

Consideramos um modelo de dois predadores com uma presa em comum, o modelo leva em conta que os predadores exibem uma resposta funcional do tipo Holling II com um dos predadores tendo uma competição intraespecífica. O sistema apresenta, oscilações grandes, representando surtos, pequenas oscilações que é tido como padrão. Além disto, o sistema apresenta oscilações de modo misto, isto é, grandes e pequenas oscilações juntas, isto implica em uma adaptabilidade biológica da espécie em sobreviver entre os surtos e colapsos. Foram realizadas simulações numéricas e verificado que o sistema apresenta sensibilidade aos parâmetros e as condições iniciais, mostrando que mudanças pequenas devido a causas naturais ou interação humana afetam drasticamente na previsibilidade da densidade populacional de presas. Das simulações numéricas, foi evidenciado caos, regularidades e multiestabilidade. Nesta dissertação, será realizada uma análise da dinâmica deste sistema e o que ocorre em uma população natural.

Orientador: Paulo Cesar Rech

ANO
2021



UDESC

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DANIEL FELIPE MEURER | MULTI ESTABILIDADE NUM SISTEMA PREDADOR PRESA COM DOIS PREDADORES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
MULTI ESTABILIDADE NUM SISTEMA PREDADOR
PRESA COM DOIS PREDADORES**

DANIEL FELIPE MEURER

JOINVILLE, 2021

Joinville, 2021

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGIAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF**

DANIEL FELIPE MEURER

**MULTI ESTABILIDADE NUM SISTEMA PREDADOR PRESA COM DOIS
PREDADORES**

JOINVILLE

2021

DANIEL FELIPE MEURER

**MULTI ESTABILIDADE NUM SISTEMA PREDADOR PRESA COM DOIS
PREDADORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, área de concentração Física.

Orientador: Paulo Cesar Rech

**JOINVILLE
2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Meurer, Daniel Felipe
Multi estabilidade num sistema predador presa com dois
predadores / Daniel Felipe Meurer. -- 2021.
46 p.

Orientador: Paulo Cesar Rech
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2021.

1. Predador. 2. Presa. 3. Multiestabilidade. 4. Competição
Intraespecífica. 5. Espaço de Parâmetros. I. Rech, Paulo Cesar. II.
Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências
Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

DANIEL FELIPE MEURER

**MULTI ESTABILIDADE NUM SISTEMA PREDADOR PRESA COM DOIS
PREDADORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, área de concentração Física.

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Paulo Cesar Rech
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Dr. João Carlos Xavier
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Holokx Abreu Albuquerque
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 16 de março de 2021

Dedico este trabalho a minha mamãe, minha
rainha, a mulher mais importante da minha vida:
Rita Maria Meurer.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer minha mãe, Rita, que sempre fez o possível e o impossível para que eu concluísse meus estudos. Em conjunto com ela, ao meu namorado Vinícius e aos meus amigos Sarah, Ana, Sthefany e Heloísa pelo apoio emocional. Gostaria de agradecer também aos meus amigos Wiggers e Túlio pelo conhecimento que me passaram acerca dos sistemas dinâmicos. Além deles gostaria de agradecer aos professores Paulo e Holokx pelas orientações respectivamente do mestrado e da iniciação científica, aos amigos que não citei. Aos professores do DFIS. A CAPES pelo apoio financeiro. Um agradecimento em especial para o secretário da pós, Sidnei ao qual me auxiliou diversas vezes durante a graduação e o mestrado.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”
(SCHOPPENHAUER, [19–])

RESUMO

Consideramos um modelo de dois predadores com uma presa em comum. O modelo leva em conta que os predadores exibem uma resposta funcional do tipo Holling II com um dos predadores tendo uma competição intraespecífica. O sistema apresenta oscilações grandes, representando surtos e pequenas oscilações, que é tido como padrão. Além disto, o sistema apresenta oscilações de modo misto, isto é, grandes e pequenas oscilações juntas. Isto implica em uma adaptabilidade biológica da espécie em sobreviver entre os surtos e colapsos. Foram realizadas simulações numéricas e verificado que o sistema apresenta sensibilidade aos parâmetros e as condições iniciais, mostrando que mudanças pequenas devido a causas naturais ou interação humana afetam drasticamente na previsibilidade da densidade populacional de presas. Das simulações numéricas foi evidenciado caos, regularidades e multiestabilidade. Nesta dissertação será realizada uma análise da dinâmica deste sistema e o que ocorre em uma população natural.

Palavras-chave: Predador. Presa. Multiestabilidade. Séries Temporais. Atratores. Espaço de Parâmetros. Modelo de Lotka-Volterra. Competição Intraespecífica.

ABSTRACT

We took into consideration a model of two predators with one prey in common, the model regards that predators exhibit a functional Holling II response with one of the predators having an intraspecific competition. The system has large oscillations, representing outbreaks, small oscillations that are taken as standard. In addition, the system presents mixed oscillations, that is, large and small oscillations together, this implies a biological adaptability of the species to survive between outbreaks and collapses. Numerical simulations were carried out and it was verified that the system is sensitive to the parameters and initial conditions, showing that small changes due to natural causes or human interaction drastically affect the predictability of prey population density. From numerical simulations, parameters such as chaos, regularities and multi-stability were evidenced. In this dissertation, an analysis of the dynamics of this system and what occurs in a natural population will be carried out.

Keywords: Predator. Prey. Multistability. Time Series. Attractors. Parameters Space. Lotka-Volterra Model. Intraspecific Competition.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	SISTEMAS DINÂMICOS	13
2.1	CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA	13
2.2	ATRATORES	15
2.3	DEFINIÇÃO DE CAOS	17
2.4	EXPOENTES DE LYAPUNOV	17
2.4.1	Cálculo do espectro de Lyapunov: Método de Wolf	19
2.5	BIFURCAÇÕES	20
2.6	ESPAÇO DE PARÂMETROS	21
2.7	BACIAS DE ATRAÇÃO	22
2.8	MULTIESTABILIDADE	23
3	DINÂMICA POPULACIONAL	24
3.1	RESPOSTA FUNCIONAL	25
3.2	MODELO DE LOTKA-VOTERA	26
4	O MODELO	30
5	RESULTADOS	32
5.1	OBJETIVO	32
5.2	MATERIAIS E MÉTODOS	32
5.2.1	Realização de figuras atratoras e séries temporais	32
5.2.2	Efetuação de diagramas de bifurcação	33
5.2.3	Confecção de espaços de parâmetros	33
5.2.4	Produção de bacias de atração	34
5.3	SURTOS E COLAPSOS NA DINÂMICA PREDADOR-PRESA	34
5.4	COEXISTÊNCIA DE DUAS DINÂMICAS DISTINTAS	36
6	CONCLUSÕES	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

O interesse em sistemas que modelam a dinâmica das populações é antigo, data-se dos séculos XVIII e XIX, quando, em 1798, Thomas Robert Malthus (1766-1834) publicou sua obra intitulada "*Um ensaio sobre o princípio da população*", (MALTHUS, 1789) que mais tarde ficaria conhecido como a Teoria Malthusiana ou Malthusianismo. Nesta obra, Malthus deixa claro que o crescimento populacional é geométrico e o crescimento da fonte de alimento é aritmético, isto é, a população cresce muito mais rápido que a quantidade de alimento disponível, levando a quadros de miséria e calamidade (ALMEIDA, 2010).

Mais tarde, Pierre-François Verhulst (1804-1849), que estava convencido que a explicação de Malthus estava equivocada a cerca da explicação do crescimento demográfico, propôs ajustes na teoria, impondo um limite constante ao qual a população não poderia ultrapassar. Este limite estaria atrelado a falta de recursos, guerras e epidemias (VERHULST, 1997).

A grande revolução no estudo das populações se deu com a inclusão das interações, isto é, uma competição entre indivíduos (entre a mesma espécie ou espécies diferentes). Os pioneiros neste estudo foram Alfred Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940), que propuseram (individualmente e respectivamente em 1925 e 1926) um modelo matemático via equações diferenciais. Alfred J. Lotka era biofísico, químico e matemático americano. Seu interesse por trás deste estudo era descrever reações químicas nas quais os elementos oscilavam igual um sistema do tipo predador-presa (LOTKA, 1925). Já Vito Volterra, era um matemático italiano e estudava o comportamento de duas espécies de peixe, uma predadora e uma presa do Mar Adriático, durante a Segunda Guerra Mundial (VOLTERRA, 1926). O sistema ficou conhecido como modelo de Lotka-Volterra e serve de base para o estudo de muitos sistemas atuais.

Quando se trata do uso de sistemas do tipo predador-presa nos tempos atuais, a literatura tem uma vasta gama de aplicações. Podemos encontrar trabalhos que tratam de assuntos relacionados a ciências biológicas e agrárias com o controle de pragas (RAFFIKOV; BALTHAZAR, 2005), (CASIMIR, 1962), (ESPER et al., 2007), (KORPIMÄKI et al., 2004) e (WRIGHT, 1987), em ciências econômicas para descrever o comportamento em bolsa de valores e competições de mercado (LOUZOUN; SOLOMON, 2001), (CAETANO; YONEYAMA, 2007) e (CASTRO, 2011), na medicina no estudo do câncer (KAREVA; BEREZOVSAYA, 2015), entre outras aplicações.

Algumas críticas foram feitas ao sistema de Lotka-Volterra. Entre elas está a falta de uma capacidade de carga de presas. Com isto na ausência de predadores, as presas crescem indefinidamente (BOYCE; DIPRIMA, 2006) e os predadores não possuem uma resposta funcional. Assim quando a população de presas muda não há uma resposta dos predadores a cerca disto. Estas correções foram realizadas por vários cientistas, sendo o mais famoso deles Crawford Stanley Holling (1930 - 2019) em 1965 (HOLLING, 1965).

O modelo de predador-presa abordado neste trabalho (SADHU; THAKUR, 2017), tem como variáveis dois predadores com uma presa em comum. As variáveis do sistema levam em

conta a correção da capacidade de carga e tem uma resposta funcional. O trabalho constitui de analisar tal modelo do ponto de vista dos sistemas dinâmicos, verificando a presença de caos. Além disto, procurar estruturas regulares ou ainda multiestabilidade. Assim, serão realizados atratores, séries temporais, diagramas de bifurcações, espaços de parâmetros e bacias de atração, que são ferramentas para o estudo de sistemas dinâmicos e multiestabilidades. Em um primeiro momento, será realizado uma reprodução dos resultados obtidos pelo artigo (SADHU; THAKUR, 2017), e na sequencia um estudo de espaços de parâmetros e por fim um estudo destes espaços.

Um sistema do tipo predador-presa utiliza-se de equações diferenciais que evoluem no tempo. O estudo de equações diferenciais é de interesse nas mais diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, matemática e afins. Sistemas de equações diferenciais não lineares, na maioria dos casos, não possuem soluções analíticas. Deste modo, entra em campo a teoria dos sistemas dinâmicos não lineares, que contribui com o estudo qualitativo destas equações diferenciais via métodos numéricos e análise gráfica.

Históricamente, o estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos não lineares tem origem no interesse do matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) pela dinâmica dos corpos celestes, mais especificamente o problema dos três corpos sob ação gravitacional (POINCARÉ, 1899). Inicialmente, Poincaré assumiu que as massas dos planetas M_1 e M_2 eram muito maiores que a massa de m , a tal ponto que era possível desconsiderar os efeitos que m causava em M_1 e M_2 . Esta é uma hipótese razoável em um sistema Sol-Terra-Lua, por exemplo. Entretanto, se analisar o sistema Sol-Júpiter-Asteroides, os asteroides têm uma órbita irregular e imprevisível. Após analisar esta solução simplificada, e levando em consideração as perturbações de demais corpos, ele chegou à conclusão de que seria impossível encontrar uma solução analítica de uma posição inicial qualquer da massa m .

Poincaré foi, possivelmente, o primeiro a apreciar caos (MONTEIRO, 2011). De acordo com ele, uma modificação extremamente pequena nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças no resultado final (NUSSENZVEIG, 2013). Esta ideia de sensibilidade das condições iniciais foi revisitada por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) e Edward Norton Lorenz (1917-2008). Lyapunov descobriu que dado um conjunto de condições iniciais, com o passar do tempo as trajetórias tendem a se aproximar ou se afastar. O que mede este grau de afastamento ou aproximação são os expoentes de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992). Com esta descoberta, foi possível que o estudo da dinâmica não linear evoluísse, ferramentas importante como espaços de parâmetros e atratores surgiram a partir dele.

Se o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode gerar um furacão no Texas, então uma erro de entrada em um computador poderia fazer com que um sistema evoluísse de um jeito totalmente diferente em duas simulações "iguais". Foi isso que aconteceu com o sistema meteorológico de Lorenz (LORENZ, 1963). Ele havia simulado em 1961 um sistema Terra levando em conta vento e temperatura na tentativa de prever metereologicamente o tempo no decorrer dos dias. Entretanto, em um certo momento foi necessário recriar a simulação e para cortar caminho, ele resolveu partir dos resultados obtidos nas interações anteriores. Porém, em

pouco tempo de simulação os resultados divergiam drasticamente devido a precisão dos dados computados por Lorenz e a precisão do computador(GLEICK, 2011).

Além da sensibilidade às condições iniciais, alguns sistemas dinâmicos possuem multiestabilidade, isto é, apresenta histerese, que é o caso do modelo apresentado por Susmita Sadhu (SADHU; THAKUR, 2017). O modelo visa estudar qualitativamente um sistema com dois predadores e uma presa em comum em que os dois predadores competem entre si. Este sistema possui um crescimento logístico e exibe oscilação, isto é, quando o máximo de predação ocorre o mínimo de presas ocorre e vice-versa.

O presente trabalho esta organizado da seguinte forma, uma contextualização teórica, afim de situar o leitor durante a apresentação do modelo. Na seção do modelo, será definido as variáveis e parâmetros do sistema. Além disso, serão realizadas as possíveis simplificações, considerações e pontamentos sobre o sistema, bem como a implementação numérica. Por fim os resultados, as conclusões e as referências serão apresentadas.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

De acordo com Monteiro (MONTEIRO, 2011), um sistema pode ser definido como uma causalidade entre os conjunto de objetos relacionados e os fenômenos que ocorrem com os mesmos. Isto é, a causa acarreta em um efeito. Em analogia cita-se a famosa frase de Lorenz: "o bater de asas de uma borboleta no Brasil, poderia ocasionar em um furacão no Texas". Esta frase descreve a sensibilidade das condições iniciais em alguns sistemas. É dinâmico quando as grandezas constituintes dos sistemas evoluem no tempo.

Do cálculo diferencial, sabe-se que a evolução da taxa de variação $x(t)$ no tempo t é dado por sua derivada \dot{x} . Isto indica que o estudo de sistemas dinâmicos a tempo contínuo se dá por equações diferenciais, como será visto a seguir.

2.1 CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA

Um sistema pode ser a tempo contínuo ou a tempo discreto, linear ou não linear, autônomo ou não autônomo. Além disso, ele pode ser conservativo ou dissipativo (como será descrito na seção 2.2) (MONTEIRO, 2011).

Um sistema é dito a tempo discreto quando o tempo t é um inteiro. Usualmente $t \in \mathbb{Z}_+$ e a evolução temporal do sistema é governada por uma equação de diferenças (mapas):

$$\vec{X}_{t+1} = \vec{M}(\vec{X}_t) \quad (1)$$

Onde \vec{X}_t representa um estado no tempo t e \vec{X}_{t+1} em um tempo posterior. Além disso, \vec{M} é o mapa (FELICIO, 2018). Um exemplo é o mapa logístico (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994):

$$x(t+1) = ax(t)(1 - x(t)). \quad (2)$$

A tempo contínuo, o tempo t é um número real usualmente $t \in \mathbb{R}_+$ e a evolução do sistema é dado por equações diferenciais (fluxos):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{array} \right. \quad (3)$$

Um exemplo de fluxo é o sistemas de Lorenz (MONTEIRO, 2011):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y + x) \\ \dot{y} = rx - y - xy \\ \dot{z} = xy - bz. \end{array} \right. \quad (4)$$

É dita linear a equação diferencial que pode ser escrita com uma combinação linear de seus termos, isto é:

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x(t) = F(t). \quad (5)$$

Deste modo, as equações não lineares não seguem esta regra, são exemplos:

$$x(t+1) - 2x(t) = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{x} + \tanh(\pi t)x(t) - 5t^2 = 0. \quad (7)$$

Um sistema dinâmico de tempo contínuo (linear ou não), é autônomo se as funções de entrada não dependem explicitamente do tempo (MONTEIRO, 2011):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array} \right. \quad (8)$$

Já um sistema não autônomo depende explicitamente do tempo (MONTEIRO, 2011):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{array} \right. \quad (9)$$

Entretanto, um sistema autônomo, pode ser reescrito em um sistema não autônomo apenas aumentando a dimensão em uma unidade (MONTEIRO, 2011):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{array} \right. \quad (10)$$

2.2 ATRATORES

Antes de mais nada, é necessário definir o que é o espaço de fase, uma vez que a dinâmica ocorre nele. Espaço de fase, espaço de estados ou espaço das variáveis é um espaço n -dimensional cujo os eixos coordenados são as variáveis de estado de um sistema dinâmico (MONTEIRO, 2011). Este estado em um dado tempo t é representado por $X_t(x_1(t), \dots, x_n(t))$ neste espaço. Na Figura 1 é possível observar um exemplo da evolução temporal de um sistema tridimensional. A essa evolução dá-se o nome de trajetória (OTT, 1993).

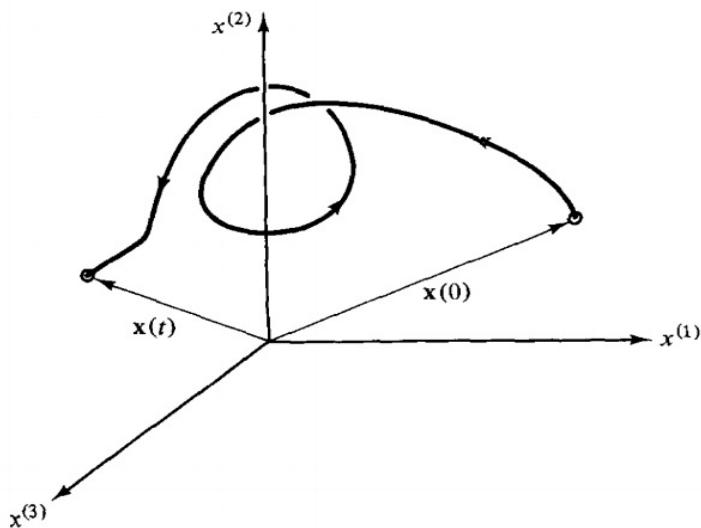


Figura 1 – Exemplo de trajetória no espaço de fase, retirada da referência (OTT, 1993)

Essa definição é importante para caracterizar algumas ferramentas de análise da dinâmica do sistema, isto é, como o sistema se comporta com o passar do tempo.

Seja $d\eta = dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n$ um elemento de volume no espaço de fase. Promovendo uma mudança de variáveis qualquer, o novo elemento de volume contém o Jacobiano da transformação, de modo que:

$$d\xi = |\det M| d\eta \quad (11)$$

Onde $d\xi = dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n$ e $M_{ij} = \partial \xi_i / \partial \eta_j$ é a matriz Jacobiana do sistema. A matriz Jacobiana obedece a condição simplética $M^T JM = J$, resultando em $|\det M| = 1$. Deste modo, integrando sobre um volume finito V_η , tem-se:

$$\int_{V_\eta} d\xi = \int_{V_\xi} d\eta \quad (12)$$

V_ξ corresponde a V_η nas novas variáveis. A esta preservação de volumes via evolução temporal é dado o nome de *Teorema de Liouville*¹.

¹ Para mais detalhes sobre este teorema, existe uma vasta quantidade de obras na literatura que o abordam, tais como (MONTEIRO, 2011) e (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

Os sistemas que obedecem este teorema, isto é, cujo o "volume"² das condições iniciais é invariante perante a evolução temporal, são ditos conservativos. Se um sistema apresenta alguma dissipação de energia seu volume se contrai no espaço de fase e, deste modo, surge uma figura atradora como resposta. Ou seja, só existem atratores em sistemas dissipativos (MONTEIRO, 2011).

Um conjunto fechado de pontos A , no espaço de fases de um sistema dinâmico é definido como atrator se:

A é um conjunto invariante: ou seja, qualquer trajetória $\vec{x}(t)$ que comece em A permanece em A por todo o tempo;

A atrai um conjunto aberto de condições iniciais: isto é, há um hipervolume B que contém A tal que para qualquer condição inicial $\vec{x}(0)$ pertencente a B , a distância entre a trajetória $\vec{x}(t)$ correspondente e A tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado bacia de atração de A ;

A é mínimo: ou seja, não há subconjunto de A que satisfaça as duas condições anteriores. (MONTEIRO, 2011, p.420-421)

As figuras atratoras podem ter diversos formatos, a saber, ponto fixo ou ponto de equilíbrio, ciclo limite ou atrator periódico, toros e atratores, caóticos como mostra a Figura 2 (MONTEIRO, 2011).

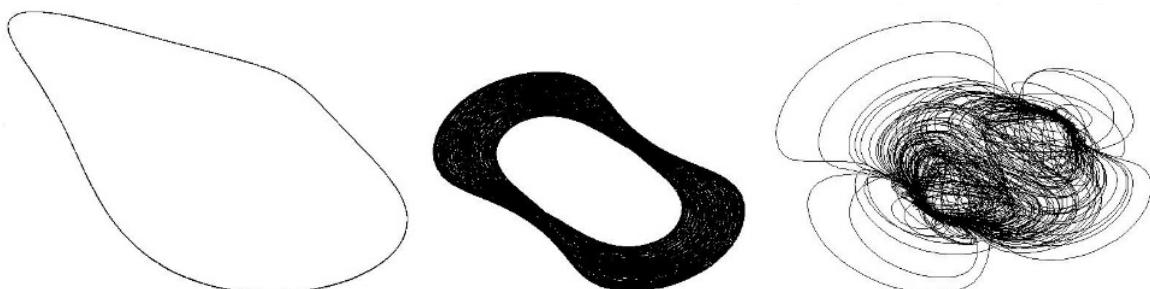


Figura 2 – Da esquerda para direita são exemplos de atratores periódico ou ciclo limite, quasi-periódico ou toros e caótico. Figuras retiradas da referencia (MEURER; ALBUQUERQUE; RECH, 2018)

- Ponto de equilíbrio ou ponto fixo são soluções independentes do tempo. Ele é representado por um ponto ao qual as trajetórias são atraídas no espaço de fase;
- Ciclo limite ou atrator periódico é aquele que, no tempo, possuem um comportamento periódico com amplitudes e períodos dados pelas equações, condições iniciais e parâmetros que compõem o sistema;
- Toros, ou atrator quasi-periódico, é uma superfície formada por duas frequências fundamentais individuais representando um regime quasi-periódico;
- Um atrator caótico é aquele que depende sensivelmente das condições iniciais.

² A palavra volume está entre aspas pois, em um sistemas unidimensional tem-se um comprimento, para um sistema bidimensional uma área, para um sistema n-dimensional um hipervolume.

2.3 DEFINIÇÃO DE CAOS

Não existe uma definição consensual para o caos. Dentre as presentes na literatura (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994) (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004), uma das mais bem estruturadas e compreensíveis está disposta na referência (BANKS et al., 1992): Seja $\vec{F} : D \rightarrow D$ um sistema dinâmico. \vec{F} é caótico se possui três propriedades:

\vec{F} apresenta transitividade topológica: isto é, para quaisquer dois subconjuntos abertos A e B em D existe um $k \in \mathbb{I}_+$ tal que $\vec{F}^{(k)}(A) \cap B \neq \emptyset$

As órbitas periódicas de \vec{F} são densas em D : ou seja, para qualquer $\vec{a} \in A$ e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um ponto $\vec{b} \in B$ tal que $\|\vec{a} - \vec{b}\| < \varepsilon$;

\vec{F} exibe dependência sensível às condições iniciais. (BANKS at all, 1992, p.332)

Existe algumas outras definições para o que é caos, como por exemplo a existência de estruturas fractais nos atratores. Tanto para sistemas contínuos quanto para sistemas discretos, a dependência sensível das condições iniciais é verificada via expoentes de Lyapunov.

2.4 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Em um sistema dinâmico, além da solução, deseja-se saber como as suas trajetórias evoluem no tempo. Assim, se utiliza da definição dos expoentes de Lyapunov, que servem de medida do afastamento (ou aproximação) entre as trajetórias (MONTEIRO, 2011).

Considere um sistema com n equações diferenciais ordinárias, em que, o volume de condições iniciais formam uma hiper-esfera no espaço de fase. Pega-se duas trajetórias inicialmente infinitesimalmente próximas, $x(t)$ e $x(t) + \Delta(t)$, com $\Delta(t)$ sendo um vetor distância, representado na Figura 3.

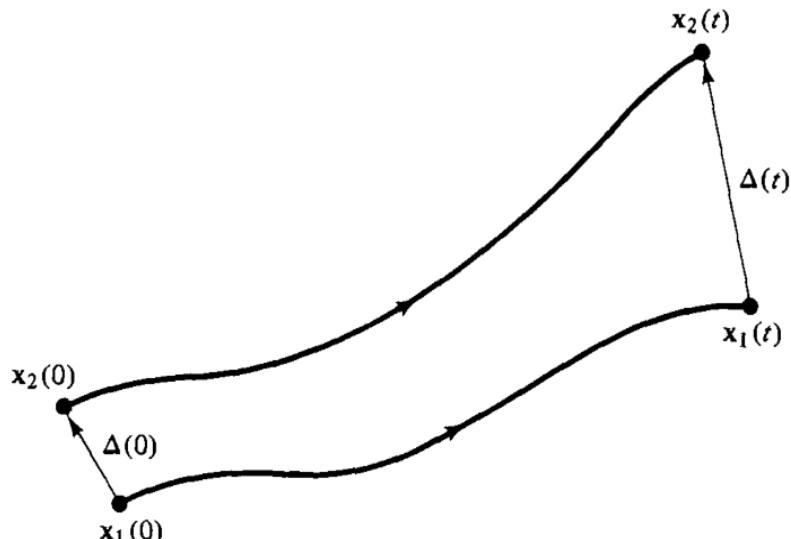


Figura 3 – Evolução temporal de duas condições iniciais infinitesimalmente próximas, retirada da referência (OTT, 1993)

Quando o sistema evolui no tempo, as trajetórias divergem ou convergem exponencialmente, de modo a formar um “hiper-elipsoide” de condições iniciais, isto é:

$$|\Delta(t)| = |\Delta(0)|e^{\lambda t}, \quad (13)$$

$$\frac{|\Delta(t)|}{|\Delta(0)|} = e^{\lambda t}, \quad \lambda t = \ln \left| \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \right|, \\ \lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \right|. \quad (14)$$

Em um instante t , toma-se um elemento do hipervolume do espaço de fase:

$$\Delta V(t) = \prod_{i=1}^n \Delta_i(t). \quad (15)$$

Substituindo a Eq. (13) na Eq. (15), tem-se que:

$$\Delta V(t) = \Delta V(0)e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)}. \quad (16)$$

Existe, assim, duas situações possíveis para a qual o hipervolume do espaço de fase não diverge:

- 1 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$: O sistema é conservativo. Isto é, a região pode translacionar e alterar a forma, porém o “volume” total, permanece o mesmo (Teorema de Liouville);
- 2 $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$: O sistema é dissipativo. Deste modo, é possível identificar os atratores devido o sinal do expoente de Lyapunov. Em três dimensões, temos a tabela 1

Maior Exponente	Segundo maior	Menor expoente	Tipo de atrator
+	0	—	Caótico
0	0	—	Quasi-periódico
0	—	—	Ciclo limite
—	—	—	Ponto fixo

Tabela 1 – Indicação dos expoentes de Lyapunov do maior para o menor e seus respectivos atratores (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

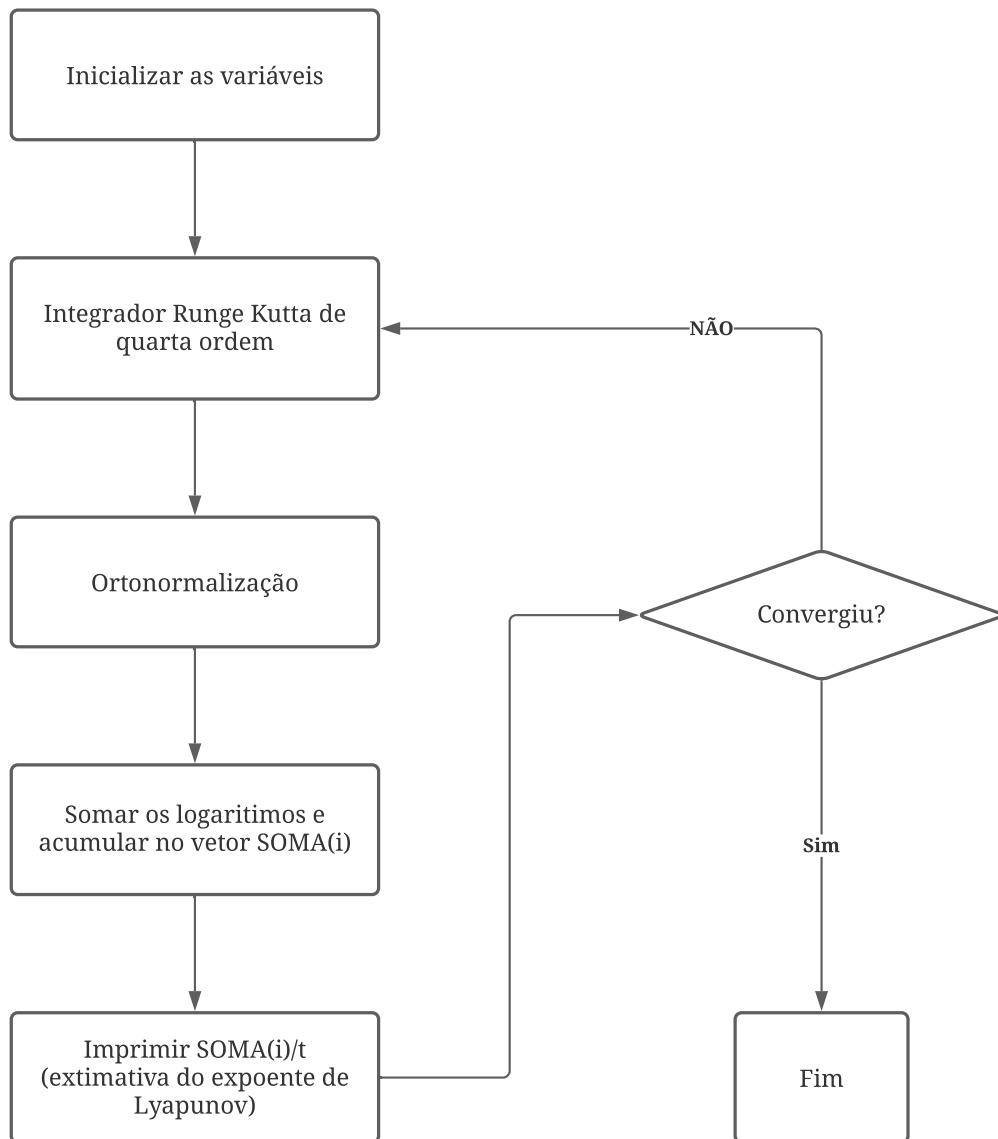


Figura 4 – Algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

2.4.1 Cálculo do espectro de Lyapunov: Método de Wolf

Define-se uma trajetória de referência, isto é, define-se o movimento do centro de uma hiperesfera inicialmente em \vec{x}_0 . O movimento dos pontos na superfície da hiperesfera é estudada de acordo com as equações do movimento linearizadas. A evolução dos eixos é definida por uma base ortogonal centrada na trajetória de referência. Para tanto, utiliza-se do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, como descrito na referência (WOLF et al., 1985).

No detalhe, a Figura 4 fornece um jeito para efetuar o cálculo dos expoentes de Lyapunov numericamente. Inicializa-se as variáveis do sistema das n equações diferenciais. Após, integra-se numericamente, utilizando o integrador Runge Kutta de quarta ordem, as equações originais e as equações linearizadas. Na sequência, realiza-se a ortogonalização de Gram-Schmidt para ortogonalizar toda a base. A seguir, dentro da função $SOMA(i)$ calcula-se a soma dos logaritmos

dos vetores ortonormais e depois imprime-se a razão $SOMA(i)/t$. Essas são as estimativas para os expoentes de Lyapunov λ_i . Repete-se os passos de 2 a 6 até a precisão desejada.

2.5 BIFURCAÇÕES

Um sistema estruturalmente estável, isto é, cuja topologia é equivalente após sofrer uma perturbação suficientemente pequena, pode perder a estabilidade se o parâmetro de estudo μ passa por um valor crítico μ_c . Diz-se então que o sistema sofreu uma bifurcação e μ_c é o ponto de bifurcação (MONTEIRO, 2011).

Dentro do estudo das bifurcações pode-se classificá-las como bifurcações locais e globais. As bifurcações locais são identificadas ao analisar um campo vetorial nas redondezas de um ponto de equilíbrio ou trajetória periódica. São exemplos destas as bifurcações de sela-nó, Hopf e dobramento de período. Por outro lado, as bifurcações globais não são identificáveis perante análise local. São os casos de bifurcações heteroclínicas e homoclínicas (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Um diagrama de bifurcação pode ser construído utilizando-se um parâmetro de interesse e variando o mesmo em uma variável de interesse.

Exemplo: modelo de crescimento populacional (mapa logístico)

O mapa logístico representado pela equação (2):

$$x(t+1) = ax(t)(1 - x(t)),$$

é usualmente utilizado para modelar sistemas de crescimento populacional (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Para tanto, o valor de $a > 1$ é denominado de potencial biótico. Que é a capacidade dos organismos vivos proliferarem e se desenvolverem sob condições adequadas de ambiente (CHAPMAN, 1928).

Este mapa é muito utilizado para exemplificar o que são diagramas de bifurcações uma vez que, o diagrama em questão é muito bem conhecido. Tomando a variável $x(t)$ desejamos verificar como ocorre a evolução temporal em relação ao potencial biótico a . O resultado é dado pelo diagrama de bifurcação da figura 5.

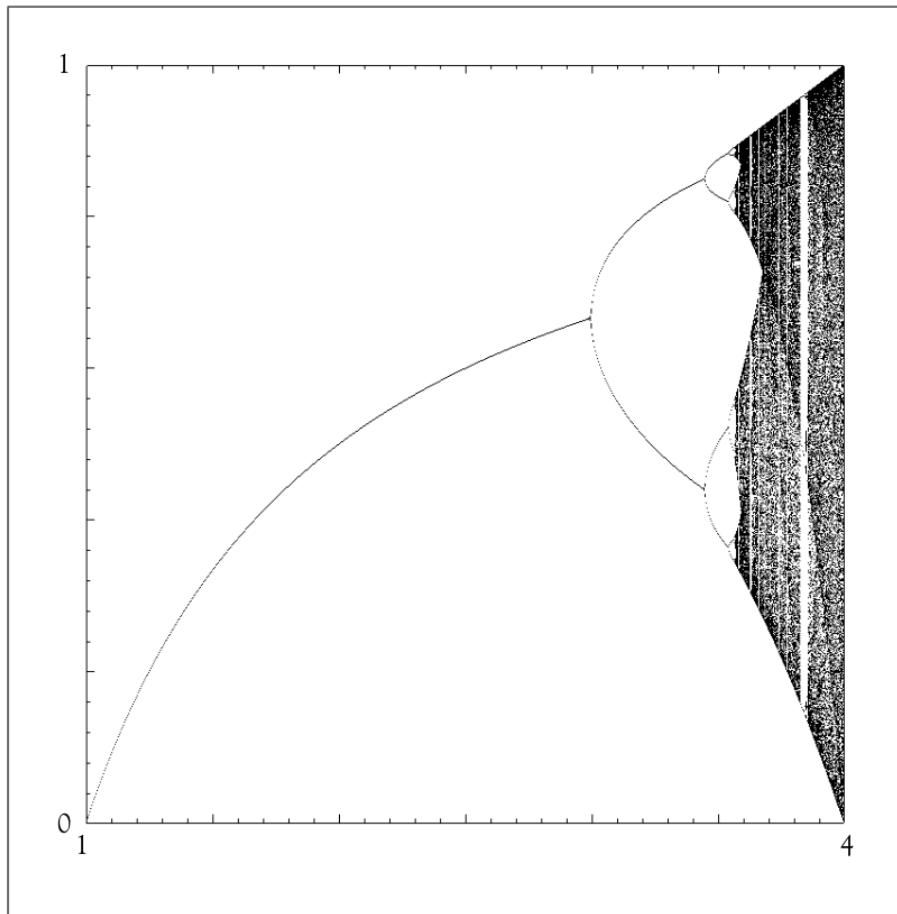


Figura 5 – Diagrama de bifurcação do mapa logístico (dado pela equação (2)) retirado da referência (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). O eixo vertical representa a variável x e o eixo horizontal o parâmetro a

2.6 ESPAÇO DE PARÂMETROS

O espaço de parâmetros é um gráfico de *parâmetro X parâmetro*, munido de um gradiente de cor que representa o maior expoente de Lyapunov, que por sua vez nos retorna os comportamentos presentes no sistema, como mostra a figura 6.

Observe que na figura 6 temos a variação de dois parâmetros (f e ω) como presumido inicialmente. No gradiente ao lado da figura vemos o maior expoente de Lyapunov, indo de 0,6 até 0,0. Para os expoentes de Lyapunov maiores que zero tem-se as regiões caóticas representadas pelo gradiente do preto ao vermelho, passando pelo amarelo. Já nas regiões pretas, estão regiões regulares. Existe ainda uma categoria que não está presente nessa figura que são os expoentes negativos. Eles representam um gradiente do branco ao preto e representam regiões de equilíbrio.

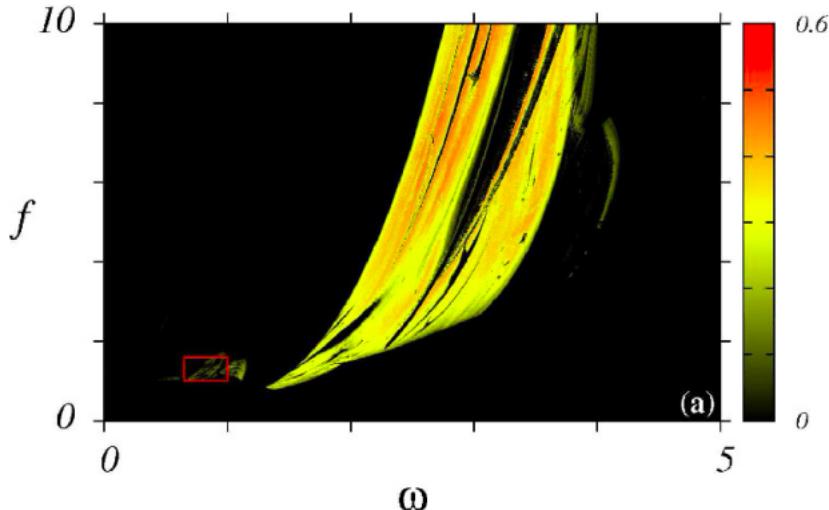


Figura 6 – Exemplo de espaço de parâmetros retirado da referencia (WIGGERS; RECH, 2018).

2.7 BACIAS DE ATRAÇÃO

Seja P um ponto no plano xy tal que uma trajetória passando por P acaba tendendo ao ponto crítico quando $t \rightarrow \infty$. Então diz-se que a trajetória foi atraída pelo ponto crítico, além disso, todos os pontos P com essa propriedade são chamados de bacia de atração. (BOYCE, 2006, p.390)

Tomemos um exemplo retirado da referencia (BOYCE; DIPRIMA, 2006). Considere o sistema

$$\frac{dx}{dt} = -(x-y)(1-x-y), \quad \frac{dy}{dt} = x(2+y), \quad (17)$$

Para descrever a bacia de atração de cada um dos pontos críticos assintoticamente estáveis, primeiramente encontremos os pontos críticos desse sistema, ou seja, tomamos a derivada em zero:

$$(x-y)(1-x-y) = 0 \quad x(2+y) = 0$$

Para satisfazer a segunda equação, basta que $x = 0$. Deste modo da primeira equação $y(1-y) = 0$ tem-se que $y = 0$ e $y = 1$ são soluções. Ou seja : $(x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (0,1)$. Além disto, da segunda equação, se $y = 2$, a equação é satisfeita e assim obtemos na primeira equação $x = -2$ e $x = 3$. Temos também: $(x,y) = (-2,-2)$ e $(x,y) = (3,-2)$

É possível realizar o campo de direções destes pontos críticos e determinar as trajetórias e bacias de atração presentes neste sistema. A figura 7 mostra estes resultados.

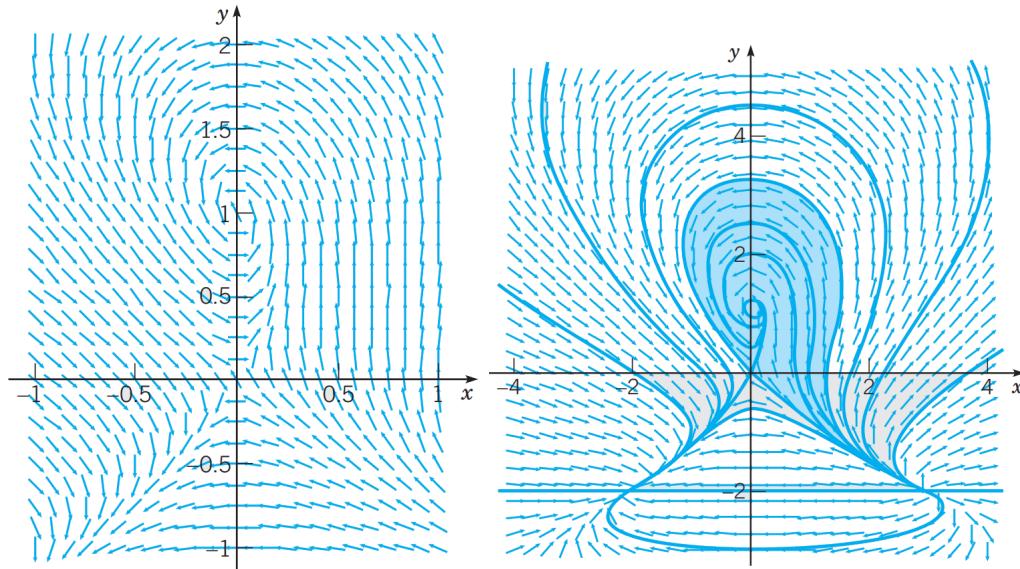


Figura 7 – À esquerda, temos o campo de direções originários do sistema 17. Nele contem os pontos críticos achados na análise, $(0,0)$, $(0,1)$, $(-2,2)$ e $(3,2)$. À direita, algumas trajetórias deste mesmo sistema em vermelho e em cinza. Temos a bacia de atração para o ponto crítico $(0,1)$. Figuras retiradas da referência (BOYCE; DIPRIMA, 2006)

2.8 MULTIFESTABILIDADE

Alguns sistemas apresentam para os mesmos parâmetros vários estados de equilíbrio possível (caótico ou regular). Isto é, a coexistência de inúmeros atratores diferentes. A este fenômeno dá-se o nome de multifestabilidade (RECH, 2005).

A ocorrência de multifestabilidade em sistemas de predador-presas é de extremo interesse, uma vez que permite modelar de modo mais realista o sistema, ou seja, a alternância entre atratores pode ser tomada através de condições bem definidas. Com isso é possível simular situações de surtos e colapsos dentro de uma população (SADHU; THAKUR, 2017).

Um método de caracterizar é fazer o estudo de espaços de parâmetros seguindo o atrator. Isso consiste em definir condições iniciais (x_0, y_0, z_0) para um dado parâmetro p_0 a fim de obter o parâmetro seguinte p_1 . Isto é, utiliza-se o último valor de (x, y, z) como sendo as novas condições iniciais. Segue-se o atrator varrendo a malha tanto no sentido crescente quanto no decrescente, uma vez que o fenômeno de multifestabilidade apresenta um comportamento de histerese neste espaço, ou seja, a figura seguindo o atrator no sentido crescente é diferente do decrescente. A análise destes sistemas é realizado com o estudo das bacias de atração.

3 DINÂMICA POPULACIONAL

O estudo da dinâmica das populações tem como base tentar descrever e entender como os indivíduos se distribuem e convivem entre si. Este estudo é importante em todos os níveis tróficos, isto é, os conjuntos animais e vegetais, que integram determinados ecossistemas. Uma vez que sabemos como uma determinada população funciona é possível fazer o controle e isso pode ser interessante na redução de pragas e animais em extinção.

Alguns parâmetros como nascer, crescer e morrer são intrínsecos aos indivíduos que, por sua vez, constituem as populações. Deste modo, o estudo das populações tem como parâmetros característicos as taxas de natalidade, mortalidade e como esses indivíduos crescem, bem como o que são.

Begon et.al. (TOWNSEND; BEGON; HARPER, 2009) define população como sendo um grupo de indivíduos e ainda diferencia os indivíduos de acordo com sua morfologia. Existem os indivíduos unitários, provenientes da fundição do espermatozoide com o óvulo, e os modulares, que crescem a partir de módulos (árvores, arbustos, invertebrados marinhos, etc). Organismos modulares formam por si só uma população.

Mesmo com indivíduos unitários é difícil quantificar as populações. Assim, recorre-se às estatísticas. Define-se então os parâmetros pertinentes aos estudo de tais populações e se trabalha com uma taxa determinada por uma área de interesse. Assim, o termo de população pode ser redefinido para o número de indivíduos por área. Surgem as taxas de natalidade, como sendo o número de nascidos vivos pelo número de indivíduos que constituem aquela população em um determinado tempo, e a taxa de mortalidade, definida como sendo a taxa de indivíduos mortos pelo número de indivíduos da população. Além disso, a análise do crescimento das populações seguem diferentes funções. As principais são o crescimento exponencial e o crescimento logístico, como apresentado na Figura 8.

Na natureza, populações até podem inicialmente crescer exponencialmente. Entretanto, em algum momento a falta de recursos irá barrar esse tipo de crescimento, diferente do crescimento logístico, que leva em conta este fato, isto é, existe uma capacidade de carga que faz com que as populações parem de crescer antes que os recursos se esgotem. Esta capacidade de carga está atrelada a diversos fatores, em especial as competições intraespecíficas.

Espécies que possuem condições de sobrevivência muito similares, ou seja, necessitam dos mesmos recursos (água, luz, alimento, espaço) para sobreviver, em algum momento vão entrar em conflito. A este fenômeno é dado o nome de competição intraespecífica.

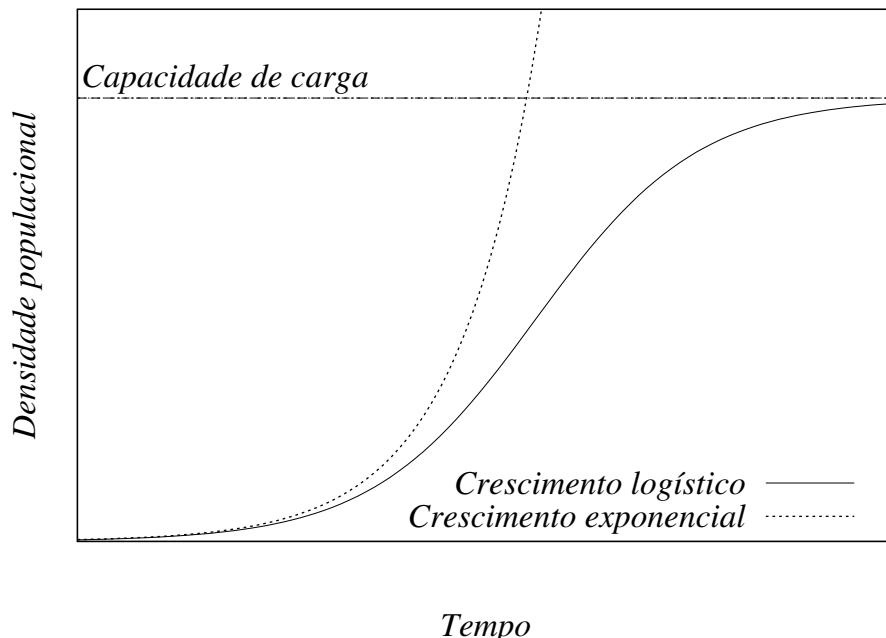


Figura 8 – Exemplos de crescimento exponencial e logístico realizadas com o auxílio do software matemático Gnuplot

3.1 RESPOSTA FUNCIONAL

Dentro de uma população, existe um comportamento de caça e ataque dos predadores. Uma resposta funcional tenta descrever como ocorre essa dinâmica, levando em conta fatores como abundância e disponibilidade de recursos. Holling (HOLLING, 1959) identificou e apontou três tipos básicos que são as respostas linear, não sinótico e sigmoide, respectivamente conhecidos como respostas funcionais do tipo Holling I, II e III.

Tipo I refere-se a crescimento linear da taxa de consumo de acordo com a densidade, isto é, de acordo com a disponibilidade de recurso haverá a predação. Este tipo de resposta não leva em conta tempo de caça e nem o tempo de processamento de alimento. É a mais simples das três propostas por Holling:

$$H_1(N) = \alpha N. \quad (18)$$

Onde N é a densidade de presas, H o funcional e α uma constante (BORGES, 2018).

O **tipo II** por sua vez, leva em conta que os predadores levam um tempo para processar o alimento que consomem. Neste tipo de funcional o tempo de ataque e o tempo de manipulação dos recursos são exclusivos, isto é, se o número de presas for abundante o número de consumo será alto. Do contrário, será baixo, pois levam mais tempo para encontrar os recursos. Matematicamente :

$$H_2 = \alpha \frac{N}{\beta + N}. \quad (19)$$

Em que β é uma constante (BORGES, 2018).

Também conhecido como curva S, o **tipo III** é similar ao tipo II porém levando em conta que a taxa de consumo aumenta rapidamente em densidades de presa intermediárias. Isto é, a busca de fontes alternativas de alimento ou ainda melhoria na capacidade de busca de recursos e deste modo reduz o tempo de caça:

$$H_3 = \alpha \frac{N^2}{\beta^2 + N^2}. \quad (20)$$

Mais tarde, em 1961, Holling propôs uma quarta resposta funcional, denominada de cupuliforme que ficou conhecida como resposta funcional do **tipo IV**. Esta leva em consideração que quando a densidade de presas é muito grande, existe um declínio no consumo pelos predadores devido mecanismos de defesas coletivo das presas:

$$H_4 = \frac{cN}{\frac{1}{s}N^2 + N + a}. \quad (21)$$

Onde a , c e s são parâmetros positivos (BORGES, 2018).

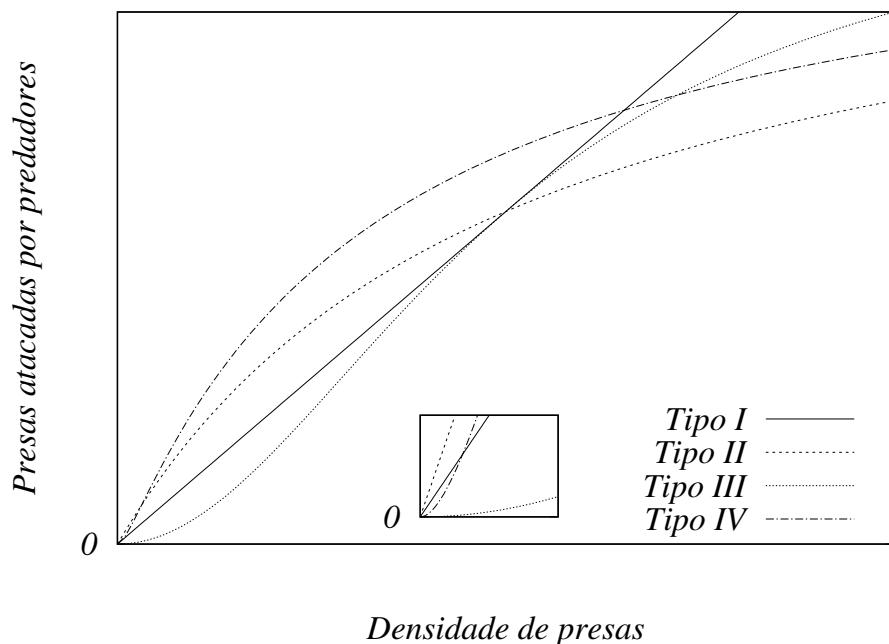


Figura 9 – Curvas dos funcionais de Holling realizadas com o auxílio do software matemático Gnuplot. No box menor consta o comportamento das curvas próximo ao zero

3.2 MODELO DE LOTKA-VOTERA

Criado individualmente e respectivamente em 1925 e 1926 por Alfred James Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940), o modelo corresponde a um par de equações diferenciais não

lineares utilizadas para descrever sistemas biológicos, no qual existe uma interação entre uma presa e um predador. Matematicamente, este é o modelo mais simples, entretanto, amplamente aplicado.

Existem três hipóteses possíveis (DANTAS, 2005) para o final da relação entre predador e presa dentro deste modelo, que é a extinção dos predadores, a extinção das presas e a coexistência de predadores e presas. Assim sendo, definindo y como sendo o número de predadores (exemplo: lince), x o número de presas (exemplo: lebre) e t o tempo.

Considerando que os predadores serão extintos no final do ciclo, assim a população de presas cresce indefinidamente, assim:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \alpha > 0 \quad (22)$$

Por outro lado, se as presas forem extintas, considerando elas como único alimento dos predadores, então os predadores serão extintos como se segue:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y, \gamma > 0 \quad (23)$$

A coexistência das populações leva a predação, isto é, quando uma presa e um predador se encontram automaticamente a presa morre e deste modo a população de presa sofre uma redução $-xy\beta$ e a população de predadores sofre um aumento de $xy\delta$. De modo geral, é possível escrever essas hipóteses do seguinte modo :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma) \end{cases} \quad (24)$$

Onde α e δ seriam respectivamente as taxas de crescimento de presas e predadores e γ e β as taxas de decrescimento de predadores e presas.

Promovendo uma separação de variáveis podemos reescrever as equações de Lotka-Volterra como (PINHEIRO, 2010):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\delta x - \gamma)}{x(\alpha - \beta y)}. \quad (25)$$

Integrando temos:

$$\int \left(\frac{\alpha - \beta y}{y} \right) dy = \int \left(\frac{\delta x - \gamma}{x} \right) dx. \quad (26)$$

Obtemos assim:

$$\alpha \ln(y) - \beta y + \gamma \ln(x) - \delta x = C. \quad (27)$$

Considerando $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, obtemos a seguinte equação implícita:

$$\ln(y) - y + \ln(x) - x = C, \quad (28)$$

onde C depende das condições iniciais x_0 e y_0 .

O espaço de fases (Figura 10) destas equações nos revela, que para diferentes condições iniciais, a variação do número de presas e de predadores é periódica.

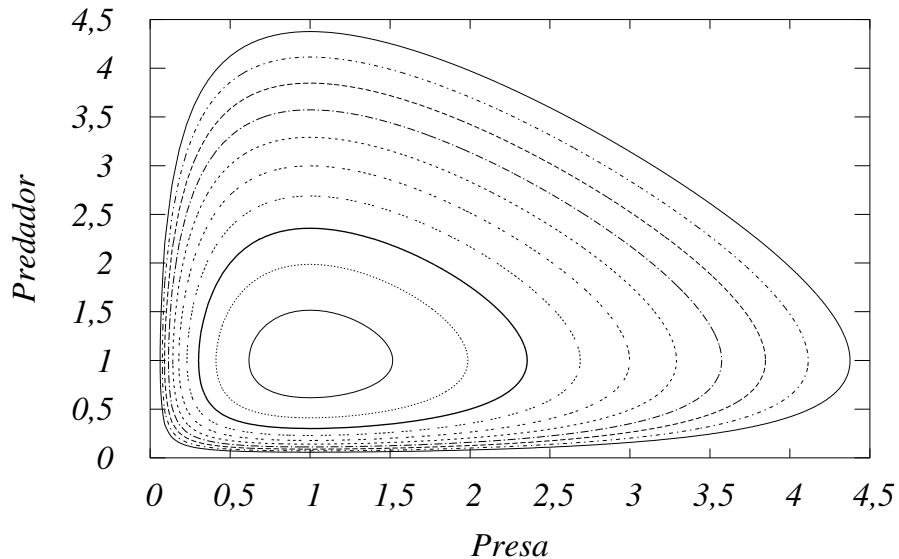


Figura 10 – Espaço de fase da equação 28 para diferentes condições iniciais realizado com o auxílio do software matemático Gnuplot

Olhando para a série temporal (Figura 11) fica mais claro a periodicidade da variação na população, além disto, pode-se observar que quando o número de predadores começa a crescer, o número de presas começa a decair, e vice-versa, o que é esperado.

De forma semelhante, pode-se definir as equações de Lotka-Volterra para a interação entre as espécies, e assim escrever um sistema de mais dimensões, partindo da equação logística:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (29)$$

onde x é a população em um determinado momento, r é a taxa de crescimento inerente a x e K é a capacidade de carga. Dada duas populações, é incluído um termo para explicar a interação entre as espécies:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = xr_1 \left(1 - \frac{x_1 + \alpha_{12}x_2}{K_1}\right) \\ \frac{dx_2}{dt} = yr_2 \left(1 - \frac{x_2 + \alpha_{21}x_1}{K_2}\right), \end{cases} \quad (30)$$

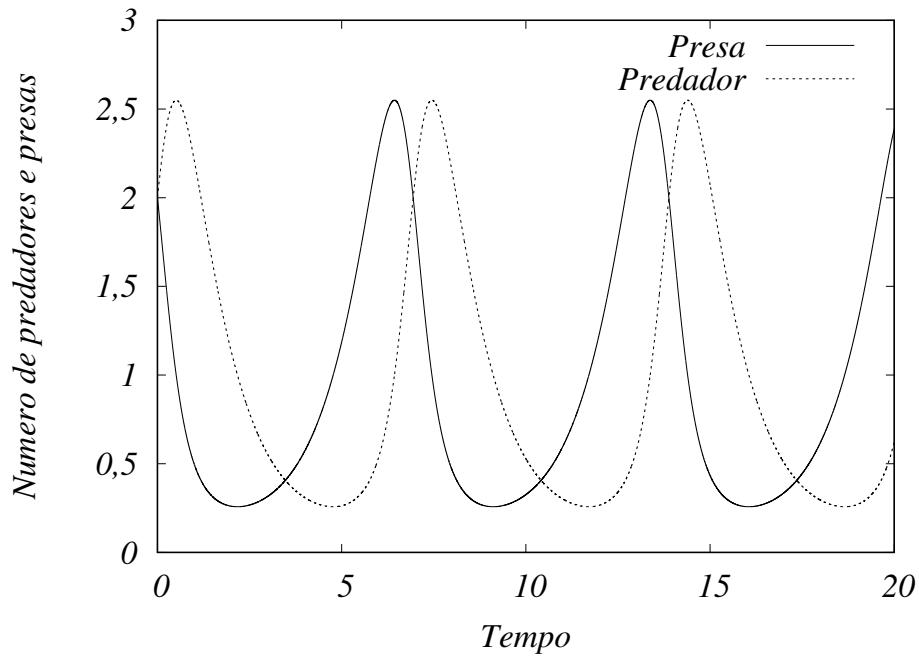


Figura 11 – Série temporal do sistema 24 realizado com o auxílio do software matemático Gnuplot

em que o coeficiente α_{12} é a interação que a espécie 1 exerce na espécie 2 e vice-versa. Generalizando para N espécies, esta equação fica:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) \quad (31)$$

4 O MODELO

O estudo de sistemas do tipo predador presa é antigo e amplo. As aplicações na ciência, saúde e nas tecnologias são as mais diversas, a saber, estudo de pragas e animais em extinção (ESPER et al., 2007), câncer (KAREVA; BEREZOVSAYA, 2015), Coronavirus (NAG, 2020). No presente trabalho, o sistema descreve a dinâmica de uma presa e dois predadores.

O modelo proposto por Susmita Sadhu (SADHU; THAKUR, 2017) é dado por três equações diferenciais não lineares acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{p_1XY}{H_1 + X} - \frac{p_2XZ}{H_2 + X}, \\ \frac{dY}{d\tau} &= \frac{b_1p_1XY}{H_1 + X} - d_1Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= \frac{b_2p_2XZ}{H_2 + X} - d_2Z - sZ^2. \end{aligned} \quad (32)$$

em que X representa a população de presas, Y e Z a população de predadores. Um dos predadores tem sua densidade dependendo da mortalidade pelo termo sZ^2 . Isto descreve uma interação, mais precisamente uma competição intraespecífica, comum a espécies territoriais. Os parâmetros r e k representam a taxa de crescimento intrínseco e a capacidade de carga de presas. p_1 é a taxa de predação per capita máxima, H_1 é a densidade de semi-saturação, isto é, $H_1 = X$ quando $p_1/2$, b_1 é a taxa de nascimento pelo consumo de Y e d_1 a taxa de mortalidade per capita de Y . Analogamente, p_2 , d_2 , e H_2 são definidos.

Realizando as seguintes mudanças de variáveis $r\tau = t$, $x = \frac{X}{k}$, $y = \frac{p_1Y}{rK}$ e $z = \frac{p_2Z}{rK}$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} r\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - \frac{Krxy}{H_1 + Kx} - \frac{Krxz}{H_2 + Kx}, \\ r^2\frac{dy}{dt} &= \frac{b_1p_1Krxy}{H_1 + Kx} - d_1ry, \\ r^2\frac{dz}{dt} &= \frac{b_2p_2Krxz}{H_2 + Kx} - d_2Krz - \frac{sKrz^2}{p_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Evidenciando x , $\frac{b_1p_1}{r}y$ e $\frac{b_2p_2}{r}z$ temos:

$$\begin{aligned} r\dot{x} &= xr \left(1 - x - \frac{Ky}{H_1 + Kx} - \frac{Kz}{H_2 + Kx}\right), \\ r^2\dot{y} &= \frac{b_1p_1}{r}y \left(\frac{Kr^2x}{H_1 + Kx} - \frac{d_1r^2}{b_1p_1}\right), \\ r^2\dot{z} &= \frac{b_2p_2}{r}z \left(\frac{Kr^2x}{H_1 + Kx} - \frac{d_2r^2K}{p_2b_2} - \frac{sKr^3}{p_2^2b_2}z^2\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Realizando agora as seguintes trocas de parâmetros $\beta_1 = \frac{H_1}{K}$, $\beta_2 = \frac{H_2}{K}$, $\zeta_1 = \frac{b_1 p_1}{r}$ e $\zeta_2 = \frac{b_2 p_2}{r}$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} r\dot{x} &= xr \left(1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} - \frac{z}{\beta_2 + x} \right), \\ r^2\dot{y} &= \zeta_1 y r^2 \left(\frac{x}{\beta_1 + x} - \frac{d_1}{b_1 p_1} \right), \\ r^2\dot{z} &= \zeta_2 z r^2 \left(\frac{x}{\beta_1 + x} - \frac{d_2 K}{p_2 b_2} - \frac{s K r}{p_2^2 b_2} z^2 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Por fim realizando a troca dos parâmetros $\frac{d_1}{b_1 p_1} = c$, $\frac{d_2}{b_2 p_2} = d$ e $\frac{s K r}{p_2^2 b_2} = h$, o sistema fica:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} - \frac{z}{\beta_2 + x} \right), \\ \dot{y} &= \zeta_1 y \left(\frac{x}{\beta_1 + x} - c \right), \\ \dot{z} &= \zeta_2 z \left(\frac{x}{\beta_2 + x} - d - h z^2 \right). \end{aligned} \quad (36)$$

com $\dot{x} = dx/dt$ e assim para \dot{y} e \dot{z} . Assumindo por simplicidade que $0 < \zeta_1, \zeta_2 \ll 1$, pode-se considerar $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$. c e d medem a razão das taxas de natalidade e mortalidade dos predadores. Assim $0 < c, d < 1$. Já β_1 e β_2 medem sua eficiência. Assume-se $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$, isto é, os predadores atingem metade da predação antes das presas atingirem a sua capacidade de carga. h mede a força da competição intraespecífica na classe de z ($h < 1$ fraca, $h > 1$ forte). Como ζ é constante e diferente de zero podemos fazer a seguinte troca de variável: $t = \zeta t$ e assim obtemos o sistema de interesse desse trabalho.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{\zeta} \left(1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} - \frac{z}{\beta_2 + x} \right), \\ \dot{y} &= y \left(\frac{x}{\beta_1 + x} - c \right), \\ \dot{z} &= z \left(\frac{x}{\beta_2 + x} - d - h z^2 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Este sistema é uma derivação do sistema de Lotka-Volterra (LOTKA, 1925) (VOLTERRA, 1926) já revisado anteriormente. Observe que existe uma semelhança entre as equações 37 e 31.

5 RESULTADOS

Como dito anteriormente, o sistema trata de dois predadores com uma presa em comum. Presumindo que a dinâmica dos predadores seja mais lenta que a das presas, realiza-se alguns estudos acerca das oscilações ecológicas. Através dos atratores e séries temporais vemos que podemos passar de momentos de pequenas oscilações para momentos de grandes oscilações através de oscilações de modo misto. Além disso, do estudo do espaço de parâmetros foi verificado que o sistema apresenta histerese para ir de um estado para outro, surgindo uma faixa multiestável e permitindo a coexistência de duas dinâmicas diferentes.

5.1 OBJETIVO

Tomando a referência de base (SADHU; THAKUR, 2017), a literatura acerca do estudo dos sistemas dinâmicos (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994), (MONTEIRO, 2011) e os estudos de sistemas do tipo predador-presa (LOTKA, 1925), (VOLTERRA, 1926), torna-se necessário apontar dois objetivos principais para este estudo: o interesse físico-matemático na presença de multiestabilidade em um sistema do tipo predador-presa; e o estudo do comportamento das espécies de acordo com os resultados físico-matemáticos.

A necessidade de um estudo biológico deste sistema surge como ferramenta para interpretar os resultados físico-matemáticos.

5.2 MATERIAIS E MÉTODOS

Todas as imagens presentes nos resultados foram reindexadas com o programa de manipulação de imagens do GNU (GIMP), afim de reduzir seu tamanho. Todos os intervalos de variáveis, parâmetros ou condições iniciais escolhidos aqui foram inicialmente baseados nos presentes na referência de base (SADHU; THAKUR, 2017), e depois, subsequentemente resultaram em outros intervalos, uma vez que estudados mais a fundo.

5.2.1 Realização de figuras atratoras e séries temporais

As figuras atratoras presentes nessa dissertação foram realizadas em Fortran(F77) utilizando um integrador Runge-Kutta de quarta ordem(RK4). Além disso, o *plot* foi realizado em Gnuplot. Para tanto foram tomados 1.000.000 pontos a um passo de integração da ordem de 10^{-5} . Entretanto, somente os últimos 200.000 passos foram imprimidos. Os atratores nada mais são que a integração das trajetórias.

As séries temporais, por sua vez, tem uma única diferença em relação aos atratores, que além das trajetórias, a variável tempo também é impressa. O tempo é acrescido de 10^{-5} a cada integração. Este valor é impresso no arquivo utilizado para realizar as figuras.

5.2.2 Efetuação de diagramas de bifurcação

Para realizar estes diagramas é utilizado um programa em *C* e começa-se definindo os parâmetros como sendo um vetor, ou seja, *Parametros*[$\zeta, \beta_1, \beta_2, c, d, h$] e reescrevendo o sistema chamando os parâmetros, por exemplo $\beta_1 = \text{parametro}[1]$, pois o contador começa em zero. Além disso as derivadas também formam um vetor, *derivada* = [$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$].

Depois da definição das variáveis realiza-se então uma análise de máximos locais, uma vez que deseja-se calcular os períodos máximos locais das variáveis. Desse modo, dentro de um ciclo *faça-enquanto* calcula-se a derivada anterior e a atual. Caso a derivada atual seja menor que zero e a multiplicação da derivada anterior pela atual também seja menor que zero, tem-se um ponto de máximo. Assim, realiza-se a integração numérica via Runge Kutta de quarta ordem usando um passo de integração de 10^{-3} .

A figura estão é processada a partir dos dados obtidos deste programa com o auxilio do software matemático Gnuplot.

Existe ainda uma técnica que foi realizada na figura 21 em que podemos visualizar o diagrama de bifurcação seguindo dois caminhos. Essa ferramenta é bastante útil quando desejamos identificar multiestabilidade. Assim fazemos dois diagramas de bifurcação, um normalmente varrendo a malha no sentido crescente e outro no sentido oposto. O que muda deste diagrama de bifurcação para o tradicional é que o intervalo do parâmetro é definido do final para o inicio, isto é, começa pelo final do diagrama e varre a malha no sentido decrescente.

5.2.3 Confecção de espaços de parâmetros

Os espaços de parâmetros são realizados em linguagem de programação Fortran. Começa -se inicializando os parâmetros, os passos e as condições iniciais. Além disso define-se os intervalos que deseja-se realizar os espaços de parâmetros e definindo o tamanho da malha. Neste caso as malhas foram de 1000X1000.

Em um segundo momento realiza-se a declaração do sistema de interesse, bem como suas derivadas parciais, uma vez que essas são utilizadas durante a integração.

Após, realiza-se a integração das equações via Runge Kutta de quarta ordem, com um passo de integração de 10^{-3} . Este passo retorna a posição de cada trajetória e a partir dai pode-se calcular a divergência ou a convergência entre elas. Aqui estamos realizando o algorítimo apresentado na figura 4, pois estamos interessados nos expoentes de Lyapunov, seguindo a equação (KANTZ, 2004).

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_i)| \quad (38)$$

Nesse caso, $f'(x_i)$ é a derivada da posição. Com os expoentes de Lyapunov em mãos, o programa realiza um processo de *sort*, que na tradução livre seria ordenação, para ordenar os expoentes de Lyapunov do maior para o menor. O programa retorna então as saídas na seguinte

ordem: o primeiro parâmetro de interesse, o segundo parâmetro de interesse, o maior expoente de Lyapunov, o segundo maior expoente de Lyapunov e o menor expoente de Lyapunov. Com isto, com o auxilio do software matemático Gnuplot, realiza-se um *plot* da figura de acordo com o que foi discutido na seção 2.6, isto é, os eixos são os parâmetros e é definido um gradiente de cor em que cada cor significa uma dinâmica (primeira coluna da tabela 1).

Neste caso, assim como foi realizado nos diagramas de bifurcação, também realizamos a técnica de seguir o atrator, que foi detalhada na seção 2.8, para obter as figuras 19 e 20.

5.2.4 Produção de bacias de atração

As bacias de atração são realizadas em fortran. O programa tem uma estrutura muito parecida com o de espaço de parâmetros, porém não há mais variação de parâmetros, agora varia-se duas condições iniciais de interesse.

Realiza-se as inicializações dos parâmetros e condições iniciais, a declaração do sistema e suas derivadas parciais e determina-se o tamanho da malha, que aqui foi de 500X500. Integra-se utilizando o integrador Runge Kutta de quarta ordem com um passo de integração de 10^{-3} e ordena-se os expoentes de Lyapunov. Frisando que estamos variando as condições iniciais e não mais os parâmetros.

Após esses passo é realizado um condicional que separa as condições iniciais em arquivos diferentes de acordo com a dinâmica exibida. Se o maior expoente de Lyapunov for positivo, imprime-se esta condição no arquivo “caos.dat”; Se ela for igual a zero, no arquivo “periódico.dat”; Se for menor que zero no arquivo “ponto fixo.dat”; E se ele for um divergente, no arquivo “divergente.dat”. A divergência é caracterizada pelo programa como valores maiores que 2000 em módulo. O zero por sua vez é caracterizado por pelo valor 0,08 em módulo.

Com esses “.dat” em mãos e o auxilio do software matemático “Xmgrace” é realizado um *plot* de cada arquivo com uma cor diferente: em vermelho caos, em preto periodicidade, em branco ponto fixo e em azul divergências.

5.3 SURTOS E COLAPSOS NA DINÂMICA PREDADOR-PRESA

Como definido anteriormente, atratores fornecem algumas respostas pertinentes ao sistema estudado. Eles definem pontualmente a dinâmica de um sistema. Em sistemas dinâmicos não lineares, os sistemas podem ser regulares ou caóticos. Assim sendo, o modelo pode apresentar periodicidade e caoticidade como se segue.

Pontualmente falando, o sistema é extremamente sensível às condições iniciais, se uma mudança ínfima das condições modifica o comportamento do sistema. De acordo com a autora do sistema (SADHU; THAKUR, 2017), inicialmente, fixa-se a razão de crescimento predador/presa $\zeta = 0,01$, e a eficiência das predações $\beta_1 = 0,50$ e $\beta_2 = 0,25$. Depois, varia-se a razão entre as taxas de natalidade e mortalidade c e d e a competição intraespecífica h .

A análise inicial da dinâmica é realizada através de atratores. Seja $c = 0,38$ e $d = 0,30$. Além disso, as condições iniciais tomadas em $x = 0,14$, $y = 0,10$ e $z = 0,15$. Toma-se dois valores de h , de acordo com as Figuras 12 e 13.

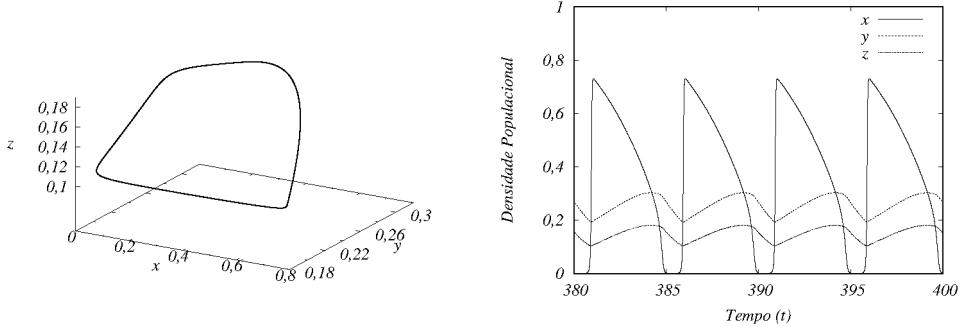


Figura 12 – Dado o valor de $h = 1,4$ se obtêm o atrator e a série temporal.

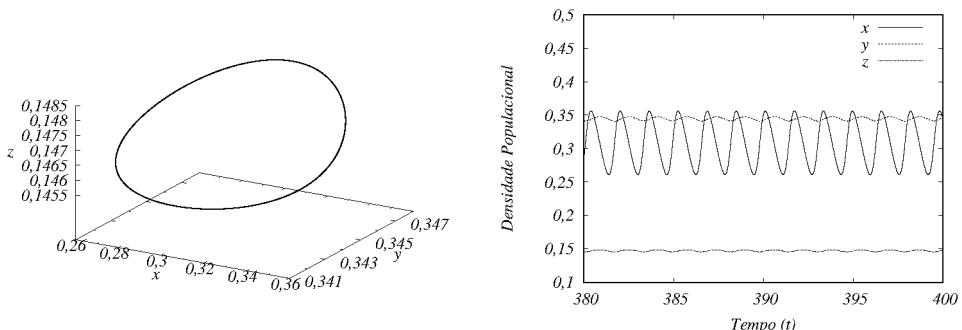


Figura 13 – Dado o valor de $h = 1,7$ se obtêm o atrator e a série temporal.

Observe que ambas as curvas são periódicas, entretanto o tipo de oscilação muda. Isto é, a figura 12 apresenta oscilação de grande amplitude (LAO), como pode-se ver na série temporal. Já a figura 13 apresenta oscilação de pequena amplitude (SAO). Os ciclos de LAO representam ecologicamente surtos e falhas periódicas.

Seja $c = 0,38$ e $d = 0,17$, toma-se outros dois valores de h muito próximos, de acordo com as Figuras 14 e 15.

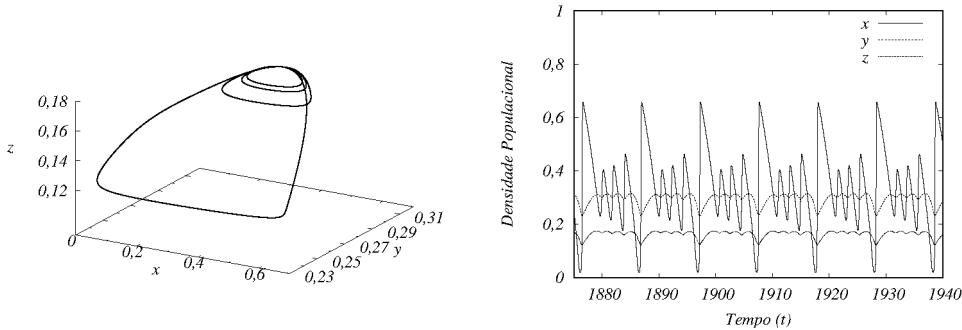


Figura 14 – Dado o valor de $h = 2,25873$ se obtêm o atrator e a série temporal.

Observe que o tempo de retorno de um surto ou colapso na figura 15 é imprevisível. Em contra partida, na figura 14, os ciclos de surtos e colapsos tem periodicidade 4. Uma pequena

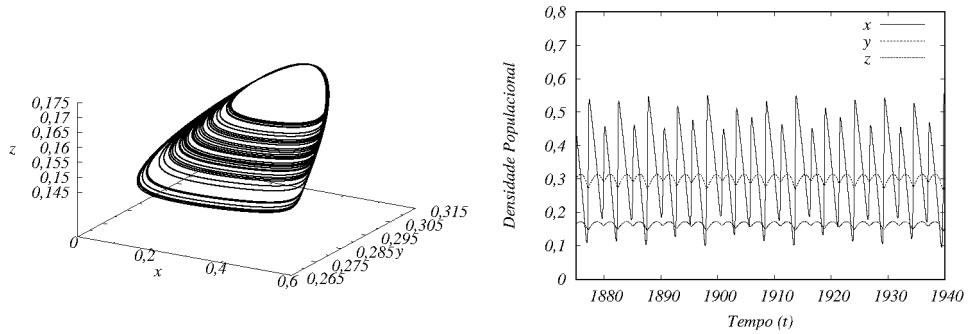


Figura 15 – Dado o valor de $h = 2,25874$ se obtêm o atrator e a série temporal.

mudança no parâmetro h leva à incerteza na dinâmica populacional de presas. Além disso, o atrator representado na figura 15 é visivelmente caótico. Esse é um estado ecologicamente desejável, uma vez que evita que as populações passem por eventos extremos de surtos.

Ainda sobre os atratores apresentados, observe a transição dada pela série temporal na figura 14. Esse comportamento de ter oscilações de grande amplitude e de pequenas amplitudes, juntos, recebe o nome de oscilações de modo misto (MMO). Os MMOs significam ecologicamente o grau de adaptação das espécies para prolongar suas sequências cíclicas de surtos e colapsos.

A figura 15 apresenta um atrator caótico de SAO que é ecologicamente desejável uma vez que, assim, surtos repentinos são evitados. Com uma pequena alteração no parâmetro h , mais especificamente na sexta casa decimal, as espécies podem sofrer surtos periódicos e colapsar (observe a figura 14). Mesmo que o atrator seja periódico e estável, por exibir MMOs ele faz com que o cenários extremos ocorram no sistema ecológico, levando a surtos de pragas, transmissão de doenças, perda de lavouras etc.

A partir dai, uma primeira conclusão é que o parâmetro que mede a interação intraespecífica (h) em z controla a explosão ou não do sistema ecológico. Mais especificadamente, a população de presas x . Controlando este parâmetro é possível a coexistência ou não das três espécies.

5.4 COEXISTÊNCIA DE DUAS DINÂMICAS DISTINTAS

Após o estudo do sistema via atratores, foram realizados alguns espaços de parâmetros a fim de encontrar alguma dinâmica interessante, ou seja, alguma estrutura conhecida da literatura ou ainda dinâmica multiestável. Nas figuras 16, temos alguns desses espaços representados. Um desses espaços de parâmetros, figura 17 chamou a atenção devido a uma faixa de periodicidade dentro de caos. Foi investigado este espaço e nenhuma das dinâmicas interessante foi encontrada. Entretanto, quando trabalhado com a figura 18, a percepção da existência de multiestabilidade, fez com que o trabalho criasse uma perspectiva até então não existente, assim, foram obtidas as figuras 19 e 20. A partir de então, foi efetuado um estudo sobre multiestabilidade em sistemas do tipo predador-presa, que ficou como o título da dissertação.

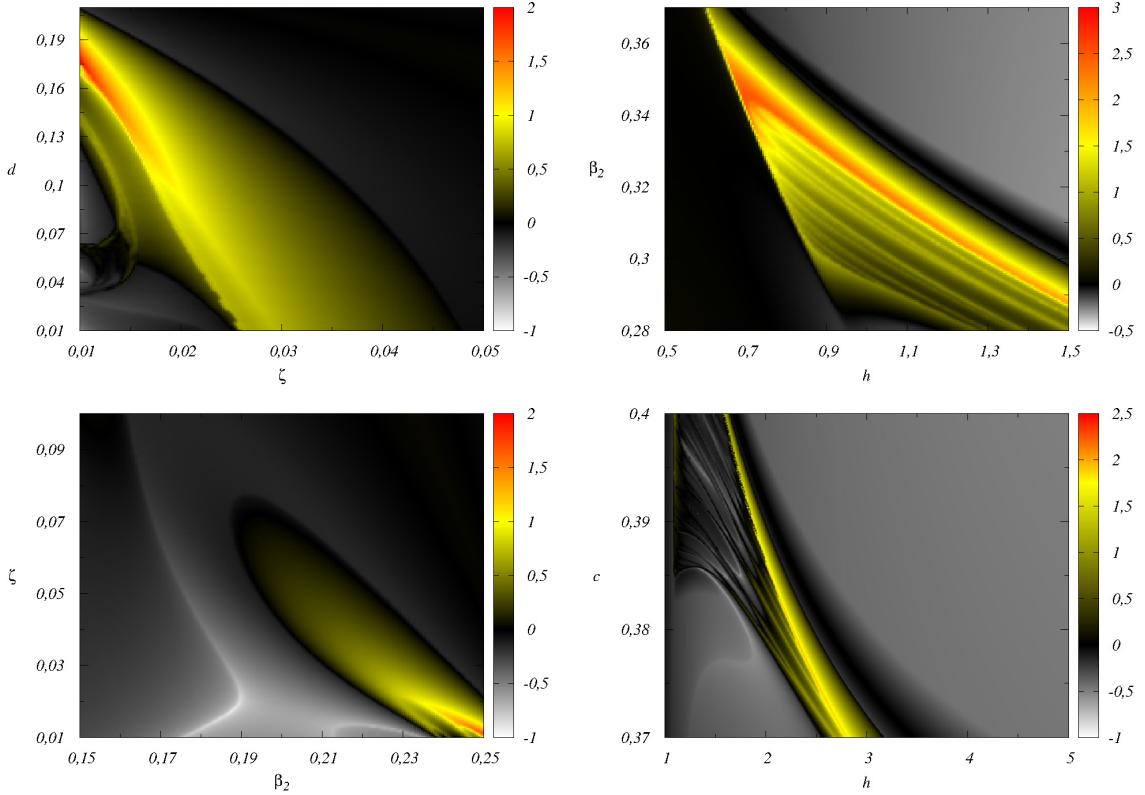


Figura 16 – Um exemplo de espaço de parâmetro realizado durante a pesquisa. Perceba que ele não demonstra nenhuma dinâmica interessante como por exemplo estruturas regulares ou multiestabilidade. Valores dos demais parâmetros utilizados para a figura da direita da primeira fileira: $\beta_1 = 0,5$, $h = 2,22634$, $\beta_2 = 0,25$ e $c = 0,38$; Para a figura da esquerda da primeira fileira: $\zeta = 0,01$, $\beta_1 = 0,5$, $c = 0,38$ e $d = 0,17$; Para a figura da direita da segunda fileira: $\beta_1 = 0,5$, $h = 2,22634$, $c = 0,38$ e $d = 0,17$; E por fim para a figura da esquerda da segunda fileira: $\zeta = 0,01$, $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 0,25$ e $d = 0,17$.

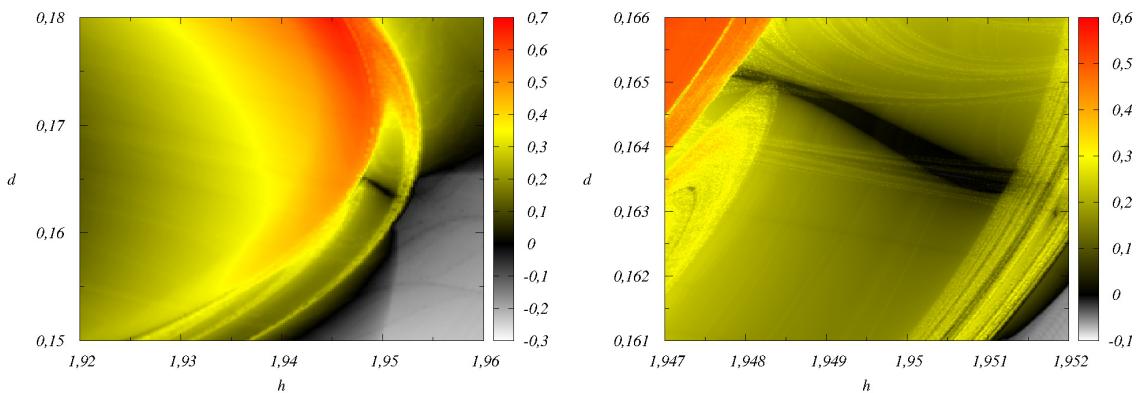


Figura 17 – Espaço de parâmetro completo e zoom da região estudada a priori e descartada uma vez que a dinâmica apresentada era pobre em detalhes, estruturas ou algo que fizesse dele um espaço de parâmetro importante. Valores dos demais parâmetros utilizados: $\zeta = 0,01$, $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 0,25$ e $c = 0,38$.

Do sistema já estudado, analisando os parâmetro d e h , isto é, a taxa de natalidade e

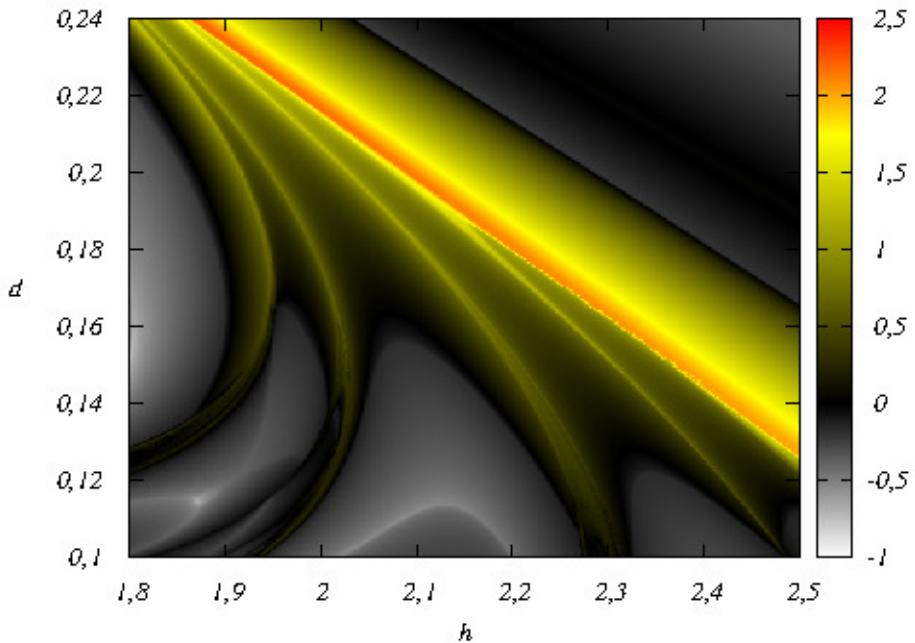


Figura 18 – Espaço de parâmetro que originou o estudo das multiestabilidade. As figuras 19 e 20 são um zoom deste espaço de parâmetro seguindo o atrator. Valores dos demais parâmetros utilizados: $\zeta = 0,01$, $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 0,25$ e $c = 0,38$.

mortalidade dos predadores e a competição intraespecífica, é possível observar a presença de duas dinâmicas diferentes. Isto se deve ao fato do sistema passar por um ciclo de histerese, isto é, seguindo o atrator, o caminho de ida e o caminho de retorno apresentam dinâmicas diferentes para os mesmos parâmetros. Considerando os parâmetros anteriores (das figuras 12, 13, 14 e 15), isto é, $\zeta = 0,01$, $\beta_1 = 0,50$, $\beta_2 = 0,25$ e $c = 0,38$, além das condições iniciais $x = 0,14$, $y = 0,10$ e $z = 0,15$, varia-se os valores de $0,00 \leq d \leq 0,15$ e $2,50 \leq h \leq 3,50$ e obtém-se os espaços de parâmetros dados pelas figuras 19 e 20.

As figuras 19 e 20 apresentam diferentes dinâmicas que podem ser corroboradas através de um diagrama de bifurcações. Para isso, será tomado uma linha imaginária em $d = 0,0296184$ (ponto tomado com o auxílio do software matemático Gnuplot) e será realizado uma varredura no intervalo de $2,5 \leq h \leq 3,5$, que é um intervalo que passa pela multiestabilidade, obtendo assim a figura 21.

Com este diagrama de bifurcação em mãos, é possível realizar uma bacia de atração deste sistema para ter a certeza que a multiestabilidade ocorre. Ela irá nos retornar os pontos dentro das condições iniciais em que um dado ponto retorna um atrator periódico, ou caótico.

Realizando uma análise gráfica das figuras 19, 20 e 21, isto é, do espaço de parâmetros e do diagrama de bifurcação, toma-se o valor dos parâmetros d e h com o auxílio do software matemático Gnuplot, ou seja, um ponto $(d, h) = (0,0296184, 3,03025)$ que contém a multiestabilidade a fim de confeccionar uma bacia de atração. Assim, obtém-se a figura 22.

Observe que a figura 22 apresenta regiões vermelhas (caóticas) e pretas (regulares). Tendo isto, pode-se realizar alguns atratores para saber como ocorre a dinâmica em cada uma

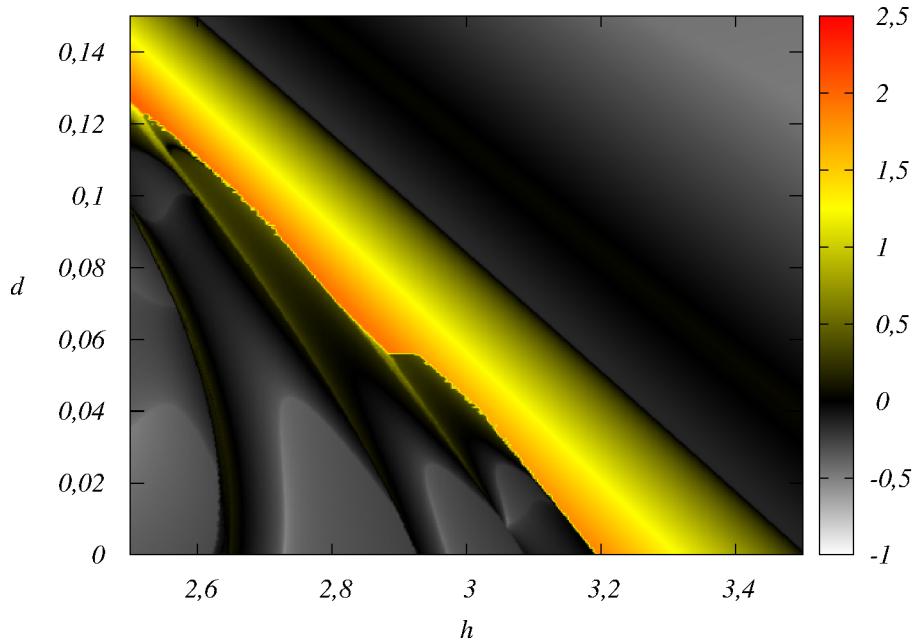


Figura 19 – Espaço de parâmetros seguindo o atrator. Varrendo a malha subindo, isto é, começando do menor valor de ambos os parâmetros até o maior valor dos mesmos. Em um ciclo de histerese esse seria o caminho indo.

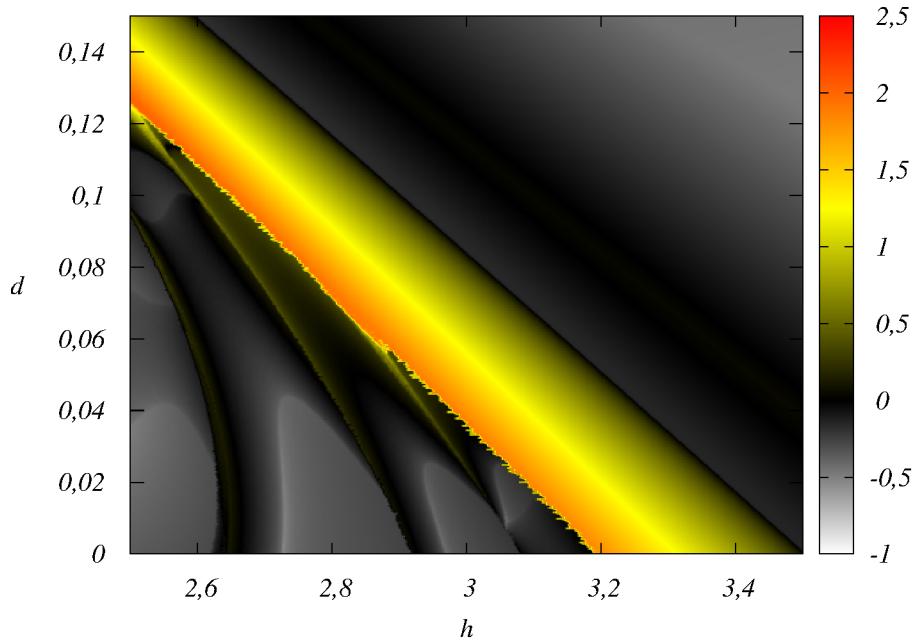


Figura 20 – Espaço de parâmetros seguindo o atrator. Varrendo a malha descendo, ou seja, começando no maior valor de ambos os parâmetros e indo até o menor valor dos mesmos. Em um ciclo de histerese esse seria o caminho voltando.

dessas regiões.

Além desse ponto, tomando mais um ponto um pouco mais acima, dentro dos espaços de parâmetros 19 e 20, ($(d, h) = (0,112839, 2,57155)$) tem-se mais algumas bacias de atração,

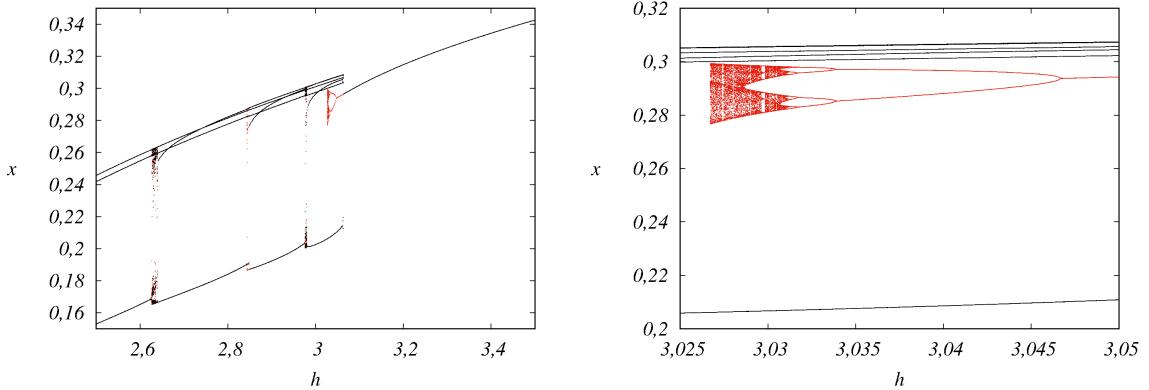


Figura 21 – À Esquerda, diagrama de bifurcação realizado em uma linha imaginária $d = 0,0296184$ dentro dos espaços de parâmetros dados pelas figuras 19 e 20 em um intervalo $2,5 \leq h \leq 3,5$. À direita, uma ampliação da região multi estável registrada pelo diagrama. Em vermelho o diagrama seguiu o atrator descendendo a malha, em preto subindo a malha.

apresentando também biestabilidade. Esses estão presentes na figura 23.

Observe que esse sistema admite duas bacias de atração, levando a um fenômeno de biesabilidade. Observe ainda que o evento ocorre em uma faixa muito estreita. Como consequência disso, as três espécies podem sofrer surtos e colapsos periódicos, ou ter um período muito longo entre surtos e colapsos referente as órbitas caóticas. Veja por exemplo, o zoom realizado dentro do diagrama de bifurcação (figura 21). Em preto temos uma dinâmica de período 5, enquanto que em vermelho temos uma região caótica. Isso pode ser visualizada pelos atratores (figura 24). Além disso, a sensibilidade desse sistema aos parâmetros é extrema. Entender como esses ciclos de histerese ocorrem é entender como a dinâmica populacional funciona. Deseja-se que as espécies coexistam exibindo pequenas flutuações (regiões caóticas), do que elas passem por surtos e colapsos (regiões periódicas).

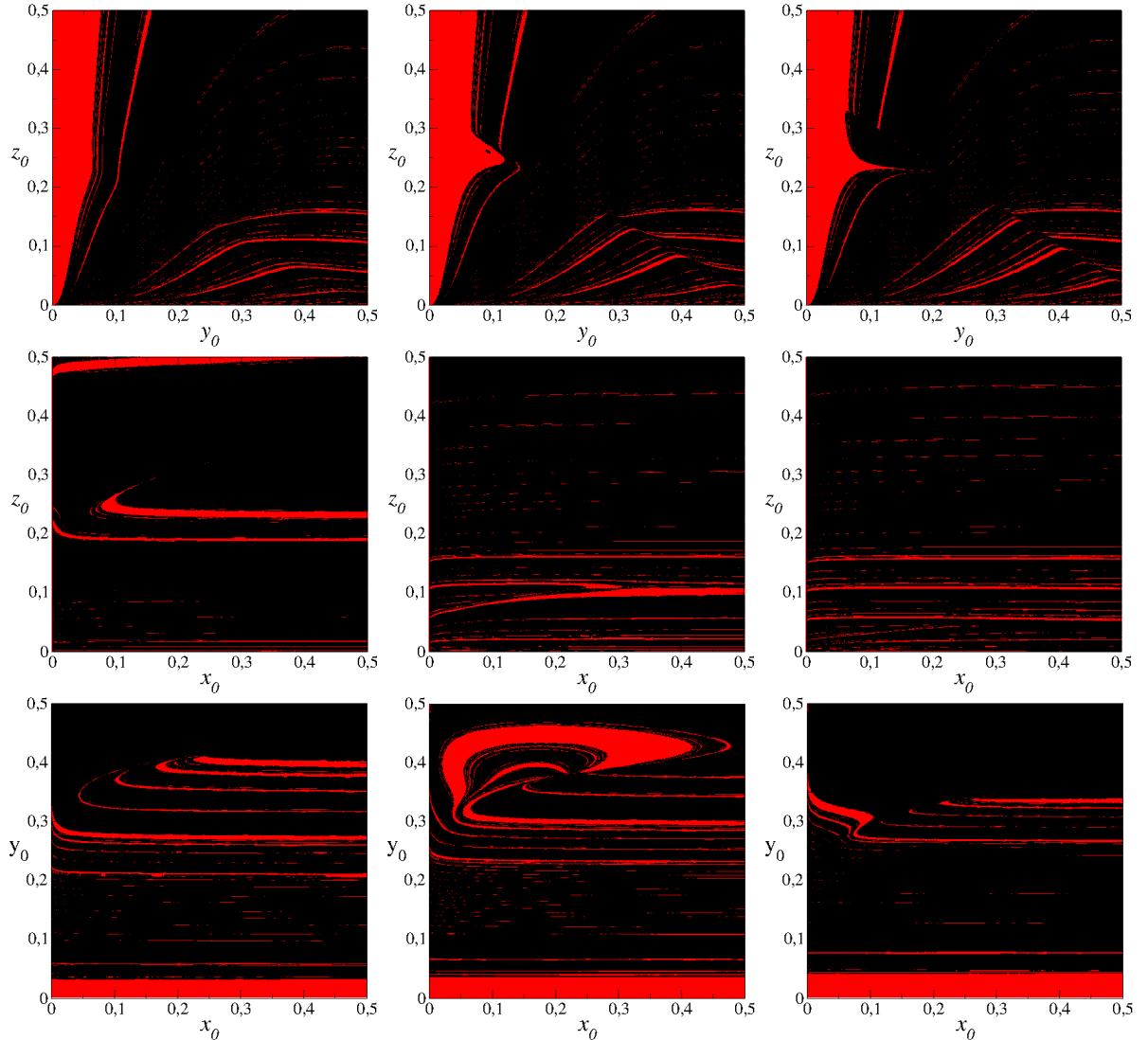


Figura 22 – Bacias de atração realizadas com os mesmos parâmetros definidos nas figuras 19 e 20. Nestes casos, tomando um ponto $(d, h) = (0,0296184, 3,03025)$ que contém a multiestabilidade, respectivamente da esquerda para a direita, na primeira fileira, os valores de condições iniciais fixas são $x_0 = 0,014$, $x_0 = 0,10$ e $x_0 = 0,20$, na segunda fileira $y_0 = 0,10$, $y_0 = 0,40$ e $y_0 = 0,50$ e na terceira e ultima fileira $z_0 = 0,10$, $z_0 = 0,12$ e $z_0 = 0,15$. Em vermelho são as regiões caóticas e em preto as regiões periódicas.

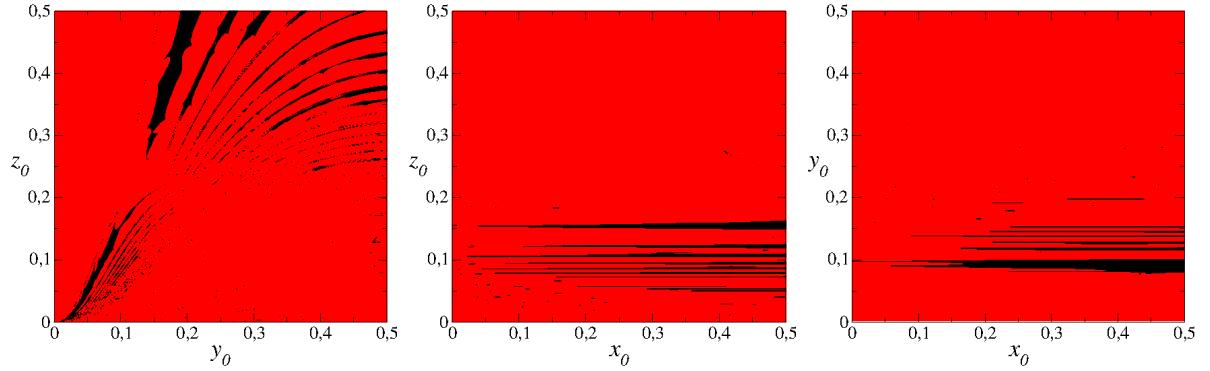


Figura 23 – Bacias de atração realizadas com os mesmos parâmetros definidos nas figuras 19 e 20. Nesses casos, tomando um ponto $(d, h) = (0,112839, 2,57155)$ que contém a multiestabilidade, respectivamente da esquerda para a direita, os valores de condições iniciais são $x_0 = 0,14$, $y_0 = 0,10$ e $z_0 = 0,15$. Em vermelho são as regiões caóticas e em preto as regiões periódicas.

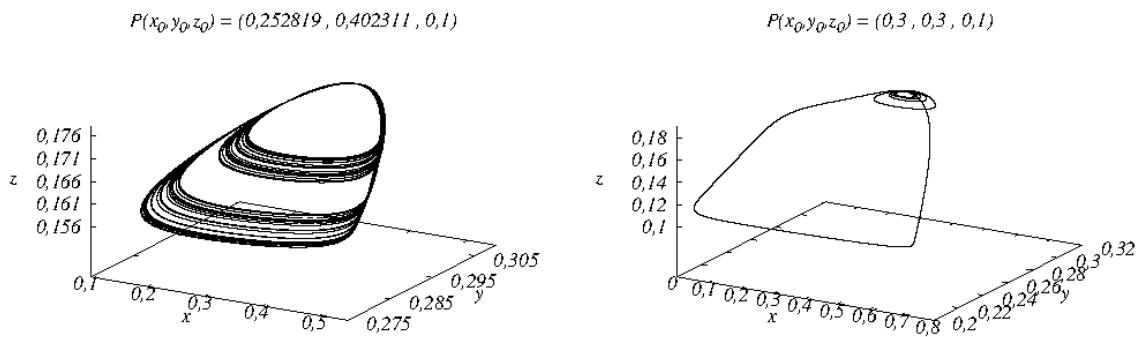


Figura 24 – Exemplos de atratores realizados com pontos retirados da bacia de atração dado pela figura 22. Na direita a representação de um atrator regular e à esquerda um caótico. Os Pontos em questão, a titulo de curiosidade, são os impressos na figura. Além disso, os atratores se repetem nas figura 23.

6 CONCLUSÕES

Inicialmente foi realizado um estudo histórico sobre a evolução dos sistemas do tipo predador presa em seguida um apanhado teórico sobre sistemas dinâmicos e ecologia das populações. A partir daí, um estudo acerca da modelagem proposto na referência de base (SADHU; THAKUR, 2017) foi concluído, e com isso chegou-se aos resultados expressados na seção 5.

O modelo analisado consistia de dois predadores com uma presa em comum, além disto, um dos predadores possuindo uma competição intraespecífica. As equações que constam o modelo são não lineares com quatro variáveis (x, y, z, t) e seis parâmetros ($\zeta, \beta_1, \beta_2, c, d, h$) (tomando como base o sistema de análise, isto é, o sistema (37)).

Supondo uma dinâmica mais lenta para os predadores, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de mortalidade dependente da densidade (d), é mostrado que as três espécies podem coexistir. Além disto, observa-se que as oscilações de baixa amplitude representam pequenas flutuações de densidade das três espécies, enquanto as oscilações de grande amplitude representam surtos repentinos. A rota entre estes dois tipos de oscilações pode ser via oscilações de modo misto, que basicamente significa que as espécies conseguem se adaptar às sequências de surtos e colapsos, ou ainda, pode ocorrer a histerese. Nesse caso temos o fenômeno da multiestabilidade.

Com tudo isto, o enfoque principal é o estudo dos parâmetros h e d uma vez que eles regem a multiestabilidade estudada. Multiestabilidade aqui nos fornece ferramental para o estudo de coexistência das espécies, uma vez que nos permite controlar regiões caóticas e regiões regulares. Regiões caóticas são ecologicamente desejáveis uma vez que elas evitam ciclos de surtos e colapsos.

O estudo de espaços de parâmetros realizados aqui amplia os estudos realizados na referência (SADHU; THAKUR, 2017), fazendo com que algumas percepções notadas como multiestabilidade sejam evidenciadas, como mostrado nas figuras 19, 20, 22, 23 e 24.

Este tipo de sistema fornece ferramentas para o controle de populações, impedindo que ocorra surtos de longa escala, que podem desencadear em pragas. Esta é uma ferramenta interessante para restauração e preservação de áreas ecológicas, introduzindo ou retirando de forma consciente alguma espécie. Além disso, é de extrema importância para a medicina, uma vez que podemos modelar um câncer como sendo um predador e o sistema imunológico uma presa, ou ainda, de um modo similar, vírus, como por exemplo o coronavírus.

REFERÊNCIAS

- ALLIGOOD, Kathleen T; SAUER, Tim D; YORKE, James A. **Chaos**. [S.l.]: Springer, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- ALMEIDA, Mauricio de. **Geografia Global**. [S.l.]: Escala Educacional, 2010. v. 2. Citado na página 10.
- BANKS, J et al. On devaney's definition of chaos. **The American Mathematical Monthly**, v. 99, n. 4, p. 332, 1992. Citado na página 17.
- BORGES, Francisco Carpegiani Medeiros. **Interação presa-predador com aprendizado**. Tese (Doutorado), 2018. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- BOYCE, William; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais ordinárias e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: LTC, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 10, 22 e 23.
- CAETANO, Marco Antonio Leonel; YONEYAMA, Takashi. A financial indicator for mid-term tendencies. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 385, n. 2, p. 609–620, 2007. Citado na página 10.
- CASIMIR, M. History of outbreaks of the australian plague locust, chortoicetes terminifera (walk.) between 1933 and 1959, and analysis of the influence of rainfall on these outbreaks. **Australian Journal of Agricultural Research**, v. 13, p. 674–700, 1962. Citado na página 10.
- CASTRO, Caio Vicenzotto de. Análise do dólar e do ibovespa pelas equações lotka-volterra. 2011. Citado na página 10.
- CHAPMAN, Royal N. Quantitative results in the prediction of insect abundance on the basis of biotic potential and environmental resistance. **Journal of Economic Entomology**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 21, n. 2, p. 349–352, 1928. Citado na página 20.
- DANTAS, M. P. Seleção natural espontânea em sistemas presa-predador com difusão. **Monografia.(Graduação em Ciência da Computação. Bacharelado em Ciência da Computação)**. Minas Gerais: Lavras, 2005. Citado na página 27.
- ESPER, Jan et al. 1200 years of regular outbreaks in alpine insects. **Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences**, The Royal Society London, v. 274, n. 1610, p. 671–679, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 30.
- FELICIO, Carolini Costa. **A dinâmica de modelos de Lorenz 5D e 6D**. Dissertação (Mestrado), 2018. Citado na página 13.
- FIEDLER-FERRARA, Nelson; PRADO, Carmen P Cintra do. **Caos: Uma introdução**. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1994. Citado 5 vezes nas páginas 13, 15, 17, 18 e 32.
- GLEICK, James. **Chaos: Making a new science**. [S.l.]: Open Road Media, 2011. Citado na página 12.
- HIRSCH, Morris W; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. **Diferencial Equations Dynamical Systems & An Introduction to Chaos**. 2. ed. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2004. v. 60. (Pure and Applied Mathematics, v. 60). Citado na página 17.

HOLLING, Crawford S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. **The Canadian Entomologist**, Cambridge University Press, v. 91, n. 7, p. 385–398, 1959. Citado na página 25.

HOLLING, Crawford Stanley. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. **The Memoirs of the Entomological Society of Canada**, Cambridge University Press, v. 97, n. S45, p. 5–60, 1965. Citado na página 10.

KANTZ, Thomas Schreiber Holger. **Nonlinear Time Series Analysis**. 2nd ed. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 33.

KAREVA, Irina; BEREZOVSAYA, Faina. Cancer immunoediting: a process driven by metabolic competition as a predator-prey-shared resource type model. **Journal of theoretical biology**, Elsevier, v. 380, p. 463–472, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 30.

KORPIMÄKI, Erkki et al. The puzzles of population cycles and outbreaks of small mammals solved. **BioScience**, American Institute of Biological Sciences, v. 54, n. 12, p. 1071–1079, 2004. Citado na página 10.

LORENZ, E.N. Deterministic nonperiodic flow. **Sci. 20 (1963) 130**, v. 141, 1963. Citado na página 11.

LOTKA, Alfred J. **Elements of Physical Biology**. [S.l.]: Williams and Wilkins Company, 1925. Citado 3 vezes nas páginas 10, 31 e 32.

LOUZOUN, Yoram; SOLOMON, Sorin. Volatility driven market in a generalized lotka-volterra formalism. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 302, n. 1-4, p. 220–233, 2001. Citado na página 10.

LYAPUNOV, Aleksandr Mikhailovich. The general problem of the stability of motion. **International journal of control**, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Citado na página 11.

MALTHUS, Thomas. **An Essay on the Principle of Population**. 1. ed. [S.l.]: J. Johnson St. Paul's Church-Yard, 1789. Citado na página 10.

MEURER, Daniel Felipe; ALBUQUERQUE, Holokx Abreu; RECH, Paulo Cesar. **Sistemas dinâmicos com variáveis complexas**. 2018. Citado na página 16.

MONTEIRO, Luiz Henrique Alvez. **Sistemas Dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 11, 13, 14, 15, 16, 17, 20 e 32.

NAG, Sayan. A mathematical model in the time of covid-19. OSF Preprints, 2020. Citado na página 30.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)**. [S.l.]: Editora Blücher, 2013. v. 394. Citado na página 11.

OTT, Ed. **Chaos in dynamical systems**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

PINHEIRO, Felipe Luís Pereira. Influência das leis de escala sobre a dinâmica de populações. 2010. Citado na página 27.

POINCARÉ, Henri. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.** [S.l.]: Gauthier-Villars et fils, 1899. v. 3. Citado na página 11.

RAFFIKOV, Marat; BALTHAZAR, José Manoel. Optimal pest control problem in population dynamics. **Computational Applied Mathematics**, v. 24, p. 65–81, 04 2005. Citado na página 10.

RECH, Paulo Cesar. **Bifurcação, multiestabilidade e sincronização em sistemas dinâmicos discretos.** Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2005. Citado na página 23.

SADHU, Susmita; THAKUR, Saikat Chakraborty. Uncertainty and predictability in population dynamics of a bitrophic ecological model: mixed-mode oscillations bistability and sensitivity to parameters. **Ecological Complexity**, Elsevier, v. 32, p. 196–208, 2017. Citado 8 vezes nas páginas 10, 11, 12, 23, 30, 32, 34 e 43.

TOWNSEND, Colin R.; BEGON, Michael; HARPER, John L. **Fundamentos em ecologia.** [S.l.]: Artmed Editora, 2009. Citado na página 24.

VERHULST, Pierre-François. A note on the law of population growth. **Biomathematics: Mathematical Demography**, Berlin, v. 6, p. 333–339, 1997. Citado na página 10.

VOLTERRA, Vito. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. **Nature**, v. 118, p. 558–560, 1926. Citado 3 vezes nas páginas 10, 31 e 32.

WIGGERS, Viniícius; RECH, Paulo Cesar. On symmetric and asymmetric van der pol-duffing oscillators. **The European Physical Journal B**, v. 91, 2018. Citado na página 22.

WOLF, Alan et al. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. Citado na página 19.

WRIGHT, D E Wright. Analysis of the development of major plagues of the australian plague locust chortoicetes terminifera (walker) using a simulation model. **Australian Journal of Ecology**, Wiley Online Library, v. 12, n. 4, p. 423–437, 1987. Citado na página 10.