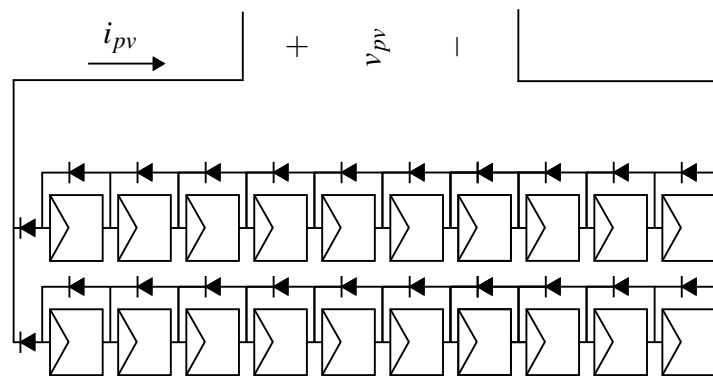
Neste exemplo, adaptado de Dezuo, Trofino e Scharlau (2014), um arranjo fotovoltaico é conectado a um conversor *Boost* com tensão de saída fixa, conforme apresentado na Figura 32.

Tabela 1 – Parâmetros do painel KC200GT.

| Parâmetro | Valor |
|-----------|-----------------------------------|
| V_{oc} | 32,9V |
| I_{sc} | 8,21A |
| γ | $3,18 \times 10^{-3} A/^{\circ}C$ |
| η | 1,2 |
| R_s | $5 \times 10^{-3} \Omega$ |
| R_p | 7 Ω |
| N_s | 54 |

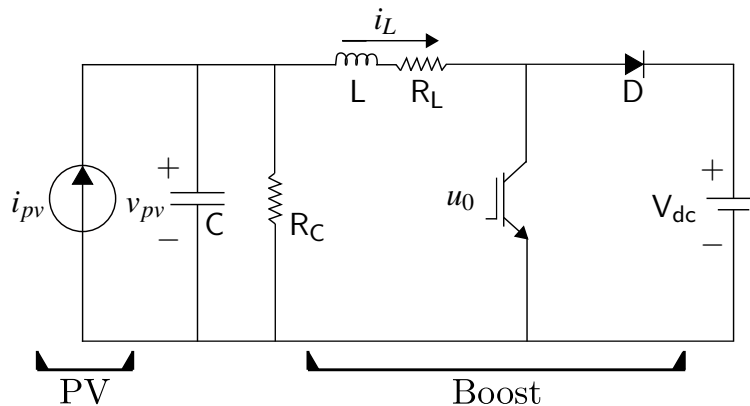
Fonte: Adaptado de Casaro (2009).

Figura 31 – Topologia de ligação dos módulos fotovoltaicos.



Fonte: Próprio autor.

Figura 32 – Topologia do sistema PV.



Fonte: Próprio autor.

Essa topologia possui apenas um dispositivo de comutação (u_0) e, portanto, é composta por dois subsistemas diferentes ($m = 2$), conforme definidos pela Tabela 2. Os parâmetros do circuito são apresentados na Tabela 3.

Considerando o vetor de estado $x(t) = [i_L(t), v_{pv}(t)]'$, onde $i_L(t)$ é a corrente que flui através do indutor L, e $v_{pv}(t)$ é a tensão no capacitor C. A dinâmica do sistema pode ser

Tabela 2 – Modos de operação do sistema chaveado.

| $\sigma(e)$ | u_0 |
|-------------|-----------------------|
| 1 | <i>Conduzindo</i> |
| 2 | <i>Não conduzindo</i> |

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Parâmetros do conversor Boost.

| Parâmetro | Valor |
|-----------|-------------|
| L | <i>5mH</i> |
| R_L | <i>1mΩ</i> |
| C | <i>1μF</i> |
| R_C | <i>1MΩ</i> |
| V_{dc} | <i>350V</i> |

Fonte: Adaptado de Dezuo (2014).

representada como na Equação (6.1), onde:

$$A = \begin{bmatrix} -R_L/L & 1/L \\ -1/(CR_C) & -1/R_C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -V_{dc}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\phi(t) = i_{pv}(v_{pv}(t), T, P_{sun})$$

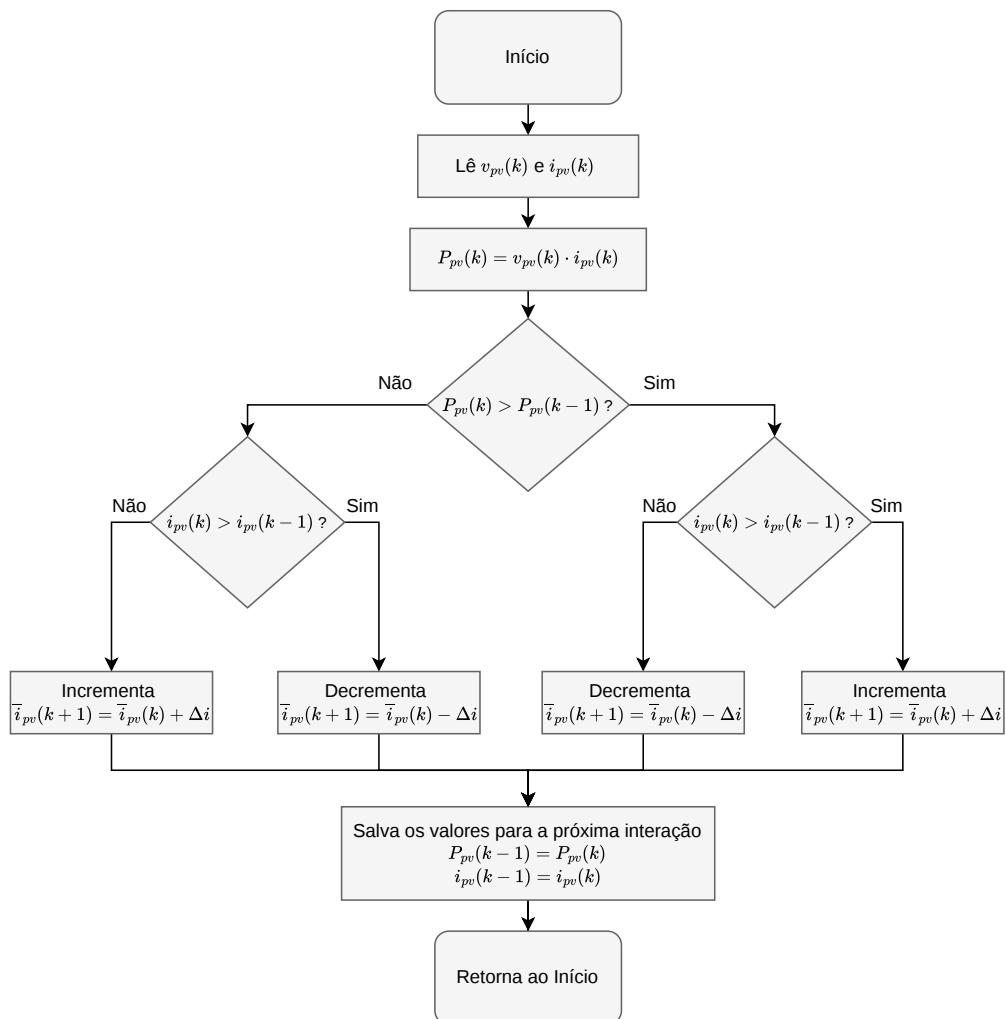
com os parâmetros do circuito são apresentados na Tabela 3.

7.2.1 MPPT

Neste estudo de caso, foi adotado o algoritmo clássico *Perturba e Observa* (P&O) como estratégia de MPPT, principalmente devido à sua simplicidade e comprovada eficácia em aplicações práticas. O método P&O opera perturbando periodicamente a referência e monitorando a variação da potência de saída, a fim de determinar a direção correta para o próximo ajuste. Na implementação considerada, a variável perturbada é a corrente de referência \bar{i}_{pv} , o que se mostra particularmente adequado para sistemas que empregam controle no modo de corrente. Detalhes adicionais sobre o algoritmo P&O podem ser encontrados em (Tan; Green; Hernandez-Aramburo, 2005). Os passos do algoritmo são apresentados a seguir, tanto na forma de pseudocódigo (Algoritmo 1) quanto por meio do fluxograma ilustrado na Figura 33, o qual apresenta a lógica de decisão baseada na variação da potência e da corrente.

Algoritmo 1 MPPT *Perturba e Observa* (P&O)

- 1: Mede $v_{pv}(k)$ e $i_{pv}(k)$
 - 2: Calcula a potência: $P_{pv}(k) = v_{pv}(k) \cdot i_{pv}(k)$
 - 3: **se** $P_{pv}(k) > P_{pv}(k-1)$ **então**
 - 4: **se** $i_{pv}(k) > i_{pv}(k-1)$ **então**
 - 5: Incrementa a corrente de referência: $\bar{i}_{pv}(k+1) = \bar{i}_{pv}(k) + \Delta i$
 - 6: **senão**
 - 7: Decrementa a corrente de referência: $\bar{i}_{pv}(k+1) = \bar{i}_{pv}(k) - \Delta i$
 - 8: **fim se**
 - 9: **senão**
 - 10: **se** $i_{pv}(k) > i_{pv}(k-1)$ **então**
 - 11: Decrementa a corrente de referência: $\bar{i}_{pv}(k+1) = \bar{i}_{pv}(k) - \Delta i$
 - 12: **senão**
 - 13: Incrementa a corrente de referência: $\bar{i}_{pv}(k+1) = \bar{i}_{pv}(k) + \Delta i$
 - 14: **fim se**
 - 15: **fim se**
-

 Figura 33 – MPPT *Perturba e Observa* (P&O).


Deve-se observar que os algoritmos de MPPT normalmente dependem de medições diretas de v_{pv} e i_{pv} . No entanto, na metodologia proposta, a corrente i_{pv} é estimada por meio de um observador, eliminando a necessidade de um sensor de corrente físico. Essa corrente estimada pode ser utilizada não apenas para o MPPT e o controle de chaveamento, mas também para a detecção de falhas, reduzindo o custo e a complexidade do sistema associados ao uso de sensores.

Ressalta-se que, em toda a implementação considerada neste estudo de caso, a corrente i_{pv} utilizada pelo algoritmo de MPPT corresponde à corrente estimada pelo observador, e não a uma medição direta, caracterizando o observador como um sensor virtual.

7.2.2 Projeto do controlador

A técnica de controle utilizada neste estudo de caso fundamenta-se em uma lei de chaveamento para sistemas chaveados não lineares, considerando não linearidades limitadas em setores, medição parcial de estados e alteração online da referência. Uma síntese da técnica é apresentada no Capítulo 2, no qual são discutidos os fundamentos teóricos relacionados ao projeto de leis de chaveamento baseadas em funções de Lyapunov e LMIs, como os conceitos abordados nas Subseções 2.3.3, 2.4.1 e 2.4.3. O desenvolvimento completo da técnica de controle, incluindo a dedução das condições de estabilidade, a formulação das LMIs e as respectivas provas formais, encontra-se apresentado por Dezuo (2014).

No sistema fotovoltaico considerado neste estudo de caso, o controlador é projetado assumindo medição parcial dos estados do sistema, sendo utilizada exclusivamente a corrente estimada do indutor (\hat{i}_L) para fins de controle. Assim, considerando o modelo apresentado na Equação (7.5), a matriz de medição é definida como $C_i = [1 \ 0]$.

A não linearidade presente no modelo do sistema fotovoltaico é tratada como uma função limitada em setores, conforme discutido na Subseção 2.4.1. Cujos setores l e u podem ser definidos conforme apresentado por Lunardi (2021, Seção 4.4). Utilizando os parâmetros apresentados na Tabela 1, os setores são determinados por:

$$u = -\frac{1}{M_s N_s (R_s + R_p)} = -2,6436 \quad (7.6)$$

$$l = -\frac{M_p}{N_s R_s} = -7,4074 \quad (7.7)$$

Com esses limites definidos, as LMIs apresentadas por Dezuo (2014, Seção 4.3) foram resolvidas utilizando o software Matlab, em conjunto com o solucionador SeDuMi e a interface

YALMIP (Löfberg, 2004), assumindo $\alpha = 10$. As matrizes resultantes são:

$$P_o = \begin{bmatrix} 2,7658 & 8,6375 \times 10^{-10} \\ 8,6375 \times 10^{-10} & 0,2105 \end{bmatrix}, S_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = [-2,0233 \times 10^{-5}], Q_2 = [6,5813 \times 10^{-7}],$$

$$R_1 = [-2,4321], R_2 = [-1,9920 \times 10^{-6}].$$

Essas matrizes são utilizadas na implementação do controlador utilizado neste estudo de caso.

7.2.3 Projeto do observador

O sistema fotovoltaico modelado na Equação (7.5) pode ser reescrito na forma apresentada pela Equação (6.1), o que possibilita a aplicação do observador proposto neste trabalho.

Para o projeto do observador responsável pela estimação de $\phi(t) = i_{pv}$, é necessário definir os limites ϕ_{\min} e ϕ_{\max} que restringem a função não linear. Esses limites podem ser determinados com base nas características dos módulos fotovoltaicos, na topologia de conexão e nas condições ambientais típicas, como irradiância solar e temperatura.

De acordo com a análise descrita na Seção 5.3 e considerando a topologia apresentada na Figura 31, os valores mínimo e máximo de i_{pv} que caracterizam o comportamento do sistema fotovoltaico são dados por:

$$\phi_{\min} = 0 \text{ A} \tag{7.9}$$

$$\phi_{\max} = I_{sc} \times M_p = 16,42 \text{ A} \tag{7.10}$$

em que M_p representa o número de módulos fotovoltaicos conectados em paralelo.

Com esses limites definidos, as LMIs do Teorema 6 foram resolvidas por meio de um método iterativo sobre $\hat{\alpha}$, utilizando o software Matlab em conjunto com o *solver* SeDuMi e a interface YALMIP (Löfberg, 2004), para o qual se obteve uma solução factível em $\hat{\alpha} = 14300$, a partir do qual são obtidas as matrizes:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0,7298 & -8,7244 \times 10^{-8} \\ -8,7244 \times 10^{-8} & 0,1459 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \hat{T} = \begin{bmatrix} -3,6124 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & -5,1554 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

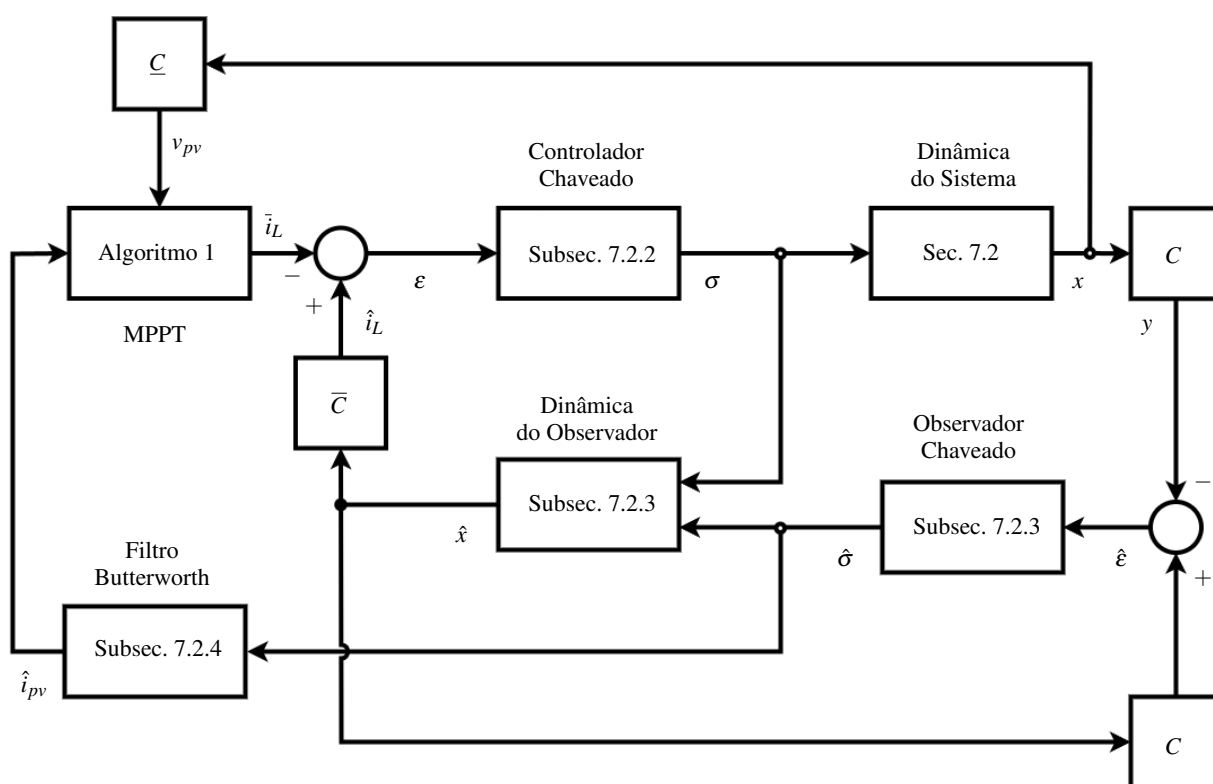
O observador proposto é aplicado a um sistema fotovoltaico com o objetivo de maximizar a extração de potência por meio da técnica de rastreamento do ponto de máxima potência (*Maximum Power Point Tracking* – MPPT). Para tanto, os estados medidos do sistema são a

tensão do módulo fotovoltaico (v_{pv}), a corrente no indutor (i_L) e o modo de chaveamento ativo (σ). Com base nessas variáveis, a corrente fotovoltaica i_{pv} é estimada pelo observador proposto. Essa estimativa é então utilizada pelo algoritmo de MPPT, permitindo a extração eficiente de energia.

A Figura 34 ilustra o diagrama em blocos da arquitetura geral do sistema e a interação entre seus componentes.

Os vetores $\underline{C} = [0 \ 1]$ e $\bar{C} = [1 \ 0]$ são utilizados para extrair as variáveis de estado necessárias aos algoritmos de MPPT e controle, uma vez que cada subsistema opera com informação parcial do estado.

Figura 34 – Estrutura proposta de realimentação de estados baseada em observador para sistemas fotovoltaicos.



Fonte: Próprio autor.

7.2.4 Filtro

Para a estimativa da corrente fotovoltaica efetiva \hat{i}_{pv} , utilizou-se o filtro passa-baixas Butterworth de terceira ordem. O objetivo deste estágio é reconstruir o sinal da não linearidade através da filtragem do sinal de chaveamento associado aos modos j .

A topologia do filtro Butterworth foi escolhida por apresentar uma resposta em frequência maximamente plana na banda passante, isto é, isenta de ondulações, como apresentado na Subseção 3.5.4.

Os parâmetros do filtro Butterworth são apresentados na Tabela 4. A frequência de corte foi definida com base nos resultados das simulações, buscando-se um compromisso adequado entre a rejeição de ruídos de alta frequência e a preservação da dinâmica do sistema.

Tabela 4 – Parâmetros do filtro Butterworth.

| Parametro | Valor |
|------------|---------|
| N | 3 |
| ω | 100 MHz |
| ω_c | 500 kHz |

Fonte: Próprio autor.

7.2.5 Resultados de simulação

As simulações do sistema foram realizadas no ambiente Matlab, com o objetivo de analisar a resposta do sistema ao longo de um período de 0,02 s. As condições iniciais foram definidas como $x(0) = [5 \ 321]'$, enquanto as condições iniciais do observador foram definidas como $\hat{x}(0) = [0 \ 0]'$. Essas condições foram escolhidas de forma a garantir que, no início da simulação, o observador e o sistema partissem de posições distintas.

A simulação do sistema fotovoltaico foi iniciada com irradiação de 750 W/m^2 e temperatura ambiente de 25°C . Em $t = 0,004 \text{ s}$, aplicou-se uma rampa crescente na irradiação até atingir 1000 W/m^2 ao longo de $0,004 \text{ s}$. Esse valor foi mantido até $t = 0,010 \text{ s}$, quando se iniciou uma rampa decrescente linear até 800 W/m^2 em $t = 0,012 \text{ s}$. Após um período constante até $t = 0,016 \text{ s}$, foi aplicado um degrau para 900 W/m^2 , valor mantido até o final da simulação.

A corrente de referência foi definida por meio da técnica de MPPT apresentada no Algoritmo 1, utilizando uma variação incremental de $\Delta i = 0,3 \text{ A}$.

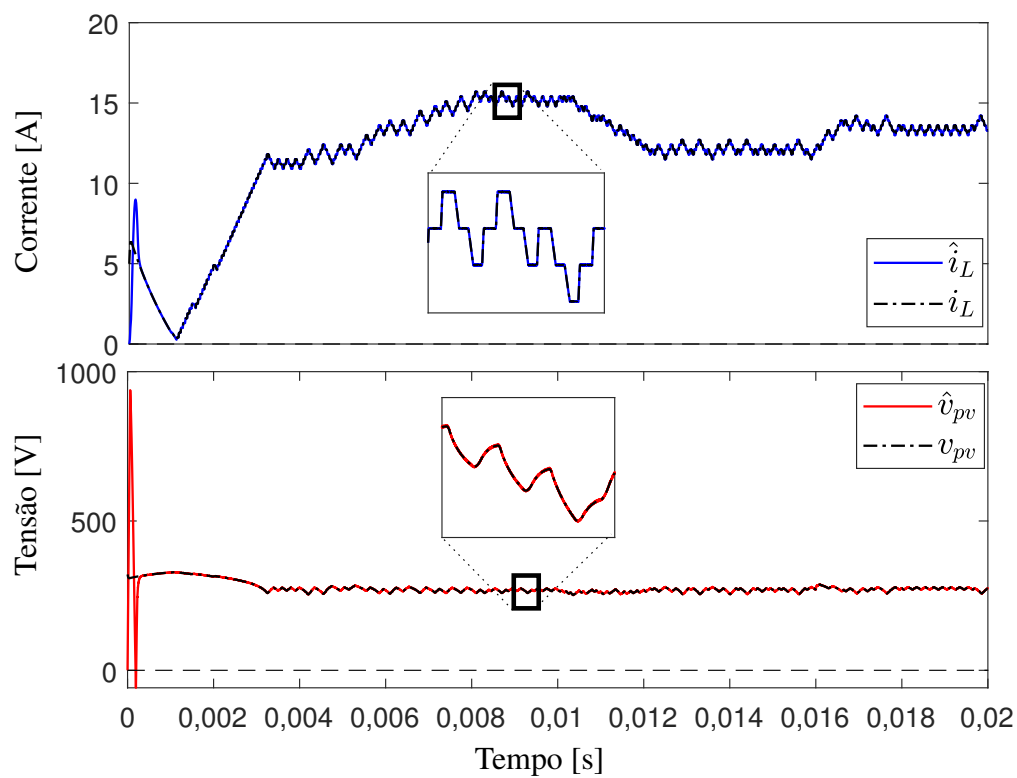
A resposta dos estados reais do sistema e daqueles estimados pelo observador é apresentada na Figura 35. Observa-se que todas os estados estimados convergem para os valores reais ao longo do tempo, evidenciando o bom desempenho do observador proposto.

A função não linear ϕ e sua estimativa $\hat{\phi}$ são apresentadas na Figura 36, juntamente com o modo j de chaveamento do observador. A função estimada é obtida por meio do sinal de chaveamento j , filtrado pelo filtro Butterworth descrito na Subseção 7.2.4. Observa-se que a função não linear $\phi = i_{pv}$ é estimada com precisão pelo observador, independentemente do modo de chaveamento do controlador ou da irradiância incidente no sistema fotovoltaico.

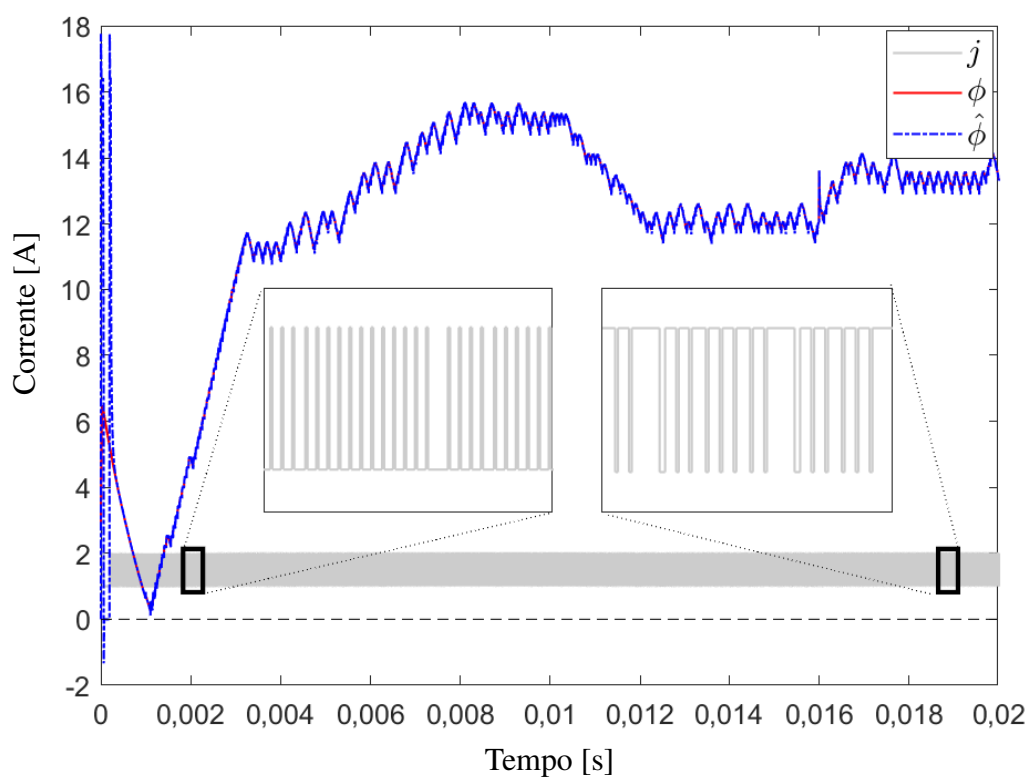
A Figura 37 apresenta os erros de estimação entre os estados reais e estimados, bem como entre as funções não lineares reais e estimadas. Nota-se que todos os erros convergem para zero ao longo do tempo, demonstrando a eficácia do observador proposto na estimação precisa do comportamento do sistema.

As componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} são apresentadas na Figura 38, mostrando um comportamento positivo e monotonicamente decrescente do valor máximo,

Figura 35 – Sobreposição dos estados reais e estimados.

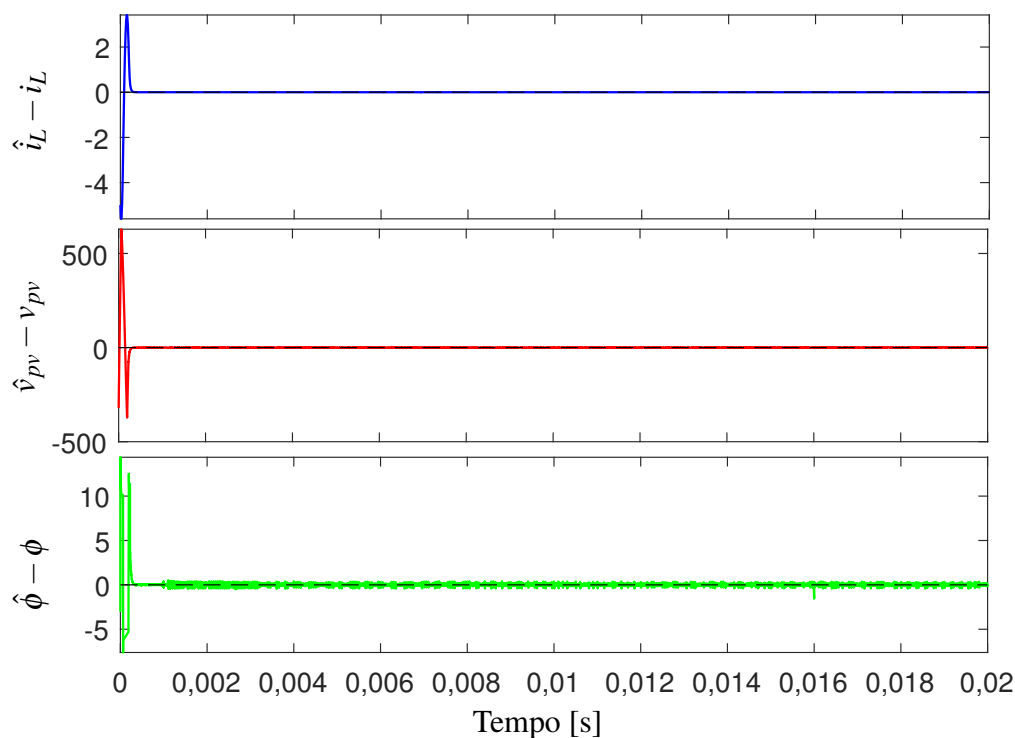


Fonte: Próprio autor.

Figura 36 – Sobreposição da função não linear real ϕ , sua estimativa filtrada $\hat{\phi}$ e o sinal de chaveamento do observador j .

Fonte: Próprio autor.

Figura 37 – Erros de estimação.



Fonte: Próprio autor.

além disso . Esse resultado indica que a energia total do sistema diminui ao longo do tempo, conduzindo à convergência do erro de estimação para zero.

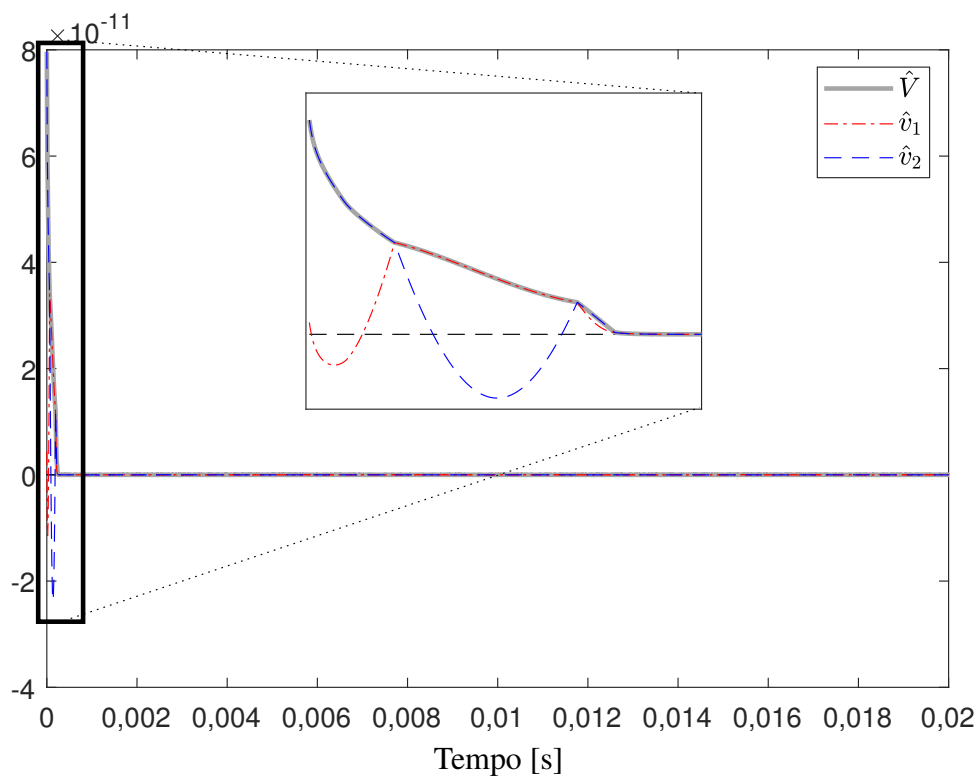
Vale ressaltar que essa solução não poderia ser obtida sem o relaxamento apresentado na Inequação (6.36) da Demonstração 11, pois quando a componente \hat{v}_j não está ativa, não é necessário que ela seja positiva nem monotonicamente decrescente, uma vez que sua contribuição não é relevante para a garantia de estabilidade global do sistema.

A Figura 39 apresenta a evolução temporal da potência gerada pelo sistema fotovoltaico ao longo da simulação. O algoritmo de MPPT altera dinamicamente a corrente de referência, com o objetivo de manter a operação do sistema no ponto de máxima potência disponível. Esse comportamento é evidenciado pelas variações observadas na potência gerada em resposta às mudanças nas condições de irradiação, as quais deslocam o ponto de máxima potência do sistema. Observa-se que o MPPT é capaz de rastrear adequadamente o ponto ótimo tanto sob variações lentas quanto diante de variações abruptas em forma de degraus.

Uma análise comparativa adicional foi realizada com o objetivo de avaliar o impacto do uso da corrente estimada \hat{i}_{pv} em relação à medição direta da corrente do sistema fotovoltaico i_{pv} no desempenho do algoritmo de MPPT. Para isso, a mesma simulação descrita anteriormente foi repetida mas utilizando a corrente i_{pv} medida diretamente como variável de realimentação para o algoritmo de MPPT.

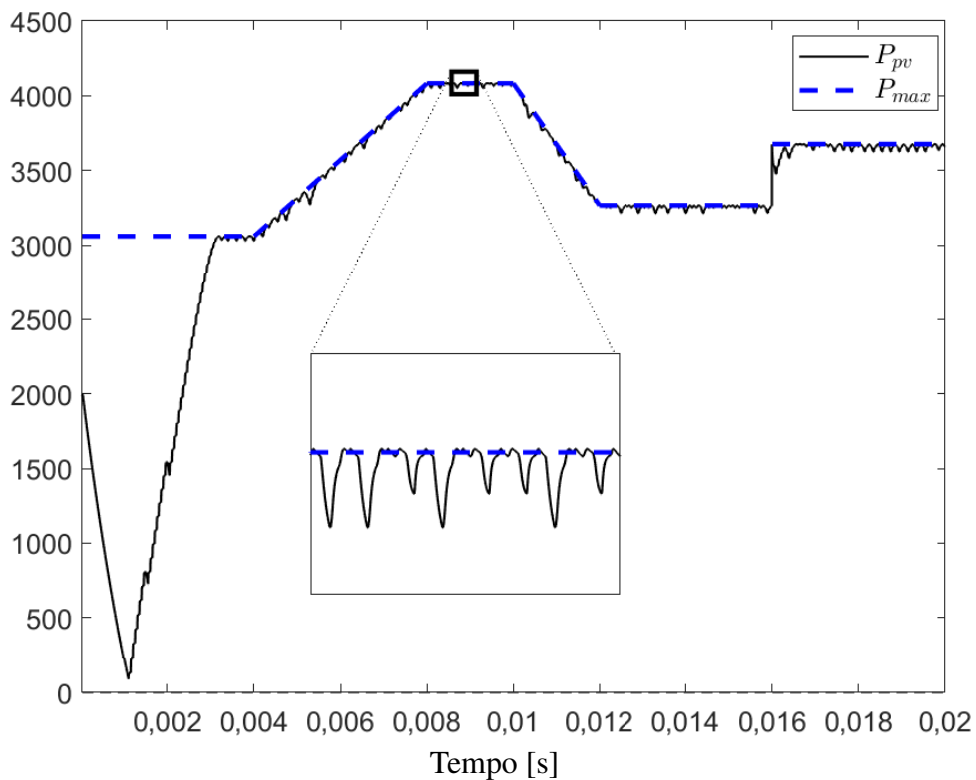
Os resultados obtidos são apresentados na Figura 40 e mostram que o desempenho global do MPPT é bastante semelhante em ambos os cenários, não sendo observadas diferenças signifi-

Figura 38 – Componentes auxiliares da função de Lyapunov \hat{V} .



Fonte: Próprio autor.

Figura 39 – Potência de saída do sistema acompanhando corretamente o MPPT.



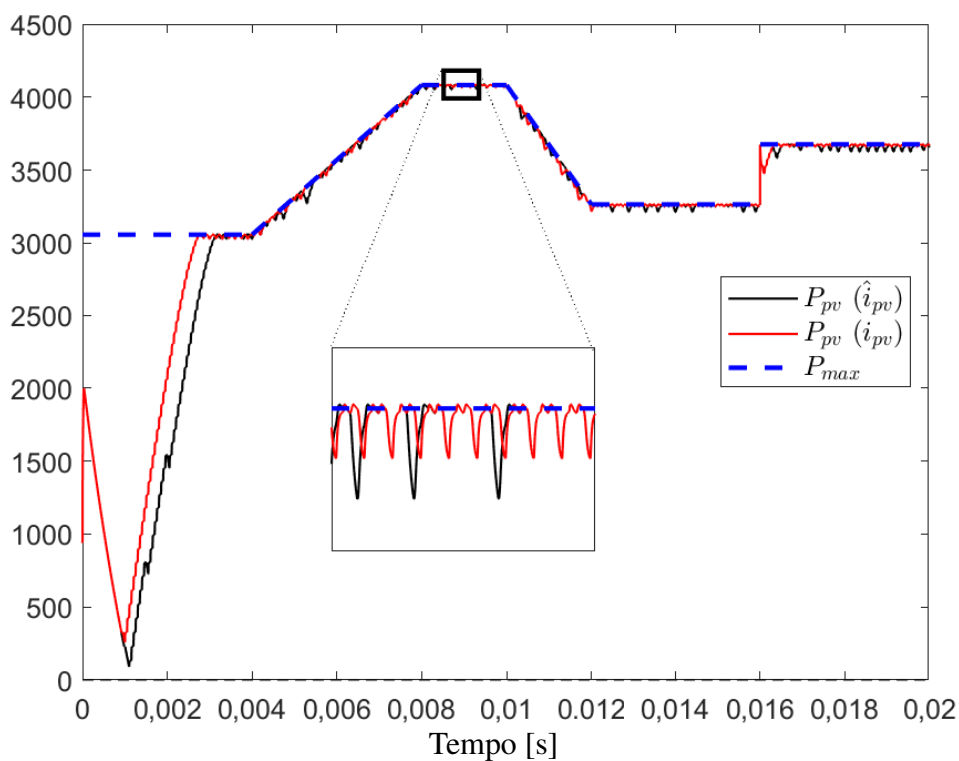
Fonte: Próprio autor.

cativas no valor médio da potência extraída do sistema ao longo da simulação. Entretanto, nota-se que, no início da simulação, o uso da corrente medida proporciona uma resposta ligeiramente mais rápida do MPPT, uma vez que, nesse instante, a corrente estimada \hat{i}_{pv} ainda se encontra em processo de convergência para o valor real. Esse comportamento resulta em alguns passos adicionais do algoritmo de MPPT quando a corrente estimada é utilizada, refletindo o efeito transitório do erro de estimação inicial.

Apesar dessa vantagem associada à medição direta da corrente, é importante destacar que a utilização de sensores adicionais implica aumento de custos, maior complexidade do sistema e maior suscetibilidade a falhas e degradação de componentes ao longo do tempo. Nesse contexto, o uso da corrente estimada pelo observador proposto se apresenta como uma alternativa atrativa, uma vez que mantém desempenho comparável no rastreamento do ponto de máxima potência, ao mesmo tempo em que reduz a dependência de um sensor adicional.

Dessa forma, os resultados comparativos evidenciam que o MPPT baseado na corrente estimada é capaz de operar de maneira eficiente e confiável, apresentando apenas diferenças transitórias que podem ser desprezadas quando comparado à abordagem com medição direta. Estes resultados demonstram que o MPPT, quando associado à técnica proposta, apresenta robustez e eficiência no rastreamento da máxima potência, garantindo desempenho satisfatório mesmo sob condições dinâmicas de operação.

Figura 40 – Comparação da potência de saída do sistema com a utilização da corrente estimada (\hat{i}_{pv}) e a corrente real (i_{pv}) do painel no MPPT.



7.3 CONCLUSÕES DOS ESTUDO DE CASOS

Os resultados das simulações confirmaram a eficácia da abordagem proposta. O observador chaveado estimou com sucesso a corrente não linear do arranjo PV, permitindo a implementação de um MPPT P&O eficaz sem a necessidade de um sensor de corrente para o arranjo. A convergência dos erros de estimação e a estabilidade do observador foram validadas, e o sistema demonstrou capacidade de rastrear o ponto de máxima potência mesmo sob variação das condições de irradiância. Esta abordagem representa uma contribuição significativa para o controle de sistemas fotovoltaicos, oferecendo uma solução robusta e potencialmente de menor custo para otimização da geração de energia.

7.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo dedicou-se à validação do observador chaveado proposto nesta tese, contemplando sua aplicação tanto em um sistema teórico quanto em um arranjo fotovoltaico.

Os resultados obtidos no primeiro estudo de caso confirmaram a capacidade do observador em reconstruir os estados não medidos e a função não linear do sistema, garantindo a estabilidade assintótica global do erro de estimação, conforme previsto pelas condições LMIs desenvolvidas. A análise de sensibilidade em relação aos limites ϕ_{min} e ϕ_{max} revelou aspectos cruciais de projeto, enquanto a escolha de limites excessivamente amplos introduz ruído de chaveamento na estimativa, enquanto a escolha de limites que não englobam a função compromete a convergência nos períodos de saturação. Tais constatações reforçam a importância do conhecimento prévio, ainda que aproximado, das restrições físicas do sistema para o projeto do observador.

No segundo estudo de caso, a aplicação ao sistema fotovoltaico demonstrou a viabilidade prática da técnica. O observador foi capaz de estimar com precisão a corrente do arranjo e a não linearidade associada à curva característica I-V, permitindo que o algoritmo de MPPT operasse corretamente sem a necessidade de um sensor de corrente físico. A utilização do filtro, em conjunto com o chaveamento do observador, provou-se eficaz na recuperação do valor médio da função não linear, fornecendo um sinal adequado para a realimentação do MPPT.

Em resumo, os resultados apresentados mostram a eficácia da metodologia proposta para lidar com sistemas contendo não linearidades limitadas em amplitude. A técnica mostrou-se uma ferramenta robusta para a implementação de sensores virtuais, oferecendo uma alternativa promissora para a redução de hardware e custos em sistemas de controle complexos, bem como para aplicações onde a medição direta é inviável.

De forma geral, os estudos de casos apresentados neste capítulo confirmam a consistência teórica e a viabilidade prática do observador chaveado proposto, motivando as conclusões e contribuições finais discutidas no capítulo seguinte.

8 CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho tratou do problema da estimação de estados e de funções não lineares incertas em sistemas chaveados, tema motivado pela complexidade dos sistemas de controle não lineares e pela necessidade de técnicas que assegurem estabilidade, robustez e redução do número de sensores físicos. A investigação concentrou-se no desenvolvimento de uma nova técnica de projeto de observador para sistemas chaveados capaz de lidar com não linearidades com amplitude limitada por valores conhecidos, classe de funções presente em aplicações de engenharia, com destaque para sistemas de eletrônica de potência.

A fundamentação teórica abordou conceitos essenciais relacionados a sistemas chaveados, modos deslizantes, observabilidade e observadores baseados em funções de Lyapunov, estabelecendo o embasamento necessário para as contribuições centrais desta tese. Nesse contexto, o problema da estimação de funções não lineares desconhecidas foi reformulado como um problema de estabilização do erro de estimação. Com isso, foi proposta uma metodologia para o problema de estimação de uma função não linear desconhecida como um problema de estabilização do erro de estimação, explorando a alternância controlada entre os limites inferior e superior conhecidos da não linearidade.

A principal contribuição desta tese consiste na formulação matemática, na análise de estabilidade e na validação de um observador chaveado aplicado a sistemas não lineares com não linearidades limitadas em amplitude. Diferentemente de abordagens tradicionais que requerem o conhecimento explícito da expressão analítica da não linearidade, a técnica proposta utiliza exclusivamente informações sobre seus limites físicos ou teóricos. A estabilidade do observador foi garantida por meio da teoria de Lyapunov, resultando em condições suficientes expressas na forma de LMIs, o que viabiliza um procedimento de projeto sistemático e computacionalmente tratável. As contribuições específicas deste trabalho podem ser sintetizadas a seguir:

- **Metodologia de estimação baseada em chaveamento:** Foi desenvolvida uma estratégia de observação na qual a dinâmica do observador alterna entre vértices definidos pelos limites máximo (ϕ_{\max}) e mínimo (ϕ_{\min}) da função não linear incerta. Demonstrou-se que a presença de um modo deslizante sobre a superfície de erro nulo permite que o sinal equivalente de chaveamento contenha a informação necessária para a reconstrução da função não linear original.
- **Reconstrução da função não linear por filtragem:** A incorporação de técnicas de filtragem à estrutura do observador possibilitou a extração da componente contínua do sinal de chaveamento de alta frequência. Essa abordagem mostrou-se fundamental para mitigar os efeitos do *chattering* e permitir a utilização da função estimada em malhas de realimentação, preservando o desempenho dinâmico do sistema.
- **Condições de projeto via LMIs com redução de conservadorismo:** Foram derivadas condições suficientes para a existência e estabilidade do observador chaveado. O emprego

de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, aliado à aplicação do Lema de Finsler, contribuiu para a redução do conservadorismo das condições de estabilidade, ampliando a região de factibilidade e facilitando o projeto do observador.

O estudo de casos apresentados ao longo do trabalho evidenciam a robustez da técnica frente a incertezas paramétricas, variações operacionais e medição parcial dos estados, bem como sua eficácia na estimação de estados e funções não mensuráveis.

Com o objetivo de explicitar o atendimento às metas estabelecidas na Seção 1.2, apresenta-se a seguir o mapeamento entre os objetivos geral e específicos e os resultados desenvolvidos ao longo da tese:

- **Objetivo geral:** Propor novas técnicas e metodologias para o projeto de observadores aplicados a sistemas não lineares e chaveados.

Esse objetivo foi alcançado por meio do desenvolvimento, análise e validação de um observador chaveado para sistemas não lineares com não linearidades limitadas em amplitude, apresentado no Capítulo 6 e validado no estudo de casos do Capítulo 7.

- **Objetivo específico 1:** Desenvolver um observador chaveado capaz de estimar funções não lineares incertas, com amplitude limitada por valores conhecidos.

O observador proposto foi formalmente definido no Capítulo 6, no qual a função não linear incerta é representada por seus limites inferior e superior, permitindo sua estimação sem o conhecimento explícito de sua expressão analítica.

- **Objetivo específico 2:** Modelar a dinâmica de estimação e garantir a estabilidade do observador por meio de funções de Lyapunov e LMIs.

A dinâmica do erro de estimação foi modelada e analisada no Capítulo 6, sendo a estabilidade assegurada por condições suficientes baseadas na teoria de Lyapunov e no Lema de Finsler.

- **Objetivo específico 3:** Propor uma metodologia de estimação baseada na alternância entre os limites da função não linear, com reconstrução por filtragem.

A estratégia de alternância entre ϕ_{\min} e ϕ_{\max} , bem como a reconstrução da função não linear por filtros de média móvel e Butterworth, foi desenvolvida no Capítulo 6 e validada por simulações apresentadas no Capítulo 7.

- **Objetivo específico 4:** Validar a técnica proposta em um sistema fotovoltaico acoplado a um conversor CC–CC do tipo Boost.

A validação foi apresentada no Capítulo 7, no qual o sistema foi modelado como um sistema chaveado com não linearidade limitada em amplitude, permitindo a estimação precisa da corrente do arranjo fotovoltaico sob diferentes condições operacionais.

- **Objetivo específico 5:** Demonstrar a aplicação da corrente estimada em um algoritmo de MPPT sem sensor físico de corrente.

A implementação do MPPT utilizando exclusivamente a corrente estimada foi apresentada no Capítulo 7, evidenciando o correto rastreamento do ponto de máxima potência mesmo sob variações de irradiação.

- **Objetivo específico 6:** Validar a metodologia em um sistema teórico com medição parcial de estados.

A aplicação do observador em um sistema com medição de apenas um estado foi apresentada no Capítulo 7, demonstrando a convergência dos erros de estimação dos estados e da função não linear.

- **Objetivo específico 7:** Avaliar a precisão, estabilidade e robustez da técnica sob incertezas paramétricas e condições operacionais realistas.

A avaliação da robustez e do desempenho do observador foi realizada nos estudos de caso do Capítulo 7, considerando variações paramétricas, diferentes escolhas dos limites da função não linear e cenários operacionais adversos.

Dessa forma, conclui-se que todos os objetivos estabelecidos foram plenamente atendidos, reforçando a consistência e a relevância dos resultados apresentados nesta tese.

8.1 TRABALHOS FUTUROS

Apesar dos avanços alcançados, a pesquisa desenvolvida abre diversas perspectivas para investigações futuras. Essas extensões visam ampliar o escopo de aplicação da técnica. Dentre as principais direções de continuidade, destacam-se:

1. **Validação experimental:** Validação por meio de *hardware-in-the-loop* (HIL), com o objetivo de avaliar o desempenho do observador em ambiente controlado, considerando incertezas de modelagem e restrições de implementação. Em seguida, a implementação da metodologia proposta em bancada experimental, envolvendo conversores CC-CC e emuladores fotovoltaicos, de modo a analisar o comportamento do observador sob condições reais de ruído, incertezas não modeladas e limitações de processamento digital.
2. **Observadores com ajuste adaptativo de limites:** Incorporação de mecanismos adaptativos para atualização online dos limites ϕ_{\min} e ϕ_{\max} , permitindo a expansão dinâmica da região de operação e maior robustez frente aos limites escolhidos no projeto.
3. **Generalização para outras classes de sistemas:** Estudo da aplicabilidade da técnica de chaveamento dos limites da não linearidade em sistemas mecânicos com atrito (fenômeno *stick-slip*) ou em sistemas biológicos, onde as não linearidades são frequentemente limitadas por restrições físicas naturais.

4. **Análise de observabilidade:** Desenvolvimento de critérios formais de observabilidade específicos para a classe de sistemas chaveados não lineares com não linearidades limitadas em amplitude considerada neste trabalho.
5. **Projeto de observadores com desempenho ótimo e custo garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ :** Extensão da metodologia proposta para incorporar critérios de otimização baseados em normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , visando garantir desempenho ótimo e robustez frente a perturbações externas e incertezas, por meio da formulação de LMIs com custo garantido associadas ao observador chaveado.

Conclui-se, portanto, que a técnica proposta constitui uma alternativa robusta e teoricamente fundamentada para a estimação de estados e funções não lineares em sistemas chaveados não lineares com não linearidades limitadas em amplitude, conciliando rigor matemático, viabilidade computacional e relevância prática. A abordagem desenvolvida demonstra que a exploração sistemática da dinâmica de chaveamento, aliada a ferramentas de Lyapunov e LMIs, permite não apenas garantir estabilidade formal, mas também viabilizar a reconstrução efetiva de não linearidades incertas para fins de realimentação. Dessa forma, a metodologia apresentada amplia o conjunto de ferramentas disponíveis para o controle e estimação em sistemas chaveados não lineares, abrindo perspectivas para sua aplicação em diferentes contextos de engenharia.

8.2 PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO

A seguir, são apresentados os trabalhos do autor diretamente relacionados ao tema desta tese:

- DEZUO, T.; LUNARDI, H. C.; TROFINO, A. Robust switching rule design for photovoltaic systems under non-uniform conditions. In: **2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)**. 2017. p. 2342–2347.
- LUNARDI, Henrique Carlos. **Projeto de lei de chaveamento usando realimentação não linear para sistemas chaveados limitados em setor com estudo de caso na geração fotovoltaica**. Dissertação (Mestrado)—Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, Joinville, Brazil, 2021.
- LUNARDI, Henrique; DEZUO, Tiago; TROFINO, Alexandre. Nonlinear feedback switching rule design for sector-bounded switched systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 33, n. 11, p. 6512–6532, 2023.

Adicionalmente, o autor submeteu o artigo “Observer Design for Sector-Bounded Switched Systems” ao *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, no qual são apresentados os principais resultados desenvolvidos nos Capítulos 6 e 7 desta tese.

Vale destacar a relação entre esta tese e os trabalhos anteriormente desenvolvidos pelo autor, em especial Lunardi (2021) e o artigo subsequente Lunardi, Dezuio e Trofino (2023). Esses trabalhos estabeleceram as bases teóricas para o projeto de leis de chaveamento por realimentação não linear aplicadas a sistemas chaveados com não linearidades limitadas em setor, explorando transformações de estado e formulações via LMIs para garantir estabilidade global assintótica sob medição parcial de estados.

A presente tese representa uma evolução dessa linha de pesquisa. Mantendo a mesma fundamentação teórica baseada em estabilidade robusta e formulações convexas, avançando ao tratar explicitamente cenários com restrições de medição. Em vez de assumir a disponibilidade direta das variáveis necessárias à realimentação, desenvolve-se um observador chaveado capaz de estimar dinamicamente os estados não medidos e a função não linear incerta limitada por valores conhecidos, também com garantias formais baseadas em funções de Lyapunov e LMIs.

Sob essa perspectiva, esta tese amplia os resultados anteriores ao incorporar o problema de estimação ao contexto de sistemas chaveados não lineares limitados por setor. As abordagens não são concorrentes, mas complementares. Enquanto os trabalhos anteriores concentraram-se no desenvolvimento da lei de chaveamento robusta, a contribuição atual apresenta uma metodologia sistemática de estimação, expandindo o conjunto de aplicações possíveis e aproximando a metodologia de cenários práticos com restrições de medição.

Adicionalmente, ambas as estratégias podem ser empregadas de forma integrada, resultando em uma arquitetura unificada de controle e estimação, na qual a lei de chaveamento robusta é combinada ao observador proposto. Dessa forma, esta tese estende os resultados anteriores oferecendo uma estrutura mais completa para o tratamento de problemas de controle robusto para sistemas chaveados não lineares.

REFERÊNCIAS

- ANTSAKLIS, P. J. Special issue on hybrid systems: theory and applications a brief introduction to the theory and applications of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 88, n. 7, p. 879–887, July 2000. ISSN 0018-9219. Citado na página 23.
- ARMSTRONG, S.; HURLEY, W. G. Self-regulating maximum power point tracking for solar energy systems. In: **39th International Universities Power Engineering Conference**. Bristol, United Kingdom: [s.n.], 2004. v. 2, p. 604–609. Citado na página 70.
- BELHAJ, Fatima Zahra et al. Adaptive observer design for non-linear cascade boost converter. In: **2020 International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 1–5. Citado na página 20.
- BESTLE, D.; ZEITZ, M. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 38, n. 2, p. 419–431, 1983. Citado na página 20.
- BLAABJERG, F. et al. Power electronics - key technology for renewable energy systems. In: **2nd Power Electronics, Drive Systems and Technologies Conference**. Tehran, Iran: [s.n.], 2011. p. 445–466. Citado na página 19.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. Boston, USA: [s.n.], 2004. p. 3890–3895. Citado 6 vezes nas páginas 19, 26, 29, 30, 32 e 35.
- BOUHADJRA, D. et al. High-gain nonlinear observer using system state augmentation. In: **2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 4182–4187. Citado na página 20.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, USA: SIAM, 1994. v. 86. Citado 4 vezes nas páginas 46, 48, 53 e 121.
- BRANICKY, M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 43, n. 4, p. 475–482, April 1998. Citado na página 28.
- CASARO, M. M. **Inversor trifásico de dois estágios modificado aplicado no processamento da energia solar fotovoltaica em sistemas conectados à rede elétrica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 96.
- CHAN, Joseph Chang Lun et al. A nonlinear observer for robust fault reconstruction in one-sided lipschitz and quadratically inner-bounded nonlinear descriptor systems. **IEEE Access**, v. 9, p. 22455–22469, 2021. Citado na página 20.
- CHANG, Xiao-Heng; JIN, Xue. Observer-based fuzzy feedback control for nonlinear systems subject to transmission signal quantization. **Applied Mathematics and Computation**, v. 414, p. 126657, 2022. ISSN 0096-3003. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 36.
- CHEN, C.T. **Linear System Theory and Design**. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. (Oxford series in electrical and computer engineering). ISBN 9780199959570. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 47.

CHOI, Hyeji; RO, K.-S. Lmi-based sliding-mode observer design method. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings -**, v. 152, p. 113 – 115, 02 2005. Citado na página 20.

COELHO, R. F.; CONCER, F.; MARTINS, D. C. A study of the basic DC-DC converters applied in maximum power point tracking. In: **Brazilian Power Electronics Conference**. Bonito, Brasil: [s.n.], 2009. p. 673–678. Citado na página 71.

COUTINHO, D. F. et al. Linear H_∞ filter design for a class of uncertain nonlinear systems. **Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control**, p. 380–385, 2003. Citado na página 29.

Da Silva, Ramon Gomes et al. Application of a demand forecasting model in a rental company of billiard tables. **Journal of Engineering and Technology for Industrial Applications**, v. 4, p. 53–58, 2018. Citado na página 52.

DEAECTO, G. S. et al. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. **IET Control Theory & Applications**, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, July 2010. Citado na página 29.

DECARLO, R. A. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 19, 26 e 28.

DEZUO, T.; LUNARDI, H. C.; TROFINO, A. Robust switching rule design for photovoltaic systems under non-uniform conditions. In: **2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 2342–2347. Citado 4 vezes nas páginas 19, 29, 65 e 69.

DEZUO, Tiago J. M. **Design of switching strategies with applications in photovoltaic energy generation**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2014. Citado 11 vezes nas páginas 19, 29, 34, 35, 37, 40, 41, 48, 63, 97 e 99.

DEZUO, T. J. M.; TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C. Switching rule design for sector-bounded nonlinear switched systems. In: **Proceedings of 19th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress**. Cape Town, South Africa: [s.n.], 2014. p. 4074–4079. Citado 3 vezes nas páginas 19, 80 e 95.

DONG, Yue; TIAN, Yazhou. Stability and 11-gain analysis of switched positive systems with unstable subsystems and sector nonlinearities. **Journal of the Franklin Institute**, v. 361, n. 18, p. 107255, 2024. ISSN 0016-0032. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003224006768>. Citado na página 26.

FAN, Xingzhe; ARCAK, M. Nonlinear observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. In: **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1, p. 684–688 vol.1. Citado na página 20.

FERON, E. **Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback**. Center for Intelligent Control Systems, MIT Publication CICS-P 468, 1996. Citado na página 29.

FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides**. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988. Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 30, 31, 32, 76 e 82.

GAO, Huijun; LI, Xianbo. **Robust Filtering for Uncertain Systems**. London: Springer, 2014. Citado na página 48.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, SIAM, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006. Citado na página 29.

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. **Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB**. [S.l.]: John Wiley Sons, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 52.

GUAY, M. Observer linearization by output dependent time-scale transformations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 47, n. 10, 2002. Citado na página 20.

HAJIAHMADI, Mohammad; SCHUTTER, Bart De; HELLENDORRN, Hans. Stabilization and robust H_∞ control for sector-bounded switched nonlinear systems. **Automatica**, v. 50, n. 10, p. 2726–2731, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 74.

HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle's invariance principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 4, p. 470–482, April 2004. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 123.

HOU, M.; PUGH, A.C. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. **Systems & Control Letters**, v. 37, n. 1, p. 1–9, 1999. ISSN 0167-6911. Citado na página 20.

HU, T.; MA, L.; LIN, Z. Stabilization of switched systems via composite quadratic functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 11, p. 2571–2585, 2008. Citado na página 30.

INDUMATHI, R.; LAKSHMANAN, S. A.; CHIN, Cheng Siong. Comparative analysis of hybrid ga-pso and gwo-pso mppt algorithm for photovoltaic systems. In: **2024 IEEE 3rd International Conference on Electrical Power and Energy Systems (ICEPES)**. [S.l.: s.n.], 2024. p. 1–6. Citado na página 70.

ISIDORI, Alberto. **Nonlinear Control Systems**. 3rd. ed. London: Springer, 1995. Citado na página 48.

Ji, Zhijian; XIAOXIA, Guo; XIE, Guangming. Robust h_∞ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple lyapunov functions approach. **Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme - J DYN SYST MEAS CONTR**, v. 128, 09 2006. Citado na página 30.

JOHANSSON, M. **Piecewise Linear Control Systems**. Berlin, Germany: Springer, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

KALMAN, Rudolf E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 03 1960. ISSN 0021-9223. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3662552>. Citado na página 20.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 36, 38, 43, 48, 57, 59 e 123.

KING, C.; SHORTEN, R. A singularity test for the existence of common quadratic lyapunov functions for pairs of stable lti systems. In: **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 4, p. 3881–3884 vol.4. Citado na página 28.

LASDON, L. S. **Optimization Theory for Large Systems**. New York, USA: Macmillan, 1970. Citado na página 80.

LAUB, A. J. **Matrix Analysis for Scientists & Engineers**. Philadelphia, USA: SIAM, 2005. Citado na página 121.

LI, Huijuan. Stability analysis of time-varying switched systems via indefinite difference Lyapunov functions. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 48, p. 101329, 2023. ISSN 1751-570X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751570X22001248>. Citado na página 29.

LIBERZON, D. **Switching in Systems and Control**. Boston, USA: Birkhäuser, 2003. Citado 9 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 47 e 48.

LIBERZON, D. Switched systems. In: _____. **Handbook of Networked and Embedded Control Systems**. USA: [s.n.], 2005. v. 1, p. 559–574. Citado na página 23.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 28.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. 10a edição. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. ISBN 978-85-244-0048-3. Citado na página 59.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a short survey of recent results. In: **Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control**. Limassol, Cyprus: [s.n.], 2005. p. 24–29. Citado 5 vezes nas páginas 19, 27, 28, 29 e 30.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 2, p. 308–322, February 2009. Citado na página 48.

LÖFBERG, J. Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **International Symposium on Computer Aided Control Systems Design**. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Yalmip home page <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>>. Citado na página 100.

LUENBERGER, D. An introduction to observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 16, n. 6, p. 596–602, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 46.

LUNARDI, Henrique; DEZUO, Tiago; TROFINO, Alexandre. Nonlinear feedback switching rule design for sector-bounded switched systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 33, n. 11, p. 6512–6532, 2023. Citado 4 vezes nas páginas 19, 29, 98 e 112.

LUNARDI, Henrique Carlos. **Projeto de lei de chaveamento usando realimentação não linear para sistemas chaveados limitados em setor com estudo de caso na geração fotovoltaica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, Joinville, Brazil, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 99 e 112.

MESSALTI, Sabir; HARRAG, Abd Ghani; LOUKRIZ, Abd Elhamid. A new neural networks mppt controller for pv systems. In: **IREC2015 The Sixth International Renewable Energy Congress**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–6. Citado na página 70.

MIGNONE, D.; FERRARI-TRECCATE, G.; MORARI, M. Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems: an LMI approach. In: **Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control**. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. v. 1, p. 504–509. Citado na página 29.

MOHAN, N.; UNDELAND, T. M.; ROBBINS, W. P. **Power Electronics: Converters, Applications and Design**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

MOHITE, Shivaraj; ALMA, Marouane; ZEMOUCHE, Ali. A new matrix multiplier-based Lmi approach for nonlinear observers. In: **2022 30th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)**. [S.l.: s.n.], 2022. p. 91–96. Citado na página 48.

MOHITE, Shivaraj; ALMA, Marouane; ZEMOUCHE, Ali. An Lmi-based observer design method for a class of nonlinear systems. In: **2024 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 2024. p. 1282–1287. Citado na página 48.

NAIFAR, Omar; JMAL, Assaad; DERBEL, Nabil. Non-fragile h_∞ observer for a class of nonlinear systems. In: **2020 17th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 122–125. Citado na página 48.

OLIVEIRA, Fernando Marcos de. **Rastreamento da máxima potência em arranjos fotovoltaicos sob efeito de sombreamento parcial baseado no método de otimização por enxame de partículas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Brasil, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.

OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. O. R. (Ed.). **Perspectives in Robust Control Design**. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 268). p. 241–257. Citado na página 122.

OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. **Discrete-Time Signal Processing**. 3. ed. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall Signal Processing Series, 2010. Citado na página 54.

PETERSEN, I. R.; MCFARLANE, D. C. Robust state estimation for uncertain systems. In: **Proceedings of the American Control Conference (ACC)**. Boston, MA, USA: [s.n.], 1991. p. 1371–1376. Citado na página 48.

PETTERSSON, S. Synthesis of switched linear systems. In: **42nd IEEE Conference on Decision and Control**. Maui, USA: [s.n.], 2003. p. 5283–5288. Citado na página 29.

PINTO, Lie Pablo Grala. **Estimação de variáveis de estado e parâmetros baseada em observadores chaveados**. Tese (Doutorado) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 20, 49, 50, 51, 52, 53, 54 e 56.

PINTO, L. P. G.; TROFINO, A. State and parameter estimation based on switched observers - an LMI approach. In: **Proceedings of the 2014 American Control Conference**. Portland, USA: [s.n.], 2014. p. 3249–3254. Citado na página 48.

PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. **Digital Signal Processing**. 4 ed. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007. Citado na página 54.

- QASIM, Mohammed; ALI, Hazem; LUTFY, Omar. Optimized adaptive h-infinity model reference control with guaranteed cost of nonlinear systems. **International Journal of Dynamics and Control**, v. 13, 10 2025. Citado na página 54.
- RAGHAVAN, SEKHAR; HEDRICK, J. KARL. Observer design for a class of nonlinear systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 59, n. 2, p. 515–528, 1994. Citado na página 20.
- RAIDA, Z. Steering an adaptive antenna array by the simplified kalman filter. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 43, n. 6, p. 627–629, 1995. Citado na página 20.
- RAJAMANI, R. Observers for lipschitz nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 43, n. 3, p. 397–401, 1998. Citado na página 20.
- ROSSA, Matteo Della; TANWANI, Aneel. **Converse Lyapunov Results for Stability of Switched Systems with Average Dwell-Time**. 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2405.03560>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- ROTULO, Monica; PERSIS, Claudio De; TESI, Pietro. Online data-driven stabilization of switched linear systems. In: **2021 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 2021. Citado na página 27.
- SCHARLAU, C. C. **Controle de Sistemas Chaveados e Aplicações**. Tese (Doutorado) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 25, 26, 27, 28 e 29.
- SCHARLAU, C. C. et al. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. **Systems & Control Letters**, v. 68, p. 1–8, June 2014. Citado na página 19.
- SENGER, G. A.; TROFINO, A. Switching rule design for a class of switched systems with uncertain equilibrium. In: **Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control**. Los Angeles, USA: [s.n.], 2014. p. 4667–4672. Citado na página 80.
- SENGER, G. A.; TROFINO, A. Switching rule design for affine switched systems with guaranteed cost and uncertain equilibrium condition. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 61, n. 7, p. 1925–1930, July 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 74.
- SIMON, Dan. **Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches**. [S.l.: s.n.], 2006. Citado 3 vezes nas páginas 43, 52 e 53.
- SKAFIDAS, E. et al. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, v. 35, n. 4, p. 553–564, 1999. Citado na página 29.
- SMITH, Steven W. **The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Processing**. 2a Edição. [S.l.]: Pearson, 1999. ISBN 0-9660176-6-8. Citado na página 52.
- SOUALMIA, A.; CHENNI, R. A survey of maximum peak power tracking techniques used in photovoltaic power systems. In: **IEEE 2016 Future Technologies Conference (FTC)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 430–443. Citado na página 69.
- STEWART, James. **Cálculo: Volume 1**. 8a Edição. [S.l.]: Pearson, 2016. ISBN 978-85-221-1461-0. Citado na página 57.

- SUN, Z. Stabilizability and insensitivity of switched linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 7, p. 1133–1137, July 2004. Citado na página 30.
- SUN, Z. Combined stabilizing strategies for switched linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 51, n. 4, p. 666–674, 2006. Citado na página 26.
- TAN, C. P.; EDWARDS, C. An lmi approach for designing sliding mode observers for fault detection and isolation. In: **2001 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 481–486. Citado na página 20.
- TAN, C. W.; GREEN, T. C.; HERNANDEZ-ARAMBURO, C. A. An improved maximum power point tracking algorithm with current-mode control for photovoltaic applications. In: **International Conference on Power Electronics and Drives Systems**. Kuala Lumpur, Malaysia: [s.n.], 2005. v. 1, p. 489–494. Citado na página 97.
- TANWANI, Aneel; SHIM, Hyungbo; LIBERZON, Daniel. Observability for switched linear systems: Characterization and observer design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 58, n. 4, p. 891–904, 2013. Citado na página 48.
- TROFINO, A. et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. In: **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**. Shanghai, China: [s.n.], 2009. Citado na página 31.
- TROFINO, A.; DEZUO, T. J. M. LMI stability conditions for uncertain rational nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 24, n. 18, p. 3124–3169, December 2014. Citado 3 vezes nas páginas 33, 48 e 122.
- TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Corrections to “Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields”. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 57, n. 4, p. 1080–1082, April 2012. Citado na página 19.
- TROFINO, A. et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: **50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference**. Orlando, USA: [s.n.], 2011. p. 1183–1188. Citado 7 vezes nas páginas 19, 31, 33, 35, 76, 78 e 79.
- TROFINO, A. et al. Switching rule design for affine switched systems with H_∞ performance. In: **51th IEEE Conference on Decision and Control**. Maui, USA: [s.n.], 2012. p. 1923–1928. Citado na página 30.
- WICKS, M.; DECARLO, R. Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In: **Proceedings of the 1997 American Control Conference**. Albuquerque, USA: [s.n.], 1997. v. 3, p. 1709–1713. Citado na página 29.
- WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: **Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. Lake Buena Vista, USA: [s.n.], 1994. v. 4, p. 3492–3497. Citado na página 29.
- XIANG, Weiming. Necessary and sufficient conditions for stability of discrete-time switched linear systems with ranged dwell time. **IEEE Control Systems Letters**, v. 6, p. 728–733, 2022. Citado na página 27.

XIONG, Jiandong et al. Stability analysis of switched linear singular systems with unstable and stable modes. **Entropy**, 2023. Citado na página 27.

XU, X.; ZHAI, G.; HE, S. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 2, n. 1, p. 196–208, March 2008. Citado na página 32.

XUESONG, Zhou et al. The simulation and design for mppt of pv system based on incremental conductance method. In: **2010 WASE International Conference on Information Engineering**. [S.l.: s.n.], 2010. v. 2, p. 314–317. Citado na página 70.

YADAV, Anjali; KHAN, Imran; KUMAR, Saurabh. Performance analysis of adaptive neural-fuzzy mppt in photovoltaic system. In: **2024 IEEE 16th International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks (CICN)**. [S.l.: s.n.], 2024. p. 1249–1253. Citado na página 70.

YU, Ker-Wei et al. Robust (q,s,r) - γ -dissipative and h_2 performances for switched systems with mixed time delays. **Mathematics**, v. 11, n. 7, 2023. ISSN 2227-7390. Citado na página 53.

YU, Qiang; FENG, Yuanyang. Stability analysis of switching systems with all modes unstable based on a ϕ -dependent max-minimum dwell time method. **AIMS Mathematics**, v. 9, n. 2, p. 4863–4881, 2024. ISSN 2473-6988. Disponível em: <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2024236>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 54.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. **International Journal of Control**, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003. Citado na página 29.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall, 1996. Citado na página 53.

APÊNDICE A – CONCEITOS PRELIMINARES

Nesse apêndice são apresentadas algumas definições matemáticas úteis para essa tese. O objetivo é apresentar e relembrar o leitor de algumas propriedades, características e ferramentas utilizadas através de uma revisão sucinta sobre tópicos importantes. Os conteúdos abordados serão o Procedimento S, o Produto Kronecker, uma versão do Lema de Finsler, o Critério de Sylvester, as definições de Anuladores Lineares e Funções de Classe \mathcal{K} .

A.1 PROCEDIMENTO S

Essa técnica ficou conhecida como “*S-Procedure*” e permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Para reduzir o conservadorismo, a técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

Sejam $T_1, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas dadas e $F(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma função afim em g . Considere o seguinte problema: encontre g , se possível, tal que

$$\xi' F(g) \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0 : \quad \xi T_i \xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{A.1})$$

É fácil perceber que se existem escalares $\tau_i, i = 1, \dots, p$, e algum g tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (\text{A.2})$$

então (A.1) está satisfeita. Porém não é trivial mostrar que (A.1) e (A.2) são equivalentes para $p = 1$. Para mais detalhes e algumas variantes do Procedimento S, veja Boyd et al. (1994).

A.2 PRODUTO DE KRONECKER

A aplicação do produto Kronecker é útil para simplificar algumas notações que serão apresentadas no decorrer desta dissertação.

Definição 4 (Produto de Kronecker) *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Então o produto de Kronecker entre \mathbf{A} e \mathbf{B} é definido como a matriz*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

□

A mesma definição é válida se \mathbf{A} e \mathbf{B} forem matrizes de valor complexo. Para mais detalhes e propriedades do produto Kronecker, veja Laub (2005).

A.3 LEMA DE FINSLER

Este lema é útil pois permite que restrições de igualdade sejam inseridas em uma única desigualdade que pode ser resolvida via LMI.

Lema 4 (Lema de Finsler) *Seja $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz dada e C_0 uma base para o espaço nulo de C . Seja $F(g)$ uma função afim em $g \in \mathbb{R}^q$ com $F(g) = F'(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. As seguintes condições são equivalentes:*

$$(a) \exists g: \quad x'F(g)x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad Cx = 0, \quad x \neq 0;$$

$$(b) \exists g, L: \quad F(g) + LC + C'L' < 0, \quad L \in \mathbb{R}^{n \times m};$$

$$(c) \exists g: \quad C_0'F(g)C_0 < 0;$$

$$(d) \exists g, \alpha: \quad F(g) - \alpha C'C < 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad \square$$

As relações possuem prova formal que podem ser encontradas em Oliveira e Skelton (2001) e suas referências. Existem algumas variações do Lema de Finsler conhecidas por outros nomes, como Lema da Projeção e Lema da Eliminação de Variáveis.

A.4 ANULADOR LINEAR

Anuladores lineares são úteis quando utilizados juntamente com o Lema de Finsler para reduzir o conservadorismo de algumas LMIs.

Definição 5 (Anulador Linear) *Dada uma função vetorial $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$, uma função matricial $\mathfrak{K}_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ será chamada de um Anulador Linear de $f(\cdot)$ se este satisfaz as duas seguintes condições (i) $\mathfrak{K}_f(\cdot)$ é linear e (ii) $\mathfrak{K}_f(h)f(h) = 0, \forall h \in \mathbb{R}^q$ de interesse. \square*

É possível notar que a representação matricial do Anulador Linear não é única, podendo haver diversos anuladores para a mesma função vetorial.

Uma forma sistemática de construir um Anulador Linear é apresentada em Trofino e Dezuo (2014), onde, seja o vetor $f(\cdot) : \mathbb{R}^c \mapsto \mathbb{R}^s$, uma matriz $\mathfrak{K}_f(\cdot) : \mathbb{R}^c \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ chamada de anulador de $f(\cdot)$ se $\mathfrak{K}_f(h)f(h) = 0, \forall h \in \mathbb{R}^c$. Se $\mathfrak{K}_f(\cdot)$ é uma função linear então é chamado de anulador linear.

$$\mathfrak{K}_\theta(\theta) = \begin{bmatrix} Y_1(\theta) & Z_1(\theta) \\ \vdots & \vdots \\ Y_{(m-1)}(\theta) & Z_{(m-1)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde,

$$Z_i(\theta) = -\theta_i I_{(m-i)}, \quad i \geq 1, \quad Y_1(\theta) = \begin{bmatrix} z_2 & \cdots & z_m \end{bmatrix}' \quad (\text{A.5})$$

$$Y_i(\theta) = \begin{bmatrix} 0_{(m-i) \times (i-1)} & z_{(i+1)} \\ & \vdots \\ & z_m \end{bmatrix}, \quad i \geq 2. \quad (\text{A.6})$$

Exemplo 5 Um possível anulador linear para o vetor $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$, pode ser escrito como:

$$\mathfrak{K}(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_1 & 0 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_3 & -\theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Pois, é fácil observar que $\mathfrak{K}(\theta) \cdot \theta = 0, \forall \theta$. □

A.5 FUNÇÃO CLASSE \mathcal{K}

Na teoria de controle, muitas vezes é necessário verificar a estabilidade de um sistema não autônomo. Para essa análise, é necessário utilizar algumas funções especiais a fim de comparação. As funções da Classe \mathcal{K} pertencem a essa família:

Definição 6 (Função Classe \mathcal{K}) Uma função contínua $\beta : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$, esta pertence à classe \mathcal{K} se for estritamente crescente e $\beta(0) = 0$. É dito que pertence à classe \mathcal{K}_∞ se uma função Classe \mathcal{K} satisfaça $\beta(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$ para $a = \infty$. □

Para mais detalhes das funções de Classe \mathcal{K} , veja Khalil (2002).

A.6 FUNÇÃO LOCALMENTE LIPSCHITZ

Nessa dissertação uma função localmente Lipschitz é utilizada como critério de suavidade para definição de sistemas chaveados.

Definição 7 (Função localmente Lipschitz) Uma função $f(x)$ é dita localmente Lipschitz no domínio $D \in \mathbb{R}^n$ se cada ponto de D possui uma vizinhança D_0 de forma que f satisfaça a condição Lipschitz ($\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$) para todos os pontos em D_0 com alguma constante Lipschitz $L_0 > 0$. O símbolo $\|x\|$ corresponde à Norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$. □

Para mais detalhes e propriedades de funções localmente Lipschitz, veja Hespanha (2004).



JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS
TECNOLÓGICAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Tiago Jackson May Dezuo, professor do curso de Doutorado em Engenharia Elétrica, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora da tese intitulada: **“PROJETO DE OBSERVADOR CHAVEADO ROBUSTO PARA ESTIMAÇÃO E REALIMENTAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES LIMITADAS EM AMPLITUDE”** de autoria do acadêmico Henrique Carlos Lunardi.

Joinville, 07 de Maio de 2026.

Assinatura digital do orientador:

Tiago Jackson May Dezuo